جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

نظرية فضاء باناخ
وتطبيقها في الميكانيك الإحصائي

رسالة أعدّت لنيل درجة الماجستير في التحليل الرياضي

تقديم الطالب

حسّان عمار

إشراف

أ.م. د. عصام العبد الرزاق   أ.د. حميد عويّد العكله

الملخص:

لقد قمت في البداية بتقديم أهمّ التعاريف اللازمة لبناء هذا العمل مبتدأً ذلك بتعريف الفضاء الخطي، ومن ثمَّ تعريف الفضاء الخطي المنظَّم ، وبعد ذلك تقديم تعريف فضاء باناخ، ولتقديم مفهوم فضاء هيلبرت كان لا بدَّ من تقديم تعريف الجداء الداخلي، ثمَّ تلى ذلك النشر في فضاء هلبرت، ثمَّ الدالّيات الخطية والمؤثِّرات الخطية وأخيراً مفهوم الجبر.

بعد ذلك قدمت مفهوم جبر باناخ والالتفاف ، ومن ثمَّ تعريف الجبر من النوع C* C^*-**algebra** ، ومن النتائج الهامّة في هذا الصدد أذكر أنَّه من أجل C^*- **جبر** A سيكون لدينا:

١ً- التطبيق الآتي $(\bullet): \mathsf{A}\times\mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{A} \quad ; (a,b)\mapsto ab$ مستمراً.

٢ً- الالتفاف أيزومترياً.

٣ً- لدينا:
$$\|a\| = \sup_{\substack{x\in\mathsf{A}\\ \|x\|\le 1}} \|a\,x\| = \sup_{\substack{x\in\mathsf{A}\\ \|x\|\le 1}} \|x\,a\|$$

٤ً- إذا كان في A عنصر وحدة **e** فإنَّه سيكون لدينا $\mathbf{e}=\mathbf{e}^*$.

بعد ذلك قدّمت مفهوم الطيف لعنصر من جبر باناخ والذي رمز له بـ $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)$ ، ومن ثمَّ تعريف نصف قطر الطيف لعنصر والذي سنرمز له بـ $\mathsf{R}(x)$. في هذا الصدد ولدى A جبر باناخ مع عنصر وحدة **e**، فإنَّ مجموعة من النتائج الآتية قد ذكرت:

١- ليكن A جبر باناخ و $x \ni \mathsf{A}$ عنصراً ما، فعندئذ سيكون $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)$ هو مجموعة غير خالية جزئية ومترصة من C.

٢- ليكن A جبر باناخ يملك عنصر وحدة، و x عنصراً من هذا الجبر A عندئذ:

١ً- إذا كان **p** كثير حدود فإنَّ:
$$\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(\mathbf{p}(x)) = \left\{ \mathbf{p}(\lambda) \quad ; \lambda\in\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x) \right\}$$

٢ً- إذا كان $\theta\notin\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)$ فعندئذ سيكون لدينا:
$$\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \quad ; \lambda\in\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x) \right\}$$

٣- إذا كان A هو C^*- **جبر** عندئذ سيكون ما يلي مُحقَّقاً:

١ً- لدينا $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x) = \overline{\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x^*)}$.

٢ً- إذا كان u واحدياً فإنَّه سيكون $|\lambda| = 1$ من أجل كل $\lambda\in\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(u)$.

٣ً- إذا كان x مرافق لنفسه فإنَّ $\mathbf{sp}_{\mathrm{A}}\ (x)$ سيكون حقيقياً.

٤- إذا كان A هو $C^{*}-$ **جبر** عندئذ سيكون ما يلي: $\qquad \mathbf{R}(x) = \lim_{n\to\infty} \left\| x^{n} \right\|^{\frac{1}{n}}$

٥- إذا كان A جبر باناخ و $\mathrm{B} \supseteq \mathrm{A}$ جبر جزئي مغلق ويحوي عنصر الوحدة للجبر A عندئذ سيكون لدينا ما يلي محقّقاً:

$$\partial \mathbf{sp}_{\mathrm{B}}\ (x) \subseteq \mathbf{sp}_{\mathrm{A}}\ (x) \subseteq \mathbf{sp}_{\mathrm{B}}\ (x)$$

ومن ثمَّ سينتج أنَّه من أجل $x \ni \mathrm{B}$ سيكون لدينا $\mathbf{R}_{\mathrm{B}}\ (x) = \mathbf{R}_{\mathrm{A}}\ (x)$.

وكذلك إذا كان $x \ni \mathrm{B}$ و $\mathbf{sp}_{\mathrm{B}}\ (x)$ له داخلية خالية، فعندئذ سيكون:

$$\mathbf{sp}_{\mathrm{B}}\ (x) = \mathbf{sp}_{\mathrm{A}}\ (x)$$

وأخيراً قمت بتقديم أحد أهمَّ التطبيقات في الميكانيك الإحصائي Statistical Mechanics والمتمثِّلة بدراسة الحالات المتوازنة في الميكانيك الإحصائي اعتماداً على المفهوم الجبري، حيث يحاول المرء هذه الطريقة إظهار الصفات المميِّزة ويصنف الحالات المتوازنة للأنظمة غير المنتهية على أنّها دوال حالة معرفة على $C^{*}-$ **جبر** مختار بشكل مناسب، وعناصر الـ $C^{*}-$ **جبر** هنا تمثل الملحوظات الكيناميتية (الحركية) للجسيمات، وفي هذا الخصوص تلعب دوال الحالة دوراً محورياً، ومن أشهرها تلك الحالات التي توافق الحالات المتوازنة Equilibrium States لأنظمة الجسيمات التي يُعبَّر عنها بقانون جيبس الكبير والمنطلق من H فضاء هيلبرت لدوال الحالة لكل الطاقات الممكنة وكل أعداد الجسيمات لنظام منته، وبأخذ $\mathbf{H}$ مؤثِّراً هاملتونيا مترافق ذاتياً وكذلك $\mathbf{N}$ مؤثِّراً عددياً هاملتونياً عندئذ دالَّة الحالة المتوازنة (قانون جيبس الكبير) يعرّف كدالَّة $\omega_{\beta,\mu}$ فوق $\mathbf{B}(\mathrm{H})$ فضاء المؤثِّرات الخطية المحدودة على H من خلال العلاقة الآتية:

$$\omega_{\beta,\mu}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{tr}_{\mathbf{H}}\ (e^{-\beta \mathbf{K}}\ \mathbf{A})}{\mathbf{tr}_{\mathbf{H}}\ (e^{-\beta \mathbf{K}})}$$

علماً أنَّ $\mathbf{K} = \mathbf{H} - \mu \mathbf{N}$ مع $\beta, \mu \ni \mathrm{R}$ وبحيث يكون $e^{-\beta \mathbf{K}}$ مؤثِّراً من نوع صف الأثر، وأمّا $\mathbf{H}$ فهو مؤثِّر نصف محدود من الأدنى، وتكون خاصية صف الأثر له صحيحة من أجل قيم $0 < \beta$ فقط .

Abstract

In this work, I introduced the most important definitions which are necessary to construct this project with the definitions: linear space - normed linear space - Banach space- scalar product - concept of Helbert space - the diffusion in Helbert space - linear functions - linear operators and finally the concept of algebra.

After that , I introduced the concept of Banach algebra and involution ,then the definition of C*- algebra ,and some of the important results to be mentioned that for a C*- algebra A and we will have:

1- the following map is continuous:

$$(\bullet):\mathsf{A}\times\mathsf{A}\longrightarrow\mathsf{A}\qquad ;(a,b)\mapsto ab$$

2-The involution is isometrc.

3- we have :

$$\|a\| = \sup_{\substack{x\in\mathsf{A}\\ \|x\|\le 1}} \|ax\| = \sup_{\substack{x\in\mathsf{A}\\ \|x\|\le 1}} \|xa\|$$

4 - if there is an identity element $\mathbf{e}$ in A so we will have $\mathbf{e}=\mathbf{e}^{*}$.

Mor than I introduced the spectrum concept for an element from Banach algebra which its symbol is $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)$ then the definition of the spectral radius formula which we will give it the symbol $\mathsf{R}(x)$,so when Banach algebra A have an identity element $\mathbf{e}$ then the flowing result will be mentioned :

1- let A a Banach algebra, and $x\in\mathsf{A}$ then $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)$ is an unempty compact subset of C .

2- Let A Banach algebra have an identity element and x is an element of this algebra A then :

1- if $\mathbf{p}$ is a polynomial :

$$\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\left(\mathbf{p}(x)\right)=\left\{\mathbf{p}(\lambda)\quad ;\lambda\in\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)\right\}$$

2- if $\theta\notin\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}(x)$ then we will have:

$$\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \quad ; \lambda \in \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x) \right\}$$

3- if A is C*- algebra then the following will be true

i- we have $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x) = \overline{\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x^{*})}$

ii- if u is identity element then $|\lambda| = 1$ for all $\lambda \in \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (u)$.

iii- if x is a selfadjoint then $\mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x)$ is real.

4- if A is C*- algebra then we will have $\mathbf{R}(x) = \lim_{n \to \infty} \left\| x^{n} \right\|^{\frac{1}{n}}$.

5- if A is Banach algebra $\mathsf{B} \subseteq \mathsf{A}$ is closed subalgebra and contains the identity element for A then the following will be true:

$$\partial \mathbf{sp}_{\mathsf{B}}\ (x) \subseteq \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x) \subseteq \mathbf{sp}_{\mathsf{B}}\ (x)$$

and flows that for $x \in \mathsf{B}$ we will have $\mathbf{R}_{\mathsf{B}}\ (x) = \mathbf{R}_{\mathsf{A}}\ (x)$.

Also if $x \in \mathsf{B}$ and $\mathbf{sp}_{\mathsf{B}}\ (x)$ has an empty interior then:

$$\mathbf{sp}_{\mathsf{B}}\ (x) = \mathbf{sp}_{\mathsf{A}}\ (x)$$

Finally I introduced one of the most important implications in statistical mechanics which is represented by studying equilibrium states in statistical mechanics by the concept of algebra, where we try to use this way to introduce, the characteristics behavior and classified the equilibrium states for the infinity systems as states functions defined on C*- algebra selected correctly. The element of C*- algebra here represent the marked kinetic of particles. Here the state function play a vital role. One of the most famous states which go with equilibrium states for particles systems which we express them by the low Canonical GIBBS

$$\omega_{\beta,\mu}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{tr_H}\ (e^{-\beta \mathbf{K}}\ \mathbf{A})}{\mathbf{tr_H}\ (e^{-\beta \mathbf{K}})}$$