الجمهورية العربية السورية

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

# قابلية جمع متسلسلة فورييه ومرافقتها بالطريقة المصفوفية

دراسة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات البحتة

إعداد الطالبة

غنى محمد جهاد الهاشمي

إشراف الدكتور محمد عامر

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

العام الدراسي: 2016–2017 م
1437–1438 هـ

**Syrian Arab Republic**

**Al-Baath University**

**Faculty of Science**
**Department of Mathematics**

# Summability Of Fourier Series And Its Conjugate Series By Matrix Method

**Submitted to M.SC.Degree in Pure Mathematics**

**Submitted by**

**Ghina Mohammad Gehad Alhashemi**

**Supervision by**
**Dr. Mohammad Amer**

**Academic Year:** $\dfrac{2016-2017}{1437-1438}$

تحتوي الرسالة ثلاثة فصول:

**الفصل الأول:**

يتضمن تعاريف كل من متسلسلة فورييه البسيطة ومرافقتها ومتسلسلة فورييه المضاعفة ومرافقاتها الثلاث، ويحتوي على تعريف الطريقة المصفوفية والطريقة المصفوفية المضاعفة، وكذلك تعاريف لبعض طرائق قابلية الجمع الأخرى وبعض المفاهيم الأساسية.

**في الفصل الثاني:**

قمنا بدراسة قابلية جمع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)$ بالطريقة المصفوفية من خلال أربع مبرهنات:

باعتبار $f$ دالة دورية دورها $2\pi$، وقابلة للمكاملة وفق ليبيغ على المجال $[-\pi,\pi]$، وبفرض $\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$، وباعتبار $T=(\lambda_{n,k})$ مصفوفة مثلثية نظامية، عندئذٍ وعندما تتحقق شروط معينة في كل مبرهنة على حدة فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)$ تكون قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية ومجموعها $f$.

في هذا الفصل قمنا أيضاً بدراسة قابلية جمع المتسلسلة المرافقة $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)$ بالطريقة المصفوفية من خلال مبرهنتين:

بفرض $\psi(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)-f(x-t)\}$ و $\Psi(t)=\int_0^t|\psi(u)|du$

في المبرهنة الأولى: باعتبار $C=(c_{n,k})$ مصفوفة مثلثية نظامية، عندئذٍ وبتحقق شروط معينة فإن المتسلسلة المرافقة $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)$ تكون قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية ومجموعها $\bar{f}(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\cot\frac{t}{2}dt$.

المبرهنة الثانية: بفرض $T = \left(a_{n,k}\right)$ مصفوفة مثلثية نظامية غير منتهية من العناصر غير السالبة والمتزايدة حيث $k \leq n$، عندئذٍ وبتحقق شروط معينة فإن المتسلسلة المرافقة $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)$ تكون قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية ومجموعها $\bar{f}$ .

وقمنا بوضع التمهيديات اللازمة لكل مبرهنة.

كما قمنا بوضع تطبيقات حول قابلية جمع متسلسلة فورييه بالطريقة المصفوفية ووضّحنا من خلال مبرهنتين أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)$ تكون قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية التي مصفوفتها

$T = \left\{\frac{1}{k \log n}\right\}$ ومجموعها $f$ في النقطة $x$ ضمن شروط معينة.

**في الفصل الثالث:**

اعتبرنا أن $f$ دالة بالمتغيرين $u$ و$v$، دورية دورها $2\pi$ وذلك بالنسبة لكل من $u$ و$v$، وقابلة للمكاملة وفق ليبيغ في المربع $Q : [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

قمنا بدراسة قابلية جمع المتسلسلة $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} A_{m,n}(u, v)$ من خلال مبرهنة وضّحنا فيها أن هذه المتسلسلة قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة ومجموعها $f$ في النقطة

$(u, v) = (x, y)$ ضمن شروط معينة، وقمنا بوضع التمهيديات اللازمة لهذه المبرهنة.

أيضاً قمنا في هذا الفصل بدراسة قابلية جمع المتسلسلة المرافقة

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\delta_{mn} \cos mx \cos ny - \gamma_{mn} \sin mx \cos ny - \beta_{mn} \cos mx \sin ny + \alpha_{mn} \sin mx \sin ny]$$

من أجل هذه المتسلسلة قمنا بإثبات مبرهنة وضّحنا فيها أنها قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة ومجموعها $\bar{f}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \psi(s, t). \frac{1}{tan\frac{s}{2} tan\frac{t}{2}} dsdt$ ووضعنا جميع الشروط والتمهيديات اللازمة لذلك.

# Summary

This thesis contains three chapters:

**Chapter One:**

It contains definitions of Fourier series and its conjugate series, double Fourier series and its three double conjugate series, and it contains the definitions of the matrix method and the double matrix summability method. And we put definitions of some other summability methods and some basic concepts.

**In Chapter Two:**

We studied the summability of the series $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)$ by matrix method through four theorems:

Let $f$ be a periodic function with period $2\pi$, and integrable in the Lebesgue sense over $(-\pi,\pi)$.
We write $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, and let $T = (\lambda_{n,k})$ be a regular triangular matrix, when certain conditions are satisfied in every theorem, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)$ will be summable by matrix method to $f$.

In this chapter, we also studied the summability of the series $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)$ by matrix method in two theorems:

We write $\psi(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) - f(x-t)\}$ , $\Psi(t) = \int_0^t |\psi(u)| du$

In the first theorem: let $C = (c_{n,k})$ be a regular triangular matrix, when certain conditions are satisfied, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)$ will be summable by matrix method to $\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\, cot\frac{t}{2}\, dt$.

The second theorem: Let $T = (a_{n,k})$ be an infinite regular triangular matrix such that the elements $a_{n,k}$ are non-negative and non-decreasing with

$k \leq n$, when certain conditions are satisfied, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)$

will be summable by matrix method to $\bar{f}$.

And we put necessary lemmas for each theorem.

We also put applications for summability of fourier series by matrix method and explained through two theorems that the series $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)$ is summable by matrix method which its matrix is $T = \left\{\frac{1}{k \log n}\right\}$ to $f$ at point $x$ within certain conditions.

**In Chapter Three:**

Let $f$ be a function of two variables $u, v$, periodic with respect to $u$ and with respect to $v$, in each case with period $2\pi$, and summable in the square
$Q : [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.
We studied the summability of the series $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} A_{m,n}(u, v)$ through theorem and we explained that this series is summable by double matrix summability to $f$ at the point $(u, v) = (x, y)$ within a certain conditions, and we put the necessary lemmas for this theorem.

We also studied in this chapter summability of the series

$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\delta_{mn} \cos mx \cos ny - \gamma_{mn} \sin mx \cos ny - \beta_{mn} \cos mx \sin ny + \alpha_{mn} \sin mx \sin ny]$

For this series we proved a theorem explaining that it is summable by double matrix summability to $\bar{f}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \psi(s, t). \frac{1}{\tan\frac{s}{2} \tan\frac{t}{2}} dsdt$ and we put all the necessary conditions and lemmas for this theorem.