جامعة البعث
كلية العلــوم
قسم الرياضيات

رسالة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات – باختصاص تحليل رياضي

إعداد الطالب

حبيب عيسى

بعنوان

فضاءات سوبوليف من مراتب غير صحيحة

Sobolev Spaces of Non-Integer Order

إشراف

أ.د إبراهيم إبراهيم

العام الدراسي
٢٠١٢-٢٠١٣ م
1433-1434هـ

جامعة البعث
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

Sobolev Spaces of Non-Integer Order

Dissertation for m.sc degree in mathematical analysis

Submitted by

Habib Issa

Supervised by

Prof. Ibrahim Ibrahim

العام الدراسي
٢٠١٢-٢٠١٣ م
1433-1434هـ

جامعة البعث
كلية العلــوم
قسم الرياضيات

فضاءات سوبوليف من مراتب غير صحيحة
Sobolev Spaces of Non-Integer Order

بإشراف الاستاذ الدكتور: إبراهيم إبراهيم

إعداد طالب الماجستير: حبيب عيسى

بدأت نظرية سوبوليف في ثلاثينات القرن العشرين بعد أن أوجد سوبوليف المشتقات المعممة والتوزيعات وتم تشكيل فضاءات سوبوليف من مراتب صحيحة اهتم العديد من علماء الرياضيات والفيزياء بهذه الانجازات وأخذوا بتطوير النظريات المتعلقة بذلك كما تم تعميم فضاءات سوبوليف من أجل مراتب غير صحيحة ومن أوائل من قام بالتعميم العلم Slobodeckii ، لذلك تسمى فضاءات سوبوليف من مراتب غير صحيحة بفضاءات Sobolev-Slobodeckii وقد تم تشكيلها ودراستها بعدة طرق منها : الطريقة الكلاسيكية (وهي التي سنعتمدها في هذه الرسالة) استخدام نظرية الاستيفاء (InterpolationTheory) ولم نتطرق لهذه الطريقة لأنها تحتاج لمفاهيم تقع خارج نطاق دراستنا .

تتألف هذه الرسالة من خمسة فصول رئيسية

في الفصل الأول ذكرنا بعض المفاهيم الأساسية من التحليل الدالي والتي ستفيدنا في بعض نقاط الدراسة ومنها: المجموعات المتراصّة والمؤثرات و الداليات و الطمر المستمر

ثم ذكرنا الخواص الهندسية للمجال Ω ومنها خاصة القطعة المستقيمة و خاصةالمخروط

وفي **الفصل الثاني** درسنا المفاهيم الأساسيّة المتعلقة بالتوزيعات والمشتقات الضعيفة وأهم نتائجها التي تخدم دراستنا، ومنها: فضاء دوال الاختبار $\mathrm{D}(\Omega)$ والدوال القابلة و الفضاء الثنوي (فضاء التوزيعات و $S(\mathbb{R}^n)$ و المشتقات التوزيعية والفضاءات $L^p(\Omega)$ للمكاملة محلياً و الفضاءات

الفصل الثالث فضاءات سوبوليف من مراتب صحيحة حيث عرفنا فضاءات سوبوليف: $H^{m,p}(\Omega)$ ، $W^{m,p}(\Omega)$ ، $W_0{}^{m,p}(\Omega)$ وأثبتنا أن $W^{\mathrm{m,p}}(\Omega)$ فضاء باناخ مع النظيم، كما أنّ $W^{\mathrm{m,2}}(\Omega)$ فضاء هِلبرت مع الجداء الداخلي

العام الدراسي
٢٠١٢-٢٠١٣ م
1433-1434هـ

جامعة البعث
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

$$\langle u.v\rangle_m = \sum_{0\le|\alpha|\le m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle \quad ; \quad u.v \in W^{m,2}(\Omega) \qquad (3.2.3)$$

حيث هنا $\langle u.v\rangle = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$.$m \in Z^+$ و $1 \le p \le \infty$

ومحدب بانتظام من أجل $(1 \le p < \infty)$ قابل للفصل ومحدب من أجل $W^{m,p}(\Omega)$ كما أثبتنا أن $(1 < p < \infty)$.

قابل للفصل وانعكاسي من أجل $W^{-m,p'}(\Omega)$ و وجدنا أن $W^{-m,p'}(\Omega)$ ثم درسنا الثنوية و الفضاءات $1 < p < \infty$.

ووجدنا تعميم لمتراجحة هولدر في فضاءات سوبوليف:

$$|\langle u, v\rangle| \le \|u\|_{m,p} . \|v\|_{-m,p'} \qquad (3.2.5)$$

وجدنا أن **Ω** ثم درسنا في الفقر ٣.٣ التقريب بالدوال الملساء على

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega) \qquad ; p < \infty$$

وجدنا أن $\mathbb{R}^n$ وكذلك في الفقرة ٣.٤ التقريب بالدوال الملساء على

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

في $C_0^\infty(\Omega)$ أما الشروط حتى تتحقق المساواة السابقة فكانت في الفقرة ٣.٥ التقريب بالدوال من المبرهنتين التاليتين :

عندئذ: $1 \le m$ ٣.٥.٢ مبرهنة : ليكن

قطبي. Ω^c : (m, p') فإنَّ $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$ إذا كان *1*.

قطبي $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$ فيكون (m, p') قطبي ، وَ $(1, p)\Omega^c$ إذا كان *2*.

يكون $p \ge 2$ و $m \ge 1$ ٣.٥.٣ مبرهنة: من أجل

قطبية- (m, p'): Ω^c إذا وفقط إذا كانت $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$

جامعة البعث

كلية العلـــوم

قسم الرياضيات

أما في الفصل الرابع فكان الهدف من دراستنا هو فضاءات سوبوليف من مراتب غير صحيحة $W^{s,2}$ و $W_0^{s,2}$ حيث أن s عدد حقيقي درسناها وأثبتنا تمامها وأوجدنا المجموعات الكثيفة فيها وتمت مقارنتها بالفضاءات H^s التي تتشكل بالاعتماد على تحويلات فورييه كما درسنا مبرهنات الطمر المستمر لهذه الفضاءات كالتالي. وأهم ما توصلنا اليه كان في المبرهنات التالية :

مبرهنة ٤.١.١ : $W^{s,2}(\Omega)$ فضاء هلبرت فصول.

مبرهنة ٤.٢.١: مجموعة الدوال $f \in W^{s,2}(\Omega)$ التي دعاماتها محدودة تكون كثيفة في $W^{s,2}(\Omega)$

مبرهنة ٤.٢.٢: مجموعة كل الدوال $f \in W^{s,2}(\Omega)$ التي دعاماتها متراصّة ومحتواه في Ω تشكل مجموعة كثيفة في $W_0^{s,2}(\Omega)$ أي أنّ :

$$W_0^{s,2}(\Omega) = \overline{\{f \in W^{s,2}(\Omega) \ : supp(f) \subset\subset \Omega\}}^{W^{s,2}(\Omega)}$$

نتيجة ٤.٢.١: يكون $W_0^{s,2}(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ من أجل أي s .

مبرهنة ٤.٢.٤ : المجموعة $W^{s,2}(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$ كثيفة في $W^{s,2}(\Omega)$.

مبرهنة ٤.٢.٥ : إذا كان Ω يحقق خاصّة القطعة المستقيمة، عندئذٍ مجموعة كل مقصورات الدوال الموجودة في $D(\mathbb{R}^n)$ على Ω تشكل مجموعة كثيفة في $W^{s,2}(\Omega)$ وبالتالي:

$$W^{s,2}(\Omega) = \overline{D(\mathbb{R}^n)|_{\Omega}}^{W^{s,2}(\Omega)}$$

مبرهنة ٤.٢.٦ : إذا كان Ω يحقق خاصّة القطعة المستقيمة فإنّ الفضاء $W_0^{s,2}(\Omega)$ يتألف من مقصورات الدوال الموجودة في $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ التي دعاماتها موجودة في $\bar{\Omega}$:

$$W_0^{s,2}(\Omega) = \{f \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n) : supp(f) \subset \bar{\Omega}\}$$

مبرهنة ٤.٣.١: $D(\mathbb{R}^n)$ كثيفة في $H^s(\mathbb{R}^n)$ من أجل $s \in \mathbb{R}$

مبرهنة ٤.٣.٣: $H^s(\Omega)$ فضاء تام (وبالتالي فضاء باناخ).

تمهيدية ٤.٣.١: مقصورات دوال $D(\mathbb{R}^n)$ على Ω تشكل مجموعة كثيفة في $H^s(\Omega)$

العام الدراسي

٢٠١٢-٢٠١٣ م

1433-1434هـ

جامعة البعث
كلية العلــوم
قسم الرياضيات

حيث $F_{\Omega} : W^{s,2}(\Omega) \to W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ ٤.٣.٤ مبرهنة: إذا وجد مؤثر تمديد مستمر
فيكون $0 \leq s$

$$H^{s}(\Omega) \cong W^{s,2}(\Omega)$$

٤.٤ الطمر المستمر (*Continuous Embedding*)

تصح الطمور التالية: $s_1 \geq s_2$ ٤.٤.١ مبرهنة: من أجل

حيث $R \ni s_1, s_2$ $H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ -١

كيفي .Ω و $R \ni s_1, s_2$ حيث $H^{s_1}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_2}(\Omega)$ -٢

كيفي .Ω و $R \ni s_1, s_2$ حيث $H_0^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H_0^{s_1}(\Omega)$ -٣

كيفي .Ω و $R_+ \ni s_1, s_2$ حيث $W_0^{s_1,2}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{s_2,2}(\Omega)$ -٤

كيفي .Ω و $N \ni s_1, s_2$ حيث $W^{s_1,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{s_2,2}(\Omega)$ -٥

يحقق الخاصة التالية: Ω و $R_+ \ni s_1, s_2$ حيث $W^{s_1,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{s_2,2}(\Omega)$ -٦

i=1,2. حيث $F_{\Omega}^{s_i} : W_2^{s_i}(\Omega) \hookrightarrow W_2^{s_i}(\mathbb{R}^n)$ يوجد مؤثرا تمديد مستمران

خاصّة القطعة المستقيمة و خاصة المخروط فإنّه من Ω ٤.٤.٢ مبرهنة (تمهيدية سوبوليف) : إذا حقق
دوال مستمرة $W^{s,2}(\Omega)$ تكون عناصر $s \in N$, $s > \frac{n}{2}$, أجل

$W^{s,2}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ كما أن $\overline{\Omega}$ ومحدودة على

مستمرة - $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ تكون دوال الفضاء $s \in \mathbb{R}$ ، $s > \frac{n}{2}$ ٤.٤.٣ مبرهنة (سوبوليف): من أجل
كما أنّ $C^0(\mathbb{R}^n)$ قياسها صفر- وتنتمي للفضاء $\mathbb{R}^n$ باستثناء مجموعة جزئية من

$$W^{s,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}^n) \qquad (4.4.12)$$

وفي **الفصل الخامس** درسنا بعض المسائل التطبيقية على فضاءات سوبوليف حيث أثبتنا أن لها حل وحيد في هذه الفضاءات أما ايجاد هذه الحلول فيكون بطرق عددية.

العام الدراسي
٢٠١٢-٢٠١٣ م
1433-1434هـ

جامعة البعث
كلية العلـــوم
قسم الرياضيات

Sobolev Spaces of non-Integer Order

Prof : Ibrahim Ibrahim

Student: Habib Issa

The theorem of Sobolev Spaces had started in the 1930s after he found distributions and weak derivations . many mathematician and physicists developed this theorem which solve many problems in partial differential equations.

Sobolev spaces had structured by a number of methods such as the traditional method , which Sobolev followed himself, and the integral –complex interpolation method , that many mathematician studied like (Peter , Calderon, Lion) As we know Sobolev Spaces $W^{\mathrm{m,p}}(\Omega)$ is a special kind of Banach Spaces consisting of distributions , which all together with its derivatives of order m belong to the Lebesgue Spaces $L_p(\Omega)$.

This search consisting five chapters:

Chapter 1 remains a potpourri of standard topics from real and functional analysis,included, mainly without proofs, because they provide a necessary background for what follows.

Chapter 2 on the Lebesgue Spaces $L^p(\Omega)$ and Schwartz distributions that will be needed in the rest of the book. It provides, in addition to standard results about these spaces, a brief treatment of mixed-norm $L\ p$ spaces, weak-L p spaces, all of which will be used in a new treatment of the Sobolev Spaces.

Chapter 3 provides the basic definitions and properties of the Sobolev spaces of integer order m :$W^{\mathrm{m,p}}(\Omega)$ and $H^{\mathrm{m,p}}(\Omega)$,$W_0{}^{\mathrm{m,p}}(\Omega)$.

Chapter 4 we studied Sobolev spaces of no-integer order $W^{\mathrm{s,2}}(\Omega)$ where s is fractional order, proved the completeness of them, determined the dense sets in

العام الدراسي
٢٠١٢-٢٠١٣ م
1433-1434هـ

them, compare them by H^s spaces which structured by using Fourier Transformation , and studied the Embedding theorem in these spaces.

Chapter 5 we solved some problems in Sobolev Spaces like ….

Our study was concerned in the fourth Chapter , where we find:

4.2.1 Theorem: $W^{s,2}(\Omega)$ is completness

4.2.1 Theorem The set of All functions $f \in W^{s,2}(\Omega)$ whose support bounded , is dense in $W^{s,2}(\Omega)$

4.2.2 Theorem The set of All functions $f \in W^{s,2}(\Omega)$ which has compact support contained in Ω , is dense in $W_0^{s,2}(\Omega)$

$$W_0^{s,2}(\Omega) = \overline{\{f \in W^{s,2}(\Omega) \ : supp(f) \subset\subset \Omega\}}^{W^{s,2}(\Omega)}$$

٤.٢.٣ *theorem* :$W_0^{0,2}(\Omega) = W^{0,2}(\Omega) = L^2(\Omega)$ *(or* $D(\Omega)$ dense in $L^2(\Omega)$*)*

٤.٢.١ conclusions: $W_0^{s,2}(\mathbb{R}^n) = W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$;∀ s .

٤.٢.٤ *theorem:* $W^{s,2}(\Omega) \cap \mathcal{E}(\Omega)$ dense in $W^{s,2}(\Omega)$.

٤.٢.٥ *theorem:* if **Ω** has The Segment Condition , then the set of restrictions $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$of functions in Ωis dense in $W^{s,2}(\Omega)$:

$$W^{s,2}(\Omega) = \overline{D(\mathbb{R}^n)|_\Omega}^{W^{s,2}(\Omega)}$$

٤.٢.6 theorem if **Ω** has The Segment Condition , then $W_0^{s,2}(\Omega)$ consisting of the set of restrictions of $\varphi \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ and its support exist in $\bar{\Omega}$.

$$W_0^{s,2}(\Omega) = \{f \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n) : supp(f) \subset \bar{\Omega}\}$$

٤.3.3 theorem $H^s(\Omega)$ is completeness

٤.3.4 theorem if the extensions function exist $F_\Omega : W^{s,2}(\Omega) \to W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ where ٠ $\le$ s then :

$$H^s(\Omega) \cong W^{s,2}(\Omega)$$

٤.4.1 theorem***(Continuous Embedding)*** : for $s_1 \le s_2$:

(1) $H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ where R $\in s_1, s_2$

(2) $H^{s_1}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_2}(\Omega)$ where R $\in s_1, s_2 . \forall\ \Omega$

(3) $H_0^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H_0^{s_1}(\Omega)$ where R $\in s_1, s_2 . \forall\ \Omega$

(4) $W_0^{s_1,2}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{s_2,2}(\Omega)$ where $R_+ \in s_1, s_2 . \forall\ \Omega$

(5) $W^{s_1,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{s_2,2}(\Omega)$ where $s_1, s_2 \in$ N $, \forall \Omega$

(6) $W^{s_1,2}(\Omega) \hookrightarrow W^{s_2,2}(\Omega)$ where $R_+ \ni s_1, s_2$, Ω satisfy extensions property.

٤.4.2 theorem (Sobolev lemma) if Ω satisfy Segment and cone Condition then $W^{s,2}(\Omega)$,where , s$>\frac{n}{2}$ s ∈ N,consisting of continuous and bounded function on $\overline{\Omega}$ and

$$W^{s,2}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$$

٤.4.2 theorem (Sobolev theorem) *for* s $> \frac{n}{2}$ *the function of* $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ *is continuous and belong to* $C^0(\mathbb{R}^n)$ *and*

$$W^{s,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}^n)$$

In chapter 5 , we studied some applied problems in sobolev spaces proving that they have a unique solution in these spaces, while getting these solutions could be achieved by numerical methods.