الجمهورية العربية السورية

وزارة التعليم العالي

جامعة البعث

كلية العلوم – قسم الرياضيات

دراسة في المجموعات والأغلفة والدوال المحدبة

Study In Convex Sets, Hulls And Functions

رسالة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات

إعداد الطالب

علي تركي الهندي

إشراف

أ.د طالب غريبة

للعام الدراسي

1434-1433

2013-2012

ALBAATH UNIVERSITY

FACULTY OF SCIENCE

MATHEMATICAL DEPARTMENT

Study in convex Sets ,hulls and Functions

Submitted to M.Sc. Degree in mathematic

SUBMITTED BY

ALI TURKY ALHINDY

SUPERVISOR

Dr.Talib Gariba

1433-1434
2012-2013

الملخص

تتألف الرسالة من مقدمة وثلاثة فصول هي الآتية :

أولاً: المجموعات المحدبة (convex sets)

تعريف(1−1):

نقول عن مجموعة في الفضاء الخطي المتجهي (الإقليدي $\mathbb{R}^n$) إنها محدَبة إذا كانت تحوي القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين من نقاطها .

تعريف (1−2):

ليكن لدينا $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V$ عنصرين من الفضاء الخطي المتجهيV . إن المجموعة المكونة من جميع التركيبات الخطية الآتية :

$$\{\omega_\lambda \in V \ : \omega_\lambda = (1-\lambda)\boldsymbol{u} + \lambda\boldsymbol{v}, 0 \le \lambda \le 1\}$$

تتألف من جميع نقاط القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين .

مبرهنة (1− 1) :

أي تقاطع لمجموعات محدَبة هو مجموعة محدَبة .

مبرهنة (1−2) :

إذا كانت $C \subset \mathbb{R}^n$ مجموعة محدبة فإن لصاقتها $\boldsymbol{c\ell}$ (C) هي أيضاً مجموعة محدبة.

مبرهنة (1−3) :

لتكن $\mathcal{C}$ مجموعة جزئية محدبة من $\mathbb{R}^n$ ولتكن $x_1, \dots, x_k$ متجهات في $\mathcal{C}$، أي تركيب محدب لـ $x_1, \dots, x_k$ هو أيضاً في $\mathcal{C}$ بحيث:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ x_i = 1 \ \ ; 0 \le \lambda_i \ \le 1$$

مبرهنة (1−4) :

إذا كانت $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ محدَبة عندئذٍ المجموع المباشر $\mathcal{C} + \mathcal{D}$ محدًب .

مبرهنة $(5-1)$:

إذا كانت $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ مجموعة محدَّبة مغلقة (غير خالية) و $\boldsymbol{x}^* \notin \mathcal{C}$. فإنه يوجد متجه $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$ وثابت $\boldsymbol{b}$ ، بحيث :

$\mathbf{1}): \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x}^* < \boldsymbol{b}$

$\mathbf{2}): \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\mathcal{Z}} \geq \boldsymbol{b} \,; \forall\, \boldsymbol{\mathcal{Z}} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$

المبرهنة $(6-1)$:

لتكن $\boldsymbol{\mathcal{C}} , \boldsymbol{\mathcal{D}}$ مجموعتين جزئيتين محدّبتين من $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$، بحيث$\boldsymbol{\mathcal{C}}$ مغلقة و $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ متراصة ، إذا كان$\boldsymbol{\mathcal{C}} \cap \boldsymbol{\mathcal{D}}$ خالياً.عندئذٍ يوجد متجه غير صفري $\boldsymbol{p}$ وعدد$\boldsymbol{b}$ ، بحيث أن $\boldsymbol{p}.\boldsymbol{x}<b$ من أجل أي$\boldsymbol{x}$ من $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ و $\boldsymbol{p}.\boldsymbol{y} < b$ من أجل كل $\boldsymbol{y}$ من $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

مبرهنة $(7-1)$:

لتكن $\boldsymbol{\mathcal{C}} , \boldsymbol{\mathcal{D}}$ مجموعتين محدَبتين من$\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\boldsymbol{n}}$ و $\boldsymbol{int}\, \boldsymbol{\mathcal{D}} \neq \emptyset$ ، وليكن$\boldsymbol{\mathcal{C}} \cap \boldsymbol{int}\, \boldsymbol{\mathcal{D}} = \emptyset$ فإنه يوجد متجه $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$ وعدد$\boldsymbol{b}$ من أجل أن $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ من أجل أي$\boldsymbol{x}$ من $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ و $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}$ من أجل $\boldsymbol{y}$ من $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

مبرهنة $(10-1)$:

كل مجموعة محدّبة في الفضاء $\boldsymbol{\mathcal{R}}^{\boldsymbol{n}}$ هي مجموعة مترابطة.

Abstract

Convex Sets

Definition $(1-1)$

Say about the group in the Euclidean space R^n convex if it contains the line segment connecting any two points of the points.

Definition $(1-2)$

elements of the space V. u ‚ϵv V To not have:

The group of all linear combinations the following:

$$\{\omega_\lambda \epsilon V : \omega_\lambda = (1-\lambda)u + \lambda v, 0 \le \lambda \le 1\}$$

consisting of all points of line segment connecting the two points.

Proposition $(1-3)$

IF C $\subset \mathbb{R}^n$ is convex, the $\boldsymbol{c\ell}$(C), the closure of C, is also convex..

Proposition $(1-4)$

The intersection of any number of convex sets is convex.

Proposition $(1-5)$

Let K be a convex set and let and λ_1 , λ_2,… … …,λ_p=0 and $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.If

$\boldsymbol{x_1}$‚$\boldsymbol{x_2}$………‚ $\boldsymbol{x_p}$ ∈**k then :**

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \, x_i \in \mathrm{k}$$

Theorem $(1-6\ )$

If C, D $\subset\ \mathbb{R}^{n}$ *are convex, then so is C + D.*

Theorem $(1-7)$

If C $\subset \mathbb{R}^{m}$ *is a (nonempty) closed convex set and*

$\boldsymbol{x}^* \notin \boldsymbol{C}$*, then there exists a vector*

p $=\ \mathbf{0}$ *and a scalar b such that*

1. **p** $\cdot\ \boldsymbol{x}^* <$ *b,*

2. **p** $\cdot$ **z** $\geq$ *b for all* $\forall\ \boldsymbol{\mathcal{Z}} \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$

Theorem $(1-8)$

Let C and D be convex subsets of $\mathbb{R}^{m}$ *, with C closed and D compact.*

If C $\cap$ *D is*

empty, then there exists a non-zero vector **p** *and scalar b such that* **p** $\cdot$

x $<$ *b for all* **x** $\in$ *C and*

p $\cdot$ **y** $>$ *b for all* **y** $\in$ *D.*

Theorem $(1-9)$

Suppose that C and D are convex sets in R^n *and that* $\boldsymbol{int}\ \boldsymbol{\mathcal{D}} \neq \emptyset$ *.*

If $\boldsymbol{\mathcal{C}} \cap \boldsymbol{int}\ \boldsymbol{\mathcal{D}} = \emptyset$*,*

then there exists a vector $\boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}$ *and a scalar b such that* **p** $\cdot$ **x** $\geq$ *b for*

all **x** $\in$ *C and* **p** $\cdot$ **y** $\leq$ *b for all*

y $\in$ D.

convex hulls