جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

دراسة جذور العناصر في المودولات الشبكية

رسالة قدمت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات

أعدتها

ساهير موسى

إشراف

الدكتورة : إيمان الخوجه

١٤٣٢ هـ

٢٠١٢ م

University of AL -Bath

Faculty of Sciences

Department of Mathematics

Study radical element in the lattice module

Dissertation submitted for M.SC. degree in Mathematics

By

Saher mwosa

Supervisors

Dr . Eaman Al-Khouja

1432

2012

دراسة جذور العناصر في المودولات الشبكية

المقدمة

لدراسة نظرية المثاليات في الحلقات التبديلية بشكل مجرد قام R. P. Dilworth [4] عام 1962 بإدخاله مفهوم الشبكات الضربية ودراستها، ومن ثم تعريفه للشبكة الضربية النيوثرية كمفهوماً مجرداً لشبكة المثاليات لحلقة نيوثرية تبديلية، كما أدخل مفهوم العنصر الرئيسي كتعميم لمفهوم المثالية الرئيسية. ثم عمم العديد من الحقائق المعروفة في الحلقات النيوثرية على الشبكات الضربية .

لقد كان في دراسة الشبكات الضربية منعطفان هامان. قام بالأول J. A. Johnson [6] عام 1970 وذلك بتعريفه ودراسته للمودولات الشبكية النيوثرية فوق الشبكات الضربية، وبذلك وسعت الدراسة لتشمل المودولات النيوثرية فوق الحلقات التبديلية. أما المنعطف الثاني فقد قام به نقار [11] عام 1974 و D. D. Anderson [3] عام 1976. وذلك بتعريفهما الـ K- شبكة والـ R- شبكة والـ r- شبكة، وبذلك وسعت الدراسة لتشمل جميع المودولات فوق الحلقات التبديلية.

وما تزال الدراسات والأبحاث مستمرة ومتعددة في مجال الشبكات الضربية والمودولات الشبكية فوقها .

ونظراً للدور الهام الذي يؤديه جذر مثالية من حلقة في دراسة نظرية الحلقات التبديلية، وبشكل مماثل بالنسبة لدور جذر المودول الجزئي من مودول فوق حلقة في دراسة المودولات فوق الحلقات، فقد درست الجذور بشكل موسع في الحلقات التبديلية والمودولات فوقها في العديد من المراجع، نذكر منها [1,7,8,9,10,15]. كما تمَّ تعميم مفهوم جذر مثالية في حلقة على الشبكات الضربية وذلك بتعريف جذر عنصر في الشبكة الضربية وإثبات بعض الحقائق المتعلقة

بذلك وكان لهذا التعريف دور هام في العديد من الدراسات في الشبكات الضربية. وفي عام 2002 تم تعريف جذور العناصر في المودولات الشبكية من الصنف J ودراستها [14] وذلك ضمن أبحاث قدمت لنيل درجة الماجستير بإشراف د. نقار و د. الخوجه.

الغاية من هذا البحث توسيع الدراسة الواردة في [14] لتشمل جميع جذور العناصر في المودولات الشبكية وذلك بتعميم معظم النتائج الواردة في مقالتي C. P. Lu [8, 9]، حول جذور المودولات الجزئية من الصنف M في مودول فوق حلقة على المودولات الشبكية فوق الشبكات الضربية.

وبناءً على متطلبات البحث فقد قدمنا دراسة مرجعية عن جذور المودولات الجزئية في المودولات فوق الحلقات التبديلية مع عرض لأهم التعاريف الأساسية المتعلقة بهذه الدراسة مثل تعريف المودول الجزئي الأعظمي والمودول الجزئي الأولي والأولي الأصغري وجذر المودول الجزئي و .... إلخ

كما تم عرض الخواص الأساسية لجذور المودولات الجزئية في المودولات فوق الحلقات التبديلية [8,9,15] . وكان ذلك مضمون الفصل الأول من هذه الدراسة.التي تم توزيع مضمونها على ثلاثة فصول.

في الفصل الثاني تم عرض أهم التعاريف والحقائق المتعلقة بالشبكات الضربية والمودولات فوقها واللازمة في هذه الرسالة ودراسة الخواص الأساسية لجذور العناصر من الصنف J في المودولات فوق الشبكات الضربية، وربط هذه الدراسة بمفهوم الجذور في الشبكات الضربية.

حيث إذا كان B عنصراً ما من المودول الشبكي M فإن تقاطع كل العناصر الأعظمية في M والتي كل منها يحوي B يسمى جذر العنصر B من الصنف J ويرمز له بالرمز $J(B)$. وبشكل خاص، إذا كان b عنصراً من الشبكة L فإن تقاطع كل العناصر الأعظمية الحاوية b في L هو $J_0(b)$، وقد تم البرهان على أنه إذا كانت d من L و D من M، فإن:

$$J(d \cdot D) = J(d \cdot I_M \wedge D) = J(d \cdot I_M) \wedge J(D)$$

وإذا كان I_M اجتماع لعناصر رئيسية في M. فإن:

1- $J_0(D : I_M) \leq (J(D) : I_M)$.

2- $J(d . I_M) = J(J_0(d) . I_M)$.

كما درست عملية التقاطع على هذه الجذور في المودول الشبكي، إذ أنه إذا كان N , D عنصرين من المودول الشبكي M فوق الشبكة الضربية L. فليس من الضروري في الحالة العامة أن يكون:

$$J(D) \wedge J(B) = J(D \wedge B)$$

وقد ذُكر مثال حول صحة ذلك، ودُرست الحالات التي بموجبها تكون المساواة المذكورة سابقاً محققة، ومن أهمها:

ليكن I_M عنصراً متراصاً في المودول الشبكي M فوق L وليكن D ، N عنصرين اختياريين من M . عندئذٍ إذا كان أي عنصر أعظمي K من M حاوياً للتقاطع $N \wedge D$ يجب أن يحوي أحد العنصرين D أو N فإنه يكون:

$$J(N \wedge D) = J(N) \wedge J(D)$$

ليكن I_M عنصراً ضربياً في المودول الشبكي M فوق L وليكن D , N عنصرين كيفيين من M، عندئذٍ تتحقق العلاقة الآتية:

$$J(N \wedge D) = J(N) \wedge J(D)$$

ليكن N , D عنصريين كيفيين من المودول الشبكي M فوق L. عندئذٍ إذا كان $J_0(N : I_M) \vee J_0(D : I_M) = I$ فإنه يكون $J(N \wedge D) = J(N) \wedge J(D)$.

ليكن I_M عنصراً متراصاً ومساوياً لاجتماع عناصر اجتماع رئيسية في المودول M فوق L، وليكن N و D عنصرين كيفيين من M يحققان العلاقة $J_0(N : I_M) \vee J_0(D : I_M) = I$ عندئذٍ يكون $N \vee D = I_M$.

أما الفصل الثالث والأخير من هذه الرسالة فقد خصص لدراسة الخواص الأساسية للجذور الأولية وجذور العناصر في المودلات الشبكية. حيث تم تعريف جذر العنصر N من المودول الشبكي M بأنه تقاطع جميع العناصر الأولية في M والتي كل منها يحوي N ويُرمز له

بالرمز $Rad\ N$ ويسمى $Rad\ (0)$ بالجذر الأولي في M. وإذا كان $Rad\ N = N$ فإن N يسمى عنصراً جذرياً.

وقد تم الحصول على العديد من النتائج حول هذا المفهوم والتي تناظر خواص ونتائج متعلقة بجذور العناصر من الصنف J والواردة في الفصل الثاني من هذه الرسالة.

من أهمها برهان أنه من أجل أي عنصر d من L فإن:

$$Rad\ (d\ .\ I_M) = Rad\ (r\ (d)\ .\ I_M)$$

وإذا كان العنصر الأكبر I_M في M ضربياً واجتماعاً رئيسياً ضعيفاً و B عنصراً من M فإن:

$$r\ (B : I_M)\ .\ I_M = Rad\ B$$

ومن ثم فقد تم برهان أنه إذا كان I_M عنصراً رئيسياً ضعيفاً من M فإن:

$$Rad\ (b\ .\ I_M) = r\ (b)\ .\ I_M$$

وذلك من أجل أي عنصر b يحوي مصفر I_M .

كما دُرست عملية التقاطع على جذور العناصر في المودول الشبكي M وتبيان الحالات التي بموجبها يكون:

$$Rad\ (N \wedge B) = Rad\ N \wedge Rad\ B$$

وذلك أياً كان العنصران N , B من M.

ليكن M مودولاً فوق الشبكة الضربية L عنصره الأكبر I_M ضربياً، وليكن b عنصراً ما من L و B عنصراً ما من M ، عندئذٍ:

$$Rad\ (b\ .\ I_M \wedge B) = Rad\ (b\ .\ I_M) \wedge Rad\ B = Rad\ (b\ .\ B)$$

أهم تلك الحالات برهان أنه عندما يكون $(D : I_M)$ و $(N : I_M)$ أوليان فيما بينهما في L فإن المساواة السابقة تكون محققة وهذه المبرهنة تعد تعميماً للمبرهنة (1) في [15] والمنشورة عام 2010.

A study of the radical of elements in lattice modules

Summary

A major step was taken by R. P. Dilworth [4] in giving an abstract formulation of the ideal theory of commutative rings. He introduced the concept of the multiplicative lattice and defined the Noether Lattice as an abstraction of the lattice of ideals of a Noetherian ring . He succeeded in defining the notion of a principal element as a generalization to the notion of a principal ideal.

The study of multiplication lattice had two main turning points ; the first one was made by J. A. Johnson [6] in 1970 , when he introduced Noetherian Lattice module over the multiplicative lattice. So, the research was comprehended to include the Noetherian Modules over the commutative rings. The second turning point was made by Nakkar [11] in 1974 and D. D. Anderson [3] in 1976 . When they introduced the K- Lattice and the R- Lattice and the r- Lattice, the study was again comprehended to include all the module over commutative rings.

The researches and studies were still continuous and various in the field of multiplicative lattices and lattice modules.

Since the radical of an ideal plays an important role in the study of rings in commutative Algebra , so the radical of ideal has been generalized to the multiplicative lattices by defining the radical element of a multiplicative lattice and proving some facts corresponding with that. This generalization had an important role in many researches in multiplicative lattices.

As the radical of a submodule of a module over a ring plays an important role , one would naturally seek a counterpart in the lattice module. So, in 2002 [14], H. Nakkar, E. A. AL- Kouja and GH. Mohammad defined and studied the J- radicals of elements in lattice modules.

The purpose of this research is to study the radicals of elements in lattice modules. Our results generalize known results for M- radicals of submodules in modules obtained by C. P. Lu [8,9], to the lattice modules over multiplicative lattice .

Through this research L will denote a multiplicative lattice in which I will denote the greatest element and M will denote a lattice module over L in which I_M will denote the greatest element.

This research has been divided into three chapters:

In the first chapter, and due to the needs for the research, we characterized the M-radicals of submodules in modules over commutative rings [8,9].

In the second chapter, we examined the properties of J- radicals of elements in M. So, we gave some definitions and terminology to be used in this thesis. The J- radical of an element B in M as the intersection of all maximal elements of M containing B and denoted it by J (B). In particular, $J_0(b)$ is the intersection of all maximal elements containing an element b of L.

We discussed various basic properties of the J-radicals of elements in M.

If d was an element of L and D an element of M, then $J(d . D) = J(d . I_M \wedge D) = J(d . I_M) \wedge J(D)$, and if the greatest element I_M of M is a join of principal elements of M, then :

1- $J_0(D : I_M) \leq (J(D) : I_M)$.

2- $J(d . I_M) = J(J_0(d) . I_M)$

In addition, we defined the intersection operation on J-radicals. We looked at the relationship between the J-radical of the intersection of two elements of an L-module M and the intersection of their J-radicals .

We proved that, for any two elements B and D of an L-module M, it is not always true that the equality $J(D \wedge B) = J(D) \wedge J(B)$ holds and we gave a counter example (see example (2-3-1)) , so we investigated those elements of modules which satisfy that equality .

Thus, we showed that if the greatest element I_M of M is multiplication and B , D are arbitrary elements of M , then $J(D \wedge B) = J(D) \wedge J(B)$. and we proved that if $J_0(D : I_M) \vee J_0(B : I_M) = I$, then $J(D \wedge B) = J(D) \wedge J(B)$.

Furthermore , we proved the following theorem :

Let I_M be a compact element of on L-module M that is a join of join principal elements of M and let B and D be elements of M . If $J_0(D : I_M) \vee J_0(B : I_M) = I$, then $D \vee B = I_M$.

In the third chapter, we generalized the fundamentals obtained by C. P. Lu [8] in the paper titled M- radicals of submodules in modules to the lattice modules.

We defined Rad N (N is an element of M) as the intersection of all prime elements of M containing N.

Various basic properties of the radicals of elements of M (as Rad N) which are analogous to those of J- radicals are discussed.

We proved that, for every element d of L:

$$\text{Rad}\,(d\,.\,I_M) = \text{Rad}\,(r\,(d)\,.\,I_M)$$

and if I_M is a multiplication and week join principal of M and if B is an element of M. then :

$$r\,(B : I_M)\,.\,I_M = \text{Rad}\,B$$

Then, we proved that, if I_M is a weak principal element of M.

Then $\text{Rad}\,(b\,.\,I_M) = r\,(b)\,.\,I_M$ for every element b containing ann I_M.

Then, we defined the intersection operation on the radicals of elements of M.

Next, we considered that, if N , B are elements of M and P a prime element of M such that $N \wedge B \leq P$, then , it is not necessarily true $N \leq P$ or $B \leq P$. So, we investigated when this statement is true. We showed that if $(N : I_M) \nleq (P : I_M)$ then $B \leq P$. We proved that if I_M is multiplication and $b \in L$, $B \in M$, then :

$$\text{Rad}\,(b \,.\, I_M \wedge B) = \text{Rad}\,(b \,.\, I_M) \wedge \text{Rad}\, B = \text{Rad}\,(b \,.\, B)$$

Finally, we showed that if the elements $(N : I_M)$, $(D : I_M)$ of L are comaximal then the equality $\text{Rad}\,(N \wedge D) = \text{Rad}\, N \wedge \text{Rad}\, D$ is valid .