الجمهوريّة العربيّة السوريّة
وزارة التعليم العالي
جامعة البعث
كليّة العلوم – قسم الرياضيّات

دراسة المعادلات الجبريّة باستخدام قواعد جروبنر

رسالة أُعدَّت لنيل درجة الماجستير في الرياضيّات البحتة

إعداد الطالب
عوض طلال العبد الله

إشراف

الدكتور عبد الباسط الخطيب
أستاذ في قسم الرياضيّات – كليّة العلوم

الدكتور سليمان الخطيب
مدرّس في قسم العلوم الأساسيَّة - كليّة الهندسة الكيميائيّة و البتروليّة

2015 م – 1436 هـ

Syrian Arab Republic

Al-Baath University

Faculty of Science

Department of Mathematices

" Study On Algebraic Equations Using Grobner's basis"

Thesis for M.sc Degree in Pure Mathematics

Produced by

Awad Talal Alabdala

Supervision by

Prof.Abdulbaset Al Khateeb Dr.Solaiman Al Khateeb

2015 م – 1436هـ

الملخص

تعد قواعد جروبنر Grobner Bases من الأدوات الرياضيّة الحديثة التي أثارت اهتمام الباحثين في كلِّ المجالات الرياضية، فتمّ استخدامها في حل الكثير من المشاكل الرياضيّة التي كانت إلى وقت قريب غير قابلة للحل أو حلُّها يحتاج إلى الكثير من الوقت والجهد.

إنَّ قواعد جروبنر عموماً هي عبارة عن مجموعة الحدوديَّات متعدّدة المتغيِّرات تمتلك خواص معيّنة، كل مجموعة من الحدوديَّات يمكن أن نحوّلها إلى قواعد جروبنر عن طريق خوارزميَّات وطرق معينة.

بدايةً قدّمنا في هذه الرسالة دراسة مرجعية عن مفاهيم أساسيّة في حلقة الحدوديَّات والمثاليَّات مع عرض لأهم التعاريف الأساسيَّة التي تلزمنا في موضوع رسالتنا كتعريف الحلقة والمثالي والحقل وحلقة الحدوديَّات بمتغيِّر واحد $K[x]$، ثم تكلمنا عن خوارزميَّة القسمة في $K[x]$ وبرهنّا على أنّ حلقة الحدوديَّات على أي حقل هي حلقة مثاليَّات رئيسيّة، ومن ثمّ ذكرنا تعريف القاسم المشترك الأعظم لحدوديّتين.

بعد ذلك انتقلنا إلى الفصل الثاني الذي تحدّثنا فيه عن حلقة الحدوديَّات بأكثر من متغيِّر $K[x_1,...,x_n]$ وتعرّفنا على المثالي في $K[x_1,...,x_n]$، وفي هذا الفصل تعرفنا على مفهوم هام وهو ترتيب الحدود في حلقة الحدوديَّات، حيث تحدّثنا عن ثلاثة أنواع لترتيب الحدود: الترتيب المعجمي، الترتيب المعجمي الدَّرجي، الترتيب المعجمي الدَّرجي العكسي، ثم أوضحنا أنَّ خوارزميَّة القسمة في $K[x_1,...,x_n]$ هي تعميم لخوارزميَّة القسمة في $K[x]$، وبعد ذلك ذكرنا خوارزميَّة التقسيم الإقليدي بشكلها البرمجي وقمنا بحل بعض الأمثلة، ثم ذكرنا مبرهنة هيلبرت الأساسيَّة وفي نهاية الفصل وضعنا مدخل إلى قواعد جروبنر.

وفي الفصل الثالث تعرّفنا على قواعد جروبنر وبعض المبرهنات المتعلقة بها، خصائصها، ثم انتقلنا إلى خوارزميَّة لبناء قاعدة جروبنر وهنا كان لابدَّ من ذكر مفهوم الـS-polynomial الذي له دورٌ بارزٌ في خوارزمية **Buchberger**، وتحدّثنا عن مبرهنة **Buchberger** الأولى تمهيداً لذكر نص خوارزميَّة **Buchberger** البرمجي وقمنا بحل بعض الأمثلة الموضحة.

إنَّ قواعد جروبنر التي حصلنا عليها بطريقة **Buchberger** ليست وحيدةً عموماً، لذلك كان لابد من وضع بعض الشروط لتصبح وحيدة ولذلك قمنا بإعطاء تعريف قاعدة جروبنر الصغرى وقاعدة جروبنر المختزلة ومن ثم مبرهنة **Buchberger** الثانية التي توضح أنَّه من أجل ترتيب حدود معيَّن فإنّ أي مثالي مغاير للصفر يمتلك قاعدة جروبنر مختزلة وحيدة.

وفي الفصل الرابع وهو الفصل الأخير قمنا باستخدام قواعد جروبنر في إيجاد حلول لجملة معادلات جبريّة، بدأنا في هذا الفصل بتعريف الفضاءات الأفينية والتي تهمنا لتعريف المتنوِّعات الأفينية والتي بدورها تشكِّل مجموعة كل الحلول لجملة المعادلات التّالية:

$$f_1(x_1,....,x_n) = ... = f_s(x_1,...,x_n) = 0$$

ووضعنا بعض الرسوم البيانيَّة التي توضح المتنوعات الأفينية وبعد ذلك قمنا بذكر بعض المبرهنات المتعلقة بالمتنوِّعات الأفينية، وتعرفنا على مثالي المتنوِّعة وجذر المثالي والمثاليَّة الجذريَّة، وقمنا بتوضيح أنّ كل مثالي أوّلي هو مثالي جذري، وبعد ذلك انتقلنا إلى مسألة حل جملة معادلات جبريّة وكان لابدَّ من ذكر بعض التعاريف المتعلقة بها كتعريف محذوف المثالي، وقمنا بعد ذلك بحل بعض الأمثلة وتعرَّفنا على مبرهنة الحذف والتمديد وعلى مبرهنات هيلبرت، وفي الختام ذكرنا بعض التوصيات.

abstract

Grobner bases are considered one of the modern mathematical tools which has become of interest for the researchers in all fields of mathematics, It has been used in solving mathematical problems which was once unsolvable or which required time and effort to be solved.

Grobner bases are generally polynomials with multiple variables that has certain characteristics, Each group of polynomials can be transferred into Grobner Bases via certain Algorithms and methods.

The first chapter in the thesis discusses basic concepts in the polynomials ring and ideals , Basic necessary definitions were introduced: the ring, the ideal , the field, the polynomials ring with one variable $K[x]$. then, the division algorithm was discussed in $K[x]$, it was proven that the polynomials ring on any field is a major ideals ring. Then the most common denominator for two binomial was defined.

The second chapter discussed the polynomials ring with more than one variable $K[x_1,...,x_n]$, The perfects in $K[x_1,...,x_n]$ was introduced in addition to an essential concept which is ordering polynomials in the polynomials ring, There are three polynomials ordering methods which are discussed: lexicographical, degree lexicographical and degree reverse lexicographical, Then it was explained that the division algorithm in $K[x_1,...,x_n]$ is a generalization of the division algorithm in $K[x]$, after division *Algorithm was presented in its programmable* that, the Euclid's *mode. Some examples were solved and Hilbert basic theorem was introduced, The chapter ends with an introduction to Grobner bases.*

In the third chapter Grobner bases and some related theories were discussed in details, The algorithm to construct a Grobner base was introduced, The role which S-polynomial concept play in Buchberger algorithms was essential in this context. Buchberger first theorem was mentioned as an introduction for programming Buchberger algorithm along with some examples.

Grobner bases which was obtained by Buchberger's method are not unique in general. Some conditions were needed in order for them to be

unique. As a result, the definition of the maxima Grobner Base and the minimal Grobner base were presented in addition to Buchberger second theorem which states that for a

certain polynomial ordering any ideals other than Zero has a unique simplified Grobner base.

In the fourth chapter, the final chapter, Grobner Bases were used in finding solutions for an algebraic equations. The chapter starts with the affine spaces which are important for the definition of the affine variations which in turn form the group of all the solutions for the following group equations:

$$f_1(x_1,....,x_n) = ... = f_s(x_1,...x_n) = 0$$

The graphs which explain the affine variations were introduced after which some theorems related for the affine variations were mentioned. The ideals of the variations, the idealsroot and the root ideals were defined in addition to explaining that each primal idealsis a root perfect. Then the problem of solving a group of algebraic equations was discussed along with some related definitions as the ideals elimination. Some examples were solved as well as introducing the deletion and extention theorem and Helbert's theorems. In the end some recommendations were suggested.