الجمهورية العربية السورية

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

دراسة استقرار و تقارب الطرائق العددية لحل النموذج الأسي

Studying the stability and approximation of numerical methods for Solving the exponential model

دراسة أعدت لنيل درجة الماجستير في التحليل الرياضي

إعداد الطالب :

محمد عباس الابراهيم

بإشراف :

الدكتور : أحمد هلال الكردي

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

العام الدراسي :

2010 - 2009

ملخص الرسالة

تقع الرسالة في اثني عشر فصلاً هي كما يلي:

الفصل الأول:

يبدأ الفصل بمقدمة عن مسألة القيمة الابتدائية و يقدم مثالا عن معادلة تفاضلية عادية التي تمثل نموذجا رياضيا يصف العديد من الظواهر في علوم تطبيقية عديدة. بعد ذلك يتناول الفصل بعض المفاهيم الأساسية في نظرية الاستقرار التي تمس النموذج الرياضي المدروس.

الفصل الثاني:

نقدم في هذا الفصل عرضا موجزا عن طرائق أولر العددية والتي تتضمن:

- طريقة أولر (Euler's method) (أو طريقة أولر التقدمية (Forward Euler's method)).
- طريقة أولر التراجعية (Backward Euler's method).
- طريقة أولر المعدلة (Modified Euler's method).
- طريقة أولر المحسنة (Improved Euler's method).
- طريقة نقطة المنتصف (Midpoint method).
- طريقة هيون (Huen's method).

يشمل العرض المقدم في هذا الفصل ما يلي:

- خوارزمية كل طريقة لحل معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الأولى.
- جدول بوتشر (Butcher Tableau) الموافق لكل طريقة من الطرائق المدروسة.
- مناطق الاستقرار المطلق لكل طريقة من طرائق أولر العددية.

الفصل الثالث:

نناقش في هذا الفصل:

تطبيق طرائق أولر العددية على النموذج الرياضي الأسي:

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad , \quad \lambda > 0 \qquad (1)$$

لتوضيح فعاليتها من أجل قيم مختلفة للوسيط λ:

$$\lambda = 0.1, 0.01, 0.0001, 0.00001, 0.00001$$
$$1, 10, 100, 1000, 1000, 10000$$

مقابل قيم مختلفة لطول الخطوة h:

$$h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.00001$$

لإيجاد الحل العددي التقريبي للنموذج الرياضي الأسي الممثل في الحالة (1) على المجال $[0,1]$. الهدف الرئيسي من تكرار تطبيق الطرائق نفسها من أجل أطوال مختلفة لحجم الخطوة h هو أن نحلل بيانيا كيف يؤثر طول الخطوة على دقة تقريب الطريقة العددية.

للإجابة على التساؤل المطروح أعلاه، فإننا نجري العديد من تجارب المحاكاة العددية لإيجاد القيمة المثلى للوسيط λ و القيمة المثلى لطول الخطوة h اللتان يكون من أجلهما أداء الطريقة العددية هو الأفضل. بعبارة:

بالحل)2(. وضحنا هذه الحالة برسم الخطأ الأعظمي في كل طريقة من
h – 0 ، و دونا النتائج أيضا في جداول.

ية:

لات التالية:

العملية من حيث زمن التنفيذ لإيجاد الحل العددي التقريبي عند تطبيقها على
ق أولر

و من طرائق أولر العددية.
من طرائق أولر العددية بدلالة عدد مرات تغييرات
ة من ز مثلا.

تصنيف طول الخطوة في تقارب كل طريقة من طرائق أولر
قها على ذجين المبينين في (1) و (2) على الترتيب. لهذا أجرينا العديد من
نتائج من تطبيق كل طريقة عددية مقابل طول خطوة.

تغييرات

رائق رانج – كوتا **(Runge - Kutta)** التي نرمز لها اختصارا

ق أولر
يد من

الثانية ، و نرمز لها اختصارا بالرمز **RK2**.
الثالثة ، و نرمز لها اختصارا بالرمز **RK3**.
اختصارا الرابعة ، و نرمز لها اختصارا بالرمز **RK4**.
نرمز لها اختصارا بالرمز **RK-Butcher**.
ي:

$h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.00($
اضي الأسي الممثل في الحالة (1) علـــى المجـــال $[0,1]$. الهـــدف
من أجل أطوال خطوة مختلفة هو أن نحلل بيانيا كيف يؤثر طـــول

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad , \quad \lambda > 0 \qquad (1)$$

لتوضيح فعاليتها من أجل قيم مختلفة للوسيط λ :

$$\lambda = 0.1, 0.01, 0.0001, 0.00001, 0.00001$$
$$1, 10, 100, 1000, 1000, 10000$$

مقابل قيم مختلفة لطول الخطوة h :

$$h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.00001$$

لإيجاد الحل العددي التقريبي للنموذج الرياضي الأسي الممثل في الحالة (1) علـــى المجـــال $[0,1]$. الهـــدف الرئيسي من تكرار تطبيق الطرائق نفسها من أجل أطوال خطوة مختلفة هو أن نحلل بيانيا كيف يؤثر طـــول الخطوة على دقة تقريب الطريقة.

للإجابة على التساؤل المطروح أعلاه، فإننا نجري العديد من تجارب المحاكاة العددية لإيجاد قيمـــة المثلـــى للوسيط λ و القيمة المثلى لطول الخطوة h اللتان يكون من أجلهما أداء الطريقة العددية هو الأفضل. بعبارة أخرى، نبين بيانيا الخطأ في الحل العددي الناتج من تطبيق كل طريقة عددية، إذ نقارن الحل الـــدقيق بالحـــل العددي الناتج من تطبيق طرائق رانج – كوتا العددية من أجـــل قـــيم مختلفـــة للوســـيط λ ، ومـــن أجـــل قيمة $h = 0.0001$ مثلا.

الفصل التاسع:

تركز اهتمامنا في هذا الفصل على إجراء تقنيات محاكاة عددية لإيجاد الحل العددي للنموذج الرياضي:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad , \quad \lambda > 0 \qquad (2)$$

تفاديا لإظهار عشرات الصفحات من النتائج التي وردت في الفصلين الثالث و الثامن ، فإننا نقصر تنفيـــذاتنا العددية لإيجاد القيمة المثلى للوسيط λ و القيمة المثلى لطول الخطوة h اللتان يكون من أجلهما أداء طرائق رانج-كوتا العددية هو الأفضل على مقارنة دقة جميع الطرائق المدروسة من أجل أطـــوال خطـــوة منفـــردة $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ و من أجل قيم مختلفة للوسيط λ :

$$\lambda = 0.1, 0.01, 0.0001, 0.00001, 0.00001,$$
$$1, 10, 100, 1000, 1000, 10000$$

لإيجاد الحل العددي للنموذج الرياضي (2). وضحنا هذه الحالة برسم الخطأ الأعظمي في كل طريقـــة مـــن الطرائق المدروسة مقابل طول الخطوة h ، و دونا النتائج أيضا في جداول.

الفصل العاشر:

نحاول في هذا الفصل الإجابة على التساؤلين التاليين:

- ما هو أداء طرائق رانج – كوتا العددية من حيث زمن التنفيذ لإيجاد الحل العددي التقريبي عند تطبيقها على النموذج الرياضي (1) أو (2).
- التحقق من مرتبة كل طريقة من طرائق رانج – كوتا العددية.
- ما هي فعالية كل طريقة من طرائق رانج – كوتا العددية بدلالة عدد مرات تقديرات التابع $f(t, y(t)) = -\lambda y(t)$.

الفصل الحادي عشر:

تركز اهتمامنا في هذا الفصل لتوضيح أثر تنصيف طول الخطوة h في تقارب كل طريقة من طرائق رانج – كوتا العددية لإيجاد الحل العددي التقريبي للنموذجين المبينين في (1) و (2) على الترتيب. لهذا أجرينا العديد من تجارب المحاكاة العددية لتوضيح الخطأ الناتج من تطبيق كل طريقة عددية مقابل طول خطوة.

الفصل الثاني عشر:

نلخص في هذا الفصل أهم النتائج التي توصلنا إليها في الرسالة التي تتضمن تطبيق مجموعتين من الطرائق العددية وحيدة الخطوة على النموذج الرياضي الأسي. تتمثل هذه الطرائق بالمجموعتين:

1. مجموعة طرائق أولر العددية و تشمل:
   - طريقة أولر.
   - طريقة أولر التراجعية.
   - طريقة أولر المعدلة.
   - طريقة أولر المحسنة.
   - طريقة نقطة المنتصف.
   - طريقة هيون.
2. مجموعة طرائق رانج – كوتا العددية و تشمل:
   - طريقة RK2.
   - طريقة RK3
   - طريقة RK4
   - طريقة RK-Butcher.

Abstract of the Thesis

The thesis was divided into 12 chapters. The chapterwise of the thesis are given as follows:

Chapter 1:

1. The chapter starts with an introduction about initial value problem and presents an example of ordinary differential equation that represents a mathematical model describing several phenomena in many applied sciences. Then, the chapter describe some basic concepts in stability theory which ralates the considered mathematical model.

Chapter 2:

In this chapter, we present a brief on numerical Euler methods which include:

1. **Euler's metho (Forward Euler's method).**
2. **Backward Euler's method.**
3. **Modified Euler's method**
4. **Improved Euler's method**
5. **Midpoint method**
6. **Huen's method**

The presentation given in this chapter includes the following:

- An algorithm of each method for solving ordinary differential equation of first order.
- **Butcher Tableau** corresponding to each method of the considered methods.
- **The absolute stability region of every method of the numerical Euler methods.**

Chapter 3:

In this chapter, we discuss:

Application of numerical Euler methods to the exponential mathematical model:

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad , \quad \lambda > 0 \qquad (1)$$

to show their efficiency for different values of parameter:

$$\lambda = 0.1, 0.01, 0.0001, 0.00001, 0.00001$$
$$1, 10, 100, 1000, 1000, 10000$$

Against defferent values of step size:

$$h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.00001$$

for finding the approximate numerical solution of the exponential model represented by equation (1) on the interval $[0,1]$.

The basic objective of repeating applying the same methods for different step size h is to graphically analyse how to affect the step size on the approximation accuracy of the numerical method.

To answer on the quistion given above, we make several numerical simulation tests for finding the optimal value of parameter λ and optimal value of step size h for which the performance of numerical method is the best. We show the plotting of error of numerical solution resulting from applying each method. We make comparison the exact solution with the numerical one obtained from applying euler methods for different values of parameters λ and $h = 0.0001$.

Chapter 4:

In this chapter, we are interested in implemeniting numerical simulations for finding the numerical solution of mathematical model:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad , \qquad \lambda > 0 \tag{2}$$

Avoiding to show the thens of pages of results that given in the third chapter , we carry our numerical simulations for finding the optimal value of λ and h for which the performance of numerical method is the best, is comparing the accuracy of all numerical methods for singular step size $h = 0.1, 0.01, 0.001$ and for

$$\lambda = 0.1, 0.01, 0.0001, 0.00001, 0.00001,$$
$$1, 10, 100, 1000, 1000, 10000$$

for finding the numerical solution of mathematical model (2). We illustrate this case by plotting the maximum error in each method of the considered methods against the step size h . We report the obtained results in tables.

Chapter 5:

In this chapter, we answer the tow quistions:

- What is the performance of numerical Euelr the case of running time for finding the approximate solution when they apply to the mathematical model (1) or (2).
- Checking from the order of each method of numerical Euler methods.
- What is the effiency of each method of Euler methods in terms of number od evaluations of function $f\left(t, y(t)\right) = -\lambda y(t)$.

Chapter 6:

In this chapter, we are interested to illustrate the affect of halving the step seze in convergence of numerical Euler methods for finding the numerical solution of the models shown in (1) and (2) respectively. For this, we make several numerical simulation tests to show the error obtained from apllying the numerical method against the step size.

Chapter 7:

In this chapter, we present a brief on numerical Runge – Kutta methods which include:

1. **RK2 method.**
2. **Rk3 method.**
3. **RK4 method**
4. **RK-Butcher method**

The presentation given in this chapter includes the following:

- An algorithm of each method for solving ordinary differential equation of first order.
- Explicit Runge – Kutta method order.
- Butcher Tableau corresponding to each method of the considered methods.

- The absolute stability region of every method of the numerical Euler methods.

Chapter 8:

In this chapter, we discuss:

Application of numerical Runge – Kutta methods to the exponential mathematical model:

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} , \quad \lambda > 0 \tag{1}$$

to show their efficiency for different values of parameter:

$$\lambda = 0.1, 0.01, 0.0001, 0.00001, 0.00001$$
$$1, 10, 100, 1000, 1000, 10000$$

against defferent values of step size:

$$h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.00001$$

for finding the approximate numerical solution of the exponential model represented by equation (1) on the interval $[0,1]$. The basic objective of repeating applying the same methods for different step size h is to graphically analyse how to affect the step size on the approximation accuracy of the numerical method.

To answer on the quistion given above, we make several numerical simulation tests for finding the optimal value of parameter λ and optimal value of step size h for which the performance of numerical method is the best. We show the plotting of error of numerical solution resulting from applying each method. We make comparison the exact solution with the numerical one obtained from applying Runge – Kutta methods for different values of parameters λ and $h = 0.0001$.

Chapter 9:

In this chapter, we are interested in implemeniting numerical simulations for finding the numerical solution of mathematical model:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} , \quad \lambda > 0 \tag{2}$$

Avoiding to show the thens of pages of results that given in the third and eigth chapter , we carry our numerical simulations for finding the optimal value of λ and h for which the performance of numerical Runge – Kutta methods is the best, is comparing the accuracy of all numerical methods for singular step size $h = 0.1, 0.01, 0.001$ and for

$$\lambda = 0.1, 0.01, 0.0001, 0.00001, 0.00001,$$
$$1, 10, 100, 1000, 1000, 10000$$

for finding the numerical solution of mathematical model (2). We illustrate this case by plotting the maximum error in each method of the considered methods against the step size h . We report the obtained results in tables.

Chapter 10:

In this chapter, we answer the tow quistions:

- What is the performance of numerical Runge – Kutta in the case of running time for finding the approximate solution when they apply to the mathematical model (1) or (2).
- Checking from the order of each method of numerical Runge – Kutta methods.
- What is the effiency of each method of Runge – Kutta methods in terms of number od evaluations of function $f\left(t, y\left(t\right)\right) = -\lambda y\left(t\right)$.

Chapter 11:

In this chapter, we are interested to illustrate the affect of halving the step seze in convergence of numerical Runge-Kutta methods for finding the numerical solution of the models shown in (1) and (2) respectively. For this, we make several numerical simulation tests to show the error obtained from apllying the numerical method against the step size.

Chapter 12:

In this chapter, we summarize the best results obtained in this thesis that includes application of tow sets of one-step numerical methods to the exponential mathematical model. The considered methods contains the tow sets:

- **Numerical Euler methods:**
    1. **Euler's metho (Forward Euler's method).**
    2. **Backward Euler's method.**
    3. **Modified Euler's method**
    4. **Improved Euler's method**
    5. **Midpoint method**
    6. **Huen's method**
- **Numerical Runge-Kutta methods:**
    1. **RK2 method.**
    2. **RK3 method**
    3. **RK4 method**
    4. **RK-Butcher method**