جامعة البعث
كليـــة العلوم
قسم الرياضيات

دراسة حلقات وشبكات ديديكيند الضربية

رسالة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات شعبة الجبر
(هندسة جبرية)

إعداد
رانيــة جنيد

إشـراف
الدكتورة إيمان الخوجة

١٤٣٢هـ/ ٢٠١١م

Al Baath University

Faculty of Sciences

Department of Mathematics

A Study of Dedekind Rings and Dedekind Lattices

Thesis for M. SC. Degree in Mathematics

By

Rania Juneid

Supervisor

Dr . Eaman Al-Khouja

2011

دراسة حلقات وشبكات ديديكيند الضربية

الملخص

لدراسة نظرية المثاليات في الحلقات التبديلية دراسة مجردة ، قام R. P. Dilworth [5] عام 1962 بإدخال مفهوم الشبكة الضربية وتعريف العنصر الرئيسي فيها الذي ساعده في تعريف ودراسة الشبكة الضربية النيوثرية كمفهوم مجرد لشبكة المثاليات لحلقة نيوثرية وتبديلية، وقد استطاع أن يعمم معظم الحقائق المعروفة في الحلقات النيوثرية. في السنين التالية تطورت نظرية الشبكات الضربية بوساطة العديد من الباحثين و ما تزال الأبحاث كثيرة ومتعددة في هذا المجال وذلك بسبب الجوانب المتعددة التي بالإمكان دراستها. في عام 1975 استخدم R. G. Burton [4] مفهوم العنصر الرئيسي لتعريف شبكة العناصر الكسرية المترافقة مع الشبكة الضربية L ، وذلك لدراسة المثاليات الكسرية في الحلقات التبديلية بشكل مجرد، ومن ثم استخدم هذا التعريف في توصيف شبكات ديديكيند. في عام 1976 قام D. D. Anderson [1] بتعريف ودراسة الـ r- شبكات من أجل دراسة الشبكات الضربية دون شرط انقطاع المتتاليات المتزايدة، لكن تعريفه اقتصر على الشبكات الضربية ولم يشمل المودولات الشبكية فوقها، وبذلك كان تعريفه حالة خاصة من تعريف نقار للـ R- شبكات عام 1974 [16] ، كما عمم مفهوم الـ π – حلقة على الشبكات الضربية ، فأدخل مفهومي الـ π – شبكة والشبكة التي تكون ساحة تحليل وحيد (UFD– شبكة). ونظراً للمساحة الواسعة التي تشغلها نظرية الحلقات في الجبر التبادلي وفي الهندسة الجبرية ولأهمية ساحات ديديكيند فيها، والتي تقع بين صف ساحات المثاليات الرئيسية وصف الساحات الصحيحة النيوثرية، وتشمل نظرية الأعداد الجبرية ونظرية السطوح الجبرية، فقد قمنا بدراسة هذا الصف الهام من الحلقات دراسة معمقة، وقمنا بتوصيف شبكات ديديكيند. وقد اتبعنا في هذه الرسالة منهجاً علمياً نظرياً يعتمد الكتب والمقالات العلمية، وقسمنا الدراسة فيها إلى ثلاثة فصول.

خصص الفصل الأول لدراسة حلقات و ساحات ديديكيند دراسة معمقة، وقد قسم إلى قسمين، تضمن القسم الأول دراسة المثاليات الكسرية والعمليات المعرفة عليها وخواصها، وذلك لأهمية هذه المثاليات في توصيف ساحات ديديكيند. أما القسم الثاني فقد تضمن وصف لساحات ديديكيند بطرائق مختلفة، وذلك من خلال الشروط المتكافئة في المبرهنة (2-12)، والتي كان أبرزها أن ساحات ديديكيند تكون نيوثرية ومغلقة بشكل كامل وكل مثالية أولية وغير صفرية فيها تكون أعظمية. وأشرنا إلى أن صف ساحات ديديكيند محتوى تماماً في صف الساحات النيوثرية، كما أن صف ساحات المثاليات الرئيسية محتوى في صف ساحات ديديكيند، أما العكس ليس بالضرورة صحيحاً، وأوردنا مثالاً من أجل ذلك، ثم بينا الشرط الواجب إضافته لساحة ديديكيند كي تكون ساحة مثاليات رئيسية (مبرهنة (2-17)). وتم تبيان أن صف ساحات ديديكيند يطابق صف ساحات بروفير النيوثرية، وحصلنا على عدد من الشروط المتكافئة التي بإضافة أي منها على ساحة صحيحة نيوثرية تصبح ساحة ديديكيند (المبرهنة (2-22) والمبرهنة (2-23)).

وخصص الفصل الثاني لعرض الخواص الأساسية لشبكات ديديكيند، حيث تم تعريف شبكة ديديكيند [4]، على أنها ساحة معيارية، وكل عنصر فيها اجتماع لعناصر رئيسية، وكل عنصر رئيسي فيها متراص، بالإضافة لذلك فإن كل عنصر فيها مختلف عن العنصر الأكبر يكتب على شكل جداء منته لعناصر أولية. وقد قسم هذا الفصل إلى ثلاثة أقسام. في القسم الأول أوردنا أهم التعاريف والحقائق المتعلقة بالشبكات الضربية واللازمة في هذه الرسالة، وفي القسم الثاني درسنا خواص شبكة العناصر الكسرية. أما في القسم الثالث فقد قدمنا وصفاً لشبكات ديديكيند من خلال مفهوم شبكة العناصر الكسرية، وأشرنا إلى أن الشبكة الضربية L تكون شبكة ديديكيند إذا وفقط إذا كانت L نيوثرية ، وكل عنصر أولي وغير صفري فيها يكون أعظمياً وكل عنصر رئيسي من L يكون مغلقاً بشكل كامل (مبرهنة (3-12)).

أما الفصل الثالث فقد خصص لدراسة شبكات ديديكيند وخواصها كمفهوم مجرد لحلقات ديديكيند. ويتألف هذا الفصل من قسمين. في القسم الأول تمت دراسة خواص الـ $\pi-$ شبكة و الشبكة التي تكون ساحة تحليل وحيد (UFD – شبكة) والتي درست من قبل D. D. Anderson في [1] وتمت الإشارة إلى أن هذين المفهومين يتطابقان عندما تكون الشبكة الضربية L ساحة و R– شبكة، وبرهنا أنه إذا كانت L ساحة و PG – شبكة عنصرها الأكبر I متراص فإن L

تكون UFD– شبكة إذا وفقط إذا كان أي عنصر رئيسي من L جداء لعناصر أولية. كما أثبتنا أنه إذا كانت L شبكة ضربية عنصرها الأكبر I متراص، و UFD– شبكة وكل عنصر أولي مغاير للصفر فيها عنصراً أعظمياً، فإن كل عنصر في L يكون رئيسياً. وفي القسم الثاني تم توصيف شبكات وساحات ديديكيند، حيث عرفنا الشبكة الضربية L بأنها شبكة ديديكيند، إذا كان كل عنصر مختلف عن العنصر الأكبر I فيها يكتب بشكل جداء منته لعناصر أولية. وأثبتنا أن كل عنصر أولي في شبكة ديديكيند هو عنصر أعظمي وذلك عندما تكون L PG – شبكة عنصرها الأكبر I متراص (مبرهنة (2-4)). كما أثبتنا ضمن الشروط نفسها أن كل عنصر في شبكة ديديكيند هو عنصر رئيسي (مبرهنة (2-6)). ثم أعطينا وصفاً لشبكة ديديكيند من خلال مفهوم العناصر المميزة، وأثبتنا أنه إذا كانت L R– ساحة شبكية معيارية، فإن L تكون ساحة ديديكيند إذا وفقط إذا كان كل عنصر أولي فيها منتهي التوليد وكل عنصر أعظمي وغير صفري مميزاً (مبرهنة (2-11)). وأخيراً استنتجنا أنه إذا كانت L R– ساحة شبكية ، فإن L تكون ساحة ديديكيند إذا وفقط إذا كانت L UFD – شبكة وكان كل عنصر أولي وغير صفري فيها هو عنصر أعظمي (نتيجة (2-12)).

A Study of Dedekind Rings and Dedekind Lattices

Abstract

In 1962 [5], R. P. DiLworth studied the ideal theory of commutative rings in abstract form. He introduced the concept of a principle element of a multiplicative Lattice and used it to isolate a class of multiplicative Lattices in which many of the important theorems of classical ideal theory hold. He called these Lattices Noether Lattices .The concept of a Noether Lattice is an abstraction of the Lattice of ideals of a Noetherian ring .

In 1975 [4] , R. G. Burton used the definition of principal element in a multiplicative Lattice L to define a Lattice of fractional elements, associated with L, as an abstraction of the concept of the fractional ideals of commutative rings. Then he applied the concept of fractional elements to characterize Dedekind Lattices .

Due to the importance of the class of Dedekind domains, where it lies properly between the class of principal ideal domains and the class of Noetherian integral domains and Dedekind domains are important in a algebraic number theory and the algebraic theory of curves, we studied and examined this important class, and we characterized Dedekind Lattices .

This study has been divided into three chapters :

In the first chapter , we studied Dedekind rings. First we discussed the notion of fractional ideal relative to commutative rings, and studied the properties of them, and also, we studied the invertible fractional ideals, since they are a key role in characterizing Dedekind domains. Then we characterized

Dedekind domains in several different ways **(**Theorem(2-12)**)**. Dedekind domains can be characterized equivalently in Theorem (2-12) as domains which are Noetherian, integrally closed and every non-zero prime ideal is maximal. This characterization is useful in geometry as co-ordinate rings of non-singular curves are of this type. We gave an example shows that, the class of Dedekind domains is properly contained in the class of Noetherian domains and gave another example shows that the class of principal ideal domains is properly contained in the class of Dedekind domains. It means that every principal ideal domain is Dedekind but the converse need not be true . After wards, we added a condition for a Dedekind domain to be a principal ideal domain **(**Theorem(2-17)**)** .

In addition , We showed that the class of Dedekind domains is precisely the class of Noetherian prufer domains. Then we obtained a number of equivalent conditions for a Noetherian integral domain to be a Dedekind domain **(**Theorem (2-22) and Theorem (2-23)**)** .

In the second chapter, we examined the properties of Dedekind Lattices [4]. R.G. Burtron defined a multiplicative Lattice L to be Dedekind Lattice if it is domain, modular, PG-Lattice , every principal element is compact, and in which every element can be written as a finite product of prime elements .

We gave some definitions and terminology to be used in this thesis. Then we studied the properties of the Lattice of fractional elements. After wards, we characterized Dedekind Lattices in terms of the concept of fractional elements . And we showed that the multiplicative Lattice L is Dedekind Lattice if and only if, it is Noetherian and every non zero prime element is maximal and every principal element of L is integrally closed **(**Theorem (3-21)**)** .

In the third chapter, we studied Dedekind Lattices as an abstraction concept of Dedekind rings .

In section 1 of this chapter, we studied the properties of π- Lattices and UFD Lattices [1]. It is shown that, if the multiplicative Lattice L is an R-Lattice and domain, then L is UFD Lattice if, and only if, it is a π- Lattice . We discussed that, if L is a domain and PG- Lattice in which the greatest element I is compact, then L is UFD Lattice, if and only if, every principal element of L is a product of prime elements of L . And we proved that, if L is a multiplicative Lattice in which the greatest element I is compact and UFD Lattice and every prime element is maximal , then every element of L is principal .

In section 2, we characterized Dedekind Lattices and Dedekind domains .

We defined a multiplicative Lattice L to be a Dedekind Lattice if every element of L is a finite product of prime elements .

We proved that, if L a PG- Dedekind lattice in which the greatest element I is compact, then every prime element of L is a maximal element **(**Theorem(2-4)**)**. Also, we proved in the same conditions of the previous theorem that, if L is a Dedekind domain, then every element is principal **(**Theorem(2-6)**)**. Furthermore, we investigated characterized elements. So, we showed that, if L is a domain, modular and an R- lattice, then L is a Dedekind domain if and only if every element is characterized **(**Theorem (2-11)**)** .

Finally we concluded that, if L is domain and an R-Lattice, then L is a Dedekind domain, if and only if, L is UFD- lattice and every non zero prime element is maximal.