الجمهورية العربية السورية

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

دراسة الخواص المنطقية للشبكات

رسالة أعدت لنيل درجة الماجسـتير في الرياضيات اختصاص جبر

(جبر المنطق)

إعداد

سوسن السطايحي

إشراف

الدكتور: فرحان اسماعيل **الدكتورة : إيمان الخوجة**

العام الدراسي

٢٠١١ م ــ ١٤٣٢هـ

Al- Baath University

Faculty of Sciences

Department of Mathematics

A Study of Logical Properties of Lattices

Thesis for M. SC. Degree in Mathematics

Submitted By:

Sawsan Al – Staihe

Supervision By :

D. Farhan Esmaiel **D. Eaman Al - Khouja**

Department of Mathematics **Department of Mathematics** **Faculty of Sciences**
Faculty of Sciences **University of Damascus**
University of Al - Baath

2010 – 2011

الملخص عن رسالة الماجستير بعنوان

"دراسة الخواص المنطقية للشبكات"

إن موضوع الرسالة يقع في دراسة العلاقة بين بيئة المنطق والشبكات بشكل عام والتوزيعية منها بشكل خاص . لذلك تمت دراسة الشبكات من وجهة نظر منطقية ومن ثم تحديد أنواع الشبكات التي يتم من خلالها تعريف بيئة منطق فوجدنا أن كلاً من الشبكة البوليانية والاقتضائية والتوزيعية المنتهية تحدد بيئة منطق . كما بينا أنه لا يمكننا الانتقال من بيئة منطق إلى الشبكة إلا بعد تحقق عدد من الشروط لذلك تم تحديد هذه الشروط من خلال تعريف علاقة تكافؤ وعلاقة شبه ترتيب تم تطويرها إلى علاقة ترتيب تمكنا من خلالها الانتقال من بيئة منطق إلى الشبكة الاقتضائية.

لقد قسمت الرسالة إلى أربعة فصول:

خصص الفصل الأول لدراسة بعض أنواع المنطق الرياضي مثل المنطق الافتراضي والمنطق البديهي و المنطق الإسنادي و المقارنة فيما بينهم.

وقسم إلى ثلاثة أقسام :

درسنا في القسم الأول المنطق الافتراضي(التقليدي) وعرضنا فيه تعريف القضية المنطقية وأدوات الربط ، إضافةً إلى تعريف بنية القضايا المنطقية وأهم خواصها، والتي تدعى جبر بول للقضايا المنطقية . وفي نهاية هذا القسم تعرفنا على أهم القواعد الإستنتاجية في المنطق الافتراضي. من المعروف أنه عندما نتحدث في المنطق الرياضي فإننا نتعامل مع قضايا قد تكون صحيحة فقط وقد تكون خاطئة فقط ومع جمل تكون صحيحة في شروط ما وتكون خاطئة في شروط أخرى، حيث يمكن تسميتها أحياناً بجمل مفتوحة. وبسبب دراسة هذه الجمل المفتوحة كانت الحاجة للمنطق الإسنادي الذي يملك القدرة على التعبير بشكل أشمل من المنطق الافتراضي ، و ذلك من خلال إمكانية بناء لغة من المرتبة الأولى مؤلفة من متحولات و رموز تابعية و .... وكان ذلك مضمون القسم الثاني من الفصل الأول وقد درسنا فيه اللغة من المرتبة الأولى **L** :التي هي مجموعة من الرموز تقسم إلى قسمين:

(I)– الجزء الأول وهو مشترك بين كل اللغات ويحوي متغيرات(حيث نرمز لمجموعة المتغيرات

بـ **V** أي **{.... , V = {p , q** و أدوات ربط منطقية وأقواس، بالإضافة إلى مكممي الشمول والوجود $(\forall,\exists)$.

(II)– الجزء الثاني يختلف من لغة إلى أخرى وهو عبارة عن اجتماع مجموعة من الرموز الثابتة ويرمز لها بـ **C** وعلى سلسلة من الرموز التابعية $(f_n)_{n\in N^*}$ وسلسلة من الرموز العلاقاتية $(R_n)_{n\in N^*}$.

يمكن التعبير عن اللغة الإسنادية من المرتبة الأولى بالشكل الآتي:

$$\mathbf{L} = \mathbf{V} \cup \{\neg,\ \vee,\ \wedge\ ,\ \Rightarrow, \Leftrightarrow,), (, \forall, \exists\} \cup \boldsymbol{C} \cup (\boldsymbol{R_n})_{\boldsymbol{n\in N^*}} \cup (\mathbf{f_n})_{\mathbf{n\in N^*}}$$

بالإضافة إلى ذلك عرضنا تعريف كل من عبارات وحدود اللغة من المرتبة الأولى وأنواعها.

ومن ثم درسنا مفهوم الموديل الذي هو تركيب يختص باللغة **L** ، حيث يعطي كل عنصر منها توصيف معين ، ويمكن أن يوجد للغة أكثر من موديل. يتألف موديل اللغة من المرتبة الأولى **L** من :

1- المجموعة غير الخالية **M** والتي تدعى منطلق.

2- من أجل كل رمز ثابت **C** من **L**، يوجد عنصر $\boldsymbol{c^{-\mathcal{M}}}$ من **M** يدعى تفسير الرمز **C** في الموديل $\boldsymbol{\mathcal{M}}$.

3- أياً كان العدد الطبيعي $k \geq 1$، و أياً كان **f** رمز لدالة درجتها **k** من اللغة **L**

يوجد التطبيق:

$$\boldsymbol{f^{-\mathcal{M}}} :\ \boldsymbol{M^k} \rightarrow \boldsymbol{M}$$

يدعى $\boldsymbol{f^{-\mathcal{M}}}$ وصفاً للرمز **f** في الموديل $\boldsymbol{\mathcal{M}}$.

4- أياً كان العدد الطبيعي $k \geq 1$، وأياً كانت **R** رمز لعلاقة درجتها **k** ، عندئذ تدعى المجموعة الجزئية $\boldsymbol{R^{-\mathcal{M}}}$ من M^k تفسير (وصف) الرمز **R** في الموديل $\boldsymbol{\mathcal{M}}$

5- في حال كانت اللغة **L** تحتوي على علاقة المساواة $\simeq$ فإن المجموعة:

$$\{\,(\mathbf{a}\ ,\mathbf{b}) \in \boldsymbol{M^2}\ :\ \ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\,\} \subseteq \boldsymbol{M^2}$$

هي وصف للعلاقة $\simeq$ في الموديل $\boldsymbol{\mathcal{M}}$.

على سبيل المثال لتكن $L = \{R,f,c\}$ لغة من المرتبة الأولى، تحوي : رمز لعلاقة ثنائية **R** ورمز لدالة أحادية **f** ورمز لثابت **c** ، يمكن تعريف موديل خاص بتلك اللغة كالآتي:

$\mathcal{M} = < \mathbf{R}\ ,\ \leq\ ,\ \mathbf{cos}\ \ ,\ \pi >$ ، حيث إن منطلقه مجموعة الأعداد الحقيقية **R** ، ويعطى توصيف الرموز **R, f, c** كالآتي:

يتم توصيف رمز العلاقة **R** من خلال علاقة الترتيب الجزئي ≤ .أما توصيف رمز **f** في الموديل $\mathcal{M}$ يتم من خلال الدالة

$$f^{-\mathcal{M}} = \mathbf{cos} \quad : R \ \to R$$

$$\mathrm{x} \longmapsto cosx$$

في حين إنالعدد الحقيقي **π** هو توصيف الرمز الثابت **C** في الموديل$\mathcal{M}$ أي **π** = $c^{-\mathcal{M}}$

ومن ثم انتقلنا إلى تبيان الشروط اللازمة لكي تتحقق أهم القضايا المنطقية ضمن الموديل $\mathcal{M}$ ، بالإضافة لذلك عرضنا بعض طرائق الاستنتاج الهامة في المنطق الإسنادي . لقد خصص القسم الثالث من الفصل الأول لإجراء مقارنة بين المنطق التقليدي المنطق البديهي، حيث يعد المنطق البديهي تعميماً للمنطق التقليدي الذي يحوي على قيمتي الحقيقة صح **1** و خطأ **0** ، في حين يحتوي المنطق البديهي على عدة قيم للحقيقة محصورة بين الـ **0** و الـ **1** تأخذ العبارة الصحيحة أكبر قيمة فيه **1** . إننا غير قادرين على استخدام الاستنتاج غير مباشر في المنطق البديهي ، وهذا ما جعله بحاجة إلى المنطق التقليدي لكي ينمو ويتطور.وبما أن مضمون الرسالة يقع ضمن إطار جبر المنطق ، فقد خصص الفصل الثاني منها لتوصيف المقابلات الجبرية لبعض أنواع المنطق(المنطق التقليدي و البديهي) ، حيث يمكننا تحوّيل المسائل المنطقية إلى علاقات جبرية يتم من خلال حلها بطرق رياضية بحتة والوصول إلى إجابات دقيقة و واضحة لا لبس فيها للمسائل المطروحة، ولقد تضمن التوصيف دراسة جبر بول الذي يعد المقابل الجبري للمنطق التقليدي ، ودراسة جبر هيتنغ الذي يشكل تعميماً لجبور بول، ويعد القابل الجبري للمنطق البديهي و يلعب دور مشابه للدور الذي يقوم به جبر بول فيما يتعلق بالمنطق التقليدي.

في حين خصص الفصل الثالث لدراسة الشبكات وقد تم فيه تعريف الشبكة من وجهتي نظر الأولى جبرية والثانية نظرية المجموعات، وعرضنا بعض أنواع الشبكات

(الشبكة التوزيعية و الشبكة المتممة و الشبكة البوليانية و الشبكة الاقتضائية و الشبكة الفرقية) وخواصها .

أما الفصل الرابع فقد تضمن النتائج التي توصلنا إليها حيث قمنا بتبيان مفهوم بيئة المنطق والتي هي مجموعة الجمل **(Sentences)** $S \neq \Phi$ المزودة بالعمليات الثنائية الثلاث $(.),(+),(\rightarrow)$ ، والعملية الأحادية $(*)$، وتحقق الشرطين الآتيين :

من أجل أي عنصرين **a ,b** من **S**، توجد ثلاثة عناصر من **S**: $a+ b$, $a.b$, $a \rightarrow b$ معينة بشكل وحيد.

بالإضافة لذلك أياً كان العنصر **a** من **S** فإنه يوجد عنصر وحيد ***a** من **S**. ومن ثم انتقلنا إلى نقطة أساسية في المنطق الرياضي وهي علاقة الإثبات، فيعرف **s** ├ حيث إن $s \in S$ على الشكل الآتي:

$$\vdash s \equiv (\text{الجملة } s \text{ مثبتة})$$

تطبق علاقة الإثبات السابقة ├ على عناصر من الشكل $a \rightarrow b$

و ذلك إذا و فقط إذا كان $a \leq b$ أي :

$$\vdash a \rightarrow b \quad \Leftrightarrow \quad a \leq b$$

وهي العلاقة التي تربط عناصر الشبكة بعناصر بيئة المنطق .

وقسم الفصل الرابع إلى قسمين ناقشنا في القسم الأول إمكانية أن تعرف الشبكة بيئة منطق ، حيث إن الشبكة بشكل عام لا تعرف بيئة منطق لأنها ليست بالضرورة أن تكون مغلقة بالنسبة للعملية الثنائية $\rightarrow$ والعملية الأحادية *، وقدمنا بعض الأمثلة عن شبكات تكون كل منها بيئة منطق.

أما القسم الثاني فقد تضمن تبيان الشروط اللازمة لكي تحقق بيئة المنطق شروط الشبكة ، فقمنا بتعريف علاقة التكافؤ **E** وعلاقة شبه الترتيب **Q** اللتين استطعنا بالاستعانة بهما تحقيق ذلك الهدف .

Abstract of the Thesis

A Study of the logical properties of Lattices

The subject of this thesis is the study of the relationship between the logical system and lattice or in particular distributive lattice . so we look to the lattice of view of logic . then we characterized the lattices which can be defined the logical system . we find that each of implicative , finite distributive and Boolean lattice is defined logical system. also we showed that the logical system can't be exhibited as lattice . so we defined the necessary conditions for that.

The thesis is divided into four chapters :

In first chapter we studied some kinds of logic, as propositional,

intuitionistic and predicate logic. and we compared between them .

The first chapter is divided into two sections:

In the first section , the propositional logic is studied . so we showed the definition of compound proposition , logical connectives , and the structure of logical propositions and thier important properties , which is called Boolean algebra of logical propositions. Then we studied the at the inference rules in the propositional logic in some detail .

In the propositional logic the proposition that is true or false , but not both and there is some sentences which is true in particular conditions and false in other.

The predicate calculus can express more than propositional calculus through forming a language of the first order L.

The language of the first order is a set L of symbols composed of two parts:

The first part , common to all languages, consists , on the one hand , of a count ably infinite set $V = \{p , q , \ldots.\}$ .and logical connectives($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) , parenthesis),(universal $\forall$ quantifier , and existential quantifier $\exists$.

The second part , which can vary from one language to another , is the union of a set $\boldsymbol{C}$ and two sequences $(\boldsymbol{R_n})_{\boldsymbol{n\in N}^*}$ and $(\mathbf{f_n})_{\mathbf{n\in N^*}}$of sets .

It can be consider the predicate language of the first order:

L = V $\cup \{\neg\ ,\ \vee\ ,\ \wedge\ ,\ \Rightarrow, \Leftrightarrow , \forall , \exists\} \cup C \cup (R_n)_{n\in N^*} \cup (\mathrm{f_n})_{\mathrm{n\in N^*}}$

In this section we get to know a formula , terms of language of the first order and its kinds . and the concept of model that is the structure of language of the first order L ,and each element of it gives a particular interpretation .....?

A model of language of the first order L ,or L- the structure, is a structure $\mathcal{M}\ consisting\ of$:

A non – empty set $\mathcal{M}$, called the domain or the base set of the structure $\mathcal{M}$.

For each constant symbol c of L, an element C

Of L , an element $c^{-\mathcal{M}}$of M called the interpretation of symbol c in the model $\mathcal{M}$.

For every natural number k≥1 and for every k-ary function symbol f of L, a mapping$f^{-\mathcal{M}}$ from M^kinto M called the interpretation of symbol f in the model $\mathcal{M}$

For every natural number k≥1 and for every k-ary relation symbol R of L, subset $R^{-\mathcal{M}}$ of M^kinto M called the interpretation of symbol R in the model $\mathcal{M}$. In the case where L is a language with equality we say that the model $\mathcal{M} respects$ equality if $\simeq^{-\mathcal{M}}$ the interpretation in the model

$\mathcal{M} of$ equality symbol $of\ L, is\ the$ equality relation on

(i . e . is the set{ (a , b) $\in M^2\ :\ \ a = b$ }) , also colled the diagonal of M^2 .

Thus , if the language L={R ,f ,c} involves a binary relation symbol R , a unary function symbol f and a constant symbol c , it will suffice to write

$\mathcal{M} =< R , \leq , cos, \pi \quad >$ to define the model of L in which the base set is the set of reals and in which the interpretations of the symbols R , f and c are respectively the usual order relation, the map $x \mapsto cosx \text{ , and the real number } \pi$. we discuss some important inference rules in predicate logic.

Generally, this thesis is about logic algebra ,so we specialize the second chapter to study algebra facings in some kinds of logic

(classic and intuitionistic logic); we can transform logic matters into algebraic equalities that it can be solved by pure mathematic methods to find specific and clear replication. Also ,we study Boolean algebra which considers algebra facing of classic logic .

And we study Heyting algebra which generalize Boolean algebra and it is considered algebra facing of intuitionistic logic. It plays a resemble rule to Boolean algebra in what is related to classic logic.

We specialized the third chapter to study lattices ; we defined the lattice in two points of view algebraic and set theory. And we showed some kinds of lattices (distributive , complemented, Boolean, implicative, subtractive)lattices.

the fourth chapter is specialized to show an .
important result

It is of note to mentioned that , in general the lattice does not define logical system since , lattice need not be closed under the binary operation(→) and unary operation(*). So we gave some examples to show that .

In the second section of this chapter we gave necessary conditions for logical system to be lattice . by the relation of equivalence E and dyadic relation Q.