جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الأقطار لصف من الدوال التحليلية

دراسة مقدمة
لنيل درجة الماجستير في التحليل الرياضي

إعداد

ميساء صافي

بإشراف
الدكتور عصام ديبان

٢٠١٠ م – ١٤٣١
هـ

ملخص البحث

تشكل دراسة نظرية تقريب الدوال في التحليل الرياضي منحىً جديداً متطوراً في عصرنا الحالي. حيث تم إدخال مفهوم التقريب الأفضل في التحليل الرياضي من قبل العالم تشيبتشيف، الذي درس في خمسينيات القرن التاسع عشر إمكانية إيجاد كثير حدود يبعد أقل ما يمكن عن دالة مستمرة، ومنذ ذلك الحين ارتبط تطور نظرية التقريب بهذا المفهوم، حيث دُرس في بداية الأمر التقريب الأفضل لدوال منفردة، أما في ثلاثينات القرن العشرين فقد تحولت الأبحاث إلى تقريب صفوف كاملة من الدوال التي تحقق خواص تفاضلية معينة، بواسطة فضاءات مكونة من كثيرات حدود، ويعتبر كولموروف أول من بحث في مسألة الاختيار الأمثل لوسائط التقريب، حيث أورد مثالاً لحل هذه المسألة في الفضاء L_2 وذلك عام 1936، يُعرف هذا الاتجاه من البحوث في هذه الأيام بنظرية الأقطار لصفوف الدوال، و يتم تطوير هذه النظرية بشكل متسارع وباتجاهات متعددة في وقتنا الحالي. ومن الرياضيين الذين يبحثون في هذا المجال نذكر: تايكوف ل.ف، تشيرنيخ ن.أ، فاكرتشوك، بابينكو ا.غ، ستيتشكين س.ب، كورنيتشوك ن.ب ويوسف ح.

قسمنا الرسالة إلى مقدمة عامة وفصلين:

عرضنا في الفصل الأول مجموعة من النتائج وثيقة الصلة بالبحث، وأهمها كانت مجموعة من المبرهنات لعدد من الباحثين، وعلى رأسهم فاكرتشوك ود.حسن يوسف. وانطلاقاً من طريقة إثبات هذه النتائج استطعنا إثبات قضيتين هامتين في هذا السياق تتلخصان بالمبرهنتين التاليتين:

مبرهنة 1-4:

من أجل أي عدد طبيعي n، ومن أجل أي دالة $f(z)$ من الصف H_2 تتحقق المتراجحة:

$$E_n^2(f)_{H_2} \le \frac{3n}{3\pi-4}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \omega^2(F,\theta)_{H_2}\{1+\sin 2n\theta\}d\theta ; n=1,2,.....$$

تتحقق المساواة في هذه المتراجحة من أجل الدالة $f_0(z)=z^n; n>0$.

مبرهنة 1-5:

من أجل أي دالة $f(z)$ من الصف H_2، ومن أجل أي عدد طبيعي n و $0<h\le h^* \approx 0.883\frac{\pi}{n}$،

تتحقق المتراجحة:

$$E_n^2(f)_{H_2} \le \frac{\int_0^h \omega^2(F,\theta)_{H_2}\left\{1+\sin\frac{\pi}{h}\theta\right\}d\theta}{2\int_0^h (1-\cos n\theta)\left(1+\sin\frac{\pi}{h}\theta\right)d\theta}$$

تتحقق المساواة في هذه المتراجحة من أجل الدالة $f_0(z)=z^n; n>0$ ، مهما تكن h حيث $0<h\le h^*$

اعتماداً على المبرهنة الأولى، عرفنا في الفصل الثاني صفي الدوال:

$$W_3^r = \left\{ f(z) : f^{(r)} \in C_{2\pi} : \int_0^u \omega^2\left(F^{(r)}, \theta\right)_{H_2} \left\{1+\sin\frac{\pi}{u}\theta\right\} d\theta \le \psi^2(u) \right\}$$

$$W_3^s = \left\{ f(z) : f^{(s)} \in C_{2\pi} : \int_0^u \omega^2\left(F^{(s)}, \theta\right)_{H_2} \left\{1+\sin\frac{\pi}{u}\theta\right\} d\theta \le \psi^2(u) \right\}$$

وتوصلنا إلى حساب أقطار هذين الصفين من خلال العلاقتين الآتيتين:

$$P_n(W_3^r, H_2) = \frac{\sqrt{3(n-r)}}{\sqrt{3\pi-4}} \alpha_{nr} \psi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right), \qquad r < n$$

$$P_n(W_3^s, H_2) = \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{3\pi-4}} \beta_{ns} \psi\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

كما عرفنا صفي الدوال:

$$W_4^{(r)} = \left\{ f(z) : f^{(r)} \in C_{2\pi} : \int_0^u \omega^2\left(F^{(r)}, \theta\right)_{H_2} \left\{1+\sin\frac{\pi}{u}\theta\right\} d\theta \le \psi^2(u) \right\}$$

$$W_4^s = \left\{ f(z) : f^{(s)} \in C_{2\pi} : \int_0^u \omega^2\left(F^{(s)}, \theta\right)_{H_2} \left\{1+\sin\frac{\pi}{u}\theta\right\} d\theta \le \psi^2(u) \right\}$$

اعتماداً على المبرهنة الثانية التي أثبتنا صحتها في الفصل الأول، وحسابنا أقطار هذين الصفين وفق العلاقتين الآتيتين:

$$P_n(W_4^r) = \frac{\alpha_{nr} \psi\left(\frac{\pi\lambda}{(n-r)}\right)}{\left[2\int_0^{\frac{\pi\lambda}{(n-r)}} (1-\cos(n-r)\theta)\left\{1+\sin\frac{(n-r)\theta}{\lambda}\right\} d\theta \right]^{\frac{1}{2}}}, \qquad r < n$$

$$P_n(W_4^s) = \frac{\beta_{ns} \psi\left(\frac{\pi\lambda}{n}\right)}{\left[2\int_0^{\frac{\pi\lambda}{n}} (1-\cos n\theta)\left\{1+\sin\frac{n\theta}{\lambda}\right\} d\theta \right]^{\frac{1}{2}}}$$

حيث الدالة $\psi(u)$ اختيارية، وتحقق شروط موضوعة عليها في كل حالة.

بمقارنة نتائج هذه الرسالة بالنتائج السابقة، يمكن لنا أن نستنتج أن ما توصل إليه الباحثون في هذا السياق من نتائج في الفضاء L_2 يصح في الفضاء H_2.

Summary

The study of the functions theory mathematical analysis forms a new developed tendency in our time. The idea of the best approximation had been entered by Chipchove.

In the fiftieth of the previous century, Chipchove studied the possibility of finding polynomial which is a way as possible from a continuous function, So the development of approximation theory is depends on this concept.

So at the first the best approximation was studied for single functions but in the thirties of this century, these researches have turned to approximating complete classes of function which have differential properties from space consisting of polynomials .

First kolmogorof has begun a study of the ideal choice for approximation means in 1936 , where he has given an example to solve this matter in L_2 . now, this manner of these researches in known by N-widths theory of function and this theory has a great important in the best approximations.

We mention some of mathematicians like :

Tykov, Chernikh, Babenko, A. G,Styteshkeen.S.B, Kornichok N.B, Youssef.H.

In the first chapter we showed a group of results closely related to the research, the most important were theories for some mathematicians as: Vakerchok, Youssef.H.

Depending on the way of proving these results we could prove two cases in this regard that may be summarized in these two theories:

Theorem1-4:

For any function $f(z) \in H_2$ and for any positive integer n , the inequality is achieved:

$$E_n^2(f)_{H_2} \le \frac{3n}{3\pi - 4} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \omega^2 \left(F, \theta\right)_{H_2} \left\{1 + \sin 2n\theta\right\} d\theta; n = 1, 2, ...$$

The equality can be achieved in this inequality, for instance, for the function $f_0(z) = z^n; n > 0$.

Theorem1-5:

For any function $f(z) \in H_2$ and for any positive integer n , the inequality is achieved: