جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

تطبيق مبدأ ليابونوف الثّاني في دراسة استقرار جملة معادلات تفاضليّة ذات تأخير زمني

دراسة أعدّت لنيل درجة الماجستير في التحليل الرياضي

إعداد الطالب

أحمد نبيه عبد الله

إشراف الأستاذ الدكتور

سامح العرجة

ALBAATH UNIVERSITY
FACULTY OF SCIENCE
MATHEMATICAL DEPARTMENT

Application of the second Lyapunov method to stability investigation of differential system of equations with delay time

submitted to M.sc.Degree in mathematical analysis

SUBMITTED BY

AHMAD NBEH ABD ALLH

SUPERVISOR

P.Dr.SAMEH ALARGEH

ملخص البحث

ندرس الاستقرار باستخدام مبدأ ليابونوف عند حل جملة معادلات تفاضلية ذات تأخير زمني من الشكل :

$$\dot{x}(t)=f\left(x(t),\, x\left(t-\tau\right)\right),\ \tau>0 \qquad (1-1)$$

في **<u>الفصل الأول</u>** تم التعرف على أشكال المعادلات التفاضلية ذات التأخير الزمني .

وركزنا على دراسة المعادلة اللوجستية ذات التأخير الزمني من الشكل (1,1) إذ بيّنا متى تكون هذه المعادلة خطية، متجانسة خطياً، غير متجانسة خطياً، توقفية، لا توقفية .

ودرسنا مبرهنة الوجود والوحدانية وتابع الاستمرار الأملس لحل هذه المعادلة.

ليكن $D:C\to R^{n}$ مؤثراً خطياً ومستمراً وشديد الصغر عند الصفر (atomic at zero)، وليكن $C_D=\left\{\varphi\in C:D_{\varphi}=0\right\}$، فإننا ندعو المؤثر D مؤثراً مستقراَ، إذا كان الحل الصفري للمعادلة الفرقية المتجانسة :

$$\dot{y}\left(t\right)=f\left(y\left(t\right),y\left(t-\tau\right)\right)$$

$$D_{y_t}=0\ ,\ t\geq 0\ ,\ y_0=\psi\in C_D$$

مستقر استقراراً مقارباً بانتظام .

يوجد عدة طرق لدراسة استقرار المعادلات التفاضلية ذات التأخير الزمني :

<u>الطريقة الأولي</u>: تعتمد على المعادلة المميزة للمعادلات التفاضلية ذات التأخير الزمني .

درسنا استقرار المعادلة التفاضلية الدالية المحايدة المستقلة ذاتياً $NFDE\left(D,L\right)$:

$$\frac{d}{dt}Dx_t=Lx_t \qquad (1-19)$$

وعندما $Dx_t=x\left(t\right)$، فإن المعادلة (1-19) تصبح معادلة تفاضلية ذات تأخير زمني.

أخذنا على سبيل المثال المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)+\rho x(t-\tau)\right)=a x(t)+b x(t-\tau)+\int_{-\tau}^{0} x(t+0)k(\theta)d\theta \quad (1\text{-}20)$$

الطريقة الثانية: تعتمد على طريقة دالة ليابونوف، إذا نلجأ لهذه الطريقة لأن تحليل المعادلات المميزة للمعادلات التفاضلية الخطية ذات التأخير الزمني المستقلة ذاتياً أمر صعب. ويكون المشتق لدالة ليابونوف من الشكل :

$$\dot{V}=\dot{V}(t,\varphi)=\overline{\lim_{h\to 0^{+}}}\frac{1}{h}\left[V\left(t+h,x_{t+h}(t,\varphi)\right)-V(t,\varphi)\right]$$

وتم ذكر مثال .

الطريقة الثالثة: الطريقة الفعالة الأخرى لتحليل الاستقرار للمعادلات التفاضلية ذات التأخير الزمني هي تطبيقات لمبرهنات رازموخين. هذه التقنية تستعمل الدوال أكثر من الداليات، وعند استخدامنا الداليات فإن المبرهنات المذكورة في الطرق السابقة بشكل عام تتطلّب أن يوجد مشتقات مطّردة متناقصة على كامل حلول المعادلات المدروسة.

مثل هذا المطلب يجعل دالة ليابونوف أكثر صعوبة، وذلك لأن الفضاء C أكثر تعقيداً من الفضاء R^{n}، ويكون مشتق دالة ليابونوف من الشكل :

$$\dot{V}\left(t,x(t)\right)=\overline{\lim_{h\to 0^{+}}}\frac{1}{h}\left[V\left(t+h,x(t+h)\right)-V\left(t,x(t)\right)\right]$$

وتم ذكر أمثلة على هذه الطريقة .

الفصل الثاني:

يمثل المحور الأساسي لدراستنا إذا قدمنا فيه جملة معادلات تفاضلية ذات تأخير زمني من الشكل (1-1) عرضنا مبدأ ليابونوف الثاني الذي طور في اتجاهين:

١- يتلخص الاتجاه الأول باستخدام الدوال المنتهية البعد كشرط إضافي للاشتقاق يدعى هذا الشرط بشرط رازموخين.

٢- الطريقة الثانية تعتمد على دالة ليابونوف – كراسوفسكي وهي الطريقة التي سنستخدمها في الدراسة .

طريقة دالة ليابونوف – كراسوفسكي :

لنرمز بـ $x(t+s)$ لدالة المتجهة المعرفة على المجال $-\tau \le s \le 0$ من أجل كل قيمة معينة $t > 0$.

عندئذ تحدد الدالة $V[x(t),t]$ بالنسبة لدالة المتجهة $x(t+s)$ بحيث $-\tau \le s \le 0$.

وندعوها دالة ليابونوف – كراسوفسكي حيث أن مشتقها يلعب دوراً هاماً في مبرهنة الاستقرار.

$$\bar{D}_+ V = \lim_{\Delta t \to 0} \sup \frac{1}{\Delta t} \left\{ V[x(t+\Delta t), t+\Delta t] - V[x(t),t] \right\}$$

يرمز $\bar{D}_+ V$ للمشتق اليميني الأعلى لدالة ليابونوف على كامل الحلول $x(t)$ للجملة ذات التأخير الزمني (1-1) .

ولدراسة طريقة دالة ليابونوف – كراسوفسكي نتبع الخطوتين التاليتين :

الخطوة الأولى: تتضمن التوسع في مبرهنة الحركة من أجل هذه الطريقة .

الخطوة الثانية: استخدام النتائج النظرية التي تجعل المبرهنات أكثر تطبيقاً في إنشاء الدوال.

لنبدأ بشرح الخطوتين والمبرهنات الموجودة في كل خطوة :

<u>الخطوة الأولى:</u>

تعتمد على صياغة مبرهنات الاستقرار وعكوسها حسب ليابونوف والاستقرار المقارب للحل الصفري للجملة (1-1) وأن تكون هذه المبرهنات متعلقة بمفهوم النظيم الذي يعرف بالشكل :

$$\|x(t)\|_\tau = \sup_{-\tau \le s \le 0} \left\{ |x(t+s)| \right\} \quad (*)$$

مبرهنة الاستقرار بحسب ليابونوف (1-2-2):

يكون الحل $x(t) \equiv 0$ مستقراً حسب ليابونوف لجملة المعادلات التفاضلية (1-1) ذات التأخير الزمني إذا وجدت دالة $V[x(t),t]$ تحقق الشروط :

1) $a\left(\| x(t) \|_\tau\right) \le V[x(t),t]$

2) $\bar{D}_+ V[x(t),t] \le 0$

حيث $a(r)$ دالة موجبة مستمرة وغير متناقصة و $r > 0$ و $a(0) = 0$.

مبرهنة الاستقرار المقارب (2-2-2):

يكون الحل $x(t) \equiv 0$ مستقراً استقراراً مقارباً لجملة المعادلات التفاضلية (1-1) ذات التأخير الزمني إذا وجدت دالة $V\left[x(t),t\right]$ تحقق الشروط :

$$1)\quad a\left(\| x(t) \|_{\tau}\right) \leq V\left[x(t),t\right] \leq b\left(\| x(t) \|_{\tau}\right)$$

$$2)\quad \bar{D}_{+}V\left[x(t),t\right] \leq -c\left(\| x(t) \|_{\tau}\right)$$

حيث $a(r),b(r),c(r)$ دوال موجبة مستمرة غير متناقصة من أجل كل : $r \geq 0$

وعلى سبيل المثال درسنا الجملة التوقفية الخطية التالية :

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,x(t-\tau) \qquad (2\text{-}2)$$

حيث A,B مصفوفات ثابتة والصيغة التربيعية للدالة $V(x)$ هي :

$$V\left[x(t)\right] = x^{T}(t)Hx(t) + \int_{-\tau}^{0} x^{T}(t+s)Gx(t+s)ds$$

حيث H,G مصفوفات ثابتة موجبة تحديداً، ويكون من المستحيل إيجاد الدوال $a(r),c(r)$، التي تحقق شروط مبرهنة الاستقرار المقارب (2-2-2). لذلك جاءت الخطوة الثانية صاغت الاستقرار كي يكون أكثر سهولة في إنشاء مثل هذه الدوال .

<u>الخطوة الثانية:</u>

تضمنت المبرهنة التالية :

مبرهنة الاستقرار المقارب (2-2-3) :

يكون الحل $x(t) \equiv 0$ مستقراً استقرار أسياً لجملة المعادلات التفاضلية (1-1) ذات التأخير الزمني إذا وجدت دالة $V\left[x(t),t\right]$تحقق الشروط :

$$1)\quad a\left(| x(t) |\right) \leq V\left[x(t),t\right] \leq b\left(\| x(t) \|_{\tau}\right)$$

2) $\bar{D}_+ V[x(t),t] \le -c(|x(t)|)$

تم شرح طريقة إيجاد دالة ليابونوف – كراسوفسكي لجملة خطية توقفية ذات تأخير زمني من الشكل (2-2) الشكل التربيعي العام للدالة $V[x(t),t]$ يعطى بالشكل [7] :

$$\begin{aligned} V[x(t)] &= x^T(t)Hx(t) + \int_{-\tau}^{0} x^T(t+s)K(s)x(t)dt \\ &+ \int_{-\tau}^{0} x^T(t+s)G(s)x(t+s)ds \qquad (2\text{-}3) \\ &+ \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} x^T(t+s_1)M(s_1,s_2)x(t+s_2)ds_1ds_2 \end{aligned}$$

حيث H مصفوفة تربيعية موجبة تحديداً من المرتبة $n\times n$، و $K(s),G(s),M(s_1,s_2)$ مصفوفات مستمرة ، و $M(s_1,s_2),H$ مصفوفات متناظرة . هذه الدوال تحقق الآتي :

$$\frac{d}{dt}V[x(t)] = W[x(t)]$$

حيث إن :

$$\begin{aligned} W[x(t)] &= x^T(t)Qx(t) + x^T(t-\tau)Rx(t) + x^T(t-\tau)Sx(t-\tau) \\ &+ \int_{-\tau}^{0} x^T(t+s)D(s)x(t)ds + \int_{-\tau}^{0} x^T(t+s)E(s)x(t+s)ds \qquad (2\text{-}4) \\ &+ \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} x^T(t+s_1)F(s_1,s_2)x(t+s_2)ds_1ds_2 \end{aligned}$$

وإن المصفوفات المعلومة $Q,R,S,D(s),E(s),F(s_1,s_2)$، تحقق شروط سلبية الدالة $W[x(s)]$ على مجموعة حلول الجملة .

مبرهنة (2-3-1) :

إذا كانت الدالة المستمرة $V(x,t)$ للجملة (1-1) موجودة وتحقق الشرط :

$$V(x(s),s) < V(x(t),t), s < t$$

(شرط رازموخين) من أجل المنحنيات $x(t)$ التي تحقق :

$$1)\quad a(|x|) \le v(x,t)$$

$$2)\quad \frac{dV(x(t))}{dt} \le 0$$

حيث $a(r)$ دالة موجبة مستمرة غير متناقصة من أجل كل $a(0)=0, r>0$. عندئذ يكون الحل الصفري $x(t)\equiv 0$ للجملة (1-1) هو مستقر بحسب ليابونوف .

مبرهنة (2-3-2):

إذا كانت الدالة المستمرة $V(x,t)$ للجملة (1-1) موجودة وتحقق الشرط :

$$1)\quad a(|x|) \le V(x,t) \le b|x|$$

$$2)\quad \frac{dV(x(t))}{dt} \le -c(|x(t)|)$$

من أجل المنحنيات $x(t)$ التي تحقق $V(x(s),s) < V(x(t),t), s<t$

حيث $a(r), b(r), c(r)$ دوال موجبة مستمرة غير متناقصة من أجل كل $r > 0$ وتطابق الصفر من أجل $r = 0$ عندئذ يكون الحل الصفري $x(t)\equiv 0$ للجملة (1-1) مستقرّ استقراراً مقارباً.

– درسنا الاستقرار المقارب للجمل ذات التأخير الزمني الأول من الشكل :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BX(t-\tau) \qquad (2-7)$$

من أجل ذلك درسنا :

<u>**أولاً**</u> استقرار الجملة :

$$\frac{dX(t)}{dt} = BX(t-\tau) \qquad (2-8)$$

وهنا نميز حالتين :

<u>الحالة الأولى :</u>

إذا كانت $\tau = 0$ فالجملة (2-8) مستقرّ استقراراً مقارباً.

<u>الحالة الثانية :</u>

إذا كانت $\tau \in [0, \tau_0)$ فدراسة الاستقرار يعتمد على الاختبار في المبرهنة الآتية :

مبرهنة (2-4-1) :

بفرض $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, ..., -\alpha_n$ هي القيم الذاتية للمصفوفة B. وأن الحل الصفري للجملة من دون تأخير زمني:

$$\frac{dY}{dt} = BY(t) \tag{2-9}$$

مستقر استقراراً مقارباً وبفرض أن :

$$\mathrm{Re}(\alpha_j) > 0 \tag{2-10}$$

والمتراجحة التالية محققة :

$$\left[\ \left[\mathrm{Re}(\alpha_j)\right]\tau + \left|\arg(\alpha_j)\right|\ \right] < \frac{\pi}{2}\ ,\ j = 1, 2, ..., n \tag{2-11}$$

عندئذ يكون الحل الصفري للجملة (2-8) مستقر استقراراً مقارباً .

ثانياً: ندرس استقرار الجملة (2-7) بالاعتماد على المبرهنتين الآتيتين :

مبرهنة (2-4-2) :

لتكن B,A مصفوفتان حقيقيتان كل منها ذات بعد $n \times n$ وبفرض أن الحل الصفري للجملة :

$$\frac{dY(t)}{dt} = (A + B)Y(t) \tag{2-23}$$

مستقر استقراراً مقارباً، ومن أجل M, α ثوابت موجبة تحققت المتراجحة :

$$\left\| e^{(A+B)t} \right\| \leq M e^{-\alpha t}\ \ ;\ M \geq 1;\ \alpha > 0 \tag{2-24}$$

عندئذ إذا كانت τ صغيرة وتحقق المتراجحة :

$$\frac{M\|B\|\tau\left(\|A\|+\|B\|\right)}{\alpha}<1 \qquad (2-25)$$

يكون الحل الصفري للجملة (2-7) مستقر استقراراً مقارباً .

وإذا كان $X(t)$ حل ما للجملة (2-7) يكون :

$$\|X(t)\|\leq M\left\{\sup_{s\in[-\tau,\tau]}\|X(s)\|\right\}e^{-\beta(t-\tau)} \;\; ; \; t\geq\tau \qquad (2-26)$$

حيث هنا β الجذر الوحيد للجملة :

$$1-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{M\|B\|\left(e^{\beta\tau}-1\right)\left(\|A\|+\|B\|e^{\beta\tau}\right)}{\beta\tau} \qquad (2-27)$$

<u>مبرهنة (2-4-3):</u>

إذا وجدت مصفوفة حقيقية متناظرة موجبة محددة C تحقق :

$$(A+B)^T C+C(A+B)=-I \qquad (2-33)$$

حيث I مصفوفة الواحدة من المرتبة $n\times n$ ، وبفرض الحل الصفري للجملة (2-8) مستقر استقراراً مقارباً، و τ_0 ثابت موجب معرف بالشكل :

$$\tau_0=\left(2\left(\|A\|+\|B\|\right)\|CB\|\right)^{-1}\left(\lambda_{min}(C)/\lambda_{max}(C)\right)^{1/2} \qquad (2-34)$$

حيث $\lambda_{min},\lambda_{max}$ هما القيمتان الذاتيان الكبرى والصغرى للمصفوفة C .

فإن الحل الصفري للجملة (2-7) مستقر استقراراً مقارباً من أجل كل $\tau<\tau_0$.

وأخيراً درسنا مثال تطبيقي لجملة من الشكل (2-7).

Summary

we study the stability of delay differential equation by using the Lyapunov method.

They,have had shown some definitions for this chapter.

the second Lyapunov method developed in two directions:

1-the first direction implies use of finite dimensional functions with an additional condition for the derivative .this is a so called B.S.Razumikhin condition.

2-the second method is a Lyapunov-Krasovskiy functional method, that will is using

The First chapter:

First, let's identify the kinds of the Delay differential equations then we had focused on delayed Logistic equation ,which is the subject of our study.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau)),\ \tau > 0 \qquad (1\text{-}1)$$

Then we had shown when this linear equation, linear homogenoous, linear nonhomogenoous,autonomous,non autonomous.

And we had studied Theorem existence, uniqueness, Continuous dependence,and

Smoothing Property the solution of (1,1).

If D : *C* + **R"** is linear, continuous, and atomic at zero; and let $D{:}C \to R^n$.

The operator D is said to be *stable* if the zero solution of the homogeneous

difference" Equation:

$$D_{y_t} = 0\ ,\ t \geq 0\ ,\ y_0 = \psi \in C_D$$

is uniformly asymptotically stable.

to study stability investigation of differential system of equations with delay time.

There are many methods:

The first method:

It's depend upon the characteristic equation of the Delay differential equations:

We had studied stability A neutral autonomous delay differential functional equation

$\mathrm{NFDE}(D,L)$

$$\frac{d}{dt} D x_t = L x_t \qquad (1\text{-}19)$$

Note that when $D x_t = x(t)$ *,then* (1-19) becomes an RDDE .

For example ,

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)+\rho x(t-\tau)\right)=a x(t)+b x(t-\tau)+\int_{-\tau}^{0} x(t+0)k(\theta)d\theta \qquad (1\text{-}20)$$

With some examples about this method.

The second method :

the analysis of characteristic equations of linear autonomous delay differential equations is often a formidable task even for equations with just two discrete delays or systems with just one discrete delay !

The derivative of *V* along the solutions of an RDDE (f), is defined as:

$$\dot{V} = \dot{V}(t,\phi) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\left[V\left(t+h, x_{t+h}(t,\phi)\right) - V(t,\phi)\right]$$

With some examples about this method are present.

The third method :

An another, effective method of analyzing the stabilities of delay differential equations involves the application of Razumikhin-type theorems. This technique makes use of functions rather than functionals. When using functionals, the theorems stated in the previous section generally require that their derivatives along solutions of the considered equations decrease monotonically.

Such a requirement makes finding a Liapunov functional a rather difficult task, since the space C is much more complicated than **R".**

The derivative of *V* along the solutions of an RDDE (f), is defined as:

$$\dot{V}\left(t,x(t)\right)=\overline{\lim_{h\to 0^{+}}}\frac{1}{h}\left[V\left(t+h,x(t+h)\right)-V\left(t,x(t)\right)\right]$$

With some examples about this method.

<u>**The second chapter:**</u>

It represents the main focus of our study in which we took a system of delay differential equations as(1.1):

to study the trivial solution of(1,1),we use Lyapunov method.

Then we have shown some definitions for this system.

The second Lyapunov method developed in two directions:

1-The first direction implies use of finite dimensional functions with an additional condition for the derivative .this is a so called B.S.Razumikhin condition.

2-The second method is a Lyapunov-Krasovskiy functional method, that will is using .

Lyapunov-Krasovskiy functional method:

Denote vector-function defined on the interval $-\tau \le s \le 0$ for each fixed $t > 0$.

the functional $V\left[x(t),t\right]$ is determined on the vector-functions $x(t+s)$,

$-\tau \le s \le 0$

that Played role a function derivative in theorems stability.

$$\bar{D}_{+} V = \lim_{\Delta t \to 0} \sup \frac{1}{\Delta t} \left\{ V[x(t+\Delta t), t+\Delta t] - V\left[x(t),t\right] \right\}$$

that $\bar{D}_{+} V$ is Called right upper derivative number along solution of system (1-1) .

we should draw our attention to the steps in development of the Lyapunov-Krasovskiy functional method.

The first step:

Included development of a theoretical ground for the method.

The second step:

Used theoretical results to make theorems more application of the functional.

Let us consider these two stages in more details.

The first step:

was to formulate theorems on stability by Lyapunov and asymptotic

Stability of the zero solution of system (1,1) and invert them .

All conditions of the theorems were formulated in terms of a uniform norm

$$\| x(t) \|_\tau = \sup_{-\tau \le s \le 0} \left\{ | x(t+s) | \right\}$$
(*)

The main results are as follows

Theorem (stability by Lyapunov) (2-2-1):

Let differential equations of systems (1,1) be such that there exists a functional $V\left[x(t),t\right]$ satisfying the following conditions:

1) $a\left(\| x(t) \|_\tau \right) \le V\left[x(t),t\right]$

2) $\bar{D}_+ V\left[x(t),t\right] \le 0$

Her a(r) is a continuous non-decreasing function for all $\tau > 0$ and a(0) = 0

Then the zero solution $x(t) \equiv 0$ of system (1,1)is stable according to Lyapunov's definition.

Theorem (Asymptotic stability) (2-2-2):

Let differential equations of systems (1,1) be such that there exists a functional $V\left[x(t),t\right]$ satisfying the following conditions:

1) $a\left(\| x(t) \|_\tau \right) \le V\left[x(t),t\right] \le b\left(\| x(t) \|_\tau \right)$

2) $\bar{D}_+ V\left[x(t),t\right] \le -c\left(\| x(t) \|_\tau \right)$

Her $a(r), b(r), c(r)$ are continuous non-decreasing functions positive for all and $\tau > 0$ equal to zero at r = 0 then the zero solution $x(t) \equiv 0$ of system (1,1) is asymptotically stable .

For example, for a linear stationary system:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B x(t-\tau) \qquad (2\text{-}2)$$

With constant matrices A,B and a functional in a quadratic form:

$$V\left[x(t)\right]=x^T(t)Hx(t)+\int_{-\tau}^{0}x^T(t+s)Gx(t+s)ds$$

where H,G are constant positive definite matrices it is impossible to find functions a(r) , c(r) that would satisfy theorem's conditions.

Therefore, the second step formulated stability theorems in terms of such norms, That are more convenient for constructing the functionals.

<u>the second step:</u>

Theorem (Asymptotic stability)(2-2-3):

Let differential equations of systems (1,1) be such that there exists a functional $V\left[x(t),t\right]$ satisfying the following conditions:

1) $a\left(\left|x(t)\right|\right)\le V\left[x(t),t\right]\le b\left(\left\|x(t)\right\|_\tau\right)$

2) $\bar{D}_+V\left[x(t),t\right]\le -c\left(\left|x(t)\right|\right)$

then the zero solution $x\left(t\right)\equiv 0$ of system (1,1) is asymptotically stable .

Then we had shown find the Lyapunov-Krasovskiy functional method for linear stationary system with delay (2,2).

Quadratic functionals in the following general form [7].

$$\begin{aligned}V\left[x(t)\right]&=x^T(t)Hx(t)+\int_{-\tau}^{0}x^T(t+s)K(s)x(t)dt\\&+\int_{-\tau}^{0}x^T(t+s)G(s)x(t+s)ds\\&+\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0}x^T(t+s_1)M(s_1,s_2)x(t+s_2)ds_1ds_2\end{aligned}\qquad (2-3)$$

positive definite matrix :

her H is a constant quadratic $n \times n$

$K(s), G(s)$, $M(s_1, s_2)$ are continuous matrices , and H, $M(s_1, s_2)$ are symmetric matrices .functionals are chosen in such a way that:

$$\frac{d}{dt} V\left[x(t)\right] = W\left[x(t)\right]$$

Where :

$$\begin{aligned} W\left[x(t)\right] &= x^T(t)Qx(t) + x^T(t-\tau)Rx(t) + x^T(t-\tau)Sx(t-\tau) \\ &+ \int_{-\tau}^{0} x^T(t+s)D(s)x(t)ds + \int_{-\tau}^{0} x^T(t+s)E(s)x(t+s)ds \qquad (2\text{-}4) \\ &+ \int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{0} x^T(t+s_1)F(s_1,s_2)x(t+s_2)ds_1 ds_2 \end{aligned}$$

$Q, R, S, D(s), E(s), F(s_1, s_2)$ for given matrices

These matrices satisfy conditions ensuring negative definiteness of $w\left[x(s)\right]$ on system's solutions.

Theorem (2-3-1):

Let for systems (1,1) a continuously differentiable function $V(x,t)$ exist and satisfy the conditions:

1) $a(|x|) \le V(x,t)$
2) $\frac{dV(x(t))}{dt} \le 0$

For curves x(t) that satisfy:

$$V(x(s),s) < V(x(t),t), s < t$$

(condition B.S.Razumikhin)

Her a(r) is a continuous non-decreasing function positive for all $\tau > 0$ and a(0) = 0.Then the zero solution $x(t) \equiv 0$ of system (1,1)is stable according to Lyapunov.

Theorem (2-3-2):

Let for systems (1,1) a continuously differentiable function V(x,t) exist and satisfy the conditions:

For curves x(t) that satisfy:

$$V(x(s),s) < V(x(t),t), s < t$$

Her a(r),b(r),c(r) are continuous non-decreasing functions positive for all and $\tau > 0$ equal to zero at r = 0 then the zero solution $x(t) \equiv 0$ of system (1,1) is asymptotically stable .

finally, we had studied asymptotic stability of systems with one delay in the form :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BX(t-\tau) \qquad (2\text{-}7)$$

First, we study stability's the system:

$$\frac{dX(t)}{dt} = BX(t-\tau) \qquad (2\text{-}8)$$

Distinguish two situation

The first situation:

If $\tau = 0$, then the system (2-8) is asymptotically stable.

The second situation:

If $\tau \in [0, \tau_0)$ then

Theorem (2-4-1):

Let the eigenvalues of the matrix B be denoted by :

$$-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, \ldots, -\alpha_n$$

Suppose that the trivial solution of the non delay system

$$\frac{dY}{dt} = BY(t) \qquad (2\text{-}9)$$

is asymptotically stable implying that

$$\operatorname{Re}(\alpha_j) > 0 \qquad (2\text{-}10)$$

if $\left[\operatorname{Re}(\alpha_j)\right]\tau + \left|\arg(\alpha_j)\right| < \pi/2, \quad j = 1, 2, \ldots, n$ (2-11)

Then the trivial solution of (3,8) is asymptotically stable.

<u>Second</u> ,we study stability’s the system (2,7)

Forthere,we use the following theorems :

Theorem (2-4-2):

Let A and B be real n x n constant matrices such that the trivial solution of

$$\frac{dY(t)}{dt} = (A+B)Y(t) \qquad (2\text{-}23)$$

is asymptotically stable and let M, α be positive constants satisfying

$$\left\| e^{(A+B)t} \right\| \le M e^{-\alpha t}; \; M \ge 1; \; \alpha > 0 \qquad (2\text{-}24)$$

If τ is small and

$$\frac{M\|B\|\tau\left(\|A\|+\|B\|\right)}{\alpha}<1 \qquad (2\text{-}25)$$

then the trivial solution of (2,7) is asymptotically stable. Furthermore, if X(t) denotes any solution of (2,7), then :

$$\|X(t)\|\le M\left\{\sup_{s\in[-\tau,\tau]}\|X(s)\|\right\}e^{-\beta(t-\tau)}\ ;\ t\ge\tau \qquad (2\text{-}26)$$

in which β is the unique root of :

$$1-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{M\|B\|\left(e^{\beta\tau}-1\right)\left(\|A\|+\|B\|e^{\beta\tau}\right)}{\beta\tau} \qquad (2\text{-}27)$$

Theorem (2-4-3) :

Assume that the trivial solution of (2,8) is asymptotically stable.

Let C denote the real symmetric positive definite matrix satisfying :

$$(A+B)^{T}C+C(A+B)=-I \qquad (2\text{-}33)$$

where I is the n x n identity matrix. Let τ_0 be the positive constant defined by :

$$\tau_0=\left(2\left(\|A\|+\|B\|\right)\|CB\|\right)^{-1}\left(\frac{\lambda_{min}(C)}{\lambda_{max}(C)}\right)^{1/2} \qquad (2\text{-}34)$$

where λ_{min} , λ_{max} respectively denote the smallest and largest eigenvalues of C. Then the trivial solution of (2,7) is asymptotically stable for all $\tau<\tau_0$.

finally , we had studied an example number .