وزارة التعليم العالي

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

رسالة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات – باختصاص تحليل رياضي

إعداد الطالبة

لارة ياسين القاسم

بعنوان

النشر بالتوابع الخاصة في فضاءات بانلخ

Eigenfunction Expansion in Banach Spaces

بإشراف

أ.د. إبراهيم إبراهيم

العام الدراسي

٢٠١٣ - ٢٠١٣ م

١٤٣٣-١٤٣٤ هـ

Syrian Arab Republic

Al – Baath University

Faculty of science

Department of Mathematics

Eigenfunction Expansion in Banach Spaces

Dissertation for m.sc degree in mathematical Analysis

Submitted By

Lara al kasem

Supervised by:

Professor :Ibrahim Ibrahim : Department of mathematics

Faculty of science

Al – Baath University

1434 - 2013

ملخص البحث :

تلعب التوابع الخاصة دوراً هاماً في العديد من المجالات ، وتأتي أهم تطبيقاتها في الفيزياء ، الميكانيك الكوانتي ، نظرية التقريب، .....

تملك التوابع الخاصة الكلاسيكية (توابع خاصة لمؤثرات خطية تفاضلية معروفة) خواصاً هامة في فضاء هيلبرت $L_2[a,b]$ ، من هذه الخواص أن كل تابع $f \in L_2[a,b]$ يمكن نشره بمتسلسلة فورييه بالنسبة لهذه التوابع متقاربة من التابع f .

يمكننا بشكل مشابه تعميم هذا النشر إلى فضاء باناخ $L_p[a,b]$ من أجل قيم محددة لـ p .

تعاملنا خلال الدراسة مع توابع لوجندر ، لاجير ، هرميت ،....

من المعلوم أنه إذا كانت $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ جملة متعامدة منظمة وتامة في فضاء هيلبرت H فيمكن نشر كل عنصر $x \in H$ بمتسلسلة فورييه بالشكل :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n \qquad (1)$$

حيث ترمز $\langle x,u_n\rangle$ لعوامل فورييه للعنصر x بالنسبة للجملة $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$. سنحاول في هذا البحث إيجاد نشر مشابه لـ (١) لعناصر فضاء باناخ B ومن أجل ذلك يلزمنا فضاء خطي طبولوجي D'_{∞} يحوي الفضاء B (كفضاء جزئي) وعناصره متسلسلات من الشكل :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n \qquad ; a_n \in \mathbb{C}$$

تحقق شروطاً معينة تحددها المتتالية $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ ، ولكن للحصول على الفضاء D'_{∞} يلزم فضاء خطي D_{∞} (جزئي من H) ويتحدد بواسطة عوامل فورييه .

وفي الواقع سنجد مايلي :

$$D_{\infty} = \{x \in H : \ \|x|_k = sup_n n^k|\langle x,u_n\rangle| \le C_k < \infty; k = 0,1,2,\dots\}$$

$$= \{x \in H: \|x|_k^* = sup_n \lambda_n^k|\langle x,u_n\rangle| \le C_k < \infty; K = 0,1,2,\dots\}$$

حيث هنا λ_n ترمز للقيم الخاصة للمؤثر A الذي توابعه الخاصة الموافقة هي u_n وذلك من أجل $n = 1,2, \ldots$

كما أن: $\acute{D}_\infty = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, u_n : \exists l \in \mathbb{N}, \exists C_l > 0, sup_n \lambda_n^{-l} |a_n| \leq C_l < \infty\}$

إذا كان B فضاء باناخ فصول ويحوي الجملة $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ وضمن شروط معينة تحققها الجملة $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ في B يكون $D_\infty \cup B \cup \acute{D}_\infty$

الذي ينتج منه أن كل عنصر $y \in B$ يمكن نشره بمتسلسلة فورييه :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, u_n \qquad (2)$$

(متقاربة في $\acute{D}_\infty$) ، وبذلك يتم تعميم النشر (١) من فضاء هيلبرت إلى فضاء باناخ .

واعتماداً على ذلك يمكن دراسة المؤثر A في فضاء باناخ B (الذي يعمم دراسته في H) .

SYRIAN ARAB REBUBLIC

ALBAATH UNIVERSITY

SCIENCE FACULTY

ABSTRATT:

The Eigenfunction expansions play great role in many branches . important applications occur in Physics , Quantum Mechanics , Approximation theory ,etc. the classical Eigenfunction which correspond to some differential operators have beautiful properties in Hilbert space $L_2[a,b]$. one of these properties is that each function $f \in L_2[a,b]$ maybe expanded in a Fourier series (with respect to these eigenfunctions) converging to f in the L_2 − norm . similar expansions can sometimes be generalized in some ways to Banach spaces $L_p[a,b]$ for suitable value of p ,not only for $p = 2$.

In this work , we deal with the Legendre, Chebyshev, Laguerr, Hermite functions and their corresponding differential operators.

Determined that is if $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ is complete orthonormal orthogonal system in Hilbert space we can expansion ever element $x \in H$ in Fourier series is : $\sum_{n=0}^{\infty}\langle x, u_n\rangle u_n$ (1)

We signe $\langle x, u_n\rangle$ for Fourier coefficient for element x for system $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$. we will try in this search find similar expansion (1) for Banach spaces element B and for that we need Topological linear space D'_{∞} included B space (subspace) and it's elements are serieses

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$; $a_n \in \mathbb{C}$

It is true for special conditions it signs from sequence $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$,but to have D'_{∞} space we need liner space D_{∞} (sub of H) and it is from Fourier coefficient .

In fact we find :

$$D_{\infty} = \{x \in H : \|x|_k = sup_n n^k |\langle x, u_n\rangle| \leq C_k < \infty; k = 0,1,2, \dots\}$$

$$= \{x \in H: \|x|_k^* = sup_n \lambda_n^k |\langle x, u_n\rangle| \leq C_k < \infty; K = 0,1,2, \dots\}$$

For signe to eigenvalues for A operator that is its accept Eigenfunction are u_n that is for $n = 1,2, \dots$

$\acute{D}_{\infty} = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n : \exists l \in \mathbb{N}, \exists C_l > 0, sup_n \lambda_n^{-l} |a_n| \leq C_l < \infty\}$

If B was separable Banach space included system $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ and in special conditions are system $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ in B :

$$D_{\infty} \hookrightarrow B \hookrightarrow \acute{D}_{\infty}$$

That it protects ever element $y \in B$ we can expansion in Fourier series

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n \qquad (convergent\ \acute{D}_{\infty}) \qquad (2)$

Then generalization we can study operator A in Banach space (that is generalization in Hilbert space).