الجمهورية العربية السورية

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

رسالة أعدّت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات بعنوان:

استقرار جملة المعادلات التفاضلية العشوائية بطريقة ليابونوف

إعداد الطالب

رياض ريمون جبيلي

إشراف الأستاذ الدكتور

سامح العرجة

العام الدراسي

٢٠١٠-٢٠١١

Syrian Arab Repuplic

Al – Baath University

Faculty science

Department of Mathematices

The Thesis for M.sc.degree in Mathematics: Stability of a system of stochastic Differerential equations using Lyapunov Method

Submitted by

REIAD RIMON JUBLY

Prof. D. SAMEH AL – ARJEH

Department of Mathematics

Faculty of science

Albaath University

2010 – 2011

ملخص باللغة العربية

استقرار جملة المعادلات التفاضلية العشوائية بطريقة ليابونوف

موضوع الرسالة هو دراسة استقرار حل جملة المعادلات التفاضلية العشوائية من النموذج:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t, \xi(t))\, x(t) + \sum_{h=1}^{n} B_h(\xi(t))\, x(t)$$

(1)

والتي تسمى معادلة لا توقفية مضطربة.

تتألف الأطروحة من مقدمة وثلاثة فصول وخاتمة حيث عرضنا في الفصل الأول أهم النتائج الأساسية في دراسة استقرار الحل لجملة المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابتة على الصورة:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\ x(t) \ \ ;\ \ A = Const \ \ ;\ x(0) = x_0$$

(2)

مع أمثلة توضح كيفية إيجاد شروط الاستقرار وتابع ليابونوف الموافق لحل الجملة من النموذج السابق.

كما تمّ عرض أهم النتائج لدراسة استقرار الحل لجملة معادلات تفاضلية ذات معاملات متحولة على الصورة :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t).x(t)$$

(3)

حيث $t \in (-\infty, +\infty)$ و $A(t)$ مصفوفة الأمثال المتحولة.

وتم عرض أمثلة توضح كيفية إيجاد شروط الاستقرار وإنشاء تابع ليابونوف الموافق لحل الجملة من النموذج السابق المدروس.

في الفصل الثاني تم عرض مفاهيم أساسية متعلقة بالمعادلات التفاضلية العشوائية وأهم النتائج المتعلقة بدراسة استقرار الحل للنموذج

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t,\xi(t))\,x(t) \quad ; \quad \dim x = m$$
(4)

و $\xi(t)$ عملية ماركوفية تأخذ القيم $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ والذي من خلاله تمت دراسة النموذج:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\left(\xi(t)\right).x(t)$$
(5)

حيث نذكر أهم النتائج لهذه الدراسة:

مبرهنة (1):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة الأساسية (5) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو أن يكون حل الجملة:

$$\frac{dM_K(t)}{dt} = A_K M_K(t) + M_K(t) A_K^*(t) + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} M_S(t) \qquad (6)$$

مستقر استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow -\infty$ حيث $k = 1, 2, .., q$.

مبرهنة (2):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (5) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو أن يكون للجملة المعطاة بالصورة:

$$\frac{dC_K(t)}{dt} + A_K^* C_K(t) + C_K(t) A_K + \sum_{\substack{S=1 \\ S \neq k}}^{q} \alpha_{KS} C_S(t) = -B_k$$
(7)

حلاً مستقراً استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow -\infty$ حيث $k = 1, 2, .., q$.

مبرهنة (3):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي للجملة (5) هو وجود حل C_{k_0} للمعادلة:

$$C_K A_K + A_K^* C_K + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS}\ C_K = -B_K$$
(8)

حيث $k = 1, 2,.., q$ $C_{k_0} > 0$ من أجل أي مصفوفات $B_k > 0$.

في الفصل الثالث تمت معالجة النموذج (1) بالاعتماد على النماذج السابقة وتم التوصل إلى أهم النتائج متمثلة بإثبات المبرهنات التالية:

مبرهنة (1):

إن العزوم الجزئية من المرتبة الثانية $M_K(t)$ تحقق المعادلة:

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = A_k(t)M_k(t) + \sum_{h=1}^{N} B_{hk} M_k(t) + M_k(t)A_k^*(t)$$

$$+\sum_{h=1}^{n} M_k(t)B_{hk}^* + \sum_{s=1}^{q} M_s(t)\alpha_{ks}(t)$$

(9)

مبرهنة (2):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (1) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو استقرار حل جملة (9) استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow +\infty$ أو استقرار الحل الصفري للجملة:

$$\frac{dC_k(t)}{dt} + A_k^*(t)C_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* C_k(t) + A_k(t)C_k(t) +$$

$$+\sum_{h=1}^{n} B_{hk} C_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)C_s(t) = 0$$

(10)

استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow -\infty$.

مبرهنة (3):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (1) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو أن يكون الحل الصفري للجملة:

$$\frac{dC_k(t)}{dt} + A_k^*(t)C_k(t) + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* C_k(t) + A_k(t)C_k(t) +$$

$$+\sum_{h=1}^{n} B_{hk} C_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)C_s(t) = -G_k(t)$$

(11)

مستقراً استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow -\infty$.

نتيجة:

نستنتج من المبرهنة (3) أنه يوجد C_{k_0} حل للجملة (11) والذي يعطى من خلال دستور التقريب المتتالي:

$$C_{k,n+1} = C_{k,n} + g\left(A_k^*(t) C_{kN} + \sum_{h=1}^{n} B_{hk}^* C_{kn} + A_k(t) C_{kn} + \right.$$

$$\left. + \sum_{h=1}^{n} B_{hk} C_{kn} + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t) C_{sn} + G_k(t) \right)$$

(12)

وذلك من أجل قيم صغيرة لـ g حيث $g > 0$ ومن أجل أي قيمة ابتدائية $C_{k,1}$ وبالتالي:

$$\lim_{n \to +\infty} C_{Kn} = C_{Ko} \quad ; \quad C_{ko} = const$$

مبرهنة (4):

الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي لجملة المعادلات (1) حيث $\xi(t)$ عملية ماركوفية تأخذ القيم $o_1, o_2, .., o_q$ هو وجود حل C_{k_0} للمعادلة (11) بحيث $C_{k_0} > 0$ و $C_{ko} = const$ حيث $k = 1,2,..,q$ من أجل المصفوفات $G_k(t) > 0$ حيث $(k = 1,2,..,q)$.

النتائج النهائية التي تم الحصول عليها:

1- إن العزوم الجزئية من المرتبة الثانية $M_k(t)$ حيث $(k = 1,2,..,q)$ تحقق المعادلة التفاضلية (9).

2- الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (1) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو استقرار حل الجملة (9) استقرار مقارب عندما $t \longrightarrow +\infty$.

3- الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (1) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو استقرار الحل الصفري للجملة (10) استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow -\infty$.

4- الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (1) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو أن يكون الحل الصفري للجملة (11) مستقراً استقراراً مقارباً عندما $t \longrightarrow -\infty$.

5- وجود $C_{ko} = const$ يحقق الدستور التقريبي المتتالي (12) بحيث أن $\lim_{n \to +\infty} C_{Kn} = C_{Ko}$

وكما يحقق المعادلة (11).

6- الشرط اللازم والكافي لاستقرار الحل الصفري للجملة (1) استقراراً مقارباً بالوسط التربيعي هو أن يكون الحل C_{ko} يحقق أن $C_{ko} > 0$ للجملة (11) من أجل المصفوفات $G_k(t) > 0$ حيث $k = 1,2,..,q$.

ملخص باللغة الانكليزية

The subject of the thesis is to study the stability of the solution of the stochastic differential equations system of from

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t,\xi(t))\,x(t) + \sum_{h=1}^{n} B_h(\xi(t))\,x(t)$$

(1)

Ahich called disturbant nonstationary equation.

- the thesis is composed of a preface, there chapters and a conclusion.

- we exhibited in the first chapter the most important essential results in study of the stability of the solution of the differential equations system, which has constant coefficients of from:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\ x(t) \ \ ; \ A = \text{Const} \ \ ; \ x(0) = x_0$$

(2)

With examples which clear how to find the stability conditions and building Lyapunov function that it is compartible to the system's solution of the form above.

- Also we exhibited the most important results in study of the solution's staility of the differential equations system which has variable coefficients of form:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t).x(t)$$

(3)

$t \in (-\infty, +\infty)$ and A(t) is the variable coefficients matrix.

- and we also exhibited examples which clear how to find the stability's conditions and building Lyapunov function that it is compatible to the system's solution of form (3).

- we exhibited in the second chapter essential conceptions which are attached to the stochastic differential equations, and the most important results that are retated to the solution stability study of form:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t,\xi(t))\,x(t) \ \ ; \ \dim x = m$$

(4)

and $\xi(t)$ is Marcovian operation taking the values $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$.

- we through the form (4) studied the form:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(\xi(t))\,x(t)$$

(5)

- now let's exhibit the most important results of this study.

Lemma (1):

The necessary and sufficient condition for the zero solution of the essential system (5) to be stable approximately in the quadratic mean is that the solution of the equation:

$$\frac{dM_K(t)}{dt} = A_K M_K(t) + M_K(t)\,A_K^*(t) + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} M_S(t)$$

(6)

is stable approximately when $t \longrightarrow +\infty$ where k = 1, 2,.., q.

Lemma (2):

The necessary and sufficient condition for the zero solution of the system (5) to be stable approximately in the quadratic mean is that the system in form:

$$\frac{dC_K(t)}{dt} + A_K^* C_K(t) + C_K(t) A_K + \sum_{\substack{S=1 \\ S \neq k}}^{q} \alpha_{KS} C_S(t) = -B_k$$

(7)

has a stable solution approximately when $t \longrightarrow -\infty$ where k = 1, 2, .., q.

Lemma (3):

The necessary and sufficient condition for the zero solution of the system (5) to be stable approximately in the quadratic mean is to have a solution C_{k_0} of the equation:

$$C_K A_K + A_K^* C_K + \sum_{S=1}^{q} \alpha_{KS} \; C_K = -B_K$$

(8)

when $C_{k_0} > 0$ where k = 1, 2, .. , q for any matrix $B_k > 0$.

-In the third chapter we sloved the form (1) according to the forms above, and concluded the most important results which are represented to improve the next Lemmaes.

Lemma (1):

The partial moments of the second stage $M_K(t)$ realize the equation:

$$\frac{d\,M_k(t)}{d\,t} = A_k(t) M_k(t) + \sum_{h=1}^{N} B_{hk}\, M_k(t) + M_k(t) A_k^*(t)$$

$$+\sum_{h=1}^{N} M_k(t) B^{*}_{hk} + \sum_{s=1}^{q} M_s(t)\alpha_{ks}(t)$$

(9)

Lemma (2):

The necessary and sufficient condition for the zero solution of the system (1) to be stable approximately in the quadratic mean is the solution stability of the system (9) approximately when $t \longrightarrow +\infty$. or the zero solution stability of the system:

$$\frac{dC_k(t)}{dt} + A^{*}_k(t)C_k(t) + \sum_{h=1}^{N} B^{*}_{hk} C_k(t) + A_k(t)C_k(t) +$$
$$+\sum_{h=1}^{N} B_{hk} C_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)C_s(t) = 0$$

(10)

Approximately when $t \longrightarrow -\infty$.

Lemma (3):

The necessary and sufficient condition for the zero solution of the system (1) to be stable approximately in the quadrian mean is that the zero solution of the system:

$$\frac{dC_k(t)}{dt} + A^{*}_k(t)C_k(t) + \sum_{h=1}^{N} B^{*}_{hk} C_k(t) + A_k(t)C_k(t) +$$
$$+\sum_{h=1}^{N} B_{hk} C_k(t) + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)C_s(t) = -G_k(t)$$

(11)

Is stable approximately when $t \longrightarrow -\infty$.

Result:

We conclude of Lemma (3) that there is C_{k_0} as asolution of the system (11) which is given through the approximate constitution:

$$C_{k,N+1} = C_{k,N} + g\Bigg(A^{*}_k(t)C_{kN} + \sum_{h=1}^{N} B^{*}_{hk} C_{kN} + A_k(t)C_{kN} +$$
$$+\sum_{h=1}^{N} B_{hk} C_{kN} + \sum_{s=1}^{q} \alpha_{ks}(t)C_{sN} + G_k(t)\Bigg)$$

(12)

that is for small value of g when $g > 0$ and for any primary value $C_{k,1}$.

so $\lim\limits_{n\to+\infty} C_{KN} = C_{Ko}$; $C_{ko} = \text{const}$.

Lemma (4):

The necessary and sufficient condition for the zero solution of the system (1) to be stable approximately in the quardian mean, where $\xi(t)$ is Marcovian operation taking values o_1, o_2, …, $o_{q,}$ is existence of the solution C_{k_0} of the equation (11) that $C_{k_0} > 0$ and $C_{ko} = \text{const}$ where k = 1,2,..,q for matrisses $G_k(t) > 0$, (k = 1,2,..,q) .

The obtained final results:

1- The partial moments of the second stage $M_k(t)$ where k = 1,2,..,q achieve the differential equation (9).

2- The necessary and sufficient condition for the zero solution of the system (1) to be stable approximately in the quardian mean is the solution stability of the system (9) approximately when $t \longrightarrow +\infty$.

3- The necessary and sufficiebt condition for the zero solution of the system (1) to be stable approximately in the quardian mean is the solution stability of the system (10) approximately when $t \longrightarrow -\infty$.

4- The necessary and sufficiebt condition for the zero solution of the system (1) to be stable approximately in the quardian mean is the solution stability of the system (11) approximately when $t \longrightarrow -\infty$.

5- The existence of C_{ko} = const achieve the approximate constilution (12) that $\lim\limits_{n \to +\infty} C_{KN} = C_{Ko}$ and also achieve the equation (11).

6- The necessary and sufficiebt condition for the zero solution of the system (1) to be stable approximately in the quardian mean is that the solution C_{ko} of the system (11) achieves $C_{ko} > 0$ for matrisses $G_k(t) > 0$ where k = 1,2,..,q.