الجمهورية العربية السورية
جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الطرائق الفعالة لحل معادلات ديوفانتس

Efficient Methods For Solving Diophantine Equations

دراسة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات

إعداد

دياب شغري

إشراف

أ.د أحمد الخلف **د.أحمد الكردي**

العام الدراسي 1434–2013

Al-Baath University

Faculty of Science

Department of mathematics

Efficient Methods For Solving Diophantine Equations

Thesis for M.sc. Degree in Mathematics

Submitted by

Diab Shughari

Supervision by

Prof.Dr.Ahmad Al-Khalf **Dr.Ahmad Al-Krdi**

Department of Mathematics Department of Mathematics

Faculty of Science Faculty of Science

Al-Baath University Al-Baath University

2013-1434

الملخص

درسنا في المقدمة مفهوم معادلة ديوفانتس، وناقشنا الدراسة الرياضية لمسائل ديوفانتس التي تدعى (تحليل ديوفانتس) . كما أعطينا لمحة تاريخية عن هذه المعادلات ، ابتداءً من الإسهامات الهندية في القرن الثامن قبل الميلاد ، مروراً بعلماء الرياضيات المسلمون في القرن التاسع الميلادي ، انتهاءً بالإسهامات الأوربية في القرن العشرين.

درسنا في الفصل الأول معادلات ديوفانتس الخطية و أنواعها، و قابلية حلها. من أنواعها ، المعادلات الآتية:

$$ax + by = c$$

$$ax^2 + cy^2 = k$$

$$A^3 = B^3 + C^3$$

$$x^4 = y^4 + z^4$$

$$A^5 = B^5 + C^5$$

$$A^n + B^n = C^n$$

حيث a, b, c, k, A, B, C أعداد صحيحة معلومة و x, y, z متغيرات.

كما درسنا في الفصل الثاني معادلات ديوفانتس غير الخطية و أنواعها، و قابلية حلها. من أنواعها ، المعادلات الآتية:

المعادلة $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ بالأعداد الصحيحة.

المعادلة $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$ بالأعداد الصحيحة.

المعادلات $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ وَ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{c}{d}$.

معادلة ديوفانتس غير المتجانسة من $x^2 + y^2 = z\left(1+xy\right)$.

مجموعان m $\sum_{k=1}^{n_1} x_k^m = \sum_{k=1}^{n_2} y_k^m$ الدرجة الثانية

متساويان لقوى بالأس

المعادلة من الشكل $3^x + 3^y = 6^z$:

المعادلة من الشكل $4^x + 18^y = 22^z$:

معادلات ديوفانتس $x^y = y^x$

الأسية

مجموع مساوٍ $x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = \left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)^k$

حول $n!$ $\left(p!\right)^k = \left(k!\right)^p$ لحاصل ضرب

معادلات تتضمن

أيضاً، درسنا معادلات ديوفانتس غير الخطية من أجل الدوال الحسابية الخاصة الآتية :

$$\varphi\left(n\right), \sigma\left(n\right), d\left(n\right), \omega\left(n\right), \Omega\left(n\right), S\left(n\right)$$

درسنا في الفصل الثالث الخوارزمية التصاعدية الفعالة في حل أنظمة ديوفانتس الخطية بالاعتماد على تعميم خوارزمية معدّة لحل معادلة واحدة وذلك حسب فورتنباتشر (Fortenbacher) $\left[25\right]$. بالإضافة لذلك يمكن حل النظام بأكمله، أو استخدامه بشكل تصاعدي تدريجي(Incrementally) عندما يكون النظام عبارة عن أنظمة جزئية متعددة.

كما درسنا في الفصل الرابع خوارزمية لحل أنظمة ديوفانتس الخطية بأعداد طبيعية ، وذلك لإيجاد الحلول الأصغرية لأنظمة ديوفانتس الخطية، حيث وضعنا السمات الرياضية لهذه

الخوارزمية، وتم تقديم حل آخرلها، بحيث يسهل استخدامها على كل من يريد تطبيقها ، كما نفذنا في هذا الفصل خوارزمية الميول(الانحدار).

أما في الفصل الخامس ، فقد درسنا الحل الفعال لأنظمة ديوفانتس الخطية بتطبيقات في الكيمياء، حيث قدمنا طرائق نظامية لحل أنظمة ديوفانتس الخطية وتطبيقاتها في تحليل التفاعلات الكيميائية المعقدة.

المعدلة ، والأخرى خوارزمية (Contejean −Devie)نصف خوارزميتين إحداهما خوارزمية كونتيجن ديفي

قابلة – LP) تعتمد على برمجة خطية (خوارزمية العد المستندة إلى enumerative) (algorithm إحصائية للتطبيق على أنظمة كبيرة بحلول كبيرة. اختبرنا هاتين الخوارزميتين على أمثلة كيميائية هامة لتوضيح المقارنة بينهما.

، هي الأفضل في جميع الحالاتLPقارنا بين الخوارزميات المدروسة، فوجدنا أن

الخوارزمية الإحصائية من ناحية الوقت، كما هو موضح في جدول النتائج الموجود في الفصل الخامس.

Abstract

We have studied in an introduction concept of Diophantine equation, and we have discussed the mathematical study of Diophantine problems which called "Diophantine analysis". We have given historicity glance on passing by ،these equations , starting of India's contributions at 800 BC an Islamic mathematic scientists at 9^{th} century, termination by an European contributions at twentieth– century.

In the first chapter, We have studied Linear Diophantine Equations and its kinds, and its solution predisposition. From its kinds, the following equations :

$$ax + by = c$$

$$ax^2 + cy^2 = k$$

$$A^3 = B^3 + C^3$$

$$x^4 = y^4 + z^4$$

$$A^5 = B^5 + C^5$$

$$A^n + B^n = C^n$$

Where a, b, c, k , A, B, C are known integers and x, y, z the unknown.

In the second chapter, we have studied of non Linear Diophantine Equations and its kinds, and its solution predisposition. From its kinds, the following equations:

On the equation $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$ in integers.

On the equation $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}$ in integers.

On the equations $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$ and $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{c}{d}$ in integers.

On An Inhomogeneous Diophantine equation of degree 2

$x^2+y^2=z\left(1+xy\right).$

On Two Equal Sums of m th Powers $\sum_{k=1}^{n_1} x_k^m = \sum_{k=1}^{n_2} y_k^m$.

On Certain Exponential Diophantine Equations $x^y = y^x$

Asum Equal To Product

$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = \left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)^k$ On

Certain Equations Involving $n!$ $\left(p!\right)^k = \left(k!\right)^p$

Also, We have studied Certain Diophantine Equations For the following Particular Arithmetic Functions:

$\varphi(n), \sigma(n), d(n), \omega(n), \Omega(n), S(n)$

In the third chapter, We have studied An Efficient Incremental Algorithm for Solving Systems Of Linear Diophantine Equations based on a generalization of an algorithm for solving one equation due to Fortenbacher $\left[25\right]$. It can solve a system as a whole, or be used incrementally when the system is a sequential accumulation of several subsystems.

In the fourth chapter, we have studied An Algorithm for Solving Systems of Linear Diophantine Equations in Naturals, for finding the minimal solutions of systems of linear Diophantine equations has recently been published. In its description the emphasis was put on the mathematical aspects of the algorithm. In complement to that, in this paper another presentation of the algorithm is given which may be of use for anyone wanting to implement it. Also we have performed the slopes algorithm.

In the fifth chapter, We have studied effective solution of linear Diophantine equation systems with an Applications in chemistry, where have given systematic methods of the solution of linear Diophantine systems of equations and their applications in decomposing complex chemical reactions are presented.

The earlier presented Contejean–Devie algorithm is improved. A new, linear programming based enumerative algorithm is described, which is applicable to large systems with large solutions. Mathematica implementations are tested and compared in important chemical examples.

In this chapter also, we have implemented the linear programming based enumerative algorithm and we compared between this algorithm and other algorithms, we found that it is a better in all cases from where the time, as it clear at the results table that it is finding in this chapter.