الجمهورية العربية السورية
جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الحل الفعَّال لجمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار

دراسة أعدت لنيل درجة الماجستير في التحليل الرياضي

إعداد الطالبة:
يسرى نمر طوقاج

باشراف:
الدكتور :أحمد الكردي
أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

١٤٣١ - ٢٠١٠م

الفصل الأول

قدمنا في هذا الفصل لمحة عن جمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار وبعض التطبيقات العلمية والهندسية التي تؤول إلى هذا النوع المدروس .علاوة على ذلك نعرض بإيجاز :

- ❖ **ما هي الطرائق العددية ولماذا ندرسها ؟**
- ❖ **كيف نحل جمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار؟**

الفصل الثاني

- **عرضنا في هذا الفصل طرائق حل جمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار وفق الخوارزميات المعتمدة في لغة Matlab. تشمل هذه الخوارزميات الأوامر:**

١. الأمر inv

٢. الأمر **Slash** ، \ ،

٣. تحليل $[L,U,P]=lu(A)$.

٤. تحليل $[L,U]=lu(A)$.

٥. تحليل $[Q,R]=qr(A)$.

- **إجراء مقارنات عددية لإيجاد الحل الفعال لجمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار بتطبيق الخوارزميات المعتمدة في لغة المذكورة أعلاه.**
- **أجرينا مقارنات عددية بين الأوامر المذكورة أعلاه و كل من الطرائق المباشرة:**

❶ **قاعدة كرامر.**

❶ **حذف غاوس**

- **دون مرتكز .**
- **مع مرتكز جزئي.**
- **مع مرتكز تام.**

❶ **طريقة غاوس – جوردان.**

لمعرفة أدائها في حل جمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار من حيث زمن التنفيذ و الدقة للحصول على الحل المنشود.

الفصل الثالث

صنفنا في هذا الفصل طريقة تعتمد على حذف غاوس التقدمي مع طريقة التعويض التراجعي. تدعى هذه الطريقة طريقة توماس (Thomas). نرمز لهذه الطريقة اختصارا بالرمز Thomas1 .

كما أجرينا على هذه الطريقة تعديلا يعتمد على حذف غاوس التراجعي مع طريقة التعويض التقدمي. نرمز للطريقة المعدلة اختصارا بالرمز Thomas2 .

أجرينا العديد من التنفيذات الحاسوبية لتوضيح فعالية الخوارزميتين Thomas1 و Thomas2 في حل جمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار. نقارن الخوارزميتين Thomas1 و Thomas2 مع الخوارزميتين $A\backslash b-\text{Matlab}$ و $[\text{L,U}]=\text{lu}(\text{A})\text{-Matlab}$ في حل نفس مسائل الاختبار لتوضيح أدائهما من حيث زمن التنفيذ و الدقة للحصول على الحل المنشود.

الفصل الرابع

صنفنا في هذا الفصل طريقتين لحل جمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار. تعتمد هاتان الطريقتان على تحليل LU وفق طريقة دوليتل (Doolittle Method based LU Decomposition) وتحليل وفق كراوت(Crout Method based LU Decomposition).نرمز لطريقة تحليل LU وفق طريقة دوليتل بالرمز $DM-LU$ بينما نرمز لطريقة تحليل وفق كراوت بالرمز $CM-LU$. أجرينا العديد من التنفيذات الحاسوبية لتوضيح فعالية الخوارزميتين DM-LU و CM-LU في حل جمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار.

قارنا الخوارزميتين DM-LU و CM-LU مع جميع الخوارزميات المدروسة في الفصل الثالث و هي Thomas1 ، و Thomas2 ، و $A\backslash b-\text{Matlab}$ ، و $[\text{L,U}]=\text{lu}(\text{A})\text{-Matlab}$ في حل نفس مسائل الاختبار لتوضيح أداءهما من حيث زمن التنفيذ و الدقة في الحصول على الحل المنشود.

الفصل الخامس

كرسنا اهتمامنا في هذا الفصل لإيجاد الحل الفعال لجمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار باستخدام الطرائق التكرارية :

1.طريقة جاكوبي .
2.طريقة غاوص – زايدل .
3.طريقة SOR .

أجرينا العديد من تجارب المحاكاة العددية الحاسوبية لتوضيح فعالية الطرائق المدروسة في حل جمل المعادلات ثلاثية الأقطار ثلاثية الأقطار . تتضمن هذه التجارب حساب نصف القطر الطيفي ρ و $\|\ \|_\infty, \|\ \|_2, \|\ \|_1$ نظائم مصفوفة التكرار لكل طريقة تكرارية مدروسة في هذا الفصل . علاوة على ذلك ، حسبنا وسيط الاسترخاء المثالي لكل مسألة اختبار قبل أن نستخدم طريقة SOR في حل مسائل الاختبار لنبين فعاليتها مع الوسيط بقيمته المثلى . أخيرا ، مثلنا بيانيا سلوك تقارب الطرائق المدروسة في حل جمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار الذي يتضمن عدد التكرارات الضرورية للحصول على الحل التقريبي $\tilde{x}$ مقابل $\|r_k\|_2=\|A\tilde{x}-b\|_2$.

تتوقف جميع التكرارات في الطرائق المدروسة عندما يتحقق الشرط $\frac{\|r_k\|}{\|r_0\|}\le 10^{-15}$ حيث تشير k إلى الخطوة التكرارية رقم k في الطريقة التكرارية .

الفصل السادس

لخصنا في هذا الفصل أهم النتائج العددية التي توصلنا إليها في جميع فصول الرسالة لتكون واضحة للمهتمين من العلميين والمهندسين والباحثين العاملين في مجال البحث عن الحل الفعال لجمل المعادلات الخطية ثلاثية الأقطار.

Abstract of the Thesis

The thesis was divided into six chapters. The chapter wise of the thesis are given as follows:

Chapter 1:

1. In this chapter, we presented a review of tridiagonal linear systems of equations and some their applications. We discussed the basic concepts regarding tridiagonal linear systems of equations. Finally, we showed why to study numerical methods and what are the numerical methods for solving tridiagonal linear systems of equations.

Chapter 2:

In this chapter, we discussed methods for **solving tridiagonal systems of equations using the algorithms based on Matlab-statements**. These methods includes the following:

1. The statement inv.

2. The statement **Slash (\ )**.

3. The statement [L,U,P]=lu(A), lup factorization.

4. The statement [L,U]=lu(A), lu factorization.

5. The statement [Q,R]=qr(A), qr factorization.

We made numerical comparisons among the mentioned above methods and the following direct methods:

_ Cramer's rule.

_ Gaussian elimination

1. without pivoting.
2. with partial pivoting.
3. with complete pivoting.

_ Gauss-Jordan elimination.

to show their performances in the solution of tridiagonal linear systems of equations from the view point of CPU time and the accuracy required to obtain the desired solution.

Chapter 3:

In this chapter, we introduced a method for finding the solution of tridiagonal linear systems of equations. This method depends on forward gauss elimination with backward substitution. We denoted to this method by symbol Thomas1. We made modification on this method based on backward gauss elimination with forward substitution. We denoted to this method by symbol Thomas2 . Several numerical computer running were carried out to illustrate the efficiency of the algorithms Thomas1 and Thomas2 in the solution of tridiagonal linear systems of equations.

However, a comparison made between the methods Thomas1 and Thomas2 and the algorithms A\b _Matlab and $[L,U]$=lu (A)-Matlab to show the performance of these methods in the solution of tridiagonal linear systems of equations from the view point of CPU time and accuracy to obtain the desired solution.

4

Chapter 4:

In this chapter, we introduced tow methods for finding the solution of tridiagonal linear systems of equations. **The both methods depend on the:**

1. Doolittle's method – based LU factorization.

2. Crout 's method – based LU factorization

We denoted to the **Doolittle's method – based LU factorization** by symbol DM-LU , while we denoted to the **Crout 's method – based LU factorization** by symbol CM-LU .

Several numerical computer running were carried out to illustrate the efficiency of the algorithms DM-LU and CM-LU in the solution of tridiagonal linear systems of equations. However, a comparison made between the methods DM-LU , CM-LU , Thomas1 and Thomas2 to show the performance of these methods in the solution of tridiagonal linear systems of equations from the view point of CPU time and accuracy to obtain the desired solution.

Chapter 5:

Iterative methods for solving general, large, tridiagonal linear systems have been gaining popularity in many areas of scientific computing. This is due in great part to the increased complexity and size of the new generation of linear systems that arise from typical applications.

At the same time, parallel computing has penetrated the same application areas, as inexpensive computer power has become broadly available and standard communication languages such as MPI have proved a much needed standardization. This has created an incentive to utilize iterative rather than direct solvers, e.g., Gauss Elimination, because the problems solved are typically from three or more dimensional models for which direct solvers often become ineffective due to the huge sizes of the resulting linear systems. Another incentive is that iterative methods are far easier to implement on parallel computers.

Iterative methods nowadays can be divided into three groups:

1. basic iterative methods.
2. Krylov subspace methods
3. Multigrid methods.

In this chapter, we compare the performances through numerical experiments of the first group of methods. The numerical experiments will be done based on the test data from Harrell -Bowing library.

Chapter 6:

This chapter was devoted to conclude the recommendations and suggestions which we got in all chapters of thesis to be clear to scientists and engineers who are working in the field of looking for the efficient solution of tridiagonal linear systems of equations.