الجمهورية العربية السورية
جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

" الجداء التنسوري للتوزيعات وحلول معادلات تفاضلية جزئية "

دراسة أعدت لنيل درجة الماجستير في الرياضيات البحتة

إعداد الطالب
أنـــس فـــوزي خـــلــوف

إشـــــــــــراف
الدكتور إبراهيــــــم إبراهيـــــــم
أستاذ في قسم الرياضيات

العام الدراسي

2016-2015 م

1437 هـ

Syrian Arab Republic

Al-Baath University

Faculty of Science

Department of Mathematics

Tensor Product of Distributions And Solves For Some Partial Differential Equations

Submitted to M.SC.Degree In Pure Mathematics

Submitted by

Anas Khallouf

Supervision by

Dr.Ibraheem Ibraheem

<u>Academic Year</u>

2015-2016

1437

الملخص

بدأت دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية في القرن الثامن عشر ميلادي، وحتى العقد الثالث من القرن العشرين كانت الحلول للمعادلات التفاضلية الجزئية حلولاً تقليدية. إلى أن قام سيرجي سوبوليف في منتصف الثلاثينيات بوضع حجر الأساس لصف جديد من الدوال دُعيت بِـ (التوزيعات). فكانت نظرية التوزيعات التي قدمت لنا تعميماً للمفهوم التقليدي للتحليل الرياضي، لاسيما فيما يتعلق بإمكانية اشتقاق أية دالة مستمرة بالمفهوم التوزيعي وهذا الغير محقق دوماً بالمفهوم التقليدي للاشتقاق. فكان لها الأثر البارز في العديد من النظريات الأخرى لاسيما نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية، وذلك في إيجاد الحلول التوزيعية لها.

حيث تعرف التوزيعات بأنها مجموعة كل الداليات الخطية والمستمرة T فوق فضاء دوال الاختبار $D(\Omega)$ والمعرفة بالشكل: $T: D(\Omega) \to C$. ورمزنا لها بالرمز $D`(\Omega)$.

في حين يعرف الجداء التنسوري للتوزيعات كما يلي:

ليكن لدينا التوزيعان $T \in D`(R^n)$ و $S \in D`(R^m)$ عندئذٍ التوزيع U من $D`(R^{n+m})$ والمعرف بالشكل: $U(\varphi(x)\psi(y)) = T(\varphi(x)) \ . \ S(\psi(y)) \quad ; \varphi(x) \in C_0^\infty(R^n), \ \psi(y) \in C_0^\infty(R^m)$

يدعى بالجداء التنسوري للتوزيعين T و S ونرمز له بالرمز $U = T \otimes S$.

أما التفاف التوزيعات فتعرف كما يلي:

ليكن كل من $T, S \in D`(R^n)$ إذا كانت المجموعة التالية:

$$\{(x,y) \mid (x,y) \in R^{2n}, \ x+y \in Supp\varphi, x \in SuppT, y \in SuppS\}$$

محدودة من أجل كل دالة $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$ عندئذٍ نضع:

$$(T*S)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} [\varphi(x+y)(T \otimes S)] \quad (\mu_k(x,y)))$$

حيث ندعو $T*S$ بالتفاف التوزيعين T و S. و $\mu_k(x,y) = \mu(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}) \ ; k = 1,2,...$ دالة من $C_0^\infty(R^{2n})$ تحقق $\mu_k(x,y) = 1$ من أجل $|x|^2 + |y|^2 \le k$ ، ونعني بـ $SuppT$ دعامة التوزيع T وهي متممة مجموعة العناصر x التي يكون في جوارها $T = 0$.

ومن دراستنا لهذين المفهومين وجدنا الحلول الأساسية لمجموعة من المعادلات التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية كمعادلة لابلاس ومعادلة التسخين ومعادلة الموجة بعدة أبعاد، وبأخذ التفاف الحل الأساسي مع توزيع محدد نجد الحل التوزيعي للمعادلة المطروحة.

Summary

The study of partial differential equations started in the 18th century even the third decade of 20th century the solutions of partial differential equations are classical. After that S.Sobolev put a new kind of functions called Distributions. Then we have the theory of distribution which is give us generalization of mathematical analyses, specially about ability derivative every continuous function by distributive concept that isn't ability by classical concept of derivative. This theorem affected through many theorems, specially theorem of partial differential equations. That's to get distributive solutions.

We define distribution is a continuous linear functional T on the test function space D(Ω), and we denoted by D`(Ω). while we define Tensor Product of distribution as follows:

Let $T \in D`(R^n)$ and $S \in D`(R^m)$ then the distribution U in $D`(R^{n+m})$ give as :

$$U(\varphi(x)\psi(y)) = T(\varphi(x)) \ . \ S(\psi(y)) \ ; \ \varphi(x) \in C_0^\infty(R^n), \ \psi(y) \in C_0^\infty(R^m)$$

Nevertheless convolution of distributions give as:

Let $T, S \in D`(R^n)$,If the set

$$\{(x,y) \mid (x,y) \in R^{2n}, \ x+y \in Supp\varphi, x \in SuppT, y \in SuppS\}$$

Is bounded for every function $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^n)$,then we set

$$(T * S)(\varphi) = \lim_{k \to \infty} [\varphi(x+y)(T \otimes S)] \ \ (\mu_k(x,y)))$$

Where $\mu_k(x,y) = \mu(\frac{x}{k}, \frac{y}{k})$; $k = 1,2,...$ and $\mu_k(x,y) = 1$ for $|x|^2 + |y|^2 \le k$.

From studing that's consepts, we find the fundamental solutions for many partial differential equations of second order such Laplace, Heat and Wave equations, and by convolution between the fundamental solutions and particular distribution, we get the distributive solution of that equations.