التمثيل التبولوجي للشبكة التوزيعية شرطياً

Topological representation of conditionally distributive lattice

ملخص عن رسالة الماجستير بعنوان:

التمثيل التبولوجي للشبكة التوزيعية شرطيا

تهدف رسالة الماجستير هذه إلى دراسة التمثيل التبولوجي للشبكة التوزيعية شرطياً.

وقد ذكرنا في **الفصل الأول** للرسالة معنى الشبكة والشبكة الجزئية والشبكة الجزئية النظامية والشبكة المحدبة وعرفنا بعض أنواع الشبكات وخواصها كالشبكة المعيارية وهي الشبكة $(L\ ,\ \leq)$ التي تحقق: أياً كانت العناصر a, b, c من L بحيث $b \leq a$ فإن:

$$a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$$

والشبكة شبه المعيارية هي الشبكة L التي تحقق الفرضيتين الآتيتين :

إذا كان $a, b\ , c$ عناصر كيفية من L بحيث إن :

(1) a, c غير مقارنين .

(2) $a \wedge c < b < a$.

فإنه يوجد عنصر ما في L مثل d يحقق :

(3) $a \wedge c < d \leq c$.

(4) $a \wedge (b \vee d) = b$.

والشبكة التوزيعية L هي الشبكة التي تحقق الشرط :

أياً كانت العناصر a, b, c في الشبكة L فإن :

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

وأتينا على تعريف المرشحات ، لما لها من أهمية في دراسة التمثيل التبولوجي.

نسمي المجموعة الجزئية غير الخالية F من $(E\ ,\ \leq)$ مرشحة في E إذا حققت مايلي :

a) إذا كان $x \in F\ ,\ y \geq x$ فإن $y \in F$

b) إذا كان $x \in F\ ,\ y \in F$ فإن $x \wedge y \in F$

وتحدث **الفصل الثاني** عن شبكة بول التي هي شبكة توزيعية ومتممة بآن واحد والحلقة البوليانية والتي هي حلقة واحدية حيث أن الضرب فيها يحقق خاصة الجمود. وأرفقنا شبكة بول بالحلقة البوليانية كما يلي :

لتكن E شبكة بول ، يمكن بناء الحلقة البوليانية $A(E)$ اعتماداً على الشبكة E وذلك بتعريف العمليتين:

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$$

$$xy = x \wedge y$$

لتكن B حلقة بوليانية ولنرفقها بالشبكة البوليانية والتي سنرمزها بِ $T(B)$ وذلك بتعريف العمليتين :

$$x \wedge y = xy$$

$$x \vee y = x + y + xy$$

سوف نستعرض نظرية تمثيل ستون في جبر بول كما يلي :

لتكن A حلقة بوليانية ولتكن X مجموعة فوق المرشحات في A ليكن σ تطبيقاً من A في $\mathcal{P}(X)$

معرفاً بالشكل التالي: $\sigma : A \to \mathcal{P}(X)$

بفرض أن $x \in A$ فإن : $\sigma(x) = \{\mathcal{U} \in X \,;\, x \in \mathcal{U}\}$.

كما سوف نستعرض أيضاً النظرية الثنوية لفضاء بول وسنذكر بعض المفاهيم التبولوجية مثل الترابط و التراص وتعريف المجموعات المفتوحة و المغلقة بآن واحد و أهميتها في بعض نظريات التمثيل، وخاصة في تمثيل ستون.

وأخيراً في الفصل الثالث درسنا نظرية التمثيل التبولوجي للشبكة التوزيعية شرطياً و أتينا على ذكر معنى الشبكة التوزيعية شرطياً كما يلي (نقول عن شبكة H ذات عنصر الوحدة 1 إنها شبكة توزيعية شرطياً ونرمز لها اختصاراً ش_توزيعية ((C_distributive)) إذا حققت أحد الشرطين المتكافئين :

$1)\ \forall\, x, y, \mathfrak{z} \in H : y \vee \mathfrak{z} \neq 1 \implies x \wedge (y \vee \mathfrak{z}) = (x \wedge y) \vee (x \wedge$
$\mathfrak{z})$ $\quad 2)\ \forall\, x, y, \mathfrak{z} \in H : x \vee y \neq 1$ وَ $x \vee \mathfrak{z} \neq 1 \implies x \vee (y \wedge \mathfrak{z}) =$

$(x \vee y) \wedge (x \vee z)$ وذكرنا بعضاً من خواصها وزودناها بتبولوجيا

$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ (إذا كانت H شبكة توزيعية شرطياً تامة تحوي 0 حيث: $\mathcal{A} = \{\cup_{i\in I} f(a_i)\}_{a_i \in H} \cup \{\emptyset\}$

مع الاستفادة من مفهوم المرشحات الأولية شرطياً التي عرفناها بالشكل :

نقول عن المجموعة الجزئية F من الشبكة H إنها مرشحة أولية شرطياً واختصاراً ش_مرشحة أولية .

إذا و فقط إذا كانت المرشحة الفعلية F من H تحقق العلاقة:

$a \vee b \in F$ وَ $a \vee b \neq 1$ $\in F$

أو $b \in F$

وطرحنا التمثيل التبولوجي للشبكة التوزيعية شرطياً في نظرية عبرنا عنها كالتالي :

لتكن H شبكة توزيعية شرطياً تامة تحوي العنصرين $1,0$ ، و لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة كل المرشحات الأولية شرطياً من H. و لنعرف التطبيق f من H في $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$ (حيث $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$ مجموعة أجزاء $\boldsymbol{\mathcal{F}}$)، كما يلي:

بفرض أن: $\forall a \in H$ فإن:

$$f: H \longrightarrow \mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$$

$$f(a) = \{F : a \in F \quad \text{وَ} \quad F \in \boldsymbol{\mathcal{F}}\}$$

((أي أن $f(a)$ هي مجموعة المرشحات الأولية شرطياً الحاوية للعنصر a))

عندئذٍ فإن f يكون مونومورفيزماً من H في $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$.

علماً أن $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$ شبكة توزيعية شرطياً . فيكون f مونومورفيزم .

Topological representation of conditionally distributive lattices

This master thesis aims to study the topological representation of the conditional distributive lattice.

We have mentioned in the first chapter the meaning of lattice, partial lattice, regular partial lattice and the convex (curvature) lattice. We have also defined some types of lattices and their properties like the modular lattice which is the one that proves :" We say that $(\leq , L)$ is standard if it proves the following: whatever the elements a, b, c from (L) as $(b \leq a)$ is

$$a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$$

And the semi- modular lattice defined as :" We say that (L) is semi – modular if and only if these two conditional equations are proved:

If (a, b, c) are conditional elements from (L) where

1. a , c are incomparable
2. $a \wedge c < b < a$

results to the existence of an element like (d) in (L) which proves

3. $a \wedge c < d \leq c$
4. $a \wedge (b \vee d) = b$

and the distributive lattice that proves the condition : We say that (L) is distributive if and only if the following equation is proved:

Whatever the elements (a, b, c) from the lattice (L) are , it is

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

We have also defined the Hayting lattice. We have also defined filters because of their importance in topological representation.

We call the non – empty partial group (F) from $(\leq , E)$ filtered in (E) if it proves the following :

a) If $x \in F$, $y \geq x$ it is that $y \in F$
b) If $x \in F$, $y \in F$ it is that $x \wedge y \in F$

We have discussed in the second chapter Boolean Lattice which we defined as :" We call the lattice that is distributive and integral as Boolean Lattice) and the Boolean coteries (we call a coterie as Boolean if the multiplication in it proves the quality (and we attached Paul Lattice with the Boolean coteries as the following:

E as Boolean Lattice attached with the Boolean coteries symbolized as " $A(E)$" through these two processes:

$$x + y = (x \wedge \acute{y}) \vee (\acute{x} \wedge y)$$

$$xy = x \wedge y$$

B as a Boolean coterie attached with Boolean lattice symbolized as " $T(B)$" through these two processes:

$$x \wedge y = xy$$

$$x \vee y = x + y + xy$$

And the representation theory in Boolean algebra which the scientist Stone represented as follows:

A is a Boolean coterie and X as an over – filtered group in A and σ as an application from (A) in $\mathcal{P}(X)$ known as the following :

$$\sigma: A \to \mathcal{P}(X)$$

With the assumption that $x \in A$ thus :

$$\sigma(x) = \{\mathcal{U} \in X \,;\, x \in \mathcal{U}\}$$

Stone Representation

Each Boolean coterie is Isomorphic with the partial sets group family. σ to be accurate is Boolean Isomorphic from A in $\mathcal{P}(X)$.

The accessorial theory for Boolean representation and we have mentioned some Topological terms such as connection and compaction , we also defined open and closed sets at the same time and their importance in some representative theories as in Stone Representation.

Finally We have discussed in the third chapter topological representation of the conditional distributive lattice, we have discussed first the meaning of the conditional distributive lattice as follows (We say that " H " lattice of one element " 1 " is a conditional distributive lattice and represent it as " C – distributive ") if these two conditional equations are proved:

1) $\forall\, x, y, \mathfrak{z} \in H : y \vee \mathfrak{z} \neq 1 \Longrightarrow x \wedge (y \vee \mathfrak{z}) = (x \wedge y) \vee (x \wedge \mathfrak{z})$

2) $\forall\, x, y, \mathfrak{z} \in H : x \vee y \neq 1 \ \text{و}\ x \vee \mathfrak{z} \neq 1 \Longrightarrow x \vee (y \wedge \mathfrak{z}) = (x \vee y) \wedge (x \vee \mathfrak{z})$

We have mentioned some of its properties and supply it with " $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ " topology (If " H " is a completed conditional distributive lattice containing " 0 " where

$$\mathcal{A} = \{\cup_{i\in I} f(a_i)\}_{a_i\in H} \cup \{\emptyset\}$$

With specific properties benefitting from conditional prime filters which we have defined as :(We say that the partial set " F " from " H " lattice is a conditional prime filter represent it as " C – prime filter". If and only if the actual " F " from " H " approves the following relation

$$a \vee b \in F \quad and \quad a \vee b \neq 1 \qquad\qquad a \in F$$

$$b \in F$$

We have represent the conditional distributive lattice representation in a theory we have expressed as follows :

H is a completely conditional distributive lattice containing the elements " 1 , 0 " , and " $\mathcal{F}$ " is the whole conditional prime filters from " H " and let's define the application " f " from " H " in " $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$" (where " $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$" is a partial sets of " $\mathcal{F}$ " as the following :

It is with the assumption that " $a \in H$ "

$$f : H \longrightarrow \mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$$

$$f(a) = \{F : a \in F \ \ \text{و} \ \ F \in \boldsymbol{\mathcal{F}}\}$$

It means that " $f(a)$ " is the conditional prime filters containing the element " a " and that " H " is a monorphism from " H " in " $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$ " with the knowing of that " $\mathcal{P}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$" is a conditional distributive lattice as a result we have homomorphism.