



الجمهورية العربية السورية

وزارة التعليم العالي

جامعة البعث

كلية العلوم - قسم الرياضيات

**دراسة في المنظومات الديناميكية المتزاوجة**  
دراسة أعدت لنيل درجة الماجستير في الميكانيك الرياضي

إعداد الطالبة  
**نسرين فضيل الأسعد**

إشراف  
**الدكتور محمد العلي**  
مدرّس في قسم الرياضيات  
كلية العلوم - جامعة البعث

مشاركة  
**الدكتور عبد الباسط الخطيب**  
استاذ في قسم الرياضيات  
كلية العلوم - جامعة البعث

٢٠٢٢-١٤٤٢ هـ

# المحتويات

ملخص الرسالة.....	٨
الفصل الأول: مقدمة عامة في المنظومات الديناميكية.....	١٠
1-1 تعاريف ومفاهيم أساسية: .....	١٠
1-1-1 المنظومة الديناميكية: .....	١٠
1-1-2 المنظومة المُحكّمة (Deterministic): .....	١٠
1-1-3 المنظومة الديناميكية ذات الزمن المتقطع .....	١١
1-1-4 المنظومة الديناميكية ذات الزمن المستمر .....	١٢
1-1-5 اللاخطية .....	١٣
1-1-6 جاذب المنظومة الديناميكية .....	١٣
1-1-8 الجاذب الغريب .....	١٣
1-2 خلفية في نظرية الاستقرار الخطي: .....	١٤
1-3 استقرار وجذب المجموعة (Set Stability and Attractivity): .....	١٦
1-3-1 المجموعة الصامدة (invariant Set) : .....	١٦
1-3-2 مفهوم المجموعات المستقرة : .....	١٦
1-3-3 مفهوم المجموعات الجاذبة .....	١٧
الفصل الثاني: البيانات الموجهة والمصفوفات غير السالبة .....	١٨

١٨.....	2-1 مقدمة:
١٨.....	2-1-1 البيانات الموجهة، الجوارات، الدرجات (Digraphs, Neighbors, Degrees):
٢٠.....	2-1-2 الممرات، المسارات، الدورات (Walks, Paths, Cycles):
٢٣.....	2-1-3 اتصالات البيانات الموجهة:
٢٥.....	2-1-4 العمليات على البيانات الموجهة :
٢٧.....	2-1-5 البيانات الموجهة الديناميكية (Dynamic Digraphs):
٢٨.....	2-1-6 البيانات غير الموجهة (Undirected Graphs):
٢٩.....	2-1-7 نتائج ومبرهنات أساسية في البيانات الموجهة:
٣٢.....	2-2 المصفوفات غير السالبة ونظرية البيان:
٣٢.....	2-2-1 المصفوفة غير السالبة، مصفوفة الجوار، البيان الموجه:
٣٤.....	2-2-2 المصفوفات غير القابلة للاختزال (Irreducible Matrices):
٣٨.....	2-2-3 المصفوفات الأولية (Primitive Matrices):
٤٣.....	2-2-4 المصفوفات الاحتمالية (Stochastic Matrices):
	2-2-5 مصفوفات سيا (Stochastic, indecomposable, aperiodic Matrices) [5]
٤٨.....	
٥٧.....	2-3 المصفوفات المولدة ونظرية البيان:
٥٧.....	2-3-1 مصفوفات ميتزلر والمصفوفات من النوع $M$ [7]:
٥٩.....	2-3-2 المصفوفات المولدة، لابلاسيان البيان، البيانات الموجهة

2-3-3 مصفوفة الانتقال لمصفوفة مولدة (The Transition Matrix of a Generator

Matrix): ٦٢.....

2-3-4 القيمة الذاتية الصفرية للمصفوفة المولدة (The Zero Eigenvalue of

Generator Matrix): ٦٤.....

2-3-5 الاستقرار من النوع  $H(\alpha, m)$  (Stability)  $H(\alpha, m)$  [8]: ٦٨.....

٧٨ ..... الفصل الثالث المنظومات الخطية المتزاوجة

3-1 مقدمة: ٧٨.....

3-2 صياغة المسألة: ٨١.....

3-3 المنظومات الخطية المتزاوجة ذات الطوبولوجيا الثابتة: ٨٧.....

3-3-1 بنية التزاوج الدورية (Cyclic Coupling Structure): ٨٧.....

3-3-2 التعميم (حالة البيان الموجه التفاعلي أحادي الاتجاه): ٨٩.....

3-4 المنظومات الخطية المتزاوجة ذات الطوبولوجيا الديناميكية: ٩٣.....

3-4-1 بنية التزاوج المتناظرة (حالة البيان التفاعلي ثنائي الاتجاه): ٩٤.....

2-4-3 تعميم (البيان التفاعلي أحادي الاتجاه): ١٠٠.....

3-5 أمثلة ومناقشات: ١٠٣.....

3-5-1 التحويل المرتبط بالزمن (Time Dependent Switching): ١٠٣.....

2-5-3 التحويل المرتبط بالحالة والزمن (Time and State Dependent Switching)

١٠٤.....

١٠٨..... : (State Dependent Switching) 3-5-3 التحويل المعتمد على الحالة

١١١..... : (Switched Positive Systems) 3-5-4 المنظومات المتحولة الموجبة

١١٨..... قائمة المراجع

## قائمة الأشكال

- الشكل (1): البيانات الموجهة. ١٩.....
- الشكل (2): الممر\_ شبه الممر \_ المسار\_ الدورة. ٢١.....
- الشكل (3): البيانات الموجهة الدورية وغير الدورية. ٢٢.....
- الشكل (4): البيانات الموجهة باتصالاتها المختلفة. ٢٤.....
- الشكل (5): البيان الموجه ومعاكسهُ. ٢٥.....
- الشكل (6): عملية اتحاد بيانين موجهين. ٢٥.....
- الشكل (7): ثلاث بيانات موجهة جزئية مُحدثة من البيان الموجه  $G$ . ٢٦.....
- الشكل (8): إشارة التحويل. ٢٨.....
- الشكل (9): بيانين موجهين. ٢٨.....
- الشكل (10): بيان غير موجه وبيان موجه ثنائي الاتجاه. ٢٨.....
- الشكل (11): البيان الموجه المقترن ومصفوفة الجوار. ٣٣.....
- الشكل (12): أقراص جيرشغورين. ٣٤.....
- الشكل (13): البيانات الموجهة المقترنة بالمصفوفات غير السالبة. ٣٦.....
- الشكل (14): البيانات الموجهة المقترنة (المصفوفات القابلة للأختزال، غير قابلة للأختزال). ٣٧..
- الشكل (15): الممر من  $v_i$  إلى  $v_i$  والذي يكون إما دورة أو مولد بعدد من الدورات. ٣٩.....
- الشكل (16): البيانات الموجهة المقترنة بالمصفوفات غير السالبة. ٤٢.....
- الشكل (17): البيان الموجه المقترن يملك مركبين قويين مغلقين والذي تدور حولهما الخطوط المنقطه. ٤٧.....
- الشكل (18): البيانات الموجهة المقترنة بمصفوفات سيا. ٥٤.....

- الشكل (19): البيانات الموجهة المقترنة بالمصفوفات المولدة. ٦١.....
- الشكل (20): البيان الموجه. ٦٢.....
- الشكل (21): أقراص جيرشغورين لمصفوفة مولدة. ٦٥.....
- الشكل (22): تحول s وحدات. ٦٨.....
- الشكل (23): البيانات الموجهة التفاعلية. ٨٢.....
- الشكل (24): بيانين موجّهين تفاعليين يمثلان اثنين من روابط الاتصال. ١٠٤.....
- الشكل (25): مجالات رؤية تشبه المخروط. ١٠٥.....
- الشكل (26): الشرط الأولي لثلاث روبوتات. ١٠٧.....
- الشكل (27): مسارات لخمسة أعضاء والبيانات الموجهة التفاعلية. ١١٠.....
- الشكل (28): مجال رؤية يشبه القرص. ١١١.....
- الشكل (29): المواقع الابتدائية. ١١٢.....
- الشكل (30): نطاق الاستشعار 30. ١١٢.....
- الشكل (31): نطاق الاستشعار 25. ١١٣.....
- الشكل (32): نطاق الاستشعار 50. ١١٣.....
- الشكل (33): بيانان موجّهان تفاعليان. ١١٥.....
- الشكل (34): الاستجابات الزمنية وإشارة التحويل. ١١٦.....
- الشكل (35): مسار مقارب مستقر. ١١٧.....

## ملخص الرسالة

تقع هذه الأطروحة في فصول ثلاثة مقسمة على النحو التالي:

### الفصل الأول: مقدمة في المنظومات الديناميكية

في هذا الفصل، ذكرنا بعض التعريفات المتعلقة بالمنظومات الديناميكية، وبينا متى تكون المجموعة الصامدة مُستقرة أو المنظومة الديناميكية مُستقرة بالنسبة للمجموعة الصامدة، وكذلك عرّفنا جاذب المنظومة الديناميكية، وذكرنا متى تكون المجموعة الصامدة جاذبة أو المنظومة الديناميكية جاذبة بالنسبة للمجموعة الصامدة.

### الفصل الثاني: المصفوفات غير السالبة والبيانات الموجهة

عرفنا بعض المصطلحات المتعلقة بنظرية البيان، وقمنا بمراجعة إثبات بعض المبرهنات التي تربط بين المصفوفات غير السالبة ونظرية البيان، استطعنا من خلالها معرفة بعض خواص المصفوفات غير السالبة بالاعتماد على نظرية البيان، وكذلك عرّفنا جداء كرونكر لمصفوفتين، وذكرنا متى تكون المصفوفة مُستقرة من النوع  $H(\alpha, m)$ ، وذلك بالاعتماد على البيان المُوجه المقترن بتلك المصفوفة.

### الفصل الثالث: المنظومات الديناميكية الخطية المتزاوجة

في هذا الفصل، ذكرنا بعض التعاريف المتعلقة بالمنظومات الديناميكية المتزاوجة، وقمنا بتحليل بنية التزاوج إلى أربع حالات: (بنية التزاوج الدورية، والبيان التفاعلي أحادي الاتجاه مع الطوبولوجيا الثابتة، والبيان التفاعلي ثنائي الاتجاه مع الطوبولوجيا الديناميكية، والبيان التفاعلي



الأحادي الاتجاه مع الطبولوجيا الديناميكية )، وتمّ في كل حالة الحصول على الشروط اللازمة والكافية التي تضمن الاستقرار والجذب فيما يتعلق بمنطقة التوازن.

## الفصل الأول: مقدمة عامة في المنظومات الديناميكية

### 1-1 تعاريف ومفاهيم أساسية:

**1-1-1 المنظومة الديناميكية:** هي مجموعة من المعادلات الرياضية (تفاضلية، أو فرقية، أو تكاملية، أو جبرية، أو مزيج منها معاً)، التي تعطي قيمة المتغير الذي يحدد حالة المنظومة الديناميكية مع تغير الزمن بدلالة الحالة أو الحالات السابقة لهذه المنظومة. وتتكون المنظومة الديناميكية من فضاء الموضع أو الحالة  $\Pi$  الذي يمكن أن يكون أي مجموعة جزئية من  $\mathbb{R}^N$ ، تصف إحداثياته الحالة الحركية للمنظومة في أي لحظة زمنية، ومتحول الزمن  $t$  الذي يمكن أن يكون مستمراً ( $t \in \mathbb{R}$ ) أو متقطعاً ( $t \in \mathbb{Z}$ )، وعلاقة ديناميكية (دالة رياضية) تحدد قانون التغير الزمني لمتغير الحالة مع الزمن. ويحدد قانون التغير الزمني  $\varphi : \Pi \times (\mathbb{R} \text{ or } \mathbb{Z}) \rightarrow \Pi$ ، الحالة المستقبلية لمتغيرات فضاء الموضع بدلالة القيم الحالية لها فقط، على افتراض أن هذه الدالة تحقق الشروط التالية:

$$\varphi(0, x) = x \quad .1$$

$$\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x) \quad .2$$

$$.3 \quad \text{الدالة } \varphi(t, x) \text{ مستمرة بالنسبة للمتغيرات } (t, x).$$

تسمى المنظومة الديناميكية "منظومة تلقائية (autonomous)" إذا لم تحتوي العلاقة الديناميكية التي تمثلها على متحول الزمن  $t$  بشكلٍ صريح وظاهر.

### 1-1-2 المنظومة المُحكَّمة (Deterministic):

تكون المنظومة الديناميكية مُحكَّمة إذا كانت المعرفة الدقيقة بالشروط الابتدائية للمنظومة الديناميكية وقيم جميع الوسطاء العددية التي

يعتمد عليها هذا النظام من حيث المبدأ، تحدد سلوكاً مستقبلياً وحيداً لهذه المنظومة، بينما تسمى المنظومة احتمالية أو عشوائية إذا كانت هناك سلوكيات مستقبلية متعددة (أكثر من واحدة) يتم اختيارها من خلال توزيع احتمالي معين لكل حالة، هذا لا يعني بالضرورة إمكانية التنبؤ بالسلوك المستقبلي للمنظومة الديناميكية المُحكّمة، وفي الحقيقة هذا هو ما تعتنى به نظرية الفوضى في المنظومات اللاخطية "عدم القدرة على التنبؤ في المنظومات المُحكّمة"، فمعرفةنا بأن الشمس ستشرق غداً هو دليل على قابلية التنبؤ في المنظومة، أما عدم قدرتنا على معرفة ما سيؤول إليه المناخ والحالة الجوية بعد شهرٍ من الآن ما هو إلا دليل على عدم القدرة على التنبؤ، وعلى الرغم من أنه يمكن أن يقول البعض بأن عدم القدرة على التنبؤ في منظومة الطقس والحالة الجوية يؤول إلى شدة تعقيد هذه المنظومة، ووجود عدد كبير من المتغيرات والوسطاء فيها، إلا أن اكتشاف وجود منظومات في غاية البساطة تحتوي على متحول واحد فقط تتبع سلوكاً لا يمكن التنبؤ به، مشابه لسلوك منظومة الطقس والحالة الجوية.

### 1-1-3 المنظومة الديناميكية ذات الزمن المتقطع

**(Discrete-Time Dynamical System):** في هذا النوع من المنظومات الحركية يُعد الزمن متغيراً ومتقطعاً على مجالات زمنية محددة يتم في نهاية كل مجال من هذه المجالات تقييم متغير الحالة للمنظومة الديناميكية ولا يتم تقييمه داخل أي مجال من المجالات الزمنية. فإذا ما اعتبرنا الزمن مُتغيراً صحيحاً  $k$ ، عندئذٍ يتم تمثيل المنظومة بمجموعة معادلات فرقية من الشكل:

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu) \quad (1.1)$$

حيث إن  $\mu \in \mathbb{R}^M$  هو وسيط المنظومة و  $x_k \in \mathbb{R}^N$  هو التكرار من المرتبة  $k$  للحالة الابتدائية  $x_0$  و ينتج عن تكرار تطبيق الدالة  $f$  المعطاة  $k$  مرة على الحالة الابتدائية  $x_0$ ، أي إن:

$$x_k = \underbrace{f(f(\dots(f(x_0), \mu) \dots, \mu), \mu)}_{k \text{ times}}$$

المسار  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  للتصور السابق هو متتالية التكرارات التي تبدأ من الموضع الابتدائي المعطى.

#### 1-1-4 المنظومة الديناميكية ذات الزمن المستمر

**(Continuous-Time Dynamical System) (التدفق (Flow)):** يعتبر الزمن في هذا

النوع من المنظومات الديناميكية متغيراً حقيقياً يتغير بشكلٍ مستمرٍ، ويعطى التدفق على شكل معادلة تفاضلية شعاعية (أي جملة معادلات تفاضلية) من الشكل:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu) \quad (1.2)$$

حيث إن  $x \in \mathbb{R}^N$  هو متغير الحالة أو الموضع للمنظومة و  $\mu \in \mathbb{R}^M$  هو وسيط المنظومة، ونقول في هذه الحالة إن المنظومة الديناميكية ذات  $N$  بُعد، وتحتوي على  $M$  وسيط. كما ويتم الحصول على حل (أو مسار)، من الشكل  $x(t) = \phi(t, x_0)$ ، لهذه المنظومة عن طريق مكاملة معادلات المنظومة التفاضلية بآنٍ واحد وتعويض الشروط الابتدائية المعطاة  $x(0) = \phi(0, x_0) = x_0$ .

### 1-1-5 اللاخطية (Nonlinearity): نقول إنَّ المنظومة الديناميكية لاخطية إذا كان خُرج هذه

المنظومة لا يتناسب مع دخل المنظومة، ونستدل على اللاخطية في المنظومة من خلال فشل تطبيق مبدأ التراكب الذي ينص على أن حاصل مجموع حلين لهذه المنظومة هو أيضاً حل لها، واللاخطية في المنظومة تجعل هذه المنظومة غير بسيطة، بحيث تصعب جداً دراستها، مما يجعل استخدام الكمبيوترات مسألة قيمة للغاية، حيث يمكن للكمبيوتر عندئذٍ عرض محاكاة أو تمثيل حركي مباشر لهذه المنظومة وللنتائج المعقدة، بحيث يمكن رؤيتها بسهولة.

### 1-1-6 جاذب المنظومة الديناميكية (Attractor of a Dynamical System): الجاذب

هو المسار (أو مجموعة من المسارات) المتوضعة في منطقة محدودة من فضاء موضع المنظومة الديناميكية والتي تمتلك جواراً في هذا الفضاء، بحيث إن أي مسار لهذه المنظومة يبدأ من نقطة داخل هذا الجوار، يبقى في هذا الجوار و يقترب من الجاذب عندما يسعى الزمن إلى اللانهاية. هناك مفهوم أساسي و مهم جداً مُرتبط بجاذب المنظومة الديناميكية، ألا وهو مجال الجذب، وهو الذي يعرف على أنه أعظم جوار لهذا الجاذب يحقق الخاصة السابقة، ولسوء الحظ، فإنه في حال وجود أكثر من جاذب واحد لمنظومة ديناميكية، فإن الحد الفاصل ما بين مجالي جذب هذين الجاذبين يمكن أن يكون معقداً للغاية. ومن الجواذب الشهيرة للمنظومات الديناميكية، والتي تُسمى في بعض الأحيان: "جواذب بسيطة، والنقاط الثابتة، والمدارات الدورية، والمدارات الحدية".

### 1-1-8 الجاذب الغريب (Strange Attractors): يتوجب القول إنه ما من تعريف شائع

ومؤخداً يتم من خلاله تعريف الجاذب الغريب لمنظومة ديناميكية، ولكن يمكن تعريف الجاذب

الغريب بأنه ذلك الجاذب لمنظومة ديناميكية الذي له بنية فراكتلية (تشابه ذاتي). ويمكن عادةً التعرف عليه من خلال بُعده الفركتلي عندما يكون هذا البعد عدداً غير صحيح.

## 1-2 خلفية في نظرية الاستقرار الخطي:

لتكن لدينا المنظومة المعطاة بالعلاقة (1.2)، تسمى النقطة  $x^* \in \mathbb{R}^N$  التي تحقق العلاقة  $f(x^*, \mu) = 0$ ، نقطة توازن أو نقطة ثابتة للمنظومة، يمكننا أن نفرض وبدون المساس بعمومية المسألة أن النقطة هي  $x^* = 0$ . وبالتالي يمكن جعل المنظومة (1.2) خطية عن طريق النشر حول هذه النقطة، وكتابتها على الشكل:

$$\frac{dx}{dt} = A(\mu) \cdot x + g(x, \mu)$$

حيث إن  $A(\mu)$  هي المصفوفة الجاكوبية للدالة  $f(x, \mu)$  والتي نحصل عليها من قيم مشتقات الدالة  $f$  بالنسبة إلى  $x$  عند نقطة التوازن، وإن

$$g(x, \mu) = f(x, \mu) - A(\mu) \cdot x \approx 0(x, \mu)$$

وعلى أي حال، لكي ندرس الاستقرار المحلي للمنظومة (1.2) قرب نقطة التوازن، نقوم بدراسة الاستقرار الخطي للمنظومة الخطية التالية:

$$\frac{dx}{dt} = A(\mu) \cdot x$$

و يتم ذلك عادةً عن طريق دراسة القيم الذاتية للمصفوفة  $A(\mu)$  والتي هي قيم  $\lambda$  التي نحصل عليها عن طريق حل المعادلة المميزة  $|\lambda \cdot I - A(\mu)| = 0$ ، حيث إن  $I$  هي مصفوفة الوحدة وإذا كان الجزء الحقيقي لجميع القيم الذاتية لا يساوي الصفر، فإن نقطة التوازن تدعى "زائدية".

نقول عن متجه قيمة ذاتية  $e_i$  مقابل للقيمة الذاتية  $\lambda_i$  إنه منحنى مستقر (أو غير مستقر) إذا وفقط إذا كان  $\lambda_i < 0$  (أو  $\lambda_i > 0$ ). أما إذا كان  $\lambda_i$  عدداً مركباً (عقدي)، وبالتالي لا بد من وجود مرافق عقدي لهذه القيمة الذاتية، عندئذٍ نقول إن نقطة التوازن  $x^*$  هي مركز مستقر (أو غير مستقر) إذا وفقط إذا كان  $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0$  (أو  $\text{Re}\{\lambda_i\} > 0$ )، حيث إن  $\text{Re}\{\lambda_i\}$  هو الجزء الحقيقي للعدد المركب  $\lambda_i$ . ويسمى الفضاء الجزئي من فضاء موضع المنظومة الديناميكية في جوار نقطة التوازن  $x^*$  والمتولد بجميع المتجهات التي تمثل المناحي المستقرة (أو غير المستقرة) للمصفوفة  $A(\mu)$  بالمتنوعة المحلية المستقرة (أو غير مستقرة) للنقطة  $x^*$ . وهكذا فإن المتنوعة المستقرة (أو غير المستقرة) للنقطة  $x^*$ ، بشكل عام، هي مجموعة نقاط فضاء موضع المنظومة الديناميكية التي تسعى إلى النقطة  $x^*$  عندما يسعى الزمن  $t$  إلى  $+\infty$  (أو  $-\infty$ ).

أما بالنسبة لمنظومة (1.1)، فإن التعاريف السابقة تختلف قليلاً عما سبق، فمثلاً تكون النقطة  $x^*$  نقطة توازن (نقطة ثابتة) للمنظومة إذا وفقط إذا كان  $f(x^*, \mu) = x^*$ . كما وتكون النقطة زائدية، إذا وفقط إذا تحقق أنه  $\forall i, |\lambda_i| \neq 1$ ، فإن  $|\lambda_i| < 1$  من أجل جميع القيم الذاتية لمصفوفة المنظومة، كما ونسمي الفضاء الجزئي من فضاء موضع هذه المنظومة في جوار النقطة  $x^*$  والذي تولده جميع متجهات القيم الذاتية المستقرة (غير المستقرة) للمصفوفة  $A(\mu)$ ، أي التي يتحقق من أجلها  $|\lambda_i| < 1$  ( $|\lambda_i| > 1$ )، المتنوعة المحلية المستقرة (غير المستقرة) للنقطة  $x^*$ .

تجدر الإشارة هنا إلى أن ما تمّ دراسته في هذه الفقرة هو مفهوم الاستقرار الخطي، ولكن تجدر الإشارة إلى وجود تعاريف أخرى لأنواع مختلفة من الاستقرار يمكن تطبيقها على المنظومات الديناميكية، مثل: استقرار ليابونوف (Lyapunov)، والاستقرار التقاربي (asymptotic)،

والاستقرار الأسّي (exponential)، والاستقرار المداري (orbital)، أو ما يُسمى البنيوي (structural).

### 1-3 استقرار وجذب المجموعة (Set Stability and Attractivity):

#### 1-3-1 المجموعة الصامدة (invariant Set) : من أجل أي منظومة مرتبطة ظاهرياً

بالزمن  $t$  من الشكل

$$\dot{x} = f(t, x)$$

حيث أن  $f: R \times R^n \rightarrow R^n$  هي دالة مستمرة بشكل متقطع بالنسبة للمتحول الزمني  $t$  ومستمرة بالنسبة لمتحول الحالة  $x$  على  $R \times R^n$ .

نقول أن المجموعة  $\Omega \subset R^n$  صامدة أمامياً للمنظومة إذا كان من أجل كل  $t_0 \in R$  و كل

$$x^0 \in \Omega \text{ يتحقق أن } x(t, t_0, x^0) \in \Omega, \text{ و ذلك أيأ كانت } t \geq t_0.$$

و بنفس الأسلوب نعرف المجموعة الصامدة خلفياً و الصامدة بشكلٍ عام.

#### 1-3-2 مفهوم المجموعات المستقرة : نقول إن المجموعة الصامدة $\Omega$ أو المنظومة (بالنسبة

للمجموعة الصامدة  $\Omega$ )

- مُستقرة: إذا كان من أجل كل  $t_0$  وكل  $\varepsilon > 0$ ، يوجد  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  بحيث إن

$$\|x^0\|_{\Omega} \leq \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|x(t)\|_{\Omega} \leq \varepsilon : \forall t \geq t_0$$

- مُستقرة بانتظام: إذا كان من أجل كل  $\varepsilon > 0$ ، يوجد  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  بحيث إن

$$\|x^0\|_{\Omega} \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t)\|_{\Omega} \leq \varepsilon : \forall t \geq t_0$$

حيث يمثل النظم  $\|\cdot\|_{\Omega}$  المعروف على فضاء الحالة للمنظومة بُعد النقطة  $x^0$  عن المجموعة  $\Omega$ .



### 3-3-1 مفهوم المجموعات الجاذبة: نقول إن المجموعة الصامدة $\Omega$

- جاذبة في المنطقة  $D$  من فضاء الحالة: إذا تحقق الشرط

$$\forall x^0 \in D \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\|_{\Omega} = 0$$

- جاذبة بانتظام في المنطقة  $D$ : إذا كان من أجل كل  $c > 0$  يتحقق

$$(\|x^0\| \leq c) \wedge (x^0 \in D) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\|_{\Omega} = 0$$

وذلك بشكل منتظم من أجل كل  $x^0, t_0$

- جاذبة في كل مكان، إذا كانت جاذبة على كامل الفضاء  $R^n$ .
- جاذبة بانتظام في كل مكان، إذا كانت جاذبة بانتظام على كامل الفضاء  $R^n$ .

## الفصل الثاني: البيانات الموجهة والمصفوفات غير السالبة

### 2-1 مقدمة:

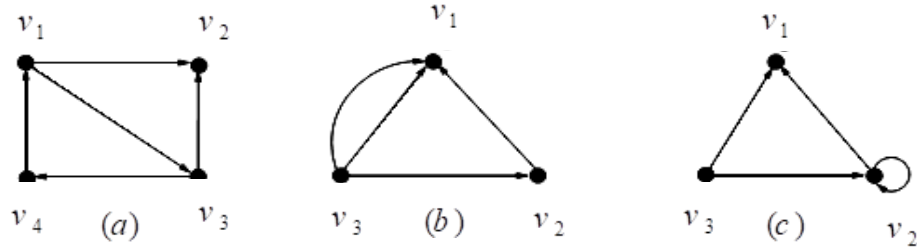
إن الهدف الرئيس من هذا الفصل هو توفير قاعدة رياضية مرتكزة على نظرية البيان والمصفوفات غير السالبة بغية الاعتماد عليهما في دراسة استقرار وجذب المنظومات الديناميكية المتزاوجة.

سنركز في هذا الفصل على تقديم المفاهيم، وسنتجاهل مناقشة موضوع قابلية تطبيق هذه المفاهيم على أرض الواقع.

في هذا الفصل، سنبدأ عرض بعض المفاهيم الأساسية في نظرية البيان، وسنقوم بمراجعة إثبات بعض المبرهنات التي نستطيع من خلالها معرفة خواص المصفوفات غير السالبة بالاعتماد على نظرية البيان. أخيراً، سندرس بشكل مفصل استقرار المصفوفات المولدة، القيم الذاتية الصفرية، والعديد من النتائج الجديدة سوف تكون مهمة في عرض الفصل الثالث.

### 2-1-1 البيانات الموجهة، الجوارات، الدرجات (Digraphs, Neighbors, Degrees):

يتكون البيان الموجه (أو الرسم الموجه)  $G$  من مجموعة غير خالية  $V$  من العناصر تدعى العقد، ومجموعة منتهية  $E$  من الأزواج المرتبة من العقد تدعى أوتاراً، نكتب  $G = (V, E)$  للدلالة على البيان الموجه الموصوف بمجموعة العقد  $V$  ومجموعة الأوتار  $E$ .



الشكل (1): البيانات الموجهة.

فمثلاً في الوتر  $(u, v)$  العقدة الأولى  $u$  تكون الذيل والعقدة الثانية  $v$  تكون الرأس (بمعنى أن اتجاه الوتر يكون من  $u$  إلى  $v$ ).

**الحلقة:** هي الوتر الذي يصل الرأس بنفسه.

**ملاحظة:** يكون الوتر مركباً إذا كان هناك وتر آخر له نفس عقدة البيان للوتر الأول ونفس عقدة النهاية للوتر الأول.

أو بمعنى الوتر المركب ينتج عن وجود أكثر من وتر لهما عقدة البداية نفسها وعقدة النهاية نفسها.

يكون البيان الموجه بسيطاً إذا لم يملك أوتاراً مركبة أو حلقات. على سبيل المثال البيانات الموجهة الموضحة في الشكل (1) هنا يكون البيان الموجه (a) بسيطاً، والبيان الموجه (b) يملك وتراً مركباً، وهو  $(v_3, v_1)$ ، والبيان الموجه (c) يملك حلقة وهي  $(v_2, v_2)$ .

فيما يأتي، ما لم يذكر خلاف ذلك، سنفرض أن البيان الموجه  $G = (V, E)$  يكون دائماً بسيطاً.

البنية المحليّة للبيان الموجه توصف بدرجات ومجاورات عقدها، فمن أجل البيان الموجه

$G = (V, E)$  والعقدة  $v$  في  $V$  نستخدم الصيغة الآتية:

$$N_v^+ = \{u \in V - \{v\} : (v, u) \in E\}$$

$$N_v^- = \{u \in V - \{v\} : (u, v) \in E\}$$

المجموعات  $N_v^-$  و  $N_v^+$  تسمى المجاور الخارج والمجاور الداخل للعقدة  $v$  على التوالي.

**المجاور الخارج:** هو مجموعة كل العقد التي تشكل مع العقدة  $v$  وتراً موجهاً بدايته  $v$  (بمعنى وتراً خارجاً من العقدة  $v$ )

**المجاور الداخل:** هو مجموعة كل العقد التي تشكل مع العقدة  $v$  وتراً موجهاً نهايته  $v$  (بمعنى وتراً داخلاً إلى العقدة  $v$ )

درجة الخارج  $d_v^+$  للعقدة  $v$  تكون عدد عناصر  $N_v^+$ ، بالمقابل درجة الداخل  $d_v^-$  للعقدة  $v$  تكون عدد عناصر  $N_v^-$ .

$$d_v^- = |N_v^-|, \quad d_v^+ = |N_v^+|$$

باعتبار لدينا البيان الموجه البسيط (a) الموضح في الشكل (1) فمن أجل العقدة  $v_1$  يكون:

$$N_{v_1}^+ = \{v_2, v_3\}, \quad N_{v_1}^- = \{v_4\}$$

$$d_{v_1}^+ = 2, \quad d_{v_1}^- = 1$$

## 2-1-2 الممرات، المسارات، الدورات (Walks, Paths, Cycles):

الممر في البيان الموجه  $G$  هو أي متتالية متناوبة من العقد  $v_i$  والأوتار  $e_i$  بحيث إن

$$e_i = (v_i, v_{i+1}) \text{ لكل } i = 1, 2, \dots, k-1. \text{ نقول عن } w \text{ حيثُ}$$

$$w : v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{k-1} v_k$$

إنّه ممر من  $v_1$  إلى  $v_k$ ، طوله عدد الأوتار في هذا الممر وهو  $k-1$ .

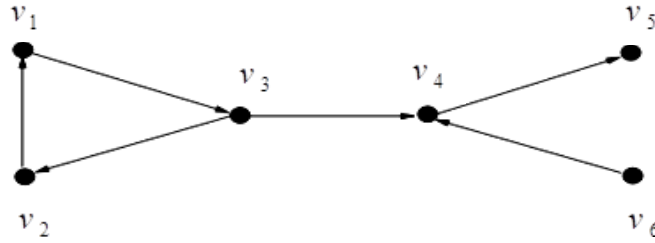
أما شبه الممر في البيان الموجه  $G$ ، فهو متتالية متناوبة:

$$v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{k-1} v_k$$

من العقد والأوتار بحيث إن:  $e_i = (v_i, v_{i+1})$  أو  $e_i = (v_{i+1}, v_i)$  لكل  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . ونميز

هنا الحالات التالية:

- إذا كانت العقد في الممر  $W$  مختلفة، فإن  $W$  يسمى مساراً.
- إذا كانت العقد  $v_1, \dots, v_{k-1}$  مختلفة و  $v_1 = v_k$  فعندئذٍ نسمي  $W$  دورة.
- نسمي الدورات التي طولها يساوي 1 بالحلقات.
- ندعو البيانات الموجهة التي لا تحتوي على دورات بالبيانات الموجهة اللادورية.
- نلاحظ أن الدورات والمسارات هي حالات خاصة من الممرات.



الشكل (2): الممر \_ شبه الممر \_ المسار \_ الدورة.

على سبيل المثال من أجل البيان الموجه في الشكل (2) نلاحظ أن الممر من  $v_1$  إلى  $v_5$  يمثل

مساراً

$$v_1(v_1, v_3) v_3(v_3, v_4) v_4(v_4, v_5) v_5$$

كما أن الممر من  $v_1$  إلى  $v_1$  يمثل دورة طولها يساوي 3.

$$v_1(v_1, v_3) v_3(v_3, v_2) v_2(v_2, v_1) v_1$$

بينما الممر من  $v_1$  إلى  $v_3$  لا يمثل مساراً ولا دورة.

$$v_1(v_1, v_3) v_3(v_3, v_2) v_2(v_2, v_1) v_1(v_1, v_3) v_3$$

وشبه الممر من  $v_1$  إلى  $v_6$  لا يكون ممراً.

$$v_1(v_1, v_3)v_3(v_3, v_4)v_4(v_4, v_6)v_6$$

**دور البيان:** نعرف الدور ( $d$ ) للبيان الموجه  $G$  على أنه القاسم المشترك الأكبر لجميع أطوال دورات البيان الموجه  $G$ .

ندعو البيان الموجه دورياً إذا كان  $d > 1$ ، ويكون غير دورياً عندما  $d = 1$ .

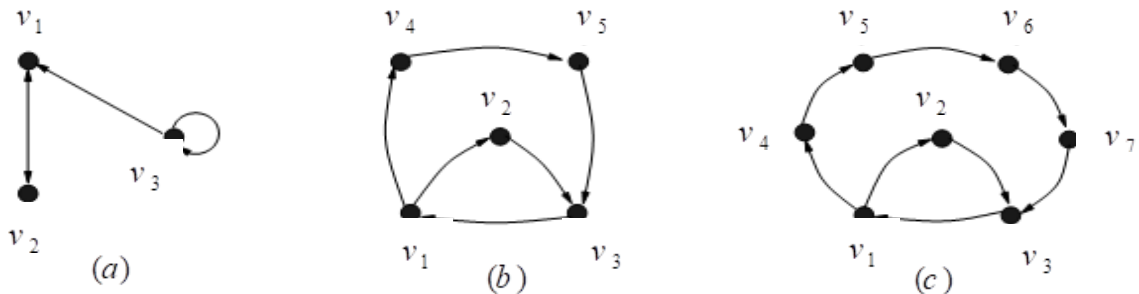
لتكن  $S_i$  تمثل المجموعة من جميع الأطوال  $m_i^k$  لدورات العقدة  $v_i$ ، من أجل أي عقدة  $v_i$  في البيان الموجه  $G$ ، نعرّف:

$$d_i = G.C.D\{m_i^k\}_{m_i^k \in S_i}$$

القاسم المشترك الأكبر لجميع أطوال دورات العقدة  $v_i$ ، حيث ندعو العقدة  $v_i$  دورية إذا كان  $d_i > 1$  وغير دورية عندما  $d_i = 1$ .

على سبيل المثال، البيانات الموجهة الثلاث الموضّحة في الشكل (3)، البيان الموجه (a) غير دوري، ولكنه يملك حلقة. البيان الموجه (b) يملك دورتين أطولهما 3 و 4 ودوره  $d = GCD(3, 4) = 1$  لذلك يكون غير دوري أيضاً.

ولكن من أجل البيان الموجه (c)، هناك دورتان أطولهما 3 و 6 على التوالي، ودوره  $d = GCD(3, 6) = 3$  لذلك يكون دورياً ودوره يساوي 3.



الشكل (3): البيانات الموجهة الدورية وغير الدورية.

### 2-1-3 اتصالات البيانات الموجهة:

يُعد مفهوم الاتصال في نظرية البيان من المفاهيم المهمة، لذلك سنقدم الآن بعض الأفكار المتعلقة بهذا المفهوم والمرتبطة بأشكال البيان الموجه.

إذا وجد ممر في البيان الموجه  $G$  من عقدة أولى  $u$  إلى عقدة أخرى  $v$  قلنا إن  $v$  عقدة يمكن الوصول إليها من  $u$  ونكتب  $u \rightarrow v$ ، وفي حال لم يتحقق ذلك نقول إن  $v$  عقدة لا يمكن الوصول إليها من  $u$  ونكتب  $u \nrightarrow v$ .

وفي حالة خاصة. العقدة  $v$  التي يمكن الوصول إليها من نفسها تكون ممرًا تافهًا طوله صفر. العقدة التي يمكن الوصول إليها من أي مكان: هي العقدة التي يمكن الوصول إليها من كل عقدة في البيان الموجه  $G$ .

**العقدة المركزية:** نقول عن العقدة  $v \in V$  أنها عقدة مركزية إذا أمكن إيجاد ممرات بدايتها العقدة  $v$  إلى باقي عقد البيان.

- البيان الموجه  $G$  يسمى تام الاتصال إذا كان من أجل أي عقدتين  $u, v$  يوجد وتر من  $u$  إلى  $v$  ووتر من  $v$  إلى  $u$  (وتر ذهاب وإياب).

- البيان الموجه  $G$  قوي الاتصال إذا كان من أجل أي عقدتين  $u, v$  فإنه يمكن الوصول من إحدهما إلى الأخرى بشكل متبادل.

- البيان الموجه  $G$  أحادي الاتصال إذا كان من أجل أي عقدتين  $u, v$  فإنه يمكن على الأقل الوصول من إحدهما إلى الأخرى.

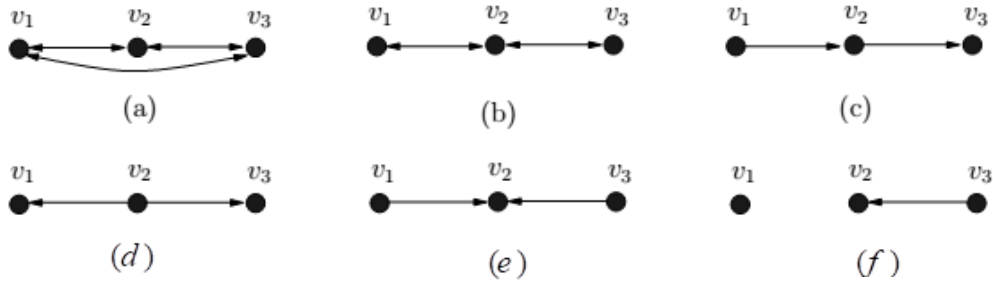
- البيان الموجه  $G$  شبه قوي الاتصال إذا كان من أجل أي عقدتين  $u, v$  توجد عقدة  $w$  يمكن من خلالها الوصول إلى  $u$  و  $v$  وقد تكون العقدة  $w$  هي نفسها العقدة  $u$  أو نفسها العقدة  $v$ .

- البيان الموجه  $G$  ضعيف الاتصال إذا وجد من أجل أي عقدتين  $u, v$  شبه ممر يحتوي هاتين العقدتين.

كما نقول إن البيان الموجه  $G$  عديم الاتصال إذا لم يكن حتى ضعيف الاتصال.

يمكن بسهولة ملاحظة أن البيان الموجه يكون قوي الاتصال، وذلك إذا وفقط إذا كانت كل عقدة من عقده يمكن الوصول إليها من كل مكان أو بشكل مكافئ كل عقدة فيه هي عقدة مركزية.

**ملاحظة:** من الواضح أن البيان الموجه  $G$  الذي يتكون من عقدة واحدة فقط يكون قوي الاتصال، وذلك لأن العقدة يمكن الوصول إليها من نفسها



الشكل (4): البيانات الموجهة باتصالاتها المختلفة

الشكل (4) يبيّن: (a) بيان موجه تام الاتصال (b) بيان موجه قوي الاتصال (c) بيان موجه أحادي الاتصال (d) بيان موجه شبه قوي الاتصال (e) بيان موجه ضعيف الاتصال (f) بيان موجه عديم الاتصال.



من الواضح أنَّ كل بيان موجه تام الاتصال يكون بياناً موجَّهاً قوي الاتصال، وكل بيان موجه قوي الاتصال يكون بياناً موجَّهاً شبه قوي الاتصال، وكل بيان موجَّه شبه قوي الاتصال يكون بياناً موجَّهاً ضعيف الاتصال، لكن العلاقة العكسية من هذه الاتصالات تكون غير صحيحة في الحالة العامة.

#### 2-1-4 العمليات على البيانات الموجهة :

عملية عكس البيان الموجه: وتتضمن عكس اتجاهات كل أوتار البيان الموجه المعطى. ويكون للبيان وللبيان الموجه المعاكس مجموعة العقد ذاتها، ويرمز للبيان الموجه المُعاكس بالرمز  $G^*$ .

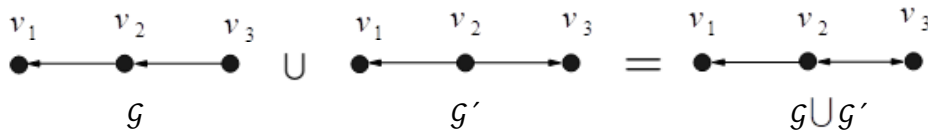


الشكل (5): البيان الموجه ومعاكسه

إذا كان  $G = (V, E)$  و  $G' = (V, E')$  بيانين موجَّهين، فإننا نعرف الاجتماع  $G \cup G'$  بأنه البيان الموجه الذي يملك مجموعة العقد  $V$  ومجموعة الأوتار  $E \cup E'$ :

$$G \cup G' = (V, E \cup E')$$

الشكل (6) يبين عملية اجتماع بيانين موجَّهين  $G \cup G'$  بمجموعة العقد  $\{v_1, v_2, v_3\}$ .



الشكل (6): عملية اتحاد بيانين موجَّهين

**البيان الموجه الجزئي:** ليكن  $G = (V, E)$  بياناً ما، ولتكن  $\phi \neq U \subseteq V$  مجموعة جزئية من  $V$  عندئذٍ نسمي البيان  $G_p = (U, E_p)$  حيث  $\phi \neq E_p \subseteq E$  مجموعة الأوتار في البيان  $G$  التي كانت تصل بين عقد  $U$ ، بياناً جزئياً محدثاً باستخدام المجموعة  $U$ .

**المركبة القوية:** ليكن  $G = (V, E)$  بياناً موجهاً، وليكن  $G_p = (V, E_p)$  بياناً موجهاً جزئياً من  $G$  وأعظماً (يحتوي أكبر عدد من العقد)، عندئذٍ إذا كان  $G_p = (V, E_p)$  قوي الاتصال عندئذٍ ندعوه بالمركبة القوية .

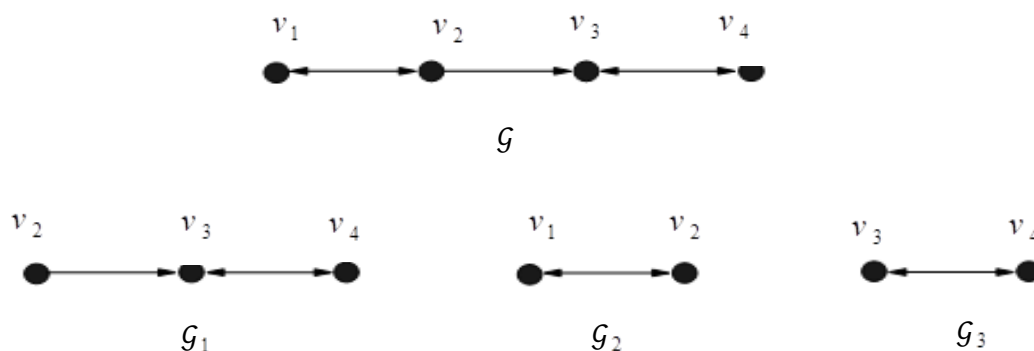
**ملاحظة:** من الواضح أن  $\bigcup_{i=1}^k V_i = V$  وكذلك  $i \neq j \implies V_i \cap V_j = \emptyset$  .

**المركبة القوية:** هي بيان موجّه جزئي محدث أعظمي قوي الاتصال.

**المجموعة المغلقة:** تكون المجموعة  $\emptyset \neq U \subseteq V$  مغلقة في البيان الموجّه  $G$  إذا لم يكن ممكناً الوصول من أي عقدة  $v$  من المجموعة  $\{V - U\}$  إلى أي عقدة  $u$  من المجموعة  $U$  .

نلاحظ أن المركبة القوية  $G_1 = (V_1, E_1)$  من البيان الموجّه  $G$  تكون مغلقة إذا كانت  $V_1$  مغلقة في  $G$  .

كمثال على ثلاث بيانات موجّهة جزئية محدثة من البيان الموجّه  $G$  لدينا في الشكل (7) البيان الموجّه  $G_1$  ليس مركبة قوية حيث لا يمكن الوصول من  $v_3$  إلى  $v_2$ ، أمّا البيان الموجّه  $G_2$  فهو مركبة قوية مغلقة، والبيان الموجّه  $G_3$  مركبة قوية ليست مغلقة.



الشكل (7): ثلاث بيانات موجّهة جزئية محدثة من البيان الموجّه  $G$

## 2-1-5 البيانات الموجهة الديناميكية (Dynamic Digraphs):

البيان الموجه الديناميكي: هو البيان الموجه الذي تتغير اتصالاته بمرور الزمن، باعتبار لدينا المجموعة  $V$  تحتوي  $n$  عقدة ومجموعة الأوتار  $\{E_p, p \in S\}$  حيث  $S$  مجموعة من الأدلة، عندئذ البيان الموجه الديناميكي  $G_{\sigma(t)} = (V, E_{\sigma(t)})$  هو بيان موجه مع دالة ثابتة على مجالات متقطعة  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow S$  تدعى إشارة التحويل.

يرمز بـ  $G([t_1, t_2])$  للبيان الموجه الموحد والذي أوتاره يمكن الحصول عليها من اتحاد جميع الأوتار في  $G_{\sigma(t)}$  خلال الفترة الزمنية  $[t_1, t_2]$  ويعرف بالشكل:

$$G([t_1, t_2]) = (V, \bigcup_{t \in [t_1, t_2]} E_{\sigma(t)})$$

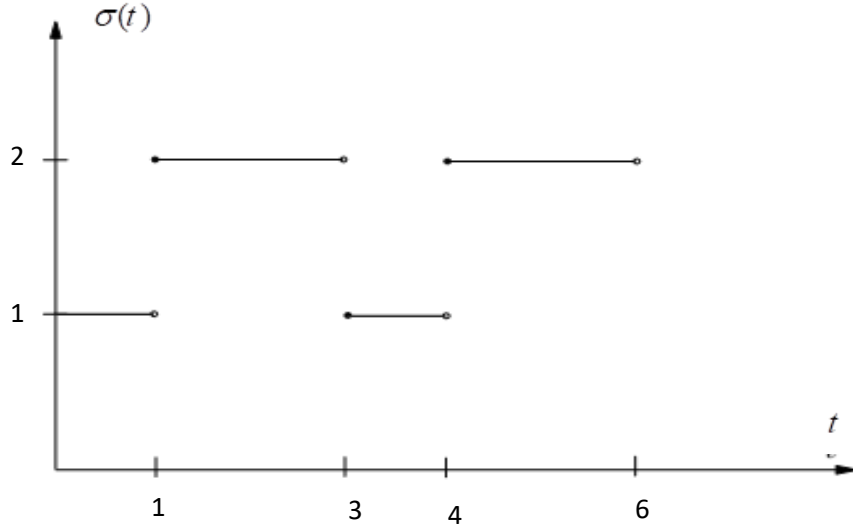
البيان الموجه الديناميكي  $G_{\sigma(t)}$  يكون شبه قوي الاتصال منتظماً (UQSC) إذا وجد  $T > 0$  بحيث إنه من أجل كل  $t$  البيان الموجه الموحد  $G([t, t+T])$  يكون شبه قوي الاتصال (قوي الاتصال).

**مثال (2-1):** باعتبار لدينا البيان الموجه الديناميكي  $G_{\sigma(t)}$  حيث إشارة التحويل  $\sigma(t)$  هي إشارة دورية ثابتة على مجالات متقطعة  $p = \{1, 2\}$   $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow p$  موضحة في الشكل (8) و  $G_1, G_2$  بيانان موجهان موضحان في الشكل (9). يمكن إثبات إنه عندما  $T = 3$  يكون البيان الموجه الموحد

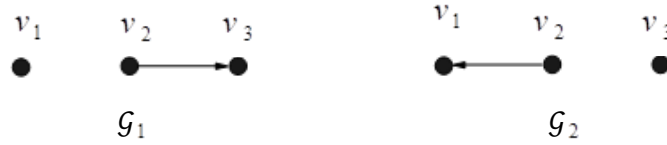
$$G([t, t+T]) = G_1 \cup G_2$$

شبه قوي الاتصال، وذلك من أجل كل  $t$  ، بالتالي البيان الموجه

الديناميكي  $G_{\sigma(t)}$  شبه قوي الاتصال منتظم.



الشكل (8): إشارة التحويل



الشكل (9): البيانيين الموجهين

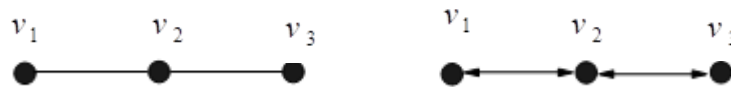
## 2-1-6 البيانات غير الموجهة (Undirected Graphs):

يتكون البيان غير الموجه  $G(V, E)$  من مجموعة محدودة غير خالية  $V$  من العناصر تدعى العقد ومجموعة محدودة  $E$  من الأزواج غير المرتبة من العقد تدعى جسور.

يمكن ببساطة التعامل مع البيان غير الموجه  $G$  كالبيان الموجه ثنائي الاتجاه بتبديل كل جسر

$(u, v)$  من  $G$  بزوج الأوتار  $(u, v), (v, u)$ .

ضمن هذه الرسالة، سنتعامل مع البيانات الموجهة ثنائية الاتجاه بدلاً من البيانات غير الموجهة.



الشكل (10): بيان غير موجه وبيان موجه ثنائي الاتجاه

## 2-1-7 نتائج ومبرهنات أساسية في البيانات الموجهة:

### مبرهنة (2-1):

في البيان الموجه  $G = (V, E)$  العبارات التالية متكافئة:

- (a) - البيان الموجه  $G$  شبه قوي الاتصال.
- (b) - البيان الموجه  $G$  يملك عقدة مركزية.
- (c) - البيان الموجه المعاكس  $G^*$  يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان.
- (d) - البيان الموجه المعاكس  $G^*$  يملك مركبة مغلقة قوية واحدة على الأقل. [1]

### التمهيدية (2-1):

أي بيان موجه  $G = (V, E)$  يملك مركبة قوية مغلقة واحدة على الأقل، بالإضافة لذلك إذا كانت المجموعة غير الخالية  $U \subset V$  مغلقة في  $G$ ، عندئذٍ  $G$  يملك مركبة قوية مغلقة  $G_c = (V_c, E_c)$  يحقق أن  $V_c \subseteq U$ .

### الإثبات:

نبرهن الجزء الأول من خلال خوارزمية متتابة.

نأخذ عقدة اختيارية، ولتكن  $v_1$  من مجموعة العقد  $V$ ، ولتكن  $V_1$  تمثل مجموعة من العقد التي من خلالها نصل إلى العقدة  $v_1$ ، و  $V_1'$  تمثل مجموعة العقد التي يمكن الوصول إليها من  $v_1$ . نلاحظ أن كل عقدة يمكن الوصول إليها من نفسها، لذلك كل من  $V_1$  و  $V_1'$  تحتوي على العنصر  $v_1$ .

بفرض أن  $V_1' \subseteq V_1$  عندئذٍ البيان الموجه الجزئي المُحدث  $G_1$  بوساطة المجموعة  $V_1'$  هو مركب قوي مغلق من  $G$ . نلاحظ أن كل من العقدتين  $u, v \in V_1' \subseteq V_1$  يمكن الوصول إليهما تبادلياً

بحيث  $u \rightarrow v_1 \rightarrow v$  و  $v \rightarrow v_1 \rightarrow u$  لذلك البيان الموجه الجزئي المُحدث  $G_1$  بوساطة المجموعة  $V_1'$  قوي الاتصال.

من جهة أخرى من أجل العقدتين  $v \in V_1'$  و  $u; u \in V - V_1'$  لأنه فيما عدا ذلك  $u \rightarrow v_1 \rightarrow v$  و  $v \rightarrow v_1 \rightarrow u$  بالتالي  $V_1'$  تكون مجموعة مغلقة والبيان الموجه الجزئي المُحدث بوساطة المجموعة  $V_1' + \{u\}$  لا يكون قوي الاتصال، بحيث إن  $u$  لا يمكن الوصول إليها من أي عقدة أخرى في  $V_1'$ ، لذلك يكون البيان الموجه  $G_1$  بياناً موجهاً جزئياً محدثاً أعظماً ذا اتصال قوي، بالتالي البيان الموجه  $G_1$  يكون مركبة قوياً مغلقاً.

أما إذ لم يكن الشرط أعلاه صحيحاً (نقض الفرض)، فنختار أي عقدة، ولتكن  $v_2$  في  $V - V_1$  ولتكن  $V_2$  تمثل المجموعة من العقد التي من خلالها نصل إلى  $v_2$ ، ولتكن  $V_2'$  تمثل مجموعة العقد التي يمكن الوصول إليها من  $v_2$ .

بالتالي  $V_2'$  يجب أن تكون مجموعة جزئية من  $V - V_1$  لأنه فيما عدا تلك العقدة  $v_1$  يمكن الوصول إليها من  $v_2$  وبفرض أن  $V_2' \subseteq V_2$ .

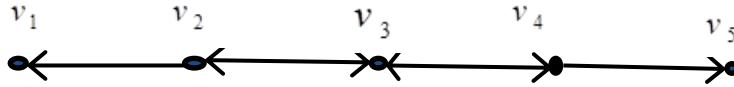
إذا تحقق ذلك، فإن البيان الموجه الجزئي المُحدث بوساطة المجموعة  $V_2'$  يكون مركبة قوياً مغلقاً من البيان الموجه  $G$  بنفس البرهان السابق. إذا لم يتحقق الشرط، نكرر هذا الإجراء مرة أخرى حتى يتحقق الشرط، البيان الموجه  $G$  يملك عدداً محدوداً من العقد، و  $V_k'$  تصبح أصغر في كل خطوة بملاحظة أن:

$$V_k' \subseteq V - V_1 - \dots - V_{k-1}$$

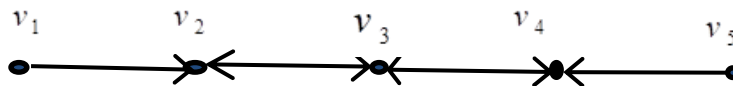
وفي الواقع  $V'_m$  تملك عنصراً واحداً فقط  $v_m$  في الخطوة  $m$  إذ لم يكن الشرط محققاً قبل الخطوة  $m$  بالتالي  $V'_m = \{v_m\} \subseteq V_m$  ، بملاحظة أن  $v_m$  تكون عنصراً أيضاً من  $V_m$  نكون قد حصلنا على مركبة قوية مغلقة في البيان الموجه  $G$ .

إذا كانت مجموعة العقد غير الخالية  $U \subset V$  مغلقة في  $G$ . وبفرض أن  $G_u = (U, e_u)$  يمثل البيان الموجه الجزئي المُحدث بواسطة المجموعة  $U$ . بالفرض الأول نحن نعلم أن البيان الموجه  $G_u$  يملك مركبة مغلقة قوياً واحداً على الأقل ليكن  $G_c = (V_c, E_c)$ ، من الواضح أن  $V_c \subseteq U$ . سنثبت أن البيان الموجه  $G_c$  يكون أيضاً مركبة قوياً مغلقة من البيان الموجه  $G$ . من الواضح أن البيان الموجه  $G_c$  يكون أيضاً بياناً موجهاً جزئياً مُحدثاً من  $G$  وأيضاً مجموعة العقد  $V_c$  تكون مغلقة في  $G$ ، وكذلك البيان الموجه  $G_c$  يكون بياناً موجهاً جزئياً مُحدثاً أعظماً ذا اتصال قوي، ونلاحظ أن مجموعة العقد  $V_c$  مغلقة في  $G$  بالتالي البيان الموجه  $G_c$  يكون مركبة قوياً مغلقة من البيان الموجه  $G$ .

**مثال توضيحي للمبرهنة (2-1):** لنأخذ البيان الموضح بالشكل المجاور



من الواضح أنه من أجل أي عقدتين  $v_i, v_j$  غير متجاورتين فإنه توجد عقدة مركزية  $v_k$  يمكن من خلالها الوصول إلى العقدتين  $v_i, v_j$ ، بالتالي فإن البيان المعطى هو بيان شبه قوي الاتصال. البيان المعطى شبه قوي الاتصال، البيان يملك  $v_2, v_3, v_4$  عقد مركزية، البيان يملك مركبة قوية مغلقة  $V_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$  هي  $G_1(V_1, E_1)$  ، البيان الموجه المعاكس يكون موضحاً بالشكل الآتي:



من الواضح أن العقد  $v_2, v_3, v_4$  يمكن الوصول إليها من كل مكان، بمعنى آخر كل عقدة مركزية في البيان الموجه تصبح عقدة يمكن الوصول إليها من كل مكان في البيان الموجه المعاكس.

## 2-2 المصفوفات غير السالبة ونظرية البيان:

نقول عن مصفوفة ما إنها غير سالبة إذا كانت جميع مدخلاتها (عناصرها) أكبر أو تساوي الصفر.

**ملاحظة:** نستخدم الصيغة  $E^K = (e_{ij}^{(k)})$  لجداء المصفوفة  $E$  بنفسها  $k$  مرة. وكما نستخدم الصيغة  $\rho(E)$  لنصف القطر الطيفي للمصفوفة  $E$  وهو أعظم طويلة للقيم الذاتية للمصفوفة  $E$ . أي إن  $\rho(E) = \max\{\|\lambda_i\|\}$  ;  $\lambda_i$  قيم ذاتية للمصفوفة  $E$ .

### 2-2-1 المصفوفة غير السالبة، مصفوفة الجوار، البيان الموجه:

**تعريف:** البيان الموجه  $G(E)$  المقترن بالمصفوفة غير السالبة  $E$  من المرتبة  $n$  يتكون من  $n$  عقدة  $v_1, \dots, v_n$  حيث توجد أوتار مؤدية من  $v_i$  إلى  $v_j$  إذا وفقط إذا كان  $e_{ij} \neq 0$ .

من الواضح أنه إذا كانت لدينا أي مصفوفة غير سالبة  $\bar{E}$  تملك مرتبة المصفوفة  $E$  وتملك مدخلات موجبة ومدخلات صفرية في نفس مواضع المصفوفة  $E$ ، عندئذٍ يكون للمصفوفة  $E$  وللمصفوفة  $\bar{E}$  البيان الموجه المقترن ذاته.

**مصفوفة الجوار:** نرمز لها بالرمز  $\bar{E} = (e_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  وهي المصفوفة التي تكون مدخلاتها معرفة بالشكل  $\bar{e}_{ij} = 1$  إذا وجدت أوتار مؤدية من  $v_i$  إلى  $v_j$  في  $G$  وبخلاف ذلك يكون  $\bar{e}_{ij} = 0$ .



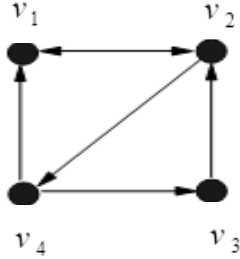
وبالتالي مصفوفة الجوار  $\bar{E}$  المقابلة للمصفوفة غير السالبة  $E$  نحصل عليها من المصفوفة  $E$  بتبديل كل المدخلات الموجبة بالعدد واحد.

ونلاحظ أن مصفوفة الجوار للبيان الموجب لا تكون متناظرة بالضرورة، كما أن مجموع المدخلات في الصف  $i$  للمصفوفة  $\bar{E}$  يساوي درجة الخارج للعقدة  $v_i$ ، ومجموع المدخلات في العمود  $j$  للمصفوفة  $\bar{E}$  يساوي درجة الداخل للعقدة  $v_j$ .

- مثال (2-2): لتكن لدينا المصفوفة التالية:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

عندئذ البيان الموجب المقترن ومصفوفة الجوار له تكون موضحة في الشكل (11).



$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

الشكل (11): البيان الموجب المقترن ومصفوفة الجوار.

فيما يلي نقدم مبرهنة أقراص جيرشغورين، والتي تكون مفيدة لمعرفة توزيع القيم الذاتية للمصفوفات غير السالبة. ضمن المستوي العقدي.

نستطيع حصر القيم الذاتية للمصفوفات غير السالبة من خلال أقراص دائرية تدعى أقراص

جيرشغورين

أقراص جيرشغورين: لتكن  $E = (e_{ij})$  مصفوفة مربعة من المرتبة  $n$  وغير سالبة، عندئذٍ نسمي

$$R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |e_{ij}|$$

الأقراص التي مركزها النقاط الموافقة لقيم عناصر القطر الرئيسي وأنصاف أقطارها

بأقراص جيرشغورين.

فمثلاً من أجل العنصر  $e_{ii}$  يكون قرص جيرشغورين الموافق مركزه النقطة  $(e_{ii}, 0)$  ونصف قطره

$$R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |e_{ij}|$$

أي مجموع العناصر مأخوذة بالقيمة المطلقة الواقعة في السطر  $i$  ما عدا  $e_{ii}$ .

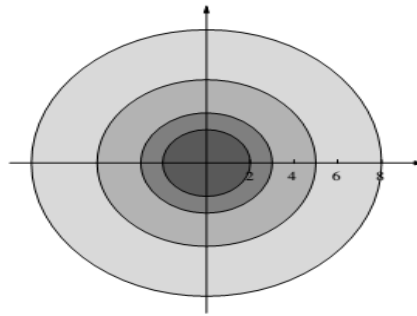
**مبرهنة (2-2):**

جميع القيم الذاتية للمصفوفة  $E$  تكون محصورة ضمن أقراص جيرشغورين. [2]

على سبيل المثال من أجل المصفوفة  $E$  في (2.1)، أقراص جيرشغورين تكون مرسومة بالشكل

(12)، القيم الذاتية تكون موجودة ضمن اتحاد هذه الأقراص

$$\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 \approx 4.64, \lambda_3 = -2.32 + 2.49i, \lambda_4 = 1.01902059337065 \times 10^{-16}$$



الشكل (12): أقراص جيرشغورين

### 2-2-2 المصفوفات غير القابلة للاختزال (Irreducible Matrices):

في هذه الفقرة نعرف مصفوفة التبديل والمصفوفة المشابهة لمصفوفة، ومن ثم نذكر متى تكون

المصفوفة غير قابلة للاختزال.

**مصفوفة التبديل:** هي مصفوفة نظامية وتحتوي في كل صف على عنصراً واحداً بقيمة 1 وباقي العناصر في ذلك الصف أو العمود هي أصفار.

**المصفوفة المشابهة لمصفوفة:** هي مصفوفة تشترك مع المصفوفة المعطاة بخواص متعددة، كالترتبة، والمحدد، والأثر، والقيم الذاتية، إلا أنَّ المتجه الذاتي يكون مختلفاً، حيث نقول إنَّ المصفوفة  $E$  هي مصفوفة مشابهة للمصفوفة  $\tilde{E}$  إذا وُجدت مصفوفة تبديل  $P$  بحيث يكون:

$$PEP^T = \tilde{E}$$

**المصفوفات القابلة للاختزال:** نقول عن المصفوفة  $E$  من المرتبة  $n$  أنها قابلة للاختزال في حال كان  $n=1$  أو في حال كان  $n>1$  بشرط أن تكون المصفوفة  $E$  مشابهة للمصفوفة:

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

حيث  $B, D$  مصفوفات مربعة غير صفرية، وبخلاف ذلك تكون المصفوفة  $E$  غير قابلة للاختزال.

عند التبديل بين أسطر المصفوفة غير السالبة  $E$  نحصل على مصفوفة جديدة  $E_1$  يكون لها البيان الموجه المقترن  $G(E_1)$  والذي نحصل عليه من البيان الموجه  $G(E)$  بإعادة ترقيم عقده.

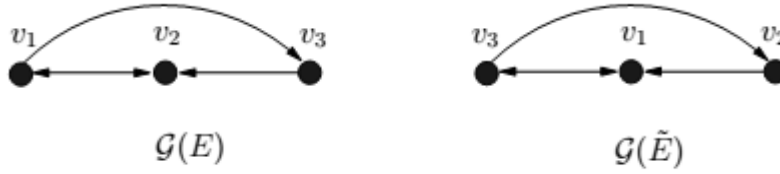
على سبيل المثال تُعطى المصفوفة غير السالبة  $E$  ومصفوفة التبديل  $P$  كالتالي:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

عندئذ:

$$\tilde{E} = PEP^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

البيانات الموجهة المقترنة  $G(E)$ ،  $G(\tilde{E})$  تكون مُعطاة في الشكل (13) حيثُ نستطيع ملاحظة أنه يمكن أن نحصل عليها تبادلياً من خلال إعادة ترقيم العقد.



الشكل (13): البيانات الموجهة المقترنة بالمصفوفات غير السالبة

**مبرهنة (2-3) :**

المصفوفة غير السالبة  $E$  من المرتبة  $n$  تكون غير قابلة للاختزال إذا وفقط إذا كان البيان الموجه  $G(E)$  قوي الاتصال [3].

**مثال (2-3):**

بفرض لدينا المصفوفتان:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

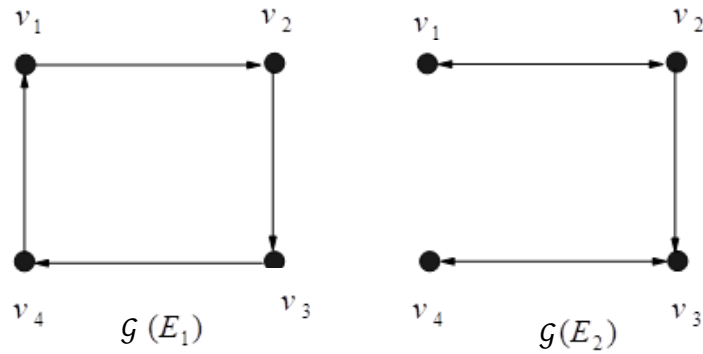
إن البيانات الموجهة المقترنة  $G(E_1)$ ،  $G(E_2)$  تكون مُعطاة بالشكل (14) ونلاحظ إن البيان الموجه  $G(E_1)$  قوي الاتصال لذلك المصفوفة  $E_1$  تكون غير قابلة للاختزال، أما البيان الموجه  $G(E_2)$  لا يكون قوي الاتصال لذلك المصفوفة  $E_2$  تكون قابلة للاختزال.

كما إنه وباختيار مصفوفة التبديل :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

فإن المصفوفة المشابهة للمصفوفة  $E_2$  هي:

$$\tilde{E}_2 = PE_2P^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



الشكل (14): البيانات الموجهة المقترنة (المصفوفات القابلة للاختزال، غير قابلة للاختزال)

إن المصفوفة  $E_2$  تشابه المصفوفة  $\tilde{E}_2$  والتي كون من الشكل  $\tilde{E}_2 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$  إذاً بحسب

التعريف تكون المصفوفة  $E_2$  قابلة للاختزال.

**مبرهنة (2-4):**

لتكن  $E$  مصفوفة غير سالبة، إن  $e_{ij}^{(k)} > 0$  إذا وفقط إذا كان البيان الموجه  $G(E)$  يملك ممر من

العقدة  $v_i$  إلى العقدة  $v_j$  طولاً من مضاعفات العدد  $k$  [4].

### 2-2-3 المصفوفات الأولية (Primitive Matrices):

تدعى المصفوفة غير السالبة  $E$  مصفوفة أولية إذا وُجد عدد صحيح موجب  $k$  بحيث تكون المصفوفة  $E^k > 0$ .

نلاحظ أن المصفوفة الأولية غير قابلة للاختزال، لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

#### تمهيدية (2-2):

ليكن  $m_1, m_2 > 1$  عددين صحيحان، إذا كان  $GCD\{m_1, m_2\} = 1$ ، عندئذٍ يوجد عدد صحيح  $\bar{k} \geq 0$  بحيث إنه من أجل أي عدد صحيح  $k \geq \bar{k}$  يوجد عددين غير سالبين  $\alpha, \beta$  بحيث يكون:

$$k = \alpha m_1 + \beta m_2$$

#### الإثبات:

بما أن  $GCD\{m_1, m_2\} = 1$  فإن 1 يكتب على شكل تركيب خطي لـ  $m_2, m_1$ :

$$1 = \alpha_1 m_1 - \beta_1 m_2 \quad (2.3)$$

حيث  $\beta_1, \alpha_1$  عددين غير سالبين.

بفرض إن  $\bar{k} = \beta_1 m_2^2$  عندئذٍ يكون  $\bar{k} \geq 0$ ، ومن أجل كل  $k \geq \bar{k}$  يكون لدينا:

$$k = \beta_1 m_2^2 + i \cdot m_2 + j \quad (2.4)$$

من أجل العددين الصحيحين  $i, j$  بحيث إن  $0 \leq j < m_2, i \geq 0$ . بتعويض (2.3) في (2.4)

نحصل على:

$$\begin{aligned} k &= \beta_1 m_2^2 + i \cdot m_2 + j (\alpha_1 m_1 - \beta_1 m_2) \\ &= (j \cdot \alpha_1) m_1 + (\beta_1 (m_2 - j) + i) \cdot m_2 \end{aligned}$$

وبفرض أن  $\alpha = j\alpha_1$  و  $\beta = \beta_1(m_2 - j) + i$  ، من الواضح أن  $\beta, \alpha$  أعداد صحيحة غير سالبة، وبملاحظة أن  $j < m_2$  يتم المطلوب.

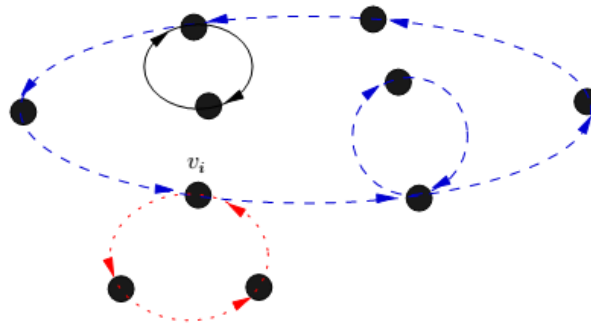
### تمهيدية (2-3):

ليكن  $d$  يمثل دور البيان الموجه  $G$  و  $d_i$  يمثل دور العقدة  $v_i$  في البيان الموجه  $G$  بحيث إن  $i = 1, \dots, n$  ، إذا كان البيان الموجه  $G$  قوي الاتصال فعندئذ يكون  $d = d_1 = d_2 = \dots = d_n$ .

### الإثبات:

لتكن  $S = \{m_1, \dots, m_p\}$  تمثل مجموعة جميع أطوال الدورات في  $G$  . من الواضح أنها مجموعة منتهية و  $d$  يمثل القاسم المشترك الأكبر لعناصر المجموعة  $S$ .

لتكن  $S_i$  تمثل مجموعة جميع أطوال الممرات من  $v_i$  إلى  $v_i$  وليكن  $d_i$  القاسم المشترك الأكبر لعناصر المجموعة  $S_i$  ، إن أي ممر من  $v_i$  إلى  $v_i$  يكون إما دورة أو مولداً بعدد من الدورات. كما هو موضح في الشكل (15).



الشكل (15): الممر من  $v_i$  إلى  $v_i$  والذي يكون إما دورة أو مولد بعدد من الدورات

وبالتالي يكون طول كل ممر (كل عنصر من  $S_i$ ) تركيباً خطياً لـ  $m_j$  حيث  $j = 1, \dots, p$  بمعاملات صحيحة غير سالبة، وبالتالي فهو يقسم  $d$  القاسم المشترك الأكبر لـ  $m_j$  حيث  $j = 1, \dots, p$  هذا يقتضي أن  $d_i$  تقسم  $d$ .

من جهة أخرى، باعتبار أي دورة في البيان الموجه طولها  $m_j$ ، فإذا هذه الدورة كانت تمر من خلال العقدة  $v_1$  عندئذٍ  $d_1$  تقسم  $m_j$  أما إذا لم يكن كذلك، فإنها تمر عبر عقدة أخرى، لتكن  $v_2$ ، بما أن البيان الموجه قوي الاتصال، فلا بد من وجود دورة تمر من خلال  $v_1$  و  $v_2$  ولنفرض أن طول هذه الدورة هو  $m_k$  ومن ثم فإن  $d_1$  يقسم  $m_k$ .

نلاحظ أن هاتين الدورتين تولدان ممراً طولها  $m_k + m_j$  من  $v_1$  إلى  $v_1$  ومنه فإن  $d_1$  يقسم  $m_k + m_j$  وأيضاً  $d_1$  يقسم  $m_k$ ، وبالتالي  $d_1$  يقسم أي عنصر  $m_j$  من  $S$  هذا يعني أن  $d_1$  يقسم  $d$ ، وكذلك  $d = d_1$  بالطريقة ذاتها نستطيع إثبات أنه إذا كان البيان الموجه  $G$  قوي الاتصال فإن  $d = d_i$  لكل  $i = 1, 2, \dots, n$ .

#### تمهيدية (2-4):

لتكن  $E$  مصفوفة غير سالبة من المرتبة  $n$  إذا كان البيان الموجه  $G(E)$  قوي الاتصال ودوري دوره  $d$  عندئذٍ يكون  $e_{ii}^{(k)} = 0$  وذلك أيّاً كان  $k$  ليس من مضاعفات العدد  $d$  و  $i = 1, 2, \dots, n$ . (حيث إن  $e_{ii}^{(k)}$  هي عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة  $E^k$ )

#### الإثبات:

لتكن  $d_i$  تمثل دورات العقد في البيان الموجه  $G(E)$  قوي الاتصال بحيث إن  $i = 1, 2, \dots, n$ ، ومنه بحسب التمهيدية (2-3) يكون  $d = d_1 = \dots = d_n$ .

بما أن البيان الموجه  $G(E)$  قوي الاتصال، فإنه من أجل أي عقدة  $v_i$  في البيان الموجه  $G(E)$  طول أي ممر من  $v_i$  إلى  $v_i$  يكون من مضاعفات العدد  $d$ ، ولا يوجد ممر من  $v_i$  إلى  $v_i$  طوله  $k$  ليس من مضاعفات العدد  $d$ ، بالتالي بحسب المبرهنة (2-4) نجد أن:  $e_{ii}^{(k)} = 0$  من أجل  $i = 1, 2, \dots, n$ ، و  $k$  ليس من مضاعفات العدد  $d$ .



## مبرهنة (2-5):

المصفوفة غير السالبة  $E$  من المرتبة  $n$  تكون أولية إذا وفقط إذا كان البيان الموجه المقترن بالمصفوفة  $E$  قوي الاتصال وغير دوري.

## الإثبات:

لنلزم الشرط: إذا كان البيان الموجه  $G(E)$  قوي الاتصال وغير دوري، فعندئذٍ بحسب التمهيدية (2-3) دور البيان الموجه  $G$  ودور كل عقدة  $v_i$  في البيان الموجه يساوي 1.

لتكن  $v_i$  عقدة ما، ولتكن  $m_i^1, m_i^2$  تمثل أطوال ممرين من  $v_i$  إلى  $v_i$ ، بحيث إن  $m_i^1 \neq m_i^2$  بحسب التمهيدية (2-2) يوجد عدد صحيح موجب كبير بقدر كافٍ  $\bar{k}_i$  بحيث إنه من أجل أي  $k \geq \bar{k}_i$  يكون  $k$  تركيباً خطياً لـ  $m_i^1$  و  $m_i^2$ ، وهذا يعني وجود ممر طوله  $k$  من  $v_i$  إلى  $v_i$ .

لتكن  $v_j$  تمثل عقدة أخرى، بحيث إنه يوجد مسار من  $v_i$  إلى  $v_j$  طوله  $L_{ij}$ ، بالتالي من أجل أي  $k \geq q_{ij} := \bar{k}_i + L_{ij}$  يوجد ممر طوله  $k$  من  $v_i$  إلى  $v_j$ ، بالتالي يتحقق من المبرهنة (2-4) أن  $e_{ij}^{(k)} > 0$  لكل  $k \geq q_{ij}$ .

لتكن  $q = \max\{q_{ij} : i, j = 1, \dots, n\}$  عندئذٍ  $e_{ij}^{(k)} > 0$  لكل  $i, j = 1, \dots, n$  و  $k \geq q$  وبحسب تعريف المصفوفة الأولية نجد أن المصفوفة  $E$  أولية.

كفاية الشرط: سنبرهن بطريقة نقض الفرض، أي بفرض أن البيان الموجه  $G(E)$  ليس قوي الاتصال أو أنه قوي الاتصال ودوري.

من أجل الحالة الأولى، بفرض إن البيان الموجه  $G(E)$  ليس قوي الاتصال، عندئذٍ يوجد زوج من العقد  $v_i, v_j$  بحيث إن  $v_j$  لا يمكن الوصول إليها من  $v_i$ ، بحسب التمهيدية (2-4) ويكون

$e_{ij}^{(k)} = 0$  لكل  $k > 0$ ، وبالتالي لا يوجد عدد طبيعي  $k$  بحيث تكون المصفوفة  $E^k$  موجبة و  $E$  ليست مصفوفة أولية، وهذا يناقض الفرض.

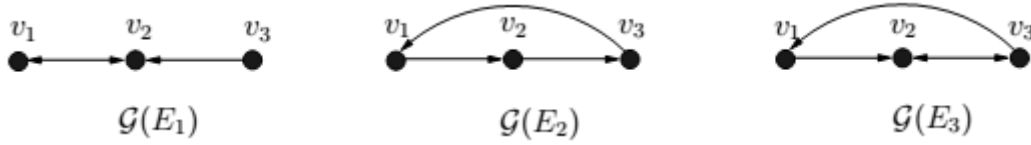
أما من أجل الحالة الثانية، بفرض إن البيان الموجه  $G(E)$  قوي الاتصال و دورياً. وبفرض أن دورهُ  $d$  حيث  $d > 1$ ، عندئذٍ بحسب التمهيدية (2-4) نجد إن  $e_{ii}^{(k')} = 0$  وذلك من أجل أي عدد صحيح موجب  $k'$  ليس من مضاعفات العدد  $d$ ، وبالتالي لا يوجد عدد طبيعي  $k$  بحيث تكون المصفوفة  $E^k$  موجبة، وإلا فإنه إذا وجد العدد الطبيعي  $k^*$  بحيث إن  $E^{k^*}$  موجبة عندئذٍ تكون  $E^k$  موجبة لكل  $k \geq k^*$  مما يناقض أن  $e_{ii}^{(k')} = 0$  لأجل أي عدد صحيح موجب  $k'$  ليس من مضاعفات العدد  $d$ ، وبالتالي المصفوفة  $E$  تكون مصفوفة غير أولية، وهذا تناقض.

مثال (2-4):

لتكن:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

إن البيانات الموجهة المقترنة  $G(E_1)$ ,  $G(E_2)$ ,  $G(E_3)$  تكون معطاة بالشكل (16) كالتالي:



الشكل (16): البيانات الموجهة المقترنة بالمصفوفات غير السالبة

البيان الموجه  $G(E_1)$  ليس قوي الاتصال، لذلك تكون المصفوفة  $E_1$  قابلة للأختزال، وبالتالي فهي ليست مصفوفة أولية، أما البيان الموجه  $G(E_2)$  قوي الاتصال، ولكنه دوري ودوره يساوي

3، لذلك تكون المصفوفة  $E_2$  غير قابلة للاختزال وغير أولية، حيث نلاحظ أنه من أجل أي عدد صحيح موجب  $k$ :

$$E_2^{3k-2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2^{3K-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2^{3K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بالتالي لا يوجد عدد صحيح موجب  $k$  بحيث تكون قوى المصفوفة  $E_2$  بالأس  $k$  موجبة. أما البيان الموجه المقترن  $G(E_3)$  قوي الاتصال وغير دوري ( $d = gcd\{2,3\} = 1$ ) لذلك تكون المصفوفة  $E_3$  مصفوفة أولية.

ونلاحظ أنه عندما تكون  $k = 5$  فإن:

$$E_3^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

تكون موجبة.

#### مبرهنة (2-6): [3]

لتكن  $E$  مصفوفة غير سالبة وغير قابلة للاختزال، إن الشرطين الآتيين محققان:

- (a)  $\rho(E)$  قيمة ذاتية بسيطة، وأي قيمة ذاتية للمصفوفة  $E$  بنفس الطويلة تكون بسيطة أيضاً.
- (b) المصفوفة  $E$  تملك متجهاً ذاتياً  $x$  يقابل القيمة الذاتية  $\rho(E)$ ، وإذا كانت  $E$  مصفوفة أولية، فعندئذٍ جميع القيم الذاتية الأخرى من  $E$  تملك طويلة أقل من  $|\rho(E)|$

#### 2-2-4 المصفوفات الاحتمالية (Stochastic Matrices):

تكون المصفوفة احتمالية إذا كانت جميع مدخلاتها غير سالبة ومجموع مدخلات كل صف من صفوفها يساوي الواحد.

نقدم بعض خواص المصفوفات الاحتمالية:

- إذا كانت المصفوفة  $E$  احتمالية، فعندئذٍ  $\rho(E) = 1$ .
- المصفوفة غير سالبة  $E$  احتمالية إذا وفقط إذا كان الواحد متجه ذاتي للمصفوفة  $E$  يقابل القيمة الذاتية  $\lambda = 1$ .
- إذا كانت المصفوفتان  $E_1, E_2$  احتماليتين، فعندئذٍ الجداء  $E_1 E_2$  يكون أيضاً مصفوفة احتمالية.

**مبرهنة (2-7):**

لتكن  $E$  مصفوفة غير سالبة من المرتبة  $n$  إذا كان البيان الموجه  $G(E)$  يملك  $k$  مركبة قوية مغلقة، فعندئذٍ تكون المصفوفة  $E$  مشابهة للمصفوفة

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 & 0 \\ B_k & \cdots & B_1 & E_0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

حيث  $E_i$  مصفوفات مربعة من المرتبة  $r_i$  و  $i = 0, 1, \dots, k$  و  $r_i$  تكون أعداد صحيحة مناسبة تحقّق  $0 \leq r_0 < n$  و  $0 < r_i < n$  ( $i = 1, \dots, k$ )، وإذا كانت  $E$  مصفوفة احتمالية، فعندئذٍ  $\rho(E_i) = 1$  تكون قيم ذاتية بسيطة للمصفوفات  $E_i$  و  $i = 1, \dots, k$ ؛ و  $\rho(E_0) < 1$  عندما  $r_0 \neq 0$ .

**الإثبات:**

بفرض إن البيان الموجه  $G(E)$  يملك  $k$  مركبة قوية مغلقة، نرمز لها بالرمز:

$$\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1), \dots, \mathcal{G}_k = (V_k, E_k)$$

نعيد ترقيم العقد وإعادة تبديل الصفوف والأعمدة للمصفوفة  $E$  للحصول على المصفوفة  $\tilde{E}$

$$V_k = \{1, \dots, r_k\}, V_2 = \{r_k + 1, \dots, r_k + r_{(k-1)}\}, \dots, V_1 = \{r_k + \dots + r_2 + 1, \dots, r_k + \dots + r_1\}$$

نلاحظ أن أي مركبة قوية  $G_i$  تكون مغلقة بالفرض، مما يعني أنه لا توجد أوتار خارجة من  $V_i$  .  
لذلك من أجل أي  $l \in V_i$  وأي  $j \notin V_i$  المدخلات ذات الدليلين  $(l, j)$  من المصفوفة  $\tilde{E}$  تكون  
أصفار، هذا يعني أن المصفوفة  $E$  تكون مشابهة للمصفوفة (2-5).

في حال كان  $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$  فإن  $r_0 = 0$  وإلا فإن  $r_0 = n - r_1 - \dots - r_k > 0$  .

بالإضافة إلى ذلك إذا كانت المصفوفة  $E$  احتمالية، عندئذٍ من أجل أي مصفوفة  $E_i$  حيث  
 $i = 1, \dots, k$  تكون احتمالية أيضاً و  $\rho(E_i) = 1$  .

بما أن البيان الموجه  $G_i$  قوي الاتصال، فعندئذٍ بحسب المبرهنة (2-3) تكون المصفوفات  $E_i$   
غير قابلة للاختزال، وبحسب المبرهنة (2-6) نجد إن  $\rho(E_i) = 1$  قيم ذاتية بسيطة للمصفوفات  
 $E_i$  من أجل  $i = 1, \dots, k$  .

أخيراً عندما  $r_0 \neq 0$

بملاحظة أن  $V_0 = V - V_1 - \dots - V_k$  تكون غير خالية، نفرض أن  $V_0$  ليست مغلقة في  $G(\tilde{E})$   
وإلا بحسب التمهيدية (2-1) يكون  $G(\tilde{E})$  يملك مركبة مغلقة قوياً آخر  $G_c = (V_c, E_c)$  يحقق  
 $V_c \subseteq V_0$  الذي يناقض أن  $G(\tilde{E})$  لديه  $k$  مركبات مغلقة قوية، بالتالي توجد أوتار مؤدية من  
بعض العقد  $v_{0i} \in V_0$  لبعض العقد  $v_{i1} \in V_i$  والذي يكون بالواقع ممراً طوله 1 . بعد ذلك نبين أنه  
من أجل أي عدد صحيح  $m$  يوجد ممر طوله  $m$  من  $v_{0i}$  إلى بعض العقد  $v_{ij} \in V_i$  . إذا كانت  
المجموعة  $V_i$  تملك عقدة واحدة فقط  $v_{i1}$  . وبملاحظة أن  $E_i$  مصفوفة احتمالية يتحقق أن  
 $\rho(E_i) = 1$  الذي يقتضي وجود حلقة من  $v_{i1}$  إلى  $v_{i1}$  بالتالي يوجد ممر طوله  $m$  من  $v_{0i}$  إلى

$v_{i1}$  .

وإلا إذا كانت  $V_i$  تملك أكثر من عقدة واحدة، فعندئذٍ هناك ممر من  $v_{i1}$  إلى بعض العقد الأخرى  $v_{ij} \in V_i$  بحيث يكون البيان الموجبه  $G_i$  قوي الاتصال، بالتالي من أجل أي عدد صحيح  $m \geq 1$  يوجد ممر طوله  $m$  من  $v_{01}$  إلى بعض العقد  $v_{ij} \in V_i$  مرة أخرى لتكن:  $V_{01} = V_0 - \{v_{01}\}$  إذا كانت  $V_{01}$  غير خالية عندئذٍ تكون أيضاً غير مغلقة في  $G(E)$  من أجل السبب ذاته تكون  $V_0$  ليست مغلقة. لذلك هناك أوتار مؤدية من بعض العقد  $v_{02} \in V_{01}$  لبعض العقد في  $\{v_{01}\} \cup V_1 \cup \dots \cup V_k$ ، نذكر أن بعض العقد في  $V_i$  لا يمكن الوصول إليها من  $v_{01}$  ويتحقق بالبرهان السابق ذاته إنه من أجل أي عدد صحيح  $m \geq 2$  يوجد ممر طوله  $m$  من  $v_{02}$  لبعض العقد  $v_{ij} \in V_i$  نلاحظ أن  $V_0$  لديها  $n-k$  عقدة على الأقل، يؤدي تكرار هذا البرهان بشكل دائم إلى إنه من أجل أي عدد صحيح  $m \geq (n-k)$  يوجد ممر طوله  $m$  من أي عقدة في  $V_0$  لبعض العقد في  $V_1 \cup \dots \cup V_k$ . نلاحظ أن  $\tilde{E}^m$  سوف تكون من الشكل:

$$\tilde{E}^m = \begin{pmatrix} \bar{E}^m & 0 \\ \bar{B}^{(m)} & E_0^m \end{pmatrix}$$

حيث  $\bar{E} = \text{diag}\{E_k, \dots, E_1\}$  وبالتالي من خلال المبرهنة (2-4) من أجل أي  $m \geq (n-k)$  هناك إدخال واحد على الأقل في كل صف من صفوف المصفوفة  $\bar{B}^{(m)}$  يكون موجباً. بالتالي من خلال خواص المصفوفات الاحتمالية تكون المصفوفة  $\tilde{E}^m$  احتمالية.

هذا يعني أن مجموع أي صف من  $E_0^m$  يكون أقل من 1، وأيضاً  $\rho(E_0) < 1$  وذلك بحسب المبرهنة (2-2) مبرهنة أقراص جيرشغورين.

مثال (5-2):

لتكن لدينا المصفوفة التالية:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

عندئذٍ البيان الموجه المقترن  $G(E)$  يكون موضّحاً بالشكل (a) (17).



الشكل (17): البيان الموجه المقترن يملك مركبين قويين مغلقين والذي تدور حولهما الخطوط المنقطة

من خلال إعادة ترقيم العقد على النحو المناسب كما هو مبين في الشكل (b) (17-2). نلاحظ

أن المصفوفة غير السالبة المشابهة نحصل عليها من المصفوفة  $E$  بعملية التبديل، وسوف تملك

الشكل:

$$\tilde{E} = PEP^T = \left( \begin{array}{c|c|c} E_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_1 & 0 \\ \hline B_2 & B_1 & E_0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \end{array} \right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

من الواضح أن:

$$\rho(E_0) = 0 < 1 \quad \rho(E_2) = 1, \rho(E_1) = 1$$

## 2-2-5 مصفوفات سيا (Stochastic, indecomposable, aperiodic Matrices) [5]

نسمي المصفوفة غير السالبة  $E$  مصفوفة سيا إذا حققت إنها مصفوفة احتمالية وغير قابلة للتحليل وغير دورية.

إذا حققت المصفوفة  $E$  غير السالبة أن النهاية  $Q = \lim_{k \rightarrow \infty} E^k$  موجودة، عندئذ تكون المصفوفة

$E$  مصفوفة سيا، و تكون جميع الصفوف في المصفوفة  $Q$  متماثلة.

تبين المبرهنة التالية الوصف البياني لمصفوفات سيا.

### مبرهنة (2-8):

المصفوفة الاحتمالية  $E$  تكون مصفوفة سيا إذا وفقط إذا كان البيان الموجه  $G(E)$  يملك عقدة غير دورية يمكن الوصول إليها من أي مكان.

### الإثبات:

لزوم الشرط: إذا كان البيان الموجه  $G(E)$  يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان، عندئذ

بحسب المبرهنة (2-1)، فهو يملك مركبة قوية مغلقة واحدة فقط، ولتكن  $G_1 = (V_1, E_1)$ .

نعيد ترقيم العقد بحيث  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ ، بعبارة أخرى توجد مصفوفة أولية  $P$  بحيث يكون:

$$\tilde{E} = PEP^T = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ B_1 & E_0 \end{pmatrix}$$

حيث  $E_0, E_1$  تكون مصفوفات من المرتبة  $r \times r$  و  $(n-r) \times (n-r)$  على الترتيب، وفي حالة

خاصة عندما  $r = n$  يكون لدينا  $\tilde{E} = E_1$ .

بما أن  $E_1$  مصفوفة احتمالية، فإن  $\rho(E_1) = 1$ . وبما أن العقدة التي يمكن الوصول إليها من أي

مكان تكون غير دورية يتحقق من التمهيدية (2-3) أن البيان الموجه  $G_1$  غير دوري، وكذلك بما



أن العقدة التي يمكن الوصول إليها من أي مكان في البيان الموجه  $G(E)$  تكون أيضاً عقدة في البيان الموجه  $G_1$  والبيان الموجه  $G_1$  قوي الاتصال، عندئذٍ بحسب المبرهنة (2-5) المصفوفة  $E_1$  التي تقترن بالبيان الموجه  $G_1$  هي مصفوفة أولية.

وبحسب مبرهنة perron-frobenius (المبرهنة (2-6))، نجد إن  $\rho(E_1)=1$  قيمة ذاتية بسيطة للمصفوفة  $E_1$  وجميع القيم الذاتية الأخرى تملك طولاً أقل من  $\rho(E_1)=1$ ، بالتالي صيغة جوردان للمصفوفة  $E_1$  يكون كالتالي:

$$E_{1JF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

حيث  $\rho(D) < 1$ . نلاحظ أن  $E_1 = U E_{1JF} U^{-1}$  والعمود الأول من  $U$  يكون  $1_r$  بحيث  $1$  متجه ذاتي للمصفوفة  $E_1$  يقابل القيمة الذاتية 1 يرمز له بالرمز :

$$U = (1_r U')$$

وليكن الصف الأول لـ  $U^{-1}$  يمثل  $x^T$ .

بما أن  $\rho(D) < 1$  فإن:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_1^k = U (\lim_{k \rightarrow \infty} E_{1JF}^k) U^{-1} = U \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{(r-1) \times (r-1)} \end{pmatrix} U^{-1} = 1_r x^T \quad (2.6)$$

عندما  $r = n$ ، يتحقق من تعريف مصفوفة سيا إن المصفوفة  $\tilde{E} = E_1$  هي مصفوفة سيا وكذلك تكون المصفوفة  $E$ .

من جهة أخرى ، عندما  $r < n$  يتحقق من المبرهنة (2-7) أن:  $\rho(E_0) < 1$  ولذلك يكون:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_0^k = 0 \quad (2.7)$$

$$\tilde{E}^k = \begin{pmatrix} E_1^k & 0 \\ B_1^{(k)} & E_0^k \end{pmatrix}$$

من أجل مصفوفة ما  $B_1^{(k)}$  التي تتعلق بالمصفوفات  $E_1, E_0$  و  $B_1$  نلاحظ أن  $\tilde{E}^k$  تكون مصفوفة احتمالية من أجل كل  $k$ ، لذلك:

$$\begin{pmatrix} B_1^{(k)} & E_0^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r \\ \mathbf{1}_{(n-r)} \end{pmatrix} = B_1^{(k)} \cdot \mathbf{1}_r + E_0^k \cdot \mathbf{1}_{(n-r)} = \mathbf{1}_{(n-r)}$$

ومن ثم لدينا:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (B_1^{(k)} \cdot \mathbf{1}_r) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{1}_{(n-r)} - E_0^k \cdot \mathbf{1}_{(n-r)}) = \mathbf{1}_{(n-r)} - (\lim_{k \rightarrow \infty} E_0^k) \cdot \mathbf{1}_{(n-r)} = \mathbf{1}_{(n-r)} \quad (2.8)$$

نعبّر عن  $\tilde{E}^{2k}$  و  $\tilde{E}^{2k+1}$  بدلالة  $\tilde{E}^k$ :

$$\tilde{E}^{2k} = \tilde{E}^k \cdot \tilde{E}^k = \begin{pmatrix} E_1^k & 0 \\ B_1^{(k)} & E_0^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^k & 0 \\ B_1^{(k)} & E_0^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1^{2k} & 0 \\ B_1^{(k)} E_1^k + E_0^k B_1^{(k)} & E_0^{2k} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$\tilde{E}^{2k+1} = \tilde{E} \cdot \tilde{E}^{2k} = \begin{pmatrix} E_1^{2k+1} & 0 \\ B_1 E_1^{2k} + E_0 (B_1^{(k)} E_1^k + E_0^k B_1^{(k)}) & E_0^{2k+1} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

نأخذ بعين الاعتبار العلاقة (2.7) وأن كل إدخال من  $B_1^{(k)}$  محدود من الأدنى بالصفر ومحدود من الأعلى بالواحد ، لدينا:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E_0^k B_1^{(k)} = 0 \quad (2.11)$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$B_1^{(k)} E_1^k = B_1^{(k)} U E_{1/f}^k U^{-1} = B_1^{(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & U' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D^k \end{pmatrix} U^{-1} = \begin{pmatrix} B_1^{(k)} \mathbf{1}_r & B_1^{(k)} U D^k \end{pmatrix} U^{-1} \quad (2.12)$$

نلاحظ أن مدخلات  $B_1^{(k)} U'$  تكون أيضاً محدودة و  $\lim_{k \rightarrow \infty} D^k = 0$ ، ولذلك يكون:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_1^{(k)} U D^k = 0 \quad (2.13)$$

بجمع (2.8) و (2.13) نحصل على:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_1^{(k)} E_1^k = \left( \lim_{K \rightarrow \infty} B_1^k \mathbf{1}_r \quad \lim_{k \rightarrow \infty} B_1^K U D^K \right) U^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{(n-r)} & 0 \end{pmatrix} U^{-1} = \mathbf{1}_{(n-r)} x^T$$

بالاعتماد على (2.11) يتحقق أن:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (B_1^{(k)} E_1^k + E_0^k B_1^{(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} B_1^{(k)} E_1^k + \lim_{k \rightarrow \infty} E_0^k B_1^{(k)} = \mathbf{1}_{(n-r)} x^T + 0 = \mathbf{1}_{(n-r)} x^T \quad (2.14)$$

وأيضاً من (2.6) و (2.7) و (2.14) لدينا:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{E}^{2k} = \begin{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} E_1^{2k} & 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (B_1^{(k)} E_1^k + E_0^k B_1^{(k)}) & \lim_{k \rightarrow \infty} E_0^{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r x^T & 0 \\ \mathbf{1}_{(n-r)} x^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n x^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{E}^{2k+1} = \begin{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} E_1^{2k} & 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (B_1 E_1^{2k} + E_0 (B_1^{(k)} E_1^k + E_0^k B_1^{(k)})) & \lim_{k \rightarrow \infty} E_0^{2k+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r x^T & 0 \\ B_1 (\lim_{k \rightarrow \infty} E_1^{2k}) + E_0 (\lim_{x \rightarrow \infty} (B_1^{(k)} E_1^k + E_0^k B_1^{(k)})) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r x^T & 0 \\ B_1 \mathbf{1}_r x^T + E_0 \mathbf{1}_{(n-r)} x^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r x^T & 0 \\ \mathbf{1}_{(n-r)} x^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n x^T & 0 \end{pmatrix}$$

بالتالي:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{E}^k = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n x^T & 0 \end{pmatrix}$$

ولذلك:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E^k = T^T \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n x^T & 0 \end{pmatrix} T$$

موجودة وتملك صفوفاً متماثلة، عندئذٍ يتحقق من تعريف مصفوفة سيا أن المصفوفة الاحتمالية  $E$  تكون مصفوفة سيا.

(كفاية الشرط): لنفرض جـداً أن البيان الموجه  $G(E)$  لا يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان، أو إنه يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان، ولكنها دورية دورها  $d$ . في الحالة الأولى عندما يكون البيان الموجه  $G(E)$  لا يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان، عندئذٍ بحسب المبرهنة (2-1)، فهو يملك مركبين مغلقين قويين على الأقل، بالتالي تكون المصفوفة  $E$  مصفوفة مشابهة للمصفوفة:

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 & 0 \\ B_2 & B_1 & E_0 \end{pmatrix}$$

بما إن المصفوفة  $E$  مصفوفة سيا، بالتالي المصفوفة  $\tilde{E}$  تكون أيضاً مصفوفة سيا، هذا يعني أن  $\lim_{K \rightarrow \infty} \tilde{E}^K$  موجودة وتملك صفوف متماثلة، لكننا نلاحظ أن المصفوفة  $\tilde{E}^k$  تكون بالشكل:

$$\tilde{E}^k = \begin{pmatrix} E_2^k & 0 & 0 \\ 0 & E_1^k & 0 \\ B_2^{(k)} & B_1^{(k)} & E_0^k \end{pmatrix}$$

بحيث إن  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{E}^k$  تملك صفوف متماثلة، و  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{E}^k$  تسعى إلى الصفر الذي يناقض كون المصفوفة  $\tilde{E}^k$  مصفوفة احتمالية.

في الحالة الثانية بفرض أن البيان الموجه  $G(E)$  يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان لكن هذه العقدة دورية دورها  $d$  حيث  $d > 1$  عندئذٍ بحسب المبرهنة (2-1)، فهو يملك مركبة

قوياً مغلقاً واحداً فقط وليكن  $G_1$ ، والذي يكون دورياً دوره  $d$ ، بالتالي المصفوفة  $E$  تكون مصفوفة مشابهة للمصفوفة:

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ B_1 & E_0 \end{pmatrix}$$

حيث  $G(E_1) = G_1$ ، بما أن البيان الموجه  $G(E_1)$  دوري دوره  $d$  فمن خلال التمهيدية (2-4) نعلم أن المدخلات القطرية للمصفوفة  $E_1^k$  تكون أصفار من أجل كل  $k$  ليس من مضاعفات العدد  $d$ ، بالتالي  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{E}^k$  تسعى لتساوي الصفر، بملاحظة أن المصفوفة  $\tilde{E}$  مصفوفة سيا وبملاحظة شكل المصفوفة  $\tilde{E}^k$  هذا يناقض كون  $\tilde{E}^k$  مصفوفة احتمالية وبالحالتين يكون الفرض الجدلي خاطئ.

**ملاحظة:** جميع المصفوفات الاحتمالية الأولية هي مصفوفات سيا.

**مثال (2-6):**

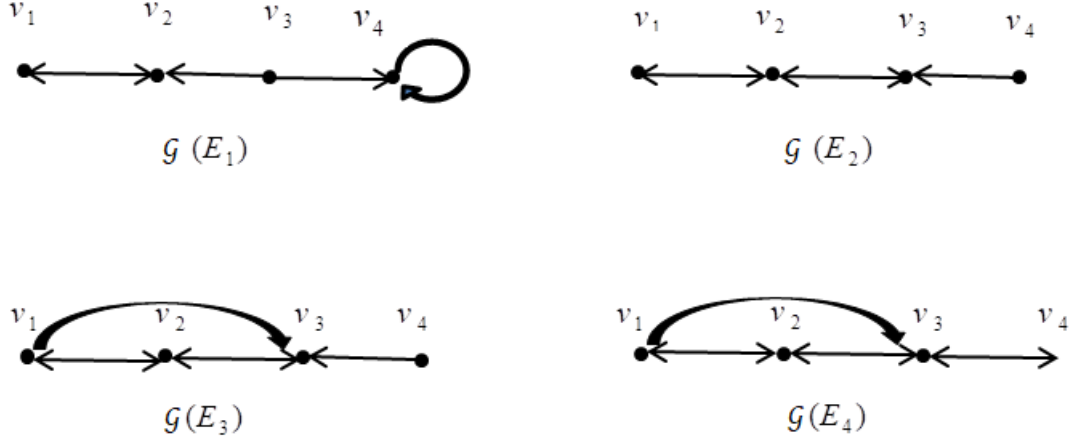
لتكن المصفوفات الاحتمالية مُعطاة كالتالي:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

البيانات الموجهة المقترنة تكون مُعطاة في الشكل (18)، نلاحظ أن البيان الموجه  $G(E_1)$  لا

يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان لذلك المصفوفة  $E_1$  لا تكون مصفوفة سيا.



الشكل (18): البيانات الموجهة المقترنة بمصفوفات سيا.

بينما البيان الموجه  $G(E_2)$  يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان (العقد  $v_1, v_2, v_3$ )، لذلك جميعها عقد يمكن الوصول إليها من أي مكان) لكن هذه العقد دورية دورها يساوي 2، لذلك المصفوفة  $E_2$  لا تكون مصفوفة سيا، البيان الموجه  $G(E_3)$  يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان (العقدة  $v_1$  والتي تكون غير دورية ( $d_1 = gcd\{2,3\} = 1$ ) لذلك تكون المصفوفة  $E_3$  مصفوفة سيا.

البيان الموجه  $G(E_4)$  قوي الاتصال وغير دوري، ويملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان والتي تكون غير دورية لذلك تكون المصفوفة  $E_4$  مصفوفة سيا.

## 2-2-6 مبرهنة Wolfwitz:

من أجل المصفوفة غير السالبة  $P = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  نعرف  $\delta(P)$  بالشكل:

$$\delta(P) := \max_j \max_{i_1, i_2} |p_{i_1 j} - p_{i_2 j}|$$

إذا كانت الصفوف في المصفوفة  $P$  متماثلة، فعندئذ يكون لدينا  $\delta(P) = 0$ .

من جهة أخرى نعرف  $\lambda(P)$  بالشكل:

$$\lambda(P) := 1 - \min_{i_1, i_2, i_1 \neq i_2} \sum_j \min(p_{i_1 j}, p_{i_2 j}) \quad (2.15)$$

إذا كان  $\lambda(P) < 1$  ، عندئذٍ ندعو المصفوفة  $P$  مصفوفة غباشة.

الشرط  $\lambda(P) < 1$  يقتضي أنه من أجل كل زوج صفوف  $i_1$  و  $i_2$  يوجد عمود  $j$  بحيث يكون

$$p_{i_1 j} > 0 \text{ و } p_{i_2 j} > 0$$

الآن، بفرض أن المصفوفتين غير السالبتين  $P_1$  و  $P_2$  تملكان البيان الموجه المقترن ذاته، أي

إن  $P_1 \sim P_2$  ، عندئذٍ إذا كانت المصفوفة  $P_1$  مصفوفة غباشة فإن المصفوفة  $P_2$  تكون أيضاً

مصفوفة غباشة.

إذا كانت المصفوفة  $P$  احتمالية، فمن الواضح أن:  $0 \leq \lambda(P) \leq 1$  وعلاوةً على ذلك  $\lambda(P) = 0$

إذا وفقط إذا كان  $\delta(P) = 0$ . وفي هذه الحالة تكون أسطر المصفوفة الاحتمالية متماثلة.

**مثال (2-7): لتكن:**

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \quad \& \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0.2 & 0 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

إن:

$$\delta(E_1) = \max\{0.6, 0.2, 0.8, 0.7\} = 0.8, \quad \lambda(E_1) = 1 - \min\{0.3, 0, 0.6, 0.7, 0.4, 0.1\} = 1$$

$$\delta(E_2) = \max\{0.4, 0.8, 0.5, 0.7\} = 0.8, \quad \lambda(E_2) = 1 - \min\{0.5, 0.2, 0.3, 0.2, 0.6, 0.2\} = 0.8$$

توضيح لحساب  $\delta(E_1)$ :

من أجل السطر الأول والثاني  $i_1 = 1, i_2 = 2$

$$\min(0.3, 0.2) + \min(0, 0.2) + \min(0, 0.5) + \min(0.7, 0.1) = \\ 0.2 + 0 + 0 + 0.1 = 0.3$$

من أجل  $i_1 = 1, i_2 = 3$  :

$$\min(0.3, 0) + \min(0, 0.2) + \min(0, 0.8) + \min(0.7, 0) = \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

من أجل  $i_1 = 1, i_2 = 4$  :

$$\min(0.3, 0.6) + \min(0, 0) + \min(0, 0.1) + \min(0.7, 0.3) = \\ 0.3 + 0 + 0 + 0.3 = 0.6$$

من خلال التعريف، نلاحظ أن المصفوفة  $E_1$  ليست مصفوفة غباشة، أما المصفوفة  $E_2$  تكون مصفوفة غباشة.

لتكن  $E = \{E_1, E_2, \dots\}$  تمثل مجموعة منتهية أو غير منتهية من المصفوفات الاحتمالية من المرتبة  $n$  وليكن  $m$  يمثل العدد من البيانات الموجهة المقترنة المختلفة من جميع مصفوفات سيا من المرتبة  $n$ .

ملاحظة: الجداء في المصفوفة  $E$  طوله  $k$  هو جداء  $k$  مصفوفة في  $E$ .

**التمهيدية (2-5):**

إذا كان أي جداء في  $E$  هو مصفوفة سيا، فعندئذٍ جميع الجداءات في  $E$  التي طولها أكبر أو

يساوي  $m + 1$  تكون مصفوفات غباشة. [5]

**التمهيدية (2-6):**

من أجل أي  $z$  يكون:



$$[6] \quad \delta(E_{k_1} E_{k_2} \dots E_{k_j}) \leq \prod_{i=1}^j \lambda(E_{k_i})$$

**مبرهنة (2-9):**

إذا وجد ثابت  $d$  بحيث إن  $0 \leq d < 1$  و  $\lambda(P) \leq d$ ، من أجل أي جداء  $P$  في  $E$  طوله  $m+1$  ومن أجل أي متتالية غير منتهية  $E_{k_1}, E_{k_2}, \dots$ ، يوجد متجه  $x$  بحيث يكون:

$$[5] \quad \lim_{j \rightarrow \infty} E_{k_j} E_{k_{j-1}} \dots E_{k_1} = \mathbf{1} x^T$$

### 2-3 المصفوفات المولدة ونظرية البيان:

#### 2-3-1 مصفوفات ميتزلر والمصفوفات من النوع $M$ [7]:

ندعو كل مصفوفة حقيقية مربعة عناصرها غير القطرية غير سالبة، وعناصرها القطرية غير موجبة بمصفوفة ميتزلر.

من أجل المنظومة الديناميكية الخطية  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ، إذا كانت  $A$  مصفوفة ميتزلر، فعندئذٍ مصفوفة الانتقال  $\Phi(t) = \exp(At)$  تكون مصفوفة غير سالبة، وهذا يقتضي أن الرُّبع الأول من فضاء الحالة يكون لا متغير إيجابياً.

المصفوفات من الشكل  $B = -A$  حيث  $A$  مصفوفة ميتزلر يمكن كتابتها بالشكل:

$$B = sI - E$$

حيث  $s \geq 0$  أصغر عدد حقيقي موجب يتحقق من أجله  $E \geq 0$ ، بالإضافة لذلك إذا كانت

$s \geq \rho(E)$ ، فعندئذٍ المصفوفة  $B$  تدعى مصفوفة من النوع  $M$ ، وكذلك إذا كانت  $s > \rho(E)$ ،

فعندئذٍ المصفوفة  $B$  تدعى مصفوفة من النوع  $M$  نظامية.

أمثلة على مصفوفة ميتزler ومصفوفة من النوع  $M$  ومصفوفة من النوع  $M$  نظامية تكون معطاة كالتالي:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

بملاحظة أن:

$$A_2 = - \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} = -A$$

حيث المصفوفة  $A$  مصفوفة ميتزler.

$$A_2 = sI - E \Rightarrow E = sI - A_2$$

$$E = sI - A_2 = \begin{pmatrix} s-2 & 1 & 1 \\ 2 & s-4 & 2 \\ 3 & 2 & s-5 \end{pmatrix}$$

يكف لجعل المصفوفة  $E$  غير سالبة أن نضع  $s=5$  ومنه يكون

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

بحساب القيم الذاتية للمصفوفة  $E$  نجد:

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1), \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

ومنه يكون:  $\rho(E) = \max\{|\lambda_i|\} = 5$  من الواضح أن:  $s = 5 = \rho(E)$  وبالتالي

فالمصفوفة  $A_2$  هي مصفوفة من النوع  $M$ .

بشكل مماثل للمصفوفة  $A_3$  نجد إن:

$$s = 5 > \rho(E) = 4$$

وبالتالي فإن المصفوفة  $A_3$  هي مصفوفة من النوع  $M$  غير شاذة (نظامية).

**ملاحظة:** يمكن اختيار العدد الحقيقي غير السالب  $s$  دائماً بحيث تكون المصفوفة  $E_2$  غير

$$s = \max\{|a_{ii}|\}$$
 سالبة بالشكل:

**التمهيدية (2-7):**

لتكن  $A$  مصفوفة ممتزلة عندئذٍ توجد مصفوفة قطرية موجبة  $P$  بحيث تكون المصفوفة:

$$AP + PA^T$$

معرفة سلبياً إذا وفقط إذا كانت المصفوفة  $-A$  مصفوفة من النوع  $M$  غير منفردة. [17]

## 2-3-2 المصفوفات المولدة، لابلاسيان البيان، البيانات الموجهة

**(Generator Matrices, Graph Laplacians, Digraphs):**

ندعو المصفوفة المربعة  $A$  مصفوفة مولدة إذا كانت مصفوفة ممتزلة ومجموع كل صف من صفوفها يساوي الصفر.

المصفوفة المولدة  $A$  يمكن كتابتها بالشكل:

$$A = -D + E_1 \quad (2.19)$$

حيث إن المصفوفة  $D$  هي مصفوفة قطرية غير سالبة مدخلاتها القطرية مأخوذة من المصفوفة  $A$  والمصفوفة  $E_1$  مصفوفة غير سالبة بمدخلات قطرية جميعها أصفار ومدخلات غير قطرية مأخوذة من المصفوفة  $A$ .

ملاحظة: نرمز بالرمز  $G_A$  للبيان الموجه المقترن بالمصفوفة المولدة  $A$ ، ونرمز بالرمز  $G(E)$  للبيان الموجه المقترن بالمصفوفة غير السالبة  $E$ .

ومن جهة أخرى، المصفوفة المولدة  $A$  يمكن كتابتها أيضاً بالشكل:

$$A = -sI + E_2 \quad (2.20)$$

حيث  $s$  عدد اختياري غير سالب كبير بقدر كافٍ لجعل المصفوفة  $E_2$  مصفوفة غير سالبة.

ملاحظة: ربما يكون البيان الموجه  $G(E_2)$  مختلفاً عن البيان الموجه  $G_A$  لكنهما حتماً يملكان خواص الاتصال ذاتها.

على سبيل المثال  $G_A$  قوي الاتصال أو شبه قوي الاتصال، أو يملك  $k$  مركبات مغلقة قوية إذا وفقط إذا كان  $G(E_2)$  قوي الاتصال، أو شبه قوي الاتصال، أو يملك  $k$  مركبات قوية مغلقة.

الاختلاف الوحيد بين هذين البيانيين الموجهين هو أن البيان الموجه  $G(E_2)$  ربما يملك حلقات، بينما البيان الموجه  $G_A = G(E_1)$  لا يملك.

**مثال (2-8):**

لتكن:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

المصفوفة  $A$  أعلاه مصفوفة مولدة، وذلك لأنها مصفوفة ممتزلة وبمجموع صفوف يساوي الصفر. استناداً إلى العلاقة (2-19)،  $A$  يمكن كتابتها بالشكل:

$$A = -D + E_1 = -\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

استناداً إلى العلاقة (2-20)، المصفوفة  $A$  يمكن كتابتها بالشكل:

$$A = -sI + E_2 = -4I + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

البيانات الموجهة المقترنة  $G_A = G(E_1)$  و  $G(E_2)$  تكون معطاة بالشكل (19) على التوالي،

فمن خلالها نستطيع رؤية أن الفارق الوحيد بينهما هو أن البيان الموجه  $G_A$  بيان موجه بسيط،

لكن البيان الموجه  $G(E_2)$  يملك حلقات متعددة.



الشكل (19): البيانات الموجهة المقترنة بالمصفوفات المولدة.

**لابلسيان البيان:**

تدعى المصفوفة القطرية  $D$  والتي تمثل درجة الخارج لكل عقدة على طول القطر الرئيسي،

بمصفوفة الدرجة من  $G$ .

لابلاسي البيان الموجه  $G$  يكون معرفاً بالشكل  $L = D - E$  حيث  $E$  مصفوفة الجوار للبيان

الموجه.

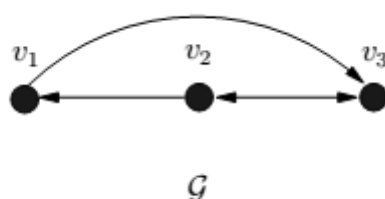
**ملاحظة:** إذا كان البيان الموجه بسيطاً فإن المصفوفة  $-L$  هي مصفوفة مولدة وذلك لأن

$-L = -D + E$  ومجموع عناصر كل سطر في المصفوفة  $E$  يساوي درجة الخارج لكل عقدة

على طول القطر الرئيسي والمصفوفة  $-D$  قطرية عناصرها القطر الرئيسي هي ناقص درجة الخارج لكل عقدة وبالتالي فالمصفوفة  $-L = -D + E$  تحقق إن مجموع كل سطر يساوي الصفر وأيضاً العناصر غير الواقعة على القطر الرئيسي هي إما 0 أو 1، لذلك فهي مصفوفة ميتزler وبالتالي فإن  $-L$  هي مصفوفة مولدة.

### مثال (9-2):

ليكن لدينا البيان الموجه  $G$  المعطى بالشكل (20)، إن مصفوفة درجة الخارج ، ومصفوفة الجوار، واللابلاسي تكون مُعطاة بالترتيب:



الشكل (20): البيان الموجه.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad -L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

### 2-3-3 مصفوفة الانتقال لمصفوفة مولدة

#### :(The Transition Matrix of a Generator Matrix)

بفرض لدينا المنظومة:

$$\dot{x} = Ax$$

إن حل هذه المنظومة هو

$$x(t) = \exp(At) x(0)$$

المصفوفة  $\exp(At)$  تدعى مصفوفة الانتقال.

في مصفوفة الانتقال  $A$  إن العنصر  $a_{ij}$  بحيث  $i \neq j$  يدل على معدل المغادرة من الحالة  $i$  والوصول إلى الحالة  $j$ .

**مبرهنة (2-10):**

إذا كانت  $A$  مصفوفة مولدة ، عندئذٍ المصفوفة  $\exp(At)$  تكون مصفوفة احتمالية من أجل كل  $t > 0$ .

**الإثبات:**

أولاً- لنبين أنه من أجل كل  $t > 0$ ، المصفوفة  $\exp(At)$  هي مصفوفة غير سالبة.

يتحقق من المعادلة (2-20) أنه من أجل كل  $t > 0$  يكون:

$$\exp(At) = \exp(-stI + E_2t) = e^{-st} \exp(E_2t) = e^{-st} \cdot (I + E_2t + \frac{(E_2t)^2}{2!} + \dots)$$

يمكن التحقق بسهولة أن أي قوى صحيحة لمصفوفة غير سالبة  $E_2$  تكون أيضاً مصفوفة غير سالبة، وبالتالي بالنظر إلى الطرف الأيمن من المساواة أعلاه، نلاحظ إن  $\exp(At)$  تكون مصفوفة غير سالبة من أجل كل  $t > 0$ .

من أجل أن تكون المصفوفة احتمالية، يتطلب بالإضافة إلى ذلك أن يكون مجموع كل صف من صفوفها يساوي الواحد، وبما أن مجموع كل صف من صفوف المصفوفة  $A$  يساوي الصفر، بالتالي فإن  $A \cdot 1 = 0$ ، وبالتالي نحصل على:

$$\exp(At) \mathbf{1} = (I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots) \mathbf{1} = \mathbf{1} + 0 + 0 + \dots = \mathbf{1}$$

من النشر أعلاه نلاحظ أن  $\exp(At)$  تكون مصفوفة احتمالية لكل  $t > 0$ .

#### 2-3-4 القيمة الذاتية الصفريّة للمصفوفة المولدة

##### :(The Zero Eigenvalue of Generator Matrix)

في هذا الفقرة سنفرض أن المصفوفة  $A$  مصفوفة المربعة من المرتبة  $n$  مولدة و  $G_A$  بيان موجه مقترن بالمصفوفة المولدة  $A$ .

##### مبرهنة (2-11):

لتكن  $A$  مصفوفة مربعة من المرتبة  $n$  عندئذٍ إذا كانت  $A$  مصفوفة مولدة فإن الصفر قيمة ذاتية للمصفوفة  $A$  والواحد متجه ذاتي يميني مقترن، بينما جميع القيم الذاتية الأخرى تملك جزءاً حقيقياً سالباً.

**الإثبات:** من خلال تعريف المصفوفة المولدة يتحقق أن  $A1=0$ ، لذلك الصفر يكون قيمة ذاتية والواحد متجه ذاتي يميني مقترن، بما أن المصفوفة  $A$  هي مصفوفة مولدة عندئذٍ يتحقق إن عناصر القطر الرئيسي أعداداً غير موجبة والعناصر غير القطرية هي أعداد غير سالبة، وبما أن مجموع أسطر المصفوفة  $A$  يساوي الصفر، فإن كل عنصر من عناصر القطر الرئيسي يحقق أنه يساوي مجموع بقية العناصر الواقعة معه في نفس السطر بالقيمة المطلقة ويعاكسها بالإشارة، أي:  $\alpha > 0$ ;  $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = \alpha$ ;  $\alpha_{ii} = -\alpha$ ، مما يعني أن القرص الذي مركزه  $(-\alpha, 0)$

ونصف قطره  $\alpha$  حتماً يمر من المبدأ (الصفر) ويقع في النصف الأيسر من المستوي العقدي، لذلك فإن جميع الأقراص تقع في نصف المستوي الأيسر وبحسب مبرهنة أقراص جيرشغورين فإن القيم الذاتية تقع ضمن هذه الأقراص أو على محيطها وهذا يعني أن جميع القيم الذاتية الأخرى تملك جزءاً حقيقياً سالباً. (انظر الشكل (21)).



## المبرهنة (2-12):

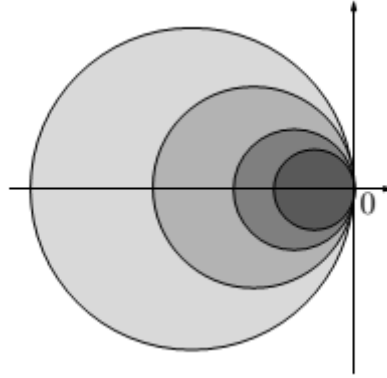
إذا كان البيان الموجه  $G_A$  قوي الاتصال، عندئذٍ القيمة الذاتية الصفريّة للمصفوفة  $A$  تكون

بسيطة، ويقترن بالقيمة الذاتية الصفريّة متجه ذاتي يميني 1 ومتجه ذاتي يساري موجب.

## الإثبات:

المصفوفة المولدة  $A$  نستطيع كتابتها بالشكل:

$$A = -sI + E$$



الشكل (21): أقراص جيرشغورين لمصفوفة مولدة.

حيث  $s$  عدد موجب كبير بقدر كافٍ لتكون المصفوفة  $E$  غير سالبة.

بما أن المصفوفة  $A$  مولدة، فإن مجموع كل صف من صفوفها يساوي الصفر ولذلك فإن مجموع

كل صف من صفوف المصفوفة  $E$  يساوي  $s$  إن

$$A = -sI + E \Rightarrow E = A + sI \Rightarrow \frac{1}{s}E = \frac{1}{s}A + I$$

مجموع كل صف من صفوفها يساوي الصفر وكذلك  $\frac{1}{s}A$ ، وبما أن المصفوفة  $I$  مجموع كل

صف من صفوفها يساوي الواحد فإن  $\frac{1}{s}E = \frac{1}{s}A + I$  مجموع كل صف من صفوفها يساوي

الواحد وهي مصفوفة غير سالبة كونها تمثل مجموع مصفوفتين غير سالبتين وبالتالي فإن

المصفوفة  $\frac{1}{s}E$  احتمالية فإن  $\rho(\frac{1}{s}E)=1$  ، بفرض أن القيمة الذاتية  $\lambda$  للمصفوفة  $E$  التي

طويلتها أكبر طويلة للقيم الذاتية للمصفوفة  $E$  ، عندئذٍ فإن القيمة الذاتية  $\frac{\lambda}{s}$  تحقق أن طويلتها

أكبر طويلة للقيم الذاتية للمصفوفة  $\frac{1}{s}E$  وبالتالي فإن

$$1 = \rho(\frac{1}{s}E) = \left| \frac{\lambda}{s} \right| = \frac{|\lambda|}{s} = \frac{\rho(E)}{s} \Rightarrow \rho(E) = s$$

من جهة أخرى إذا كان البيان الموجه  $G_A$  قوي الاتصال، فعندئذٍ البيان الموجه  $G(E)$  يكون

أيضاً قوي الاتصال، لذلك المصفوفة  $E$  تكون مصفوفة غير قابلة للاختزال حسب المبرهنة

(2-3)، ومن المبرهنة (2-6) (مبرهنة Perron-frobenius) نلاحظ أن  $\rho(E)=s$  قيمة ذاتية

بسيطة للمصفوفة  $E$ ، وأيضاً المصفوفة  $E$  تملك متجهاً ذاتياً يمينياً موجباً ومتجهاً ذاتياً يسارياً

موجباً مقابل للقيمة الذاتية  $\rho(E)=s$ .

من الواضح أن المتجه الذاتي اليميني يكون **1** بالإضافة لذلك نشير إلى المتجه الذاتي اليساري

$x^T$ ، وبملاحظة أن  $A = -sI + E$  لذلك الصفر يكون قيمة ذاتية بسيطة تقترن بمتجه ذاتي

يميني **1** ومتجه ذاتي يساري موجب  $x^T$ .

**تعريف التكرار الجبري والهندسي للقيمة الذاتية:**

إذا كانت القيمة الذاتية جذراً مكرراً  $r$  مرة للمعادلة المميزة  $P_n(\lambda) = 0$  للمصفوفة  $A$ ، عندئذٍ

نسمي  $r$  بالتكرار الجبري للقيمة الذاتية  $\lambda$ .

وإذا كان  $s$  عدد المتجهات الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية  $\lambda$  يحقق:  $s < r$  عندئذٍ نسمي  $s$

بالتكرار الهندسي للقيمة الذاتية  $\lambda$ .

### مبرهنة (2-13):

من أجل القيمة الذاتية الصفريّة للمصفوفة المولدة  $A$ ، التكرار الجبري يساوي التكرار الهندسي

ويساوي العدد من المركبات القوية المغلقة في  $G_A$ .

### الإثبات:

المصفوفة المولدة  $A$  نستطيع كتابتها بالشكل :

$$A = -sI + E$$

حيث  $s$  عدداً اختيارياً موجباً و  $E$  مصفوفة غير سالبة، إن المصفوفة  $(\frac{1}{s}E)$  مصفوفة احتمالية.

وبما أن  $\rho(\frac{1}{s}E_i) = 1$  قيمة ذاتية للمصفوفات الجزئية  $E_i$  حيث  $i = 1, \dots, k$  وبالتالي فإن

$\rho(E_i) = s$  قيمة ذاتية للمصفوفات الجزئية  $E_i$  حيث  $i = 1, \dots, k$  وهذا يعني أن القيمة  $s$

هي قيمة ذاتية للمصفوفة  $\tilde{E}$  مكررة  $k$  مرة، أي تكرارها الجبري يساوي  $k$ ، وبما أن للمصفوفتين

$E, \tilde{E}$  القيم الذاتية نفسها كونهما متشابهتان، فإن القيمة الذاتية  $s$  هي قيمة ذاتية للمصفوفة  $E$

تكرارها الجبري  $k$ .

واستناداً إلى العلاقة:

$$A = -sI + E \quad (*)$$

وبما أن  $s$  قيمة ذاتية للمصفوفة  $E$  تكرارها الجبري  $k$  فإن

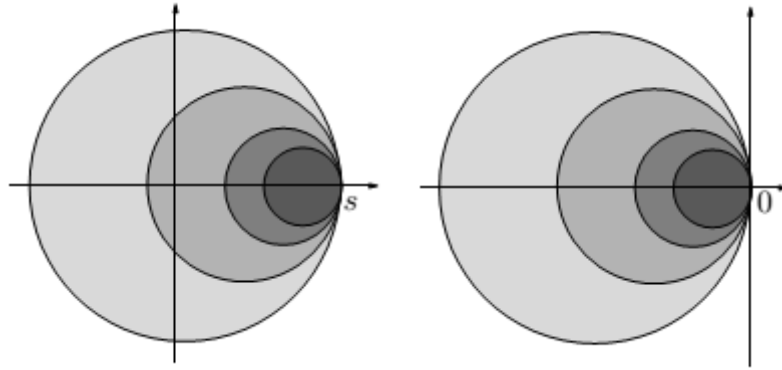
$$EX = sX \quad \text{بحيث } s \text{ مكررة } k \text{ مرة.} \quad (**)$$

$$\begin{aligned} AX &= (-sI + E)X = -sIX + EX \\ &= -sX + EX \end{aligned}$$

بالإستفادة من (\*\*):

$$AX = -sX + sX = 0X$$

وهذا يعني أن  $\lambda = 0$  قيمة ذاتية للمصفوفة  $A$ ، وبما أن القيمة الذاتية  $s$  للمصفوفة  $E$  تكررها الجبري  $k$  فهذا يقتضي أن يكون التكرار الجبري للقيمة الذاتية  $\lambda = 0$  هو  $k$  أيضاً.



الشكل (22): تحول s وحدات.

### 2-3-5 الاستقرار من النوع $H(\alpha, m)$ Stability $H(\alpha, m)$ [8]:

نرمز لجداء كرونكر للمصفوفتين  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  و  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$  بالرمز  $A \otimes B$  وهو مصفوفة من المرتبة  $np \times mq$ :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times mq}$$

يملك جداء كرونكر خواصاً متعددة، منها:

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C \quad \text{-(a)}$$

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \quad \text{-(b)}$$

$$\text{-(c) إذا كان } A, C \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ و } B, D \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ فعندئذ:}$$

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

(d) - إذا كانت  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  قيم ذاتية للمصفوفة  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  و  $\mu_1, \dots, \mu_n$  قيم ذاتية للمصفوفة

$B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، فعندئذ القيم الذاتية للمصفوفة  $A \otimes B$  هي الأعداد  $\lambda_r \mu_s$

$$r = 1, \dots, m \quad \& \quad s = 1, \dots, n$$

لتكن  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$  تمثل تجزئة لـ  $\{1, 2, \dots, n\}$ ، نقول عن مصفوفة الخلايا القطرية ذات خلايا قطرية ذات أدلة  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  إنها قطرية من النوع  $\alpha$ .

إن ضرب المصفوفة الواحدية بمقدار سلمي هو مصفوفة سلمية، نسمي مصفوفة الخلايا القطرية من النوع  $\alpha$  بمصفوفة خلايا سلمية من النوع  $\alpha$  إذا كانت خلاياها القطرية هي مصفوفات سلمية.

من أجل  $\alpha = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$  أمثلة بسيطة لمصفوفة قطرية من النوع  $\alpha$  ومصفوفة سلمية من النوع  $\alpha$  تكون على التوالي:

$$D_1 = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array} \right) \quad \& \quad D_2 = \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

**تعريف (2-1):**

لتكن  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$  تمثل تجزئة لـ  $\{1, 2, \dots, n\}$  و  $m \geq 0$  عدد صحيح، المصفوفة  $A$  من المرتبة  $n$  تدعى مصفوفة مستقرة من النوع  $H(\alpha, m)$  إذا كان من أجل أي مصفوفة  $S$  معرفة إيجابياً متناظرة قطرية من النوع  $\alpha$ ، الصفر يكون قيمة ذاتية للمصفوفة  $SA$  تكرارها الجبري والهندسي  $m$ ، بينما جميع القيم الذاتية الأخرى تملك جزءاً حقيقياً سالباً.

من الواضح أن المصفوفة المستقرة من النوع  $H(\alpha, m)$  تكون مستقرة تقاربياً (Hurwitz)، لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة، على سبيل المثال لتكن:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \alpha = \{\{1\}, \{2\}\}$$

إن المصفوفة  $A$  مستقرة تقاربياً بقيم ذاتية  $\{-1, -1\}$  لكن  $S.A$  تكون غير مستقرة، باختيار مصفوفة معرفة إيجابياً متناظرة قطرية من النوع  $\alpha$ :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

فيما يلي لتكن  $A$  تمثل مصفوفة مولدة من المرتبة  $n$  وليكن  $G_A$  يشير إلى البيان الموجه المقترن بالمصفوفة  $A$ ، وليكن  $A_{(m)}$  يمثل جداء كرونكر للمصفوفتين  $A$  و  $I_m$ ، أي

$$\alpha = \{\{1, \dots, m\}, \{m+1, \dots, 2m\}, \dots, \{(n-1)m+1, nm\}\}$$

تمثل تجزئة لـ  $\{1, 2, \dots, nm\}$ .

**مبرهنة (2-14):**

إذا كان البيان الموجه  $G_A$  قوي الاتصال، عندئذٍ تكون المصفوفة  $A_{(m)}$  مستقرة من النوع  $H(\alpha, m)$ .

**الإثبات:**

إذا كان البيان الموجه  $G_A$  قوي الاتصال، فعندئذٍ حسب المبرهنة (2-12) الصفر يكون قيمة ذاتية للمصفوفة  $A$  مقترنة بمتجه ذاتي يميني  $\mathbf{1}$  ومتجه ذاتي يساري:

$$x^T = (x_1, \dots, x_n)$$

وأيضاً

$$A\mathbf{1} = 0 \quad \text{and} \quad x^T A = 0$$

أيضاً:

$$\ker(A) = \text{span}\{\mathbf{1}\}$$

لتكن  $P = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  بالتالي المصفوفة  $P$  تكون معرفة إيجابياً وأيضاً  $P\mathbf{1} = x$  وبفرض إن:

$$Q = A^T P + PA.$$

بالتالي:

$$Q\mathbf{1} = A^T P\mathbf{1} + PA\mathbf{1} = A^T x = 0$$

نلاحظ أن المصفوفة المولدة  $A$  نستطيع كتابتها بالشكل:

$$A = -D + E$$

حيث  $D$  مصفوفة قطرية غير سالبة مدخلاتها مأخوذة من المصفوفة  $A$  ، والمصفوفة  $E$  مصفوفة غير سالبة مدخلاتها القطرية أصفار ومدخلاتها غير القطرية تكون المدخلات ذاتها غير القطرية في  $A$ ، بالتالي:

$$\begin{aligned} Q &= A^T P + PA = (-D + E)^T P + P(-D + E) = \\ &= (-D^T + E^T)P + P(-D + E) \\ &= (-D + E^T)P + P(-D + E) \quad ; D^T = D \\ &= -DP + E^T P - PD + PE \\ &= (-DP - PD) + (E^T P + PE) \end{aligned}$$

وبما أن  $P, D$  مصفوفتين قطريتين من نفس المرتبة فإن  $PD = DP$  وبالتالي

$$\begin{aligned} Q &= -2PD + (E^T P + PE) \\ &= -2PD + (P^T E)^T + PE \end{aligned}$$

إن جداء مصفوفتين قطريتين هو مصفوفة قطرية

$$Q = -2PD + (PE)^T + (PE)$$

وبالتالي المصفوفة  $Q$  هي مصفوفة ميتزلة، وما أن عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة  $E$  هي أصفار وعناصر القطر الرئيسي في المصفوفة  $P$  موجبة بينما بقية العناصر في المصفوفة  $P$  هي أصفار فهذا يعني أن ناتج جداء  $PE$  هو مصفوفة غير سالبة وعناصرها القطر الرئيسي أصفار وكذلك منقولها  $(PE)^T$ .

نذكر أن المصفوفة  $P$  قطرية موجبة، ونعلم أن المصفوفة  $PD$  تكون أيضاً مصفوفة قطرية موجبة و المصفوفة  $E^T P + PE$  تكون غير سالبة. هذا يقتضي أن  $Q$  تملك مدخلات خارج القطر غير سالبة. بحسب المبرهنة (2-12) يتحقق أن المصفوفة  $Q$  تكون أيضاً مصفوفة مولدة، أيضاً نذكر أن البيان الموجه  $G_A$  يملك خواص البيان الموجه المقترن  $G(E)$ ، لذلك البيان الموجه  $G(E)$  يكون قوي الاتصال. وبما أن المصفوفة  $P$  قطرية موجبة، وبالتالي نحصل على:

$$G(PE) = G(E)$$

وكذلك:

$$G(EP + PE) = G(PE) \cup G(E^T P) = G(E) \cup G(E^T P)$$

بالتالي البيان الموجه  $G(E^T P + PE)$  قوي الاتصال، وكذلك يكون البيان الموجه  $G_Q$ ، بتطبيق المبرهنة (2-12) مرة أخرى نحصل على:

$$\ker(Q) = \text{span}\{1\}$$



أيضاً بالاعتماد على المبرهنة (2-11) القيم الذاتية للمصفوفة  $Q$  تكون واقعة في نصف المستوي اليساري المفتوح وذلك باستثناء القيمة الذاتية الصفرية، هذا يقتضي أن المصفوفة  $Q$  شبه معرفة سلبياً.

نحن الآن، نعرف مصفوفة سلمية من النوع  $\alpha$  معرفة إيجابياً  $P_{(m)} = P \otimes I_m$ .

باستخدام الخواص (a), (b), (c)، جداء كرونكر يكتب بالشكل:

$$\begin{aligned} A_{(m)}^T P_{(m)} + P_{(m)} A_{(m)} &= (A^T \otimes I_m)(P \otimes I_m) + (P \otimes I_m)(A \otimes I_m) \\ &= (A^T P) \otimes I_m + (PA) \otimes I_m \\ &= (A^T P + PA) \otimes I_m \\ &= Q \otimes I_m \\ &= Q_{(m)} \end{aligned}$$

باستخدام الخاصة (d) من جداء كرونكر، نستنتج أن كل من  $A_{(m)}$  و  $Q_{(m)}$  تملك قيمة ذاتية صفرية تكررهما الجبري والهندسي  $m$  والقيم الذاتية الأخرى تكون في نصف المستوي اليساري المفتوح، بالتالي:

$$\ker(Q_{(m)}) = \ker(A_{(m)})$$

و  $Q_{(m)}$  شبه معرفة سلبياً.

بفرض لدينا مصفوفة  $S$  معرفة إيجابياً متناظرة قطرية من النوع  $\alpha$  والمصفوفة  $S^{-1}$  تكون أيضاً مصفوفة قطرية من النوع  $\alpha$  متناظرة معرفة إيجابياً .

نذكر أن  $P_{(m)}$  مصفوفة سلمية من النوع  $\alpha$  معرفة إيجابياً، بالتالي نحصل على:

$$P_{(m)} S^{-1} = S^{-1} P_{(m)}$$

الذي يكون معرف إيجابياً. ويتحقق الآن أن:

$$(SA_{(m)})^T (S^{-1}P_{(m)}) + (P_{(m)}S^{-1})(SA_{(m)}) = A_{(m)}^T P_{(m)} + P_{(m)}A_{(m)} = Q_{(m)}$$

بالتالي فإن القيم الذاتية لـ  $SA_{(m)}$  تكون في نصف المستوي اليساري المفتوح أو على المحور التخيلي، أيضاً من الخواص الطيفية لـ  $A_{(m)}$  نستطيع استنتاج أن الصفر يكون قيمة ذاتية لـ  $SA_{(m)}$  تكرارها الجبري وتكرارها الهندسي  $m$ .

لنبين أن المصفوفة  $A_{(m)}$  مستقرة من النوع  $H(\alpha, m)$ ، يجب أن نثبت أنه لا توجد أي قيمة ذاتية أخرى من  $SA_{(m)}$  باستثناء  $m$  قيمة ذاتية صفرية تكون على المحور التخيلي، بنقض الفرض أن  $\lambda = jw$  ( $w \neq 0$ ) تكون واحدة من القيم الذاتية المقابلة للمتجه الذاتي  $y$ ، عندئذ:

$$\begin{aligned} 0 &= y^* \{ (SA_{(m)})^* (S^{-1}P_{(m)}) + (P_{(m)}S^{-1})(SA_{(m)}) - Q_{(m)} \} y \\ &= -jwy^* (S^{-1}P_{(m)})y + jwy^* (P_{(m)}S^{-1})y - y^* Q_{(m)}y \\ &= -y^* Q_{(m)}y. \end{aligned}$$

يتحقق أن  $y \in \ker(Q_{(m)})$  وأيضاً  $w = 0$ .

**المبرهنة (2-15):**

إن البيان الموجه  $G_A$  يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان إذا وفقط إذا كانت المصفوفة

$$A_{(m)} \text{ مستقرة من النوع } H(\alpha, m).$$

**الإثبات:**

لزوم الشرط: إذا كان البيان الموجه  $G_A$  يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان، فعندئذ

بحسب المبرهنة (2-1) فهو يملك مركبة مغلقاً قوياً واحداً فقط، وليكن  $G_1 = (V_1, E_1)$ .

إذا كان  $G_1 = G_A$  عندئذ يكون البيان الموجه  $G_A$  قوي الاتصال، وبحسب المبرهنة (2-14)

المصفوفة  $A_{(m)}$  تكون مستقرة من النوع  $H(\alpha, m)$ ، وإلا لتكن:

$$V_1 = \{1, 2, \dots, r\}$$

(بدون المساس بعمومية المسألة إذا لزم الأمر نعيد ترقيم العقد) حيث  $r < n$  نذكر أن المصفوفة

$A$  يمكن كتابتها بالشكل:

$$A = -sI + E$$

حيث  $s$  عدد اختياري و  $E$  ومصفوفة غير سالبة على التوالي، البيان الموجه  $G_A$  يملك مركبة قوية

مغلقة واحدة فقط، وكذلك يكون البيان الموجه  $G(E)$ ، بحسب المبرهنة (2-7) المصفوفة  $E$

تكون من الشكل:

$$E = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ B_1 & E_0 \end{pmatrix}$$

حيث  $E_1$  تكون مصفوفة من المرتبة  $r \times r$  و  $\rho(E_0) < s$ ، بشكل مشابه المصفوفة  $A$  تكون من

الشكل:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_1 & A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sI + E_1 & 0 \\ B_1 & -sI + E_0 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن البيان الموجه  $G_{A_1}$  يكون مشابهاً للبيان الموجه  $G_1$ ، لذلك يكون قوي الاتصال، بالتالي

يتحقق من المبرهنة (2-14) أن المصفوفة  $A_I$  تكون مستقرة من النوع  $H(\alpha_1, m)$ ، حيث:

$$\alpha_1 = \{\{1, \dots, m\}, \dots, \{(r-1)m+1, \dots, rm\}\}$$

من جهة أخرى نلاحظ أن  $A_0 = -sI + E_0$  وأن  $\rho(E_0) < s$  لذلك يتحقق من تعريف المصفوفة من النوع  $M$  غير منفردة أن المصفوفة  $-A_0$  مصفوفة من النوع  $M$  غير منفردة، بالتالي بحسب التمهيدية (2-7) توجد مصفوفة قطرية موجبة  $P$  بحيث تكون:

$$Q = A_0^T P + P A_0$$

معرفة سلبياً وبتطبيق جداء كرونكر بـ  $I_m$  لكل من طرفي المساواة أعلاه وباستخدام الخواص السابقة (a), (b), (c) ومن جداء كرونكر نحصل على:

$$Q_{(m)} = A_{0(m)}^T P_{(m)} + P_{(m)} A_{0(m)}$$

من الواضح أن  $P_{(m)}$  تكون مصفوفة معرفة إيجابياً سلمية من النوع  $\alpha$  والمصفوفة  $Q_m$  معرفة سلبياً.

لتكن:

$$\alpha_2 = \{ \{1, \dots, m\}, \dots, \{(n-r-1)m+1, \dots, (n-r)m\} \}$$

عندئذٍ من أجل أي  $S_2$  مصفوفة قطرية من النوع  $\alpha$  متناظرة معرفة إيجابياً يكون:

$$P_{(m)} S_2^{-1} = S_2^{-1} P_{(m)}$$

الذي يكون معرف إيجابياً، نستطيع بسهولة إثبات أن:

$$(S_2 A_{0(m)})^T (S_2^{-1} P_{(m)}) + (P_{(m)} S_2^{-1}) (S_2 A_{0(m)}) = Q_{(m)}$$

بالتالي جميع القيم الذاتية للمصفوفة  $S_2 A_{0(m)}$  تملك جزءاً حقيقياً سالباً وأيضاً  $A_{0(m)}$  تكون مستقرة

من النوع  $H(\alpha_2, 0)$ .

أخيراً، نلاحظ أنه من أجل أي مصفوفة  $S$  متناظرة قطرية من النوع  $\alpha$  معرفة إيجابياً نستطيع كتابتها بالشكل:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$$

أيضاً:

$$SA_{(m)} = \begin{pmatrix} S_1 A_{1(m)} & 0 \\ S_2 B_{1(m)} & S_2 A_{0(m)} \end{pmatrix}$$

بالتالي يتحقق من الإثبات أعلاه وتعريف الاستقرار  $H(\alpha, m)$  أن  $A_{(m)}$  مصفوفة مستقرة من النوع  $H(\alpha, m)$ .

( $\Rightarrow$ ) من جهة أخرى، إذا كانت المصفوفة  $A_{(m)}$  مستقرة من النوع  $H(\alpha, m)$ ، فعندئذٍ المصفوفة  $A_{(m)}$  تملك قيمة ذاتية صفرية للتعداد الجبري  $m$ ، بتطبيق الخاصة (d) من جداء كرونكر نستنتج أن المصفوفة  $A$  تملك قيمة ذاتية صفرية بسيطة، وبالاعتماد على المبرهنة (2-13) والمبرهنة (2-1) نستنتج أن البيان الموجه  $\mathcal{G}_A$  يملك عقدة يمكن الوصول إليها من أي مكان.

## الفصل الثالث: المنظومات الديناميكية الخطية المتزاوجة

### 3-1 مقدمة:

ندرس في هذا الفصل خصائص استقرار المنظومات الخطية المتزاوجة ذات الطوبولوجيا الديناميكية والثابتة، حيث يتم تمثيل هذه المنظومات من خلال منظومة خطية ذات زمن مستمر تكون فيها مصفوفة المنظومة مصفوفة مولدة. تتطلب خصائص الاستقرار والجذب المتعلقة بالتوازن تقارب جميع مركبات الحالة من قيمة مشتركة.

تنشأ هذه الفئة من المشاكل بالحالة الطبيعية في سياق مسائل صناعة القرارات الموزعة ومسائل التنسيق والبحث عن التوافق في المنظومات متعددة الأعضاء، وفي مسائل المزامنة.

تلعب دراسة التفاعل بين المنظومات الجزئية (الأعضاء) دوراً مهماً في فهم هذه المسائل، وقد تم التنويه عن العمل الأول بهذا الاتجاه في المرجع [9]، و ذلك من خلال اعتبار مجموعة من الأفراد يعملون معاً كفريق أو لجنة، حيث إن كل فرد في المجموعة له توزيعاً احتمالياً خاصاً لقد تم تقديم نموذج لمنظومة خطية متزاوجة ذات زمن متقطع في هذا المرجع يصف كيفية توصيل المجموعة إلى اتفاق على التوزيع الاحتمالي الشخصي المشترك للوسطاء من خلال تجميع آراء الأفراد.

في العديد من التطبيقات التي تنطوي على منظومات متعددة الأعضاء/المركبات، يمكن أن تتغير طوبولوجيا التفاعل بين الأعضاء بشكل ديناميكي. فعلى سبيل المثال قد يتم إسقاط الروابط وتشكيلها بسبب الاضطرابات الناتجة/ أو قد تخضع لقيود مدى رؤية المستشعر.

قدم المؤلفون في المرجع [10] خلال دراستهم مجموعة متنوعة من نتائج المحاكاة المثيرة للاهتمام التي توضح أن هذه القاعدة يمكن أن تجعل الأعضاء تتحرك في النهاية بالاتجاه ذاته، وذلك من خلال دراسة نظرية لهذا السلوك المرصود. درس المؤلفون نموذج الوقت المتقطع في إطار منظومة التحويل، حيث أن مصفوفة المنظومة تتحول بين أسرة محدودة من المصفوفات الاحتمالية. يتم تصميم بنية التفاعل لكل نموذج من خلال رسم بياني غير موجه. ولتحليل هذه النماذج، اعتمد المؤلفون على مبرهنة وولفويتز (wolfowitz)، التي تعتمد على خاصية التقارب للجداءات اللانهائية لنوع محدد من المصفوفات الاحتمالية، لإثبات أن جميع رؤوس الأعضاء تتلاقى في حالة ثابتة مشتركة بشرط أن يكون الاجتماع بياناً غير موجهاً متصلاً بالتفاعلات ثنائية الاتجاه. على عكس الإعداد الزمني المتقطع، تظهر الكثير من الأبحاث للمنظومات الخطية المتزاوجة ذات الزمن المستمر مع الطوبولوجيا الثابتة و/أو الديناميكية. في المراجع [12-13]، تم استخدام تقنية دالة ليابونوف الشائعة لإظهار أن البيانات الموجهة ذات الارتباط القوي والمتوازنة تلعب دوراً رئيسياً في مشكلة المعدل المتوسط لتزاوج المنظومات الخطية. وفي المرجعين [11,15]، تمت دراسة مشكلة توافق المعلومات بين أعضاء متعددين تخضع لروابط اتصالات ثابتة. يبحث المرجع [16] في مشكلة الاتفاق عبر شبكات المعلومات العشوائية. ويتناول المرجع [17] الحالة الحتمية المتغيرة للوقت وقد تم تقديم شرط كافٍ للاتفاق، حيث تم أخذ التأخير التعسفي بعين الاعتبار. كما يدرس المرجعان [18,19] مشكلة اتفاق مجموعة الأعضاء على السرعة والاتجاه وما إلى ذلك.

في هذا الفصل، تم إنشاء نموذج عام للمنظومات الخطية المتزاوجة ذات الزمن المستمر، ويشمل النماذج التي تمت دراستها في المراجع [12-15]، حيث تم تطوير تحليل كامل ومنهجي لخصائص الاستقرار في التوازن الفرعي.

مع وجود اختلافات فيما يتعلق ببنية التزاوج، سنقوم بتحليل بنية التزاوج إلى أربعة حالات تشمل بنية التزاوج الدورية، والبيان التفاعلي الأحادي الاتجاه مع الطوبولوجيا الثابتة، والبيان التفاعلي ثنائي الاتجاه مع الطوبولوجيا الديناميكية، والبيان التفاعلي الأحادي الاتجاه مع الطوبولوجيا الديناميكية. كما سنحاول في كل حالة الحصول على الشروط الضرورية والكافية للاستقرار والجذب المتعلقة بمنطقة التوازن، حيث نحاول إظهار حالات التقارب المتطورة وخطط التحديث في المراجع [12-15] كحالات خاصة للنتائج الأكثر عمومية التي سنحصل عليها.

لا يعتبر هذا العمل فقط تعميماً للأعمال ذات الزمن المستمر فحسب ولكنه يتعلق أيضاً بالزمن المنقطع. في الواقع، يرتبط نموذج الزمن المستمر الخاص بنا مع نموذج الزمن المنقطع الذي تمت دراسته في المرجع [10] إلى حدٍ ما. عند النظر إلى النموذج التقديري  $x(k+1) = e^{AT} x(k)$  لمنظومتنا ذات الزمن المستمر  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ، نجد أن النموذج التقديري موجود في أسرة من المنظومات ذات الزمن المنقطع الذي تمت دراسته في المرجع [10] في حالة البيان الموجه بشكل عام. مع ذلك، هناك فرق كبير بينهما في حال وجود إشارة تحويل. إن مسألة تقدير المنظومة ذات الزمن المستمر في أوقات التحويل تؤدي إلى توليد عدد لا نهائي من مصفوفات الانتقال التي تحكم تطور المسار، مع أنه يفترض في إعداد الزمن امتقطع أن تتحول مصفوفة المنظومة بين أسرة محدودة من المصفوفات.

على سبيل المثال، لنفترض أن مجموعة من الجنود منتشرين في أرض المعركة وأن الجو ضبابياً بحيث تكون الرؤية محدودة لأقل من ٢٠ متراً. سترتب على ذلك عدم إمكانية رؤية الجندي لأكثر من ثلاث زملاء له، و قد لا يتمكن من رؤيتهم في حال الحركة. يمكن في هذه الظروف أن نطرح التساؤل حول إمكانية تجمع الجنود في مكان واحد بشكلٍ صامت ؟



يمكن حل مثل هذه المسائل من خلال دراسة نموذج قياسي لمنظومات ديناميكية متزاوجة. سنعتبر خلال دراستنا أن المنظومة المركبة مؤلفة من منظومات جزئية (أعضاء) متزاوجة فيما بينها بحيث أن موضع أحد الأعضاء يؤثر في التطور الزمني للأعضاء الآخرين. وسنخصص دراستنا خلال هذا الفصل للمنظومات الديناميكية المتزاوجة التي يتم وصف مجموعة نقاط توازنها من خلال حالات التوازن الموافقة لأعضائها.

تعتبر مشاكل الاستقرار وإمكانية إبقاء المنظومات في حالة استقرار في وضعية توازن معينة من أبرز القضايا الرئيسية المتناولة. ولعل أهم هذه المشاكل هو شكل التفاعل فيما بينها، أي من يرتبط بمن. إن الهدف الأساسي هو تحديد كيفية تأثير شكل التفاعل على حالة الاستقرار وإمكانية إبقاء هذه المنظومات في حالة استقرار.

## 3-2 صياغة المسألة:

في كثير من الأحيان، يمكن تحويل النظم البيولوجية والفيزيائية والاجتماعية للمنظومات متعددة الأعضاء إلى مسائل تتعلق بالمصفوفات المولدة. وقد تمت دراسة هذا النوع المهم من المصفوفات في العمليات العشوائية، لا سيما سلاسل ماركوف لإعدادات ذات زمن مستمر، لكونها ذات أهمية جلية في مجال المنظومات الخطية، وخاصة في عمليات التنسيق والتحكم في المنظومات متعددة الأعضاء.

لتكن لدينا المنظومة الديناميكية الموصوفة بجملة المعادلات الخطية الشعاعية التالية:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(p)(x_j - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

حيث  $x_i \in R^m$  تمثل حالة المنظومة الجزئية أو العضو رقم  $i$ . ولنضع  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^{mn}$  التي تمثل حالة المنظومة الكلية.

إن مجموعة المواضع  $\{x \in R^{mn}; x_1 = \dots = x_n\}$  هي مجموعة توازن للمنظومة (3.1)، حيث إن مجموعة الوسطاء  $P$  تمثل اسرة من نماذج المزاوجة المختلفة

سنفرض دائماً إن  $a_{ij}(p) \geq 0$  وذلك من أجل كل  $i, j, p$ ، كما إن كون  $a_{ij}(p) > 0$  من أجل بعض القيم  $i, j, p$  يعني ديناميكياً أن  $x_i$  تتأثر بحالة  $x_j$ .

يمكن أن نكتب المنظومة الديناميكية بالشكل المصفوفي التالي:

$$\dot{x} = (A_p \otimes I_m)x \quad p \in P \quad (3.2)$$

حيث  $I_m$  مصفوفة واحدة من المرتبة  $m$ ، ومن أجل كل  $p \in P$  مدخلات المصفوفة  $A_p$  تكون معرفة كالتالي: المدخلات غير القطرية هي العناصر  $a_{ij}(p)$ ، بينما المدخلات القطرية هي

$$-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}(p)$$

نلاحظ أن جميع المصفوفات  $A_p$  حيث  $p \in P$  هي مصفوفات مولدة.

لتعريف المنظومة الخطية ذات الاتصال الداخلي المتحولة والمولدة بنموذج الأسرة (3.2) نحتاج إلى فكرة إشارة التحويل، وهي دالة ثابتة على مجالات متقطعة  $\sigma: R \rightarrow P$  بحيث إن هذه الدالة تملك عدداً محدداً من حالات التوقف في أوقات التحويل عند كل فترة زمنية محددة، وتأخذ قيمة ثابتة عند كل فترة بين زمنين لتحويلين متعاقبين. الدور  $\sigma$  هو لتحديد الدليل  $\sigma(t) \in P$  لنموذج فعال في كل لحظة زمنية  $t$ .

في المنظومة (3.2) قد تكون إشارة التحويل  $\sigma(t)$  محددة مسبقاً، ولكن في بعض التطبيقات الأخرى قد تكون غير محددة، ويتم تحديدها فقط عندما نأتي إلى المثال المحدد، وبالتالي يتم وصف المنظومة الخطية ذات الاتصال الداخلي المتحولة بالمعادلة:

$$\dot{x}(t) = (A_{\sigma(t)} \otimes I_m)x(t) \quad (3.3)$$

**تعريف (3-1):**

البيان الموجه التفاعلي  $G_p = (V, E_p)$  يتكون من:

- مجموعة محدودة  $V$  من العقد، العقدة  $i$  تمثل العضو (الوكيل)  $i$ .
- مجموعة الأوتار  $E_p$  تمثل الروابط بين الأعضاء، يشير الوتر من العقدة  $i$  إلى العقدة  $j$  إلى أن العضو  $j$  هو مجاور العضو  $i$ ، أي أن  $a_{ij}(p) \neq 0$ . نرسم لمجموعة مجاورات العضو  $i$  بالرمز  $N_i(p)$ .

**تعريف (3-2):**

البيان الموجه التفاعلي الديناميكي  $G_{\sigma(t)}$  هو البيان الذي يتكون من مجموعة العقد  $V$  ومجموعة الأوتار  $E_{\sigma(t)}$  حيث  $\sigma(t)$  إشارة التحويل.

نلاحظ أن البيان الموجه التفاعلي  $G_p$  هو البيان المعاكس للبيان الموجه  $G_{A_p}$  المقترن بالمصفوفة المولدة  $A_p$ .

المثال التالي يجمع بين العديد من المفاهيم المقدمة حتى الآن.

### مثال (3-1):

باعتبار لدينا منظومة ذات اتصال داخلي مكونة من ثلاثة أعضاء مرقمين بالشكل 1,2,3،

وبفرض أن هناك ثلاث حالات ممكنة للتزواج، أي إن  $P = \{1, 2, 3\}$ .

$$\begin{array}{ccc} P=1: & P=2: & P=3: \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 3(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = 2(x_3 - x_2) + (x_1 - x_2) \\ \dot{x}_3 = 4(x_1 - x_3) \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = 3(x_3 - x_1) \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = 4(x_2 - x_3) \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_3 - x_1 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_3 \end{array} \right\} \end{array}$$

حيث  $x_1, x_2, x_3 \in R^2$ ، إن الشكل المصفوفي المقابل للحالة الأولى  $P=1$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c|c} -3I_2 & 3I_2 & 0 \\ \hline I_2 & -3I_2 & 2I_2 \\ \hline 4I_2 & 0 & -4I_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \otimes I_2 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

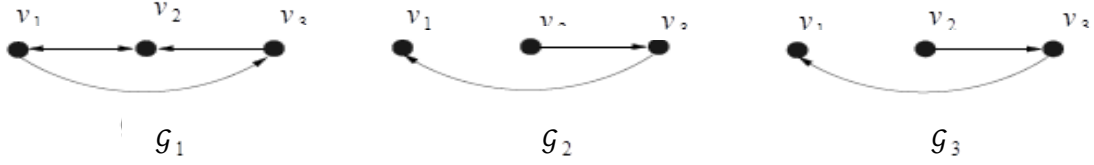
من أجل الحالة الثانية  $P=2$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c|c} -3I_2 & 0 & 3I_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4I_2 & -4I_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \otimes I_2 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

من أجل الحالة الثالثة  $P=3$ :

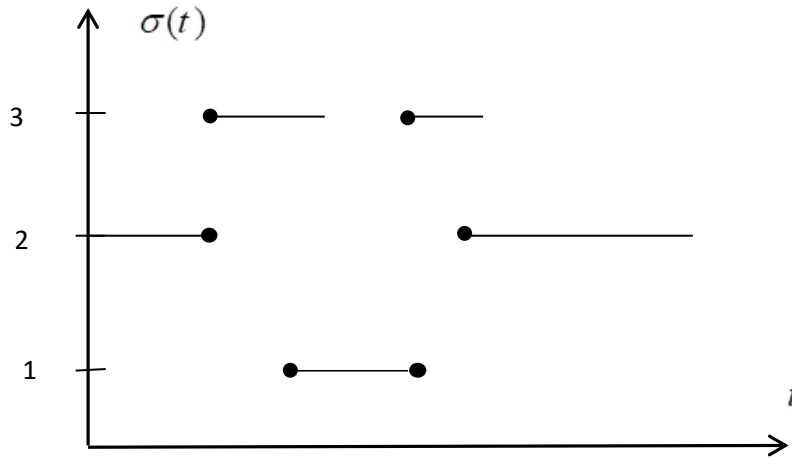
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c|c} -I_2 & 0 & I_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_2 & -I_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes I_2 \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

البيانات الموجهة التفاعلية  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$  موضحة في الشكل (23)



الشكل (23): البيانات الموجهة التفاعلية

وبفرض أننا أعطينا إشارة التحويل  $\sigma(t)$  الموضحة بالشكل (24)، هذا يؤدي إلى ظهور منظومة خطية ذات اتصال داخلي متحركة من الشكل (3.3) وبيان موجه تفاعلي ديناميكي مقترن  $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$ .



الشكل (24): إشارة التحويل

بعد تقديم نموذج المنظومة ذات الاتصال الداخلي المتحركة والبيان الموجه التفاعلي الديناميكي للمنظومات الخطية المتزاوجة، سنقوم الآن بتوضيح المسألة لنعرف الفضاء الجزئي  $\Omega$  بالشكل:

$$\Omega = \{x \in R^{mn}; x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$$

بما أنه من أجل كل  $p \in P$  المصفوفة  $A_p$  مصفوفة مولدة هذا يقتضي أنه من أجل أي إشارة تحويل  $\sigma(t)$  يتحقق:

$$(A_{\sigma(t)} \otimes I_m)x^* = 0$$

من أجل كل  $x^* \in \Omega$ .

بالتالي الفضاء الجزئي  $\Omega$  ليس فقط فضاءاً جزئياً ثابتاً ولكنه يمثل أيضاً مجموعة توازن للمنظومة (3.3).

في المنظومة ذات الاتصال الداخلي المتحولة سوف نسعى إلى تقريب المسار إلى المجموعة  $\Omega$ ، بالتالي فإن المشكلة الرئيسية هي إيجاد شروط على  $\sigma(t)$  تتضمن الاستقرار والجذب فيما يتعلق بالفضاء الجزئي  $\Omega$ .

سنرى لاحقاً أن المنظومة التي ندرسها ذات خاصية فريدة، أي إن جاذب المنظومة يتم تحديده بشكلٍ وحيد من خلال بنية التزاوج، وبالتالي يجب أن نسعى إلى حل مسألة الآلية التي يؤدي فيها البيان الموجه التفاعلي الديناميكي  $G_{\sigma(t)}$  دوراً في الاستقرار التقاربي للمنظومة.

ويمكن صياغة المسألة بالشكل التالي:

### المسألة (3-1):

ما هي الشروط التي يجب توفرها في البيان الموجه التفاعلي الديناميكي والذي بموجبه تكون المنظومة ذات الاتصال الداخلي المتحولة (3.3) مستقرة بشكل منتظم و/ أو جاذبة بشكل منتظم بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$ ؟

عندما تكون إشارة التحويل  $\sigma(t)$  ثابتة، أي إن  $\sigma(t) = p$  من أجل كل  $p \in P$  حينها تكون المنظومة المتحولة ثابتة الزمن، ونقول إنها مع طوبولوجيا ثابتة، وفي الحالة المعاكسة نقول إنها مع طوبولوجيا ديناميكية.

في هذه الحالة ليست هناك حاجة لوضع دليل للمصفوفة  $A$ ، المنظومة سوف تكتب بالشكل:

$$\dot{x} = (A \otimes I_m)x \quad (3.4)$$

نلاحظ أن البيان الموجه التفاعلي الديناميكي  $G$  في هذه الحالة سوف ينقلنا إلى المسألة التالية:

**المسألة (3-2):**

ما الشروط التي يجب توفرها في البيان الموجه التفاعلي  $G$  والذي تكون بموجبه المنظومة ذات

الاتصال الداخلي (3.4) مستقرة و/ أو جاذبة بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$ ؟

سوف نقوم بمناقشة هاتين المسألتين لاحقاً في هذا الفصل.

### 3-3 المنظومات الخطية المتزاوجة ذات الطوبولوجيا الثابتة:

سيتم أولاً التركيز على حالة بنية التزاوج الدورية، وبعد ذلك سيتم تقديم نتائج معممة من أجل أي

نوع من الأتصال.

#### 3-3-1 بنية التزاوج الدورية (Cyclic Coupling Structure):

نقول عن منظومة مؤلفة من  $n$  عضو إنها تملك بنية تزاوج دورية إذا كانت من الشكل:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_3 - x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n - x_{n-1} \\ \dot{x}_n &= x_1 - x_n \end{aligned} \quad (3.5)$$

حيث  $x_i \in R^m$ .

لاحظ أن الحالة  $m > 1$  هي تعميم بسيط للحالة  $m = 1$ ، لذلك بدون المساس بعمومية المسألة،

سوف نفرض أن  $m = 1$ .

بالتالي يمكن كتابة المنظومة السابقة بالشكل المصفوفي التالي:

$$\dot{x} = Ax$$

حيث تملك المصفوفة  $A$  الشكل  $A = P - I$ ، كما أن المصفوفة  $p$  هي مصفوفة التبديل ونحصل عليها من المصفوفة الواحدة  $I$  بتبديل دوري لصفوف هذه المصفوفة، بحيث يصبح الصف الأول هو الصف الأخير.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**مبرهنة (3-1):**

إن المنظومة ذات الاتصال الداخلي (3.5) جاذبة في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$ ، ويكون:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \left( \frac{x_1^0 + x_2^0 + \dots + x_n^0}{n} \right) \mathbf{1}$$

**الإثبات:** إن كثير الحدود المميز للمصفوفة  $p$  هو  $s^n - 1$ ، بالتالي المصفوفة  $p$  تملك  $n$  قيمة ذاتية، وبالتالي فإن القيم الذاتية للمصفوفة  $A$  تكون جذور العنصر المحايد بانزياح يساوي الواحد، هذا يعني أن المصفوفة  $A$  تملك قيمة ذاتية هي الصفر و  $n-1$  قيمة ذاتية في نصف المستوي الأيسر، ويمكن بسهولة ملاحظة أن:  $\ker(A) = \Omega$  بالتالي المنظومة (3.5) تكون جاذبة في كل مكان بالنسبة إلى  $\Omega$ ، وكذلك يكون:

$$(\dot{x}_1 + \dots + \dot{x}_n) / n = (\mathbf{1}^T Ax) / n = 0$$



لذلك فإن:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) =$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \left( \frac{x_1^0 + x_2^0 + \dots + x_n^0}{n} \right) \mathbf{1}$$

### 3-3-2 التعميم (حالة البيان الموجه التفاعلي أحادي الاتجاه):

من أجل  $n$  منظومة جزئية مع أي نوع من أنواع بنى التزاوج، أي المنظومات التي يمكن تمثيلها بمعادلات من الشكل:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sum_{j=1}^n a_{1j} (x_j - x_1) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \sum_{j=1}^n a_{nj} (x_j - x_n) \end{aligned} \quad (3.7)$$

حيث  $x_i \in R^m$  و  $a_{ij}(p) \geq 0$ .

سنفرض مرة أخرى أن  $m=1$ ، كما فعلنا في الحالة السابقة، بحيث يصبح الشكل المصفوفي للمنظومة:

$$\dot{x} = Ax \quad (3.8)$$

حيث إن  $A$  هي مصفوفة مولدة.

**مبرهنة (3-2):**

المنظومة (3.8) مستقرة من أجل أي حالة توازن  $\bar{x} \in \Omega$ .

**الإثبات:**

يمكن إثبات هذه المبرهنة بشكل مشابه تماماً لإثبات المبرهنة (3-5) التي سنأتي إلى ذكرها لاحقاً.

**مبرهنة (3-3):**

المنظومة (3.8) جاذبة في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$  إذا وفقط إذا كان البيان الموجه التفاعلي  $G$  شبه قوي الاتصال، و يكون:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \left( \frac{c^T x^0}{c^T \mathbf{1}} \right) \mathbf{1}$$

حيث  $c^T$  متجه ذاتي يساري للمصفوفة  $A$  يقابل القيمة الذاتية الصفرية.

**الإثبات:**

لزوم الشرط: إذا كان البيان الموجه  $G$  شبه قوي الاتصال، فعندئذٍ يتحقق من المبرهنة (2-1) والمبرهنة (2-13) أن المصفوفة  $A$  تملك قيمة ذاتية صفرية واحدة، وأن جميع القيم الذاتية الأخرى تملك جزءاً حقيقياً سالباً. ويمكن التحقق من أن المتجه الذاتي المقترن هو  $\mathbf{1}$  وأن  $\ker(A) = \Omega$ . هذا يعني أن المنظومة (3.8) هي منظومة جاذبة في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$ .

ليكن  $c^T$  متجهاً ذاتياً يسارياً للمصفوفة  $A$  يقابل القيمة الذاتية الصفرية. و لنُعرف متغيراً جديداً  $y = c^T x$ ، فيكون  $\dot{y} = c^T \dot{x} = c^T Ax = 0$  ويكون  $y(t) = y(0)$  من أجل كل  $t \geq 0$ . وبالتالي

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y(0) = c^T x^0$$

من جهة أخرى، لدينا:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c^T x(t) = c^T (a\mathbf{1}) = a(c^T \mathbf{1})$$

حيث إن  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a \cdot \mathbf{1}$  ولنوجد قيمة  $a$ ، لدينا:

$$a(c^T \mathbf{1}) = c^T x^0$$

فيكون:

$$a = \frac{c^T x^0}{c^T \mathbf{1}}$$

وبالتالي:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \left( \frac{c^T x^0}{c^T \mathbf{1}} \right) \mathbf{1}$$

كفاية الشرط: بفرض أن البيان الموجه التفاعلي  $G$  ليس شبه قوي الاتصال، عندئذٍ يتحقق من

المبرهنة (2-1) أن البيان الموجه  $G_A$  يملك عدد  $k \geq 2$  من المركبات القوية المغلقة.

حسب المبرهنة (2-13)، نجد أن المصفوفة  $A$  تملك قيمة ذاتية صفرية ذات تعداد جبري

وهندسي  $k \geq 2$ . و بالتالي نستطيع إيجاد حالة ابتدائية  $x^0$  في  $\ker(A)$ ، غير موجودة في

الفضاء الجزئي  $\Omega$ . و ذلك ممكن دائماً طالما أن بعد  $\ker(A)$  أكبر تماماً من الواحد.

وبالنسبة للحالة الابتدائية  $x^0$ ، سيبقى الحل في  $x^0$  من أجل كل  $t$ ، أي أن  $x(t) = x(0)$ .

وبالتالي فإن المنظومة (3.8) ليست جاذبة في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$ . وهذا

يناقض الفرض.

**تعميم:** بفرض  $m > 1$  المنظومة (3.7) تكتب بالشكل المصفوفي كالتالي:

$$\dot{x}(t) = (A \otimes I_m)x(t) \quad (3.9)$$

نتيجة (3-1):

المنظومة (3.9) جاذبة في كل مكان بالنسبة إلى  $\Omega$  إذا وفقط إذا كان البيان الموجه التفاعلي

$G$  شبه قوي الاتصال، ويتحقق أيضاً:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{1} \otimes \left( \frac{(c^T \otimes \mathbf{1})x^0}{c^T \mathbf{1}} \right)$$

حيث  $c^T$  متجه ذاتي يساري للمصفوفة  $A$  يقابل القيمة الذاتية الصفرية.

الإثبات:

باعتبار لدينا المصفوفة القطرية من المرتبة  $mn \times mn$  معطاة بالشكل:

$$I_{mn} = \begin{pmatrix} I_m & & \\ & \ddots & \\ & & I_m \end{pmatrix}$$

يتم بناء مصفوفة التبديل  $p$  باختيار الصفوف من  $I_{mn}$  بالترتيب التالي:

$$\begin{aligned} &1, 1+m, 1+2m, \dots \\ &2, 2+m, 2+2m, \dots \\ &\vdots \\ &m, 2m, 3m, \dots \end{aligned}$$

على سبيل المثال من أجل  $m=2$  و  $n=3$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بملاحظة أن المصفوفة  $P$  تقوم بالتبديل التالي:

$$P(A \otimes I_m)P^T = I_m \otimes A = \begin{pmatrix} A & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A \end{pmatrix}$$

الآن بتطبيق التحويل الإحداثي  $y = px$  سنحصل على المنظومة الجديدة:

$$\dot{y}(t) = (I_m \otimes A)y(t)$$

مع ملاحظة شكل  $I_m \otimes A$  يمكننا تطبيق المبرهنة (3-3) والحصول على:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = a \otimes \mathbf{1}$$

لبعض  $a \in R^m$  يكون:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P^T y(t) = P^T (a \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes a$$

بالتالي المنظومة (3.9) جاذبة في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$  إذا وفقط إذا كان البيان

الموجه التفاعلي  $G$  شبه قوي الاتصال وأيضاً يكون:

$$a = \frac{(c^T \otimes I_2)x^0}{c^T \mathbf{1}}$$

التي يمكن أن نحصل عليها بسهولة من المبرهنة (3-3).

#### 3-4 المنظومات الخطية المتزاوجة ذات الطوبولوجيا الديناميكية:

نحول تركيزنا الآن إلى المشكلة الأكثر صعوبة، المنظومات الخطية المتزاوجة ذات الطوبولوجيا

الديناميكية.

### 1-4-3 بنية التزاوج المتناظرة (حالة البيان التفاعلي ثنائي الاتجاه):

بفرض لدينا  $n$  عضو، بدون المساس بعمومية المسألة، لنفرض إن حالة كل عضو ذات بعد واحد، وذلك لأن الحالة ذات الأبعاد الأعلى يمكن أيضاً معالجتها بشكل مشابه كما في الفقرة السابقة. باعتبار لدينا مجموعة من المنظومات الديناميكية الممثلة بالشكل المصفوفي:

$$\dot{x} = A_p x, \quad p \in P$$

حيث  $x \in R^n$  تمثل الحالة الكلية من أجل  $n$  عضو و  $A_p$  مصفوفات مولدة متناظرة.

تُعطى إشارة التحويل الثابتة على مجالات متقطعة  $\sigma: R \rightarrow P$  منظومة التحويل التالية:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) \quad (3.10)$$

نحن لا نتعامل مع التحويل كسرعة، لذلك سوف نفرض أن جميع إشارات التحويل منتظمة بشكل كافٍ.

لتكن  $S_{\text{dwell}}(\tau_D)$  تشير إلى مجموعة من إشارات التحويل المرتبطة بزمَن التقطيع  $\tau_D > 0$ ، أي أن زمن التحويل يختلف باختلاف فترات التقطيع  $\tau_D$ ، الآن، يجب أن نوضح أنه في حالة وجود شروط بيانية محققة تكون المنظومة المتحولة أعلاه جاذبة في كل مكان بشكل منتظم بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$ .

### مبرهنة (3-4):

بفرض أن  $\sigma(t) \in S_{\text{dwell}}(\tau_D)$  عندئذٍ منظومة التحويل (3.10) تكون جاذبة بشكل منتظم في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$  إذا وفقط إذا كان البيان التفاعلي الديناميكي الموجه  $G_{\sigma(t)}$  شبه قوي الاتصال منتظم، ويتحقق أيضاً:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \left( \frac{x_1^0 + \dots + x_n^1}{n} \right) \mathbf{1}$$

لإثبات هذه المبرهنة نحتاج التمهيدية التالية.

### التمهيدية (3-1):

بفرض أن  $A \in R^{n \times n}$  مصفوفة حقيقية متناظرة تملك قيم ذاتية  $\lambda_i$  تحقق:

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_k < \lambda_{k-1} = \dots = \lambda_1 = 0$$

ولتكن  $X_0$  ترمز للفضاء الذاتي الصفري، ولتكن  $X_1$  ترمز للمتعمد للمعاد للفضاء الصفري

$X_0$  ، عندئذٍ من أجل كل  $x \in X_1$  يكون:

$$x^T A x \leq \lambda_k x^T x$$

**الإثبات:** لتكن  $c_1, c_2, \dots, c_n$  متجهات ذاتية للمصفوفة  $A$  تقابل القيم الذاتية  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  على الترتيب

عندئذٍ:

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1 c_1 c_1^T + \lambda_2 c_2 c_2^T + \dots + \lambda_n c_n c_n^T \\ &= \lambda_k c_k c_k^T + \dots + \lambda_n c_n c_n^T \end{aligned}$$

لذلك من أجل  $x \in X_1$  يكون:

$$\begin{aligned} x^T A x &= \lambda_k x^T c_k c_k^T x + \dots + \lambda_n x^T c_n c_n^T x \\ &\leq \lambda_k x^T (c_k c_k^T + \dots + c_n c_n^T) x \\ &= \lambda_k x^T (c_1 c_1^T + c_2 c_2^T + \dots + c_n c_n^T) x \\ &= \lambda_k x^T x \end{aligned}$$

### إثبات المبرهنة (3-4):

لزوم الشرط: ليكن  $X_0 = \text{span}\{\mathbf{1}\}$ ، وليكن  $X_1$  يمثل المتمم المعامد للفضاء الصفري  $X_0$ ، بما أنه من أجل كل  $p \in P$  المصفوفة  $A_p$  هي مصفوفة مولدة ومتناظرة، بالتالي يتحقق أن  $A_p \cdot \mathbf{1} = 0$  و  $\mathbf{1}^T A_p = 0$  من أجل كل  $p \in P$ .

المسار المنظومة (3.10) يكتب بالشكل:

$$X(t) = a(t)\mathbf{1} + w(t)$$

حيث  $a(t) \in R$  و  $w(t) \in X_1$  بعد ضرب المعادلة السابقة بـ  $\mathbf{1}^T$  نحصل على

$$\mathbf{1}^T X(t) = na(t)$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$\mathbf{1}^T \dot{x}(t) = \mathbf{1}^T A_{\sigma(t)} x(t) = 0$$

لذلك  $a(t)$  تكون عدداً حقيقياً ثابتاً. لتكن  $a(t) = a$  في اللحظة الابتدائية  $t = t_0$ ، نحصل على:

$$a = (x_1^0 + \dots + x_n^0) / n$$

الآن، لنبين أن  $w(t) \rightarrow 0$  بشكل منتظم على  $t_0$ .

بما أن  $w(t) = X(t) - a\mathbf{1}$  و  $A_{\sigma(t)} \cdot \mathbf{1} = 0$

$$\dot{w}(t) = \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) = A_{\sigma(t)} w(t) \quad (3.11)$$



نحن نعلم أنه من أجل أي  $w(t_0) \in X_1$ ، يكون الحل  $w(t) \in X_1$  من أجل كل  $t \geq t_0$ . أي أن المجموعة  $X_1$  هي مجموعة صامدة أمامياً للمنظومة (3.11). باختيار الدالة المعرفة إيجابياً

$$V(w) = \frac{1}{2} w^T w$$

وبأخذ المشتق من  $V(w(t))$  على كامل الحل من (3.11) نحصل على:

$$\dot{V}(w(t)) = w^T(t) A_{\sigma(t)} w(t)$$

من خلال المبرهنة (2.11)، نحن نعلم أن  $A_{\sigma(t)}$  شبه معرفة سلبياً، وبالتالي  $V(w(t))$  تكون دالة غير متزايدة بالنسبة إلى  $t$  وأيضاً تكون محدودة من الأدنى بالصفر، لذلك يكون لها نهاية عندما  $t \rightarrow \infty$ . ولنضع:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(w(t)) = \varepsilon$$

يبقى أن نوضح أن  $\varepsilon = 0$ . لنفرض جداً أن  $\varepsilon > 0$  هذا يقتضي أن يكون:

$$\|w(t)\|^2 \geq 2\varepsilon \quad (3.12)$$

من أجل كل  $t \geq t_0$ . إذا كان البيان الموجبه التفاعلي  $\mathcal{G}_{\sigma(t)}$  شبه قوي الاتصال منتظم، فعندئذٍ يوجد  $T > 0$  بحيث إنه من أجل كل  $t \geq 0$  اتحاد البيان الموجبه  $\mathcal{G}([t, t+T])$  يكون شبه قوي الاتصال.

بفرض أن  $\sigma(t)$  تقوم بالتحويل في أوقات متقطعة  $t_0, t_1, \dots$ ، نقوم بإنشاء متسلسلة جديدة  $\{T_k\}$  بالطريقة التالية:

$$T_0 = t_0$$

إذا كان  $T_1 = t_i$  عندئذٍ المجموعة  $t_0 + T \in [t_{i-1}, t_i]$

إذا كان  $T_2 = t_i$  عندئذٍ المجموعة  $t_1 + T \in [t_{i-1}, t_i]$

وهكذا .....

بهذا التركيب لكل  $k \geq 0$  لدينا  $T_{k+1} - T_k \geq T$  هذا يعني أن اتحاد البيان الموجه  $\mathcal{G}([T_k, T_{k+1}])$  يكون شبه قوي الاتصال.

لتكن البيانات الموجهة التفاعلية في الفترة الزمنية  $[T_k, T_{k+1}]$  مُعطاة بالشكل  $\mathcal{G}_{k_1}, \dots, \mathcal{G}_{k_v}$  ولتكن المصفوفات المقابلة لها معطاة بالشكل  $A_{k_1}, \dots, A_{k_v}$ ، بالتالي فإن اتحاد البيانات الموجهة:

$$\mathcal{G}_{k_1} \cup \dots \cup \mathcal{G}_{k_v} = \mathcal{G}([T_k, T_{k+1}])$$

لنفرض أنه من أجل أي فترة زمنية  $[T_k, T_{k+1}]$  و  $w(t) \neq 0$ ، عندئذٍ لا يوجد فضاء صفري من  $A_{\sigma(t)}$ .

لتبيان ذلك، نفرض جدلاً أن  $w(t) \neq 0$  وأن دائماً هناك فضاء صفري من  $A_{\sigma(t)}$  خلال الفترة الزمنية  $[T_k, T_{k+1}]$ ، أي إن  $A_{\sigma(t)} w(t) = 0$  بالتالي  $w(t) = w(T_k)$  من أجل كل  $t \in [T_k, T_{k+1}]$ .  
بالتالي:

$$A_{k_1} w(T_k) = 0, \dots, A_{k_v} w(T_k) = 0$$

هذا يعني أن:

$$(A_{k_1} + \dots + A_{k_v}) w(T_k) = 0 \quad (3.13)$$

نذكر هنا أن كل بيان موجه مقترن  $G_{A_{kj}}$  يكون بياناً موجهاً معاكساً للبيان الموجه  $G_{kj}$ ، لذلك فإن

البيان الموجه المقترن  $G_{(k_1+...+k_v)}$  هو بيان موجة جزئي مغلق قوي ووحيد.

بما أن البيان الموجه المعاكس شبه قوي الاتصال، عندئذٍ بحسب المبرهنة (2.13) نجد إن الفضاء الصفري من  $A_{k_1}+...+A_{k_v}$  هو  $\text{span}\{1\}$ . بتطبيق المبرهنة (3.13)، نجد أن

$w(T_k) \in X_0$ ، وهذا يناقض كون  $w(T_k) \in X_1$ . على الرغم من ذلك يوجد  $t_i \in [T_k, T_{k+1}]$  بحيث أن  $w(t_i)$  ليست في الفضاء الصفري للمصفوفة  $A_{\sigma(t)}$ ، نعلم إن  $A_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t_i)}$  لكل  $t \in [T_i, T_{i+1}]$  بحيث أن  $t_i$  وقت التحويل.

من خلال إنشاء المتسلسلة  $\{T_i\}$  نعلم أن  $t_{i+1}$  تكون أيضاً في  $[T_k, T_{k+1}]$ ، وتكون الفرضية  $\sigma(t) \in S_{\text{dwell}}(\tau_D)$  تحقق أن:

$$[t_i, t_i + \tau_D] \subset [t_i, t_{i+1}] \subset [T_k, T_{k+1}]$$

هنا نقول إن  $\sigma(t_i) = K_j$  من أجل بعض  $K_j \in P$ ، بالتالي بتطبيق التمهيدية (3.1) ينتج أنه خلال الفترة  $[t_i, t_i + \tau_D]$  يكون:

$$\dot{V}(w(t)) = w^T(t) A_{\sigma(t)} w(t) = w^T(t) A_{kj} w(t) \leq \bar{\lambda}_{kj} \|w(t)\|^2$$

حيث  $\bar{\lambda}_{kj} \leq 0$  أكبر قيمة ذاتية غير صفرية من  $A_{kj}$  تحقق (2.12) نشير هنا إلى أن:

$$\dot{V}(w(t)) \leq 2\varepsilon \bar{\lambda}_{kj}$$

بالتالي فإن:

$$V(w(T_{k+1})) - V(w(T_k)) = \int_{T_k}^{T_{k+1}} \dot{V}(w(t)) dt \leq \int_{T_i}^{T_i + \tau_D} \dot{V}(w(t)) dt \leq 2\tau_D \varepsilon \bar{\lambda}_{kj}$$

لتكن  $\bar{\lambda}$  أكبر قيمة ذاتية غير صفرية من  $A_p$  و  $p \in P$ ، عندئذٍ:

$$V(w(T_k)) \leq V(w(T_0)) + 2k\tau_D \varepsilon \bar{\lambda}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(w(T_k)) = -\infty$$

وهذا يناقض كون  $V(w(T_k))$  غير سالب. بالتالي:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = a\mathbf{1}$$

ونلاحظ أن معدل التقارب لا يعتمد على الزمن الأولي  $t_0$ ، ولكنه يعتمد على  $\bar{\lambda}$ ، وبالتالي المنظومة المتحولة (3.10) تكون جاذبة بشكل منتظم في كل مكان بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$ .

كفاية الشرط: الإثبات مشابه لإثبات المبرهنة (3.5).

### 3-4-2 تعميم (البيان التفاعلي أحادي الاتجاه):

في الفقرة السابقة ناقشنا الحالة التي تكون فيها جميع مصفوفات المنظومة متناظرة. سنقوم الآن بتعميم هذه الحالة بدون هذا الفرض.

بفرض لدينا أسرة من المنظومات الديناميكية الممثلة بالشكل المصفوفي:

$$\dot{x} = A_p x \quad ; p \in P$$

حيث  $x \in R^n$  تمثل الحالة الكلية من أجل  $n$  عضو، و  $p$  مجموعة منتهية، والمصفوفات  $A_p$  ليست متناظرة بالضرورة، إلا أنها مصفوفات مولدة.

من أجل إشارة التحويل  $\sigma: R \rightarrow P$  المنظومة المتحولة تكون معطاة بالشكل:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) \quad (3.14)$$

نلاحظ في نتيجة الاستقرار التالية أنه لا توجد شروط على البيان الموجه

مبرهنة (3-5):

منظومة التحويل (3.14) مستقرة بشكل منتظم بالنسبة لكل موضع توازن  $\bar{x} \in \Omega$ .

الإثبات:

بفرض أن إشارة التحويل  $\sigma(t)$  تقوم بالتحويل التالي  $t_0, t_1, \dots$  ، نلاحظ أنه من أجل كل

$$A_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t_i)} \text{ ، } t \in [t_i, t_{i+1}]$$

بفرض أن مصفوفة الانتقال مُعطاة بالشكل:

$$\phi(t, t_i) = \exp(A_{\sigma(t_i)}(t - t_i))$$

من أجل كل  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ .

بالتالي يمكن التعبير عن الحل بالشكل:

$$x(t) = \phi(t, t_i) \phi(t_i, t_{i-1}) \dots \phi(t_1, t_0) x^0 \quad (3.15)$$

من أجل كل  $p \in P$  المصفوفة  $A_p$  هي مصفوفة مولدة، وبحسب المبرهنة (2.10) فإن جميع

مصفوفات الانتقال هي مصفوفات احتمالية، وكذلك هو الجداء. بالتالي بحسب المبرهنة

(2.15)، يتحقق أنه من أجل كل  $t \geq t_0$  ومن أجل كل  $i = 1, \dots, n$  ، إن  $x_i(t)$  يكون تركيباً

محدباً لـ  $x_1^0, \dots, x_n^0$  . وكذلك يكون في هيكل محدب (convex hull)  $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ .

إضافةً لذلك نلاحظ أن أي موضع توازن  $\bar{x} \in \Omega$  يكون معطى بالشكل  $\bar{x} = a.1$  . لتكن

$\varepsilon > 0$  وباختيار  $\delta = \varepsilon$  من أجل أي  $t_0$  يكون:

$$\|x^0 - \bar{x}\|_{\infty} \leq \delta \Leftrightarrow (\forall i) \|x_i^0 - a\|_{\infty} \leq \delta$$

من الواضح أنه من أجل كل  $x^0$  يتحقق:

$$\|x^0 - \bar{x}\|_{\infty} \leq \delta$$

$$co\{x_1^0, \dots, x_n^0\} \subset \{x \in R^n, \forall i \|x_i^0 - a\|_{\infty} \leq \delta\}$$

من جهة أخرى، نحن نعلم أنه من أجل كل  $t \geq t_0$  يكون:

$$co\{x_1(t), \dots, x_n(t)\} \subseteq co\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$$

بالتالي فإن:

$$\|x(t) - \bar{x}\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

أي إن منظومة التحويل (3.14) مستقرة بشكل منتظم بالنسبة لكل موضع توازن  $\bar{x} \in \Omega$ . الشروط  
البيانية التي تضمن الجاذبية المنتظمة في كل مكان هي نفسها بالنسبة للحالات المماثلة مع ذلك  
لا يمكننا التنبؤ بالحالة المشتركة لـ  $n$  عضو والتي سيتقارب فيها الأعضاء في النهاية بشكل  
متناظر، وهذا لا يعتمد على الحالة الابتدائية، ولكنه يعتمد على إشارة التحويل.

**مبرهنة (3-6):**

بفرض أن  $\sigma(t) \in S_{dwell}(\tau_D)$ ، منظومة التحويل (3.14) جاذبة في كل مكان بشكل منتظم  
بالنسبة للفضاء الجزئي  $\Omega$  إذا وفقط إذا كان البيان الموجه التفاعلي الديناميكي  $G_{\sigma(t)}$  شبه قوي  
الاتصال منتظم. [20]

### 3-5 أمثلة ومناقشات:

من أجل المنظومة الخطية المتحولة (3.3)، نفرض أن مصفوفات المنظومة  $A_p$  بحيث  $p \in P$  معطاة وثابتة، عندئذٍ سوف يكون اعتماد المنظومة الكلي على إشارة التحويل، وقد تنتج إشارات التحويل المختلفة سلوكيات مختلفة تماماً للمنظومة. بشكل عام، فإن إشارة التحويل هي دالة ثابتة على مجالات متقطعة للزمن والحالة / الإخراج، وربما بعض الإشارات الخارجية. في هذا القسم سنلقي أولاً نظرة فاحصة على التغييرات الممكنة لإشارات التحويل، ومن ثم سنقدم تصنيفاً لأنواع مختلفة من إشارات التحويل. أخيراً، نناقش تطبيقاً محتملاً للنتائج الرئيسية في دراسة خواص الاستقرار للمنظومات الموجبة المتحولة.

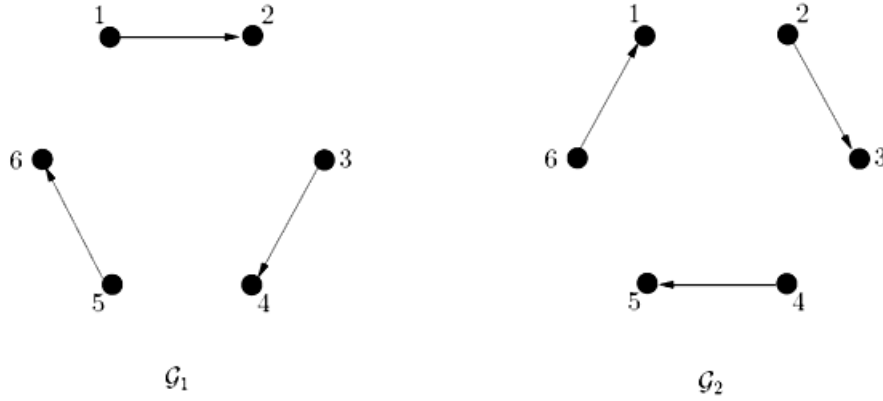
#### 3-5-1 التحويل المرتبط بالزمن (Time Dependent Switching):

بفرض لدينا مجموعة مكونة من ست مركبات ترغب بالاتفاق على كميات معينة من الاهتمام، وبفرض أن السرعة  $x_i$ ، وبفرض أنه لا يسمح إلا بالتواصل من نقطة إلى نقطة، بمعنى آخر يسمح لكل مركبة في أي وقت إما بإرسال البيانات أو باستلام البيانات من الأخرى، لذلك يكون من المستحيل وجود روابط اتصال ثابتة بحيث يتم توصيل البيانات الموجهة المقابلة. من أجل التوصل إلى توافق في الآراء نقترح استراتيجية اتصال بديلة، التبديل يتم بشكل دوري بين وصلتي اتصال مبيتين في الشكل 24 حيث يكون اتجاه البيان الموجه هو اتجاه نقل البيانات، وليكن بروتوكول الاتفاق معطى بالشكل:

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in N_i(t)} (x_j - x_i)$$

حيث  $N_i(t)$  مجموعة جوارات المركبة  $i$  التي تستقبل البيانات في الوقت  $t$ ، ضمن هذا الإعداد  $P = \{1, 2\}$  مصفوفات المنظومة المقابلة  $A_1, A_2$  تكون مصفوفات مولدة، ولكنها ليست

متناظرة، لذلك فإن النموذج يكون  $\dot{x} = A_{\sigma(t)}x$



الشكل (24): بيانين موجهين تفاعليين يمثلان اثنين من روابط الاتصال.

حيث  $\sigma: R \rightarrow P$  هي إشارة تحويل. وهذا مثال على المنظومة (3.14) التي درسناها في الفقرة 3.4.2، ونلاحظ أنه بالنسبة لاستراتيجية الاتصال البسيطة هذه فإن البيان الموجه التفاعلي يكون شبه قوي الاتصال منتظم، لذلك فإن الاتحاد يحدث مؤخرًا.

### 2-5-3 التحويل المرتبط بالحالة والزمن

#### :(Time and State Dependent Switching)

بفرض لدينا  $n$  نقطة تمثل روبوتات تتحرك في المستوى، ولكل منها نموذج حركي بسيط

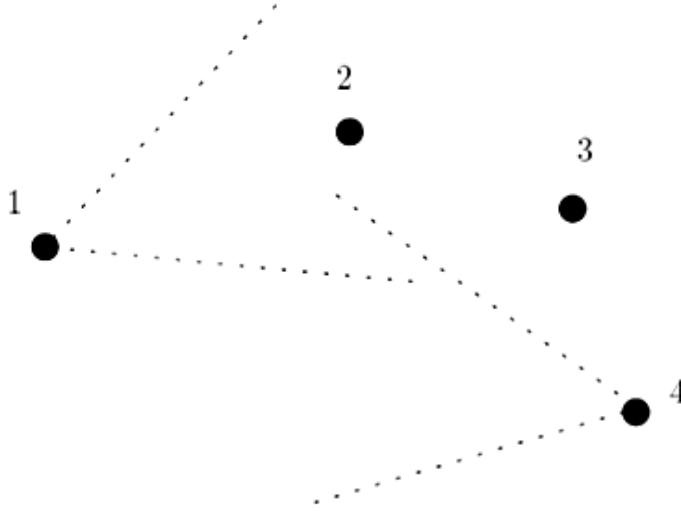
$$\dot{x}_i = u_i \quad (3.16)$$

حيث  $x_i \in R^2$  تمثل حالة التوقف،  $u_i \in R^2$  يمثل مدخل تحكم السرعة، هذا النموذج يوصف بما يسمى الروبوتات المتحركة بكافة الاتجاهات. ويمكن العثور على بنية الروبوتات المتحركة بكافة الاتجاهات في المرجع [17]. كل روبوت حر في التحرك بشكل متساوٍ بكافة الاتجاهات، وأيضاً يمكن أن يدور بشكل مستقل عن حركته الانتقالية.



بفرض أن كل روبوت يحمل كاميرا ذات مجال رؤية مخروطي، ويمكن التحكم بالكاميرا لتدور بشكل مستقل.

الشكل (25) يبين أربعة روبوتات وحقول تشبه المخروط لرؤية الروبوتات 1, 4 .



الشكل (25): مجالات رؤية تشبه المخروط.

في الوقت  $t$  لتكن  $N_i(t, x)$  تشير إلى مجموعة الجوارات الخاصة بهذه الأعضاء داخل الحقل المخروطي لرؤية الروبوت  $i$ . على سبيل المثال في الشكل 25.

$$N_4(t, x) = [1] \quad , \quad N_1(t, x) = \{2, 3\}$$

تُعد استراتيجية التحكم على مستوى المركبة التالية:

الروبوت  $i$  يرسم اتجاه النقطة الوسطى لجواره في الوقت  $t$ .

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} 0 & N_i(t, x) = \phi \\ \sum_{j \in N_i(t, x)} (x_j(t) - x_i(t)) & N_i(t, x) \neq \phi \end{cases}$$

تحدد العلاقة المجاورة البيان الموجه لـ  $n$  روبوت في الوقت  $t$ .

لتكن  $P$  تمثل مجموعة جميع البيانات الموجهة الممكنة، ولتكن  $\sigma$  إشارة تحويل ثابتة على مجالات متقطعة تأخذ القيم من  $P$ ، وتحددها بناءً على الحالة  $x$  ومجال رؤية كل الكاميرات في الوقت  $t$ . بالتالي يتم الحصول على المنظومة الكلية للروبوتات:

$$\dot{x} = (A_{\sigma(t,x)} \otimes I_2)x \quad (3.18)$$

حيث  $x \in R^{2n}$  هي الحالة الكلية. والمصفوفة  $A_{\sigma(t,x)}$  ذات المرتبة  $n \times n$  يتم الحصول عليها من (3.17) في الوقت  $t$ .

من أجل إشارة التحويل الثابتة  $\sigma(t,x)$ ، ومن أجل الحالة الابتدائية  $x^0$  المنظومة (3.18) تنتج المسار  $x(t, x^0)$ . وبالتالي يمكن كتابة إشارة التحويل بالشكل:

$$\sigma(t, x(t, x^0))$$

نلاحظ أن البيان الموجه التفاعلي الديناميكي  $G_{\sigma(t,x)}$  يتم تحديده حسب مجال عرض كل كاميرا، وذلك لأنه يمكن التحكم بكل كاميرا لتدور بشكل مستقل، يمكن تصميم استراتيجية للتحكم في مستوى الكاميرا بحيث تنشأ إشارة التحويل الثابتة  $\sigma(t,x)$ ، ومن أجل إشارة التحويل هذه يكون البيان الموجه التفاعلي الديناميكي المقترن  $G_{\sigma(t,x(t,x^0))}$  شبه قوي الاتصال منتظم لكل  $x^0 \in R^{2n}$  والتي تؤدي بعد ذلك إلى تجميع  $n$  روبوتات في الموقع ذاته بحسب المبرهنة (3.6).

على سبيل المثال، تقوم كل كاميرا بتدوير زاوية الرؤية في اتجاه عقارب الساعة بعد الاحتفاظ بثبات اتجاه عقارب الساعة، من الواضح أن إشارة التحويل تعتمد على الحالة والزمن، باستخدام الشرط الابتدائي  $x^0$ ، يتم تحديد إشارة التحويل بشكل وحيد بوساطة  $t$ . في هذه الحالة المحددة الشرط في المبرهنة (3.6) يكون لمعرفة ما إذا كانت استراتيجية التحكم على مستوى المركبة

واستراتيجية التحكم على مستوى الكاميرا تجعل مجموعة الروبوتات تتجمع في مكان مشترك. فيما يلي مثال بسيط لتوضيح هذه النقطة.

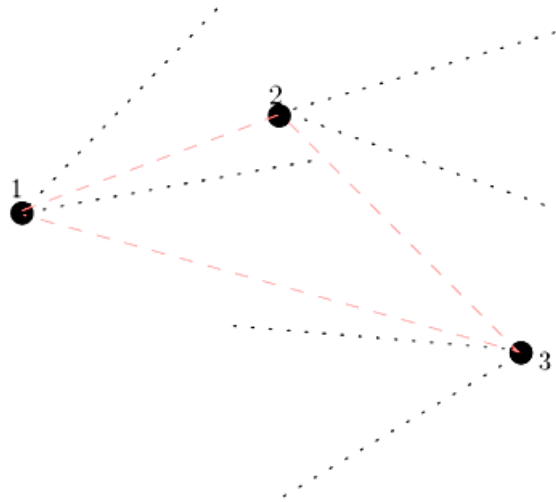
### مثال (3.2):

باعتبار لدينا ثلاثة روبوتات تمثل النقاط 1,2,3 في المستوى، كل كاميرا تملك مجال رؤية يشبه المخروط مع نصف قطر غير محدد وإطار العرض يمثل 30 درجة.

لنفرض إن استراتيجية التحكم على مستوى المركبة كما هي مُعطاة في الشكل (26). عندئذٍ تكون استراتيجية التحكم على مستوى الكاميرا كما يلي:

كل كاميرا تبقى ثابتة مدة خمس دقائق، ثم تدور ثلاثين درجة باتجاه دوران عقارب الساعة، لنفرض أن الدوران يمكن القيام به على الفور، نعيد هذا الإجراء مع مرور الوقت.

من أجل الشرط الابتدائي لثلاثة روبوتات موضحة في الشكل 26 يمكننا رؤية أن البيان الموجه التفاعلي غير متصل، وذلك بحسب المبرهنة 3.5. كما نعلم أنه باستخدام قانون التحكم (3.17)



الشكل(26): الشرط الأولي لثلاث روبوتات.

ستبقى ثلاثة روبوتات في المثلث الموضح في الشكل 26 وذلك من أجل كل  $t \geq 0$  ومن أجل أي بيانات موجهة تفاعلية.

من جهة أخرى مع استراتيجية التحكم على مستوي الكاميرا تقوم كل كاميرا بمسح الحقل بالكامل كل 60 دقيقة، من الواضح أنه يمكن لكل كاميرا أن تستشعر الاثنين الآخرين في كل فاصل زمني قدره 60 دقيقة، هذا يعني أن البيان الموجه الموحد التفاعلي  $G([t, t+60])$  متصل تماماً وهو بالطبع شبه قوي الاتصال، لذلك فإن البيان الموجه التفاعلي الديناميكي  $G_{\sigma(t,x(t,x^0))}$  يكون شبه قوي الاتصال منتظماً، وبالتالي يحدث الالتقاء على الرغم من أن البيان الموجه التفاعلي قد يكون متصلاً لبعض الوقت ومنفصلاً لبعض الوقت.

محاكاة لخمسة روبوتات تتجمع في مكان مشترك ضمن هذا الإعداد تكون معروضة بالشكل 27.

### 3-5-3 التحويل المعتمد على الحالة (State Dependent Switching):

لنفرض أن الروبوتات تحمل كاميرات بالاتجاهات كافة ذات المدى المتماثل  $r$ . الشكل 28 يظهر مجال رؤية القرص الممثل للروبوت 2 والبيان الموجه التفاعلي في ذلك الوقت، تم تثبيت الكاميرا على الروبوت 2، بالتالي لا يمكن السيطرة على مجال الرؤية بشكل مستقل بدلاً من ذلك يتم تحديدها فقط من قبل حالة التوقف  $x$ .

باعتبار لدينا استراتيجية التحكم ذاتها المعروضة في الشكل (3.17) في هذه الحالة تكون المنظومة الكلية من أجل  $n$  روبوت والتي لها الشكل:

$$\dot{x} = (A_{\sigma(x)} \otimes I_2)x$$

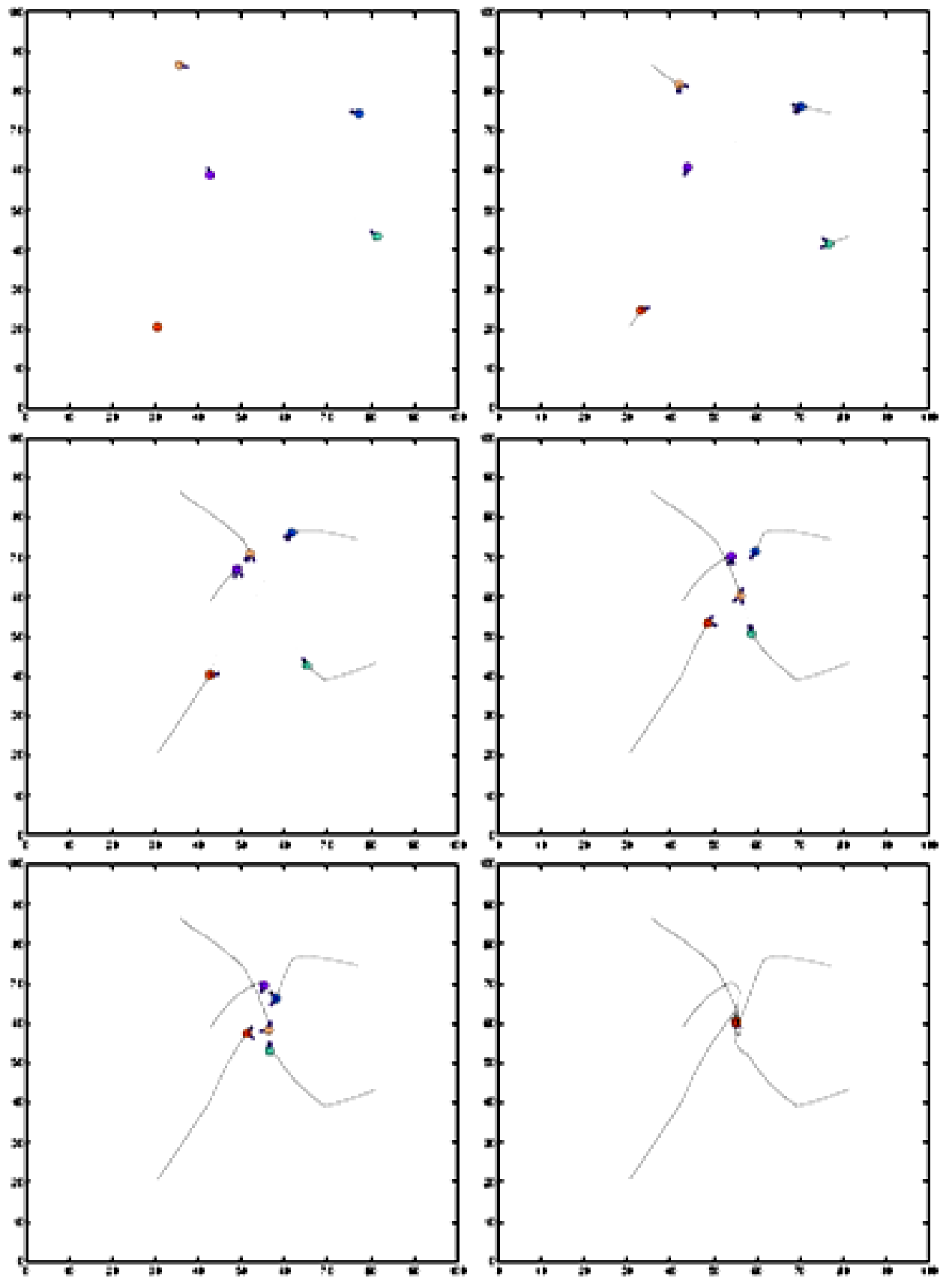
تملك الشكل ذاته تقريباً (3.18)، إلا أن إشارة التحويل تعتمد على الحالة بإعطاء الشرط الابتدائي  $x^0$  ينتج المسار  $x(t, x^0)$ ، بالتالي يمكن كتابة إشارة التحويل بالشكل:

$$\sigma(x(t, x^0))$$

ضمن هذه الحالة بالنسبة للشروط الابتدائية البيان الموجه التفاعلي الديناميكي يكون شبه قوي الاتصال منتظماً، وأما بالنسبة لبعض الشروط الابتدائية الأخرى فلا يكون شبه قوي الاتصال منتظماً. ويكون الشرط في المبرهنة (3.6) غير قابل للفحص. من خلال إجراء المحاكاة لعشرين عضواً بالإعدادات السابقة، يتم إنشاء المواقع الأولية لعشرين روبوتاً بشكل عشوائي، كما هو مبين في الشكل 29 لفهم إشارة التحويل المعتمدة على الحالة على أداء التجمع المقارب إلى التأثير العام لموقع واحد، نقوم بإجراء المحاكاة ثلاث مرات بالمواضع الابتدائية ذاتها كما هو مبين في الشكل 29. إلا أن نطاق الاستشعار يختلف على وجه التحديد فيما يتعلق بمدى المستشعر.

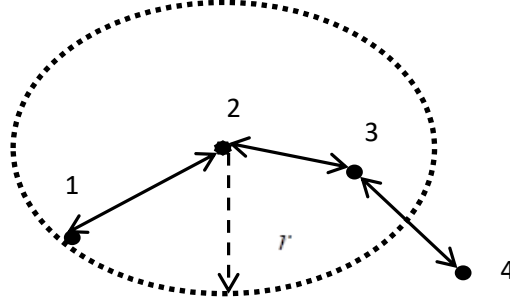
في حال اعتمادنا القيم  $r = 30, 25, 50$  لا يمكن تحديد مسار الروبوتات العشرين في الشكل 30, 31, 32 على التوالي.

تشير نتائج المحاكاة على أن نطاق الاستشعار  $r = 25$  يحقق أن البيان الموجه التفاعلي الديناميكي لا يكون شبه قوي الاتصال منتظم من أجل الشرط الابتدائي، وبالتالي لا تتقارب الروبوتات في مكان واحد، ولكن في موقعين للاستشعار.



الشكل (27): مسارات خمسة أعضاء والبيانات الموجهة التفاعلية

من أجل نطاق الاستشعار  $r=30,50$  البيان الموجه التفاعلي الديناميكي يكون شبه قوي الاتصال منتظماً بالنسبة للشرط الابتدائي والتقارب مع نتائج موقع واحد.



الشكل (28): مجال رؤية يشبه القرص

من خلال إعداد الكاميرا هذا من الواضح أنه إذا تمت تهيئة بعض الروبوتات بعيداً عن البقية، فإنها لا تأتي أبداً إلى مجالات رؤيتها، بالتالي فلن يحدث الالتقاء أبداً في الفكر الثاني يمكن للمرء أن يسأل عما إذا كان البيان الموجه التفاعلي متصلاً في البداية. لسوء الحظ، فإن استراتيجية التحكم الخطي هذه ليست جيدة بما فيه الكفاية لحل مشكلة الالتقاء على الرغم من أن البيان الموجه التفاعلي الأولي متصل، لأنه قد يؤدي إلى قطع اتصال البيان الموجه المتصل بالفعل.

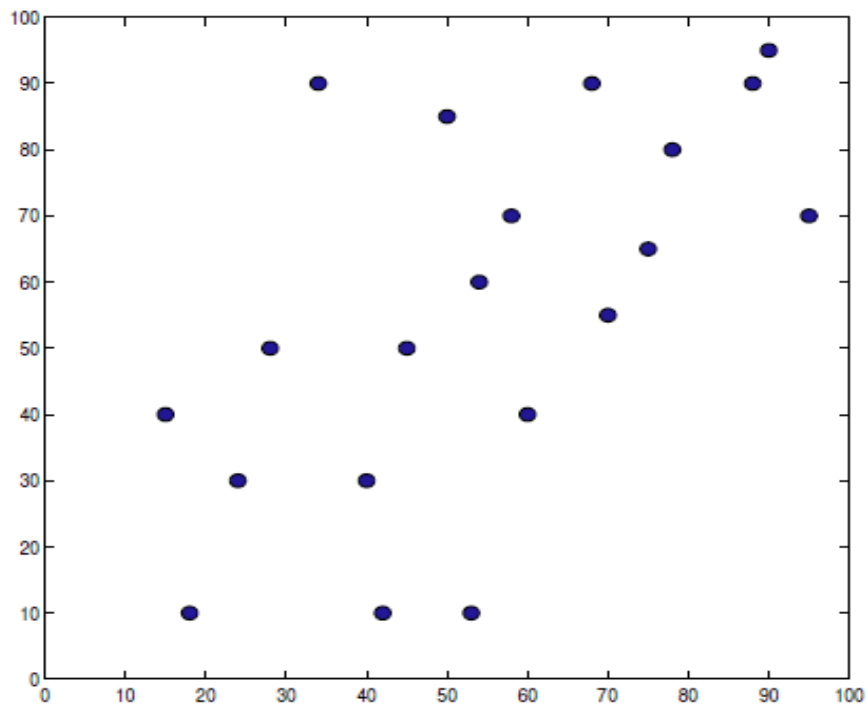
#### 3-5-4 المنظومات المتحولة الموجبة (Switched Positive Systems):

باعتبار لدينا مجموعة من مصفوفات المنظومة  $\{A_p, p \in P\}$  حيث تكون جميع المصفوفات هي مصفوفات ممتزلة مع مجموع صفوف أقل من الصفر أو تساويه. تعطي إشارة التحويل

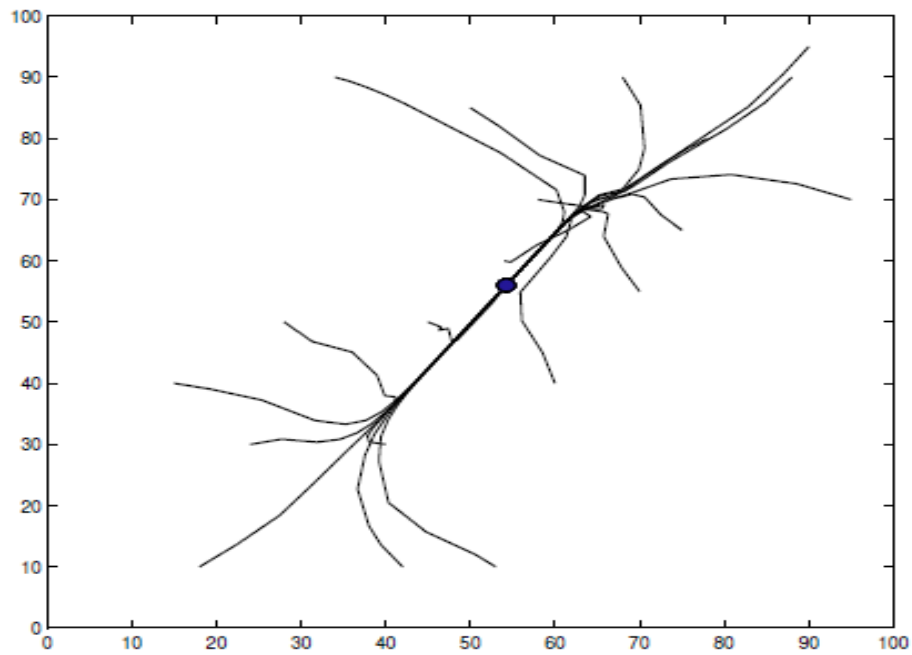
$\sigma: R \rightarrow p$  منظومة التحويل :

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) \quad (3.19)$$

تسمى هذه المنظومة بالمنظومة الموجبة.

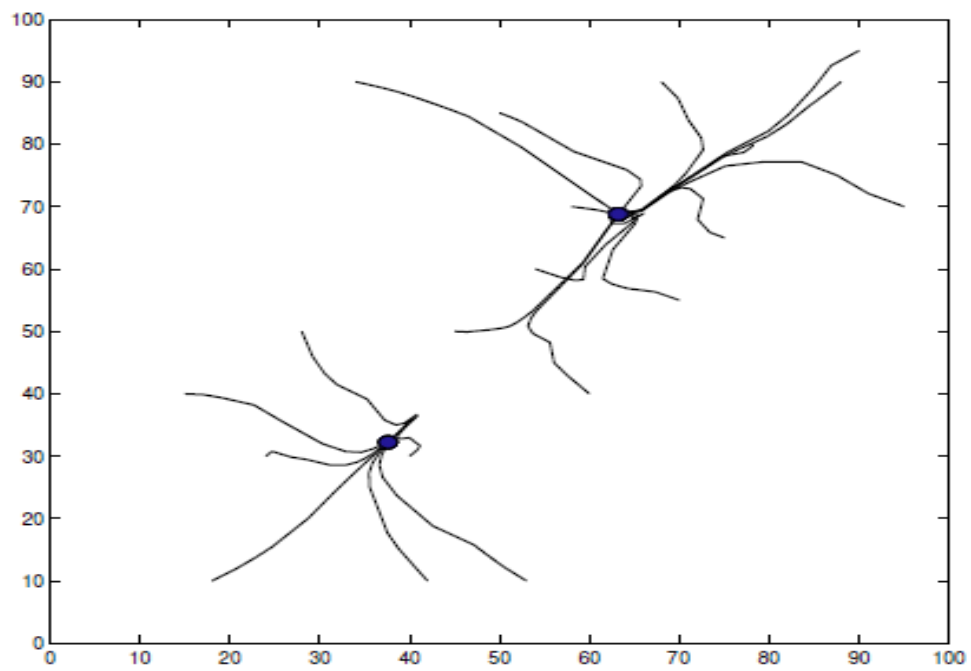


الشكل (29) : المواقع الابتدائية

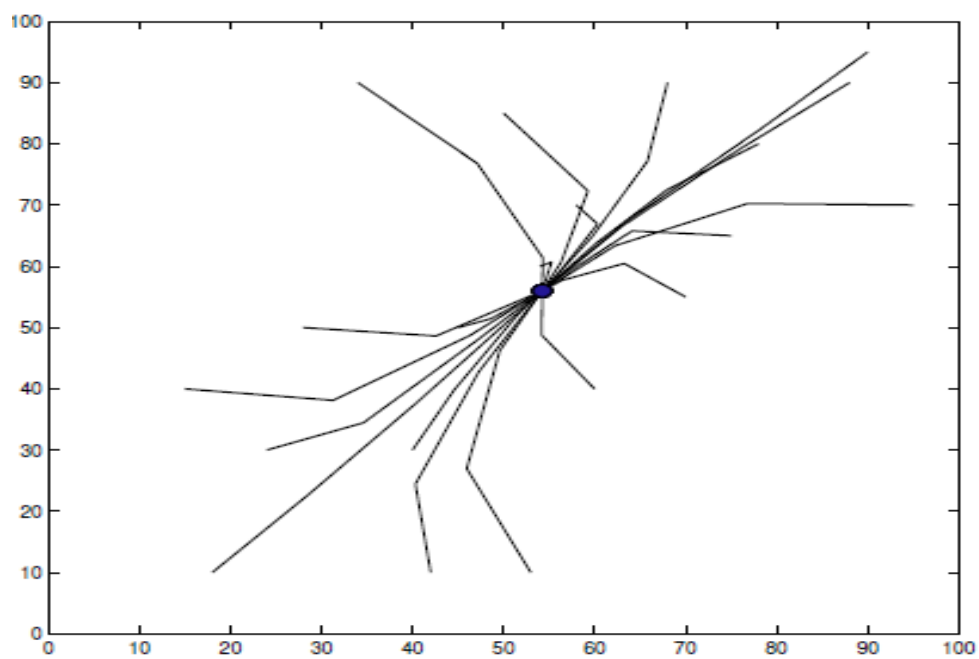


الشكل (30): نطاق الاستشعار 30





الشكل (31): نطاق الاستشعار 25



الشكل (32): نطاق الاستشعار 50

ولها تطبيقات واسعة في العلوم الاجتماعية وبعض المجالات الأخرى، نضيف عضواً افتراضياً

مع حالة  $x_0$  في البدء، ونحافظ عليها ثابتة، بمعنى آخر  $x_0^0 = 0$   $\dot{x}_0 = 0$ .

ونلاحظ أنه بالنسبة لكل  $p \in P$  يمكننا كتابة منظومة جديدة مكونة من  $n+1$  عضو كالتالي :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sum_{j=1}^n a_{ij}(p) & A_p \\ -\sum_{j=1}^n a_{nj}(p) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

حيث  $a_{ij}(p)$  تشير إلى المدخل ذو الدليلين  $(i, j)$  من  $A_p$ ، ولتكن  $\bar{A}_p$  تشير إلى مصفوفة المنظومة.

من المنظومة أعلاه، نلاحظ أن  $-\sum_{j=1}^n a_{ij}(p)$  غير سالبة. وبالتالي فإن  $\bar{A}_p$  هي مصفوفة مولدة

من أجل كل  $p \in P$ . علاوة على ذلك، نلاحظ أن مسار الحل  $x(t)$  من (3.19) هو الحل

الجزئي التالي  $x(t)$  للمنظومة المتحولة التالية:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \bar{A}_{\sigma(t)} \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

من أجل أي شرط ابتدائي  $x^0$  و  $x_0^0 = 0$  المنظومة المتحولة (3.19) تكون غير متناظرة

ومستقرة في كل مكان فيما يتعلق بنقطة البدء، إذا وفقط إذا كانت منظومة التحويل الجديدة

(3.21) جاذبة في كل مكان بالنسبة إلى  $\Omega$ .

لقد عرفنا البيان الموجه التفاعلي الديناميكي  $G_{\sigma(t)}$  من أجل  $n+1$  عضو بناءً على  $\bar{A}_{\sigma(t)}$ ، وبالتالي يمكننا معرفة ما إذا كانت المنظومة (3.19) التي تم تحويلها مستقرة في كل مكان بدون فيما يتعلق بنقطة البدء، وذلك عن طريق التحقق فيما إذا كان  $G_{\sigma(t)}$  شبه قوي الاتصال منتظماً.

### مثال (3.3):

لنأخذ  $P = \{1, 2\}$  وباعتبار المصفوفتين:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

تعطى إشارة التحويل الدورية المتقطعة كما هي مبينة في الشكل 34، وبالتالي تصبح منظومة التحويل من الشكل 3.19. ولنبين الآن فيما إذا كانت منظومة التحويل مستقرة أم لا.

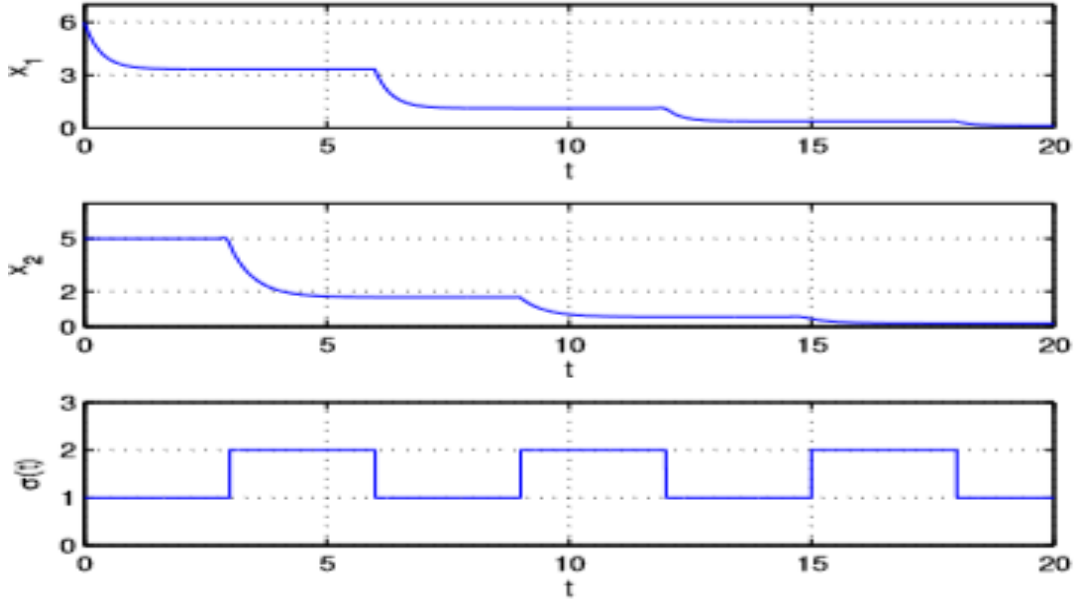
المنظومة تتكون من العضوين المسميين 1, 2 والتي تتوافق مع الحالات  $x_1, x_2$ . نضيف عضو ظاهري نسميه صفراً، فنحصل على منظومة أصلية من الشكل (3.20) و ذلك من أجل كل  $p \in P$ . وبالتالي، تصف البيانات الموجهة التفاعلية  $G_1, G_2$  البنية التفاعلية لثلاثة أعضاء من أجل  $p = 1, 2$ ، والتي يمكن بسهولة الحصول عليها كما هي مبينة في الشكل 33، حيث نلاحظ أن البيانين  $G_1, G_2$  ليسا شبه قويي الاتصال.



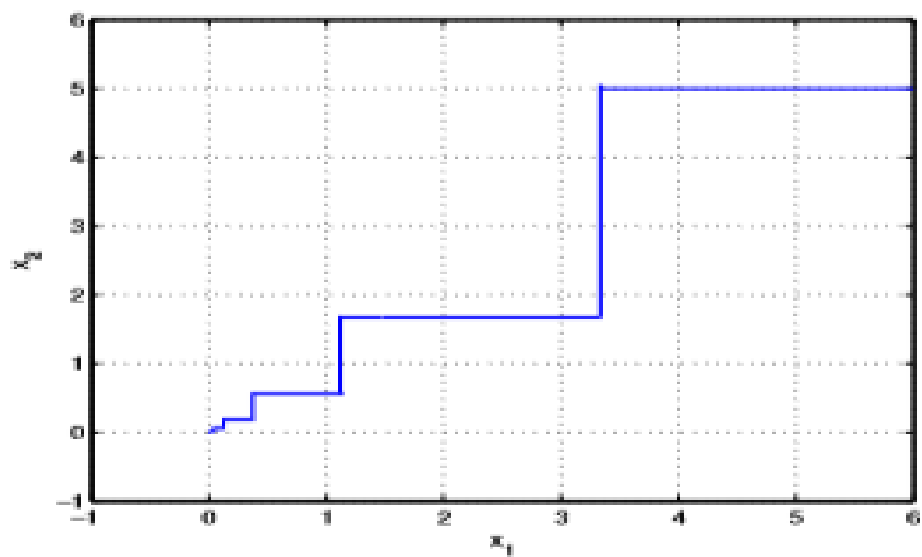
الشكل (29): بيانان موجهان تفاعليان

لكن البيان الموجه التفاعلي  $G_{\sigma(t)}$  شبه قوي الاتصال ومنتظم وذلك من أجل إشارة التحويل المعطاة في الأسفل في الشكل (34). وبالتالي فإن الأعضاء الثلاثة تتلاقى في كل مكان في النقطة ذاتها. وبالإضافة لذلك، نلاحظ أن العضو الظاهري ثابت عند نقطة البدء، وهذا يعني أن منظومة التحويل الأصلية تكون مستقرة وغير متناظرة فيما يتعلق بنقطة البدء.

بيان الاستجابات الزمنية وأشكال الطور مبينة في الشكلين (34) و(35) على التوالي.



الشكل (34): الاستجابات الزمنية وإشارة التحويل



الشكل (30): مسار مقارب مستقر

## المصطلحات العلمية

<b>Adjacency matrix</b>	مصفوفة الجوار
<b>Associated digraph</b>	البيان الموجه المقترن
<b>Closed</b>	مغلق
<b>Cycle</b>	دورة
<b>Diagonal matrix</b>	مصفوفة قطرية
<b>Digraph</b>	البيانات الموجهة
<b>discontinuities</b>	حالات التوقف
<b>Discs</b>	أقراص
<b>Entry</b>	إدخال
<b>Equilibrium set</b>	مجموعة توازن
<b>Generator</b>	مولدة
<b>Globally reachable</b>	يمكن الوصول إليها من كل مكان
<b>Induced supdigraph</b>	بيان موجه جزئي محدث
<b>Interaction</b>	تفاعلي
<b>Irreducible</b>	غير قابلة للاختزال
<b>Linear system</b>	منظومة خطية

<b>Location</b>	موقع
<b>Nodes</b>	العقد
<b>Opposite digraph</b>	البيان الموجه المعاكس
<b>Path</b>	مسار
<b>Periodic</b>	دوري
<b>Positive definite</b>	معرفة أيجابياً
<b>Primitive</b>	أولي
<b>Semiwalk</b>	شبه ممر
<b>Shifting</b>	تحويل
<b>Simple eigenvalue</b>	قيمة ذاتية بسيطة
<b>Stability</b>	استقرار
<b>State</b>	حالة
<b>Strong component</b>	مركبة قوية
<b>Subsystem</b>	منظومة جزئية
<b>Switched interconnected linear system</b>	المنظومة الخطية الاتصال الداخلي المتحولة
<b>Switching signal</b>	إشارة التحويل
<b>Union</b>	اتحاد
<b>Walk</b>	ممر

## قائمة المراجع

- [1] C. Berge and A. Ghouila-Houri, Programming, Games and Transportation Net works. John Wiley and Sons, 1965.
- [2] R. Bhatia, Matrix Analysis. Springer-Verlag, 1996.
- [3] A. Berman and R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Classics in Appl. Math. 9, SIAM, 1994.
- [4] L. W. Beineke and R. J. Wilson, Graph Connections: Relationships Between GraphTheory and Other Areas of Mathematics. Clarendon Press, 1997.
- [5] J. Wolfowitz, “Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices,” Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 14, no. 5, pp. 733–737, 1963.
- [6] J. Hajnal, “Weak ergodicity in non-homogeneous Markov hains,” Proc. CambridgePhilos. Soc., vol. 54, pp. 233–246, 1958
- [7] D. G. Luenberger, Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications. John Wiley and Sons, 1979.
- [8] D. Hershkowitz and N. Mashal, “ $P\alpha$ -matrices and Lyapunov scalar stability,” TheElectronic Journal of Linear Algebra, vol. 4, pp. 39–47, 1998.
- [9] M. H. DeGroot, “Reach a consensus,” Journal of the American Statistical Association, vol. 69, no. 345, pp. 118–121, 1974.
- [10] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse, “Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules,” IEEE Transactions on AutomaticControl, vol. 48, no. 6, pp. 988–1001, 2003.



- [11] L. Moreau, “Leaderless coordination via bidirectional and unidirectional time-dependent communication,” in Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA, 2003, pp. 3070–3073.
- [12] R. Olfati-Saber and R. M. Murray, “Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays,” IEEE vol. 49, no. 9, pp. 101–115, Transactions on Automatic Control 2004.
- [13] Agreement problems in networks with directed graphs and “switching topology,” in Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, USA, 2003, pp. 4126–4132.
- [14] R. W. Beard and V. Stepanyan, “Information consensus in distributed multiple vehicle coordinated control,” in Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA, 2003, pp. 2029–2034.
- [15] W. Ren, R. W. Beard, and T. W. McLain, “Coordination [ variables and consensus building in multiple vehicle systems,” in Cooperative Control: A Post Workshop Volume 2003 Block Island N. Leonard, and A. Workshop on Cooperative Control, V. Kumar S. Morse, Eds. Springer-Verlag, 2004, pp. 171–188 .
- [16] Y. Hatano and M. Mesbahi, “Agreement over random networks,” in Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Bahamas, 2004, Decision and Control, Atlantis, Paradise Island pp. 2010–2015.
- [17] Stability of continuous-time distributed consensus “algorithm,” in Proceedings of the 43rd IEEE Conference on

**Decision and Control, Atlantis, ParadiseIsland, Bahamas, 2004, pp. 3998–4003.**

**[18] A. V. Savkin, “Coordinated collective motion of groups of autonomous mobilerobots: analysis of vicsek’s model,” IEEE vol. 49, no. 6, pp. 981–983, ‘Transactions on Automatic Control 2004.**

**[19] K. H. Johansson and A. Speranzon, “Graph Laplacians and vehicle formation stabilization,” in Proceedings of the 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic 2005.**

**[20] Lin Z. Coupled dynamic systems: From structure towards stability and stabilizability. University of Toronto; 2006.**

## Summary of the Dissertation

Thesis is divided into three chapters as follows:

### **First Chapter: Introduction to Dynamical Systems**

In this chapter, we mention some definitions related to graph theory, and indicate when the set is stable or the dynamical system is stable in relation to the invariant set. Moreover, we illustrate attractiveness of a dynamical system and mention when the invariant set is attractive or the dynamical system is attractive with respect to the invariant set.

### **Second Chapter: Non-negative Matrices and Directed Graphs**

Here, we define some terms related to dynamical statement theory and review the proof of some theorems linking non-negative matrices and dynamical statement theory, through which we are able to know some properties of non-negative matrices based on dynamical statement theory. Also, we define Kronecker product of two matrices and mention cases when the matrix is stable of type  $H(\alpha, m)$ , based on directed graphs associated with that matrix.

### **Third Chapter: Coupled Linear Dynamical Systems**

In this chapter, we mentioned some definitions related to coupled dynamic systems and divide the coupling structure into four cases, i.e. (cyclic coupling structure, unidirectional interactive graph with fixed topology, bidirectional interactive graph with dynamic topology and unidirectional interactive graph with dynamic topology).

In each of the above mentioned cases, necessary and sufficient conditions related to stability and attraction were obtained with respect to equilibrium state and stability region.





Syrian Arab Republic  
Al-Baath University  
Faculty of Sciences  
Department of Mathematics

# **A Study on Coupled Dynamical Systems**

**Dissertation For M.Se Degree in Mathematical Mechanics**

**Submitted By:**

**Nsreen Fadel Alasaad**

**Supervision By:**

**Dr. Mohammad AL-Ali**

**Instructor in Department of Mathematics**

**Faculty of Sciences - Al-Baath University**

**Share By:**

**Dr. Abd Albaset Alkhateeb**

**professor in Department of Mathematics**

**Faculty of Sciences - Al-Baath University**

**2022 AD-1443 H**

