الجمهورية العربية السورية

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بالطرائق المطلقة

أطروحة أعدت لنيل درجة الدكتوراه في الرياضيات البحتة

إعداد الطالبة

غنى محمد جهاد الهاشمي

إشراف الأستاذ الدكتور محمد عامر

أستاذ في قسم الرياضيات

العام الدراسي: 2021–2022 م
1443–1444 هـ

قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بالطرائق المطلقة

Summability of Orthogonal Series by Absolute Methods

تم تسجيل هذا الموضوع بقرار مجلس جامعة البعث ذي الرقم /1902/

المتخذ في الجلسة رقم /24/ تاريخ 19/ذو الحجة/1440 هـ

الموافق 2019/8/20 م للعام الدراسي 2018/2019 م

صدر قرار مجلس البحث العلمي والدراسات العليا في جامعة البعث ذو الرقم /(435) د/ المتخذ بالجلسة رقم /(9) د/ للعام الدراسي 2022/2021 المنعقدة بتاريخ 16/جمادى الآخرة/1443 هـ الموافق 2022/1/19 م القاضي بتسمية أعضاء لجنة الحكم المؤلفة من السادة:

الاسم والنسبة	المرتبة	الاختصاص	الكلية	الجامعة	الصفة
د. سامح العرجة	أستاذ	تحليل تابعي	العلوم	البعث	عضواً
د. محمد عامر	أستاذ	تحليل تابعي	العلوم	البعث	مشرفاً
د. محمد نور شمه	أستاذ	تحليل رياضي	الهندسة الميكانيكية والكهربائية	دمشق	عضواً
د. منير مخلوف	أستاذ مساعد	تحليل تابعي	العلوم	البعث	عضواً
د. محمد الشيخ	أستاذ مساعد	هندسة تفاضلية	العلوم	دمشق	عضواً

كلمة شكر

في بداية كلمتي لا بدّ لي من أتوجه أولاً بالشكر لله عزّ وجلّ الذي مهد لي الطريق ووفقني للوصول إلى هذه المرحلة العلمية العالية.

كما أنني أتوجه بالشكر والامتنان لكل من:

والدتي الكريمة الغالية ووالدي العزيز .. أخي وأخواتي .. وزوجي الحبيب .. وصديقتي الغالية .. الذين كانوا السند الأول لي في الوصول إلى ما وصلت إليه، أدعو الله أن يحفظهم ويطيل في عمرهم ويجزيهم كل خير.

كما أتوجه بالشكر والامتنان للأستاذ الدكتور محمد عامر حفظه الله ورعاه وأطال في عمره، فقد كان لإشرافه ومنحه كثيراً من الوقت لي اليد الأولى في خروج هذه الأطروحة العلمية بالشكل الذي ظهرت عليه، كما كان لتوجيهاته ونصائحه دور أساسي في إتمام دراستي العلمية.

والشكر موصول لأعضاء لجنة المناقشة الكرام الأستاذ الدكتور سامح العرجة والدكتور منير مخلوف من جامعة البعث على آرائهما القيّمة وملاحظاتهما البنّاءة وتفضلهم بقبول مناقشة أطروحة الدكتوراه هذه.

لا يسعني كذلك سوى تقديم الشكر الجزيل للأستاذ الدكتور محمد نور شمه من جامعة دمشق الذي كان له دور فعال في الجانب التطبيقي لموضوع الأطروحة.

بالإضافة إلى شكري الكبير للدكتور محمد الشيخ من جامعة دمشق الذي بذل كثيراً من الجهود في سبيل خروج الأطروحة بأدق النتائج.

ولأصدقائي الغالين على دعمهم وتشجيعهم لي، أدعوا الله أن يوفقني ويوفقهم.

أسأل الله سبحانه وتعالى أن ينفع الجميع بهذا العمل، وأن يكون عملي هذا خالصاً لوجهه الكريم.

والحمد لله رب العالمين

الفهرس

مقدمة

تعدّ المتسلسلات من المواضيع الهامة في الرياضيات الحديثة وخاصةً الرياضيات التطبيقية، وقد اهتم بدراستها الكثير من العلماء، وقد جاءت نظرية المتسلسلات المتعامدة كتعميم طبيعي لنظرية المتسلسلات، حيث نقصد بالمتسلسلة المتعامدة تلك المتسلسلة التي تتعامل مع جملة من الدوال المتعامدة.

وقد أدى تطور نظرية المتسلسلات المتعامدة بشكل عام والمتسلسلات المتعامدة النظامية بشكل خاص، لاسيما المتسلسلات المثلثية، دوراً مهماً في حل العديد من المسائل الرياضية والفيزيائية ومعالجة المشكلات المعقدة في مجال العلوم التطبيقية مثل النظم الكهربائية والاتصالات.

إن مسألة اقتران مجموع ما، بطريقة غير مباشرة، بمتسلسلة غير منتهية متباعدة بالمعنى المعتاد لكوشي، دفعت الرياضيين لتعريف طرائق مختلفة لقابلية الجمع.

أي وبعبارة أبسط هل يمكن أن تكون المتسلسلة غير المنتهية والمتباعدة بالمعنى المعتاد قابلة للجمع، وهل يمكن إيجاد مجموعها؟

لقد تمت دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بالعديد من الطرائق مثل طرائق سيزارو _ ريس _ نيورلند _ نيورلند المعممة _ باناخ والطريقة المصفوفية.

في رسالتي الماجستير قمت بدراسة قابلية جمع متسلسلة فورييه ومرافقتها بالطريقة المصفوفية.

في هذه الأطروحة نقوم بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة البسيطة والمضاعفة بطرائق تختلف عن الطرائق السابقة، وتعتمد على الفروق بشكل عام (سواءً كانت تقدمية أم تراجعية)، تسمى الطرائق المطلقة.

في عام 1986 بيّن الباحثون D.Borwen وF.P. Cass وJ.E.Sayre أن مصفوفات هاوسدورف أدت دوراً مهماً في نظرية قابلية الجمع. كما أن مصفوفات طرائق قابلية الجمع مثل سيزارو وهولدر وأولر وطرائق قابلية الجمع المثقّلة كلها مصفوفات هاوسدورف. كما قاموا بتبيان العلاقات بين طريقة سيزارو المعممة وهولدر المعممة في قابلية الجمع المطلقة. ولقد تمت دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بالعديد من الطرائق المطلقة (هاوسدورف المطلقة، هولدر

المطلقة، أولر المطلقة، سيزارو المطلقة، سيزارو المعممة المطلقة، نيورلند المطلقة، نيورلند المعممة المطلقة، المصفوفية المطلقة، المصفوفية التقريبية المطلقة، التوافقية المطلقة، ريس المطلقة، باناخ المطلقة) من قبل الكثير من الباحثين (مثل: Jena وPadhi عام 1988، Yasuo Okuyama عام 2002، Pokray وMajhi وSamanta وMisra عام 2007، Ozarslan وOgduk عام 2007، Sevli وSavas عام 2009، Krasniqi عام 2010 و2011 و2013 و2014، Singh عام 2013، Saxena وSharma وYildiz عام 2016، Misra وPakray وPalo عام 2017، Yildiz عام 2017، Sarigol عام 2019) وقد قاموا بإعطاء شروط وفرضيات عديدة محددة، والتي يجب أن تحققها المتسلسلة المتعامدة ووسطاء الطريقة المطلقة المدروسة، كي تكون المتسلسلة المتعامدة قابلة للجمع بهذه الطريقة المطلقة، كما قاموا بتبيان العلاقات بين طرائق قابلية الجمع المطلقة وكيفية الانتقال من طريقة إلى أخرى.

فقد قام كل من Krasniqi و Bor و Braha و Dema عام 2012 بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة البسيطة بالطريقة المصفوفية المطلقة [9] ، وفي هذه الأطروحة قمت بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة.

كما قام Okuyama عام 2002 بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة البسيطة بطريقة نيورلند المعممة المطلقة [19]، وفي هذه الأطروحة قمت بمتابعة ماوصل إليه بالحصول على نتائج جديدة تخص طريقتي نيورلند وسيزارو معاً، وقمت بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة، من خلال ربط هذه الطريقة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة.

وفي عام 2013 قام Krasniqi بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة البسيطة بالطريقة المصفوفية التقريبية المطلقة [8]، في هذه الأطروحة وضعت تعريف للطريقة المصفوفية التقريبية المضاعفة المطلقة وقمت بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بهذه الطريقة.

وفي عام 2011 قام كل من Misra و Padhy بدراسة قابلية جمع متسلسلة فورييه بطريقة نيورلند–باناخ المطلقة [11]، في هذه الأطروحة قمت بدراسة قابلية جمع هذه المتسلسلة بطريقة نيورلند المعممة–باناخ المطلقة، وذلك بعد وضع تعريفٍ لها.

تعد الطريقة المصفوفية المطلقة من أهم طرائق قابلية الجمع المطلقة، لأن معظم طرائق قابلية الجمع المطلقة ما هي إلا حالات خاصة من الطريقة المصفوفية المطلقة.

إن منهج البحث في هذه الدراسة سيكون منهجاً علمياً نظرياً يعتمد على الكتب والأبحاث والمقالات العلمية الحديثة.

مشكلة البحث: تكمن مشكلة البحث في تباعد المتسلسلات المتعامدة بشكل عام، وفي اقتصار الدراسات السابقة على دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بالطرائق العادية (غير المطلقة) وبعض الطرائق المطلقة.

أهمية وهدف البحث: إن هدف هذا البحث بشكل أساسي دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة (البسيطة والمضاعفة) بالطرائق المطلقة، وتكمن أهمية البحث في كون الطرائق المطلقة تؤدي إلى الطرائق العادية (غير المطلقة)، وسوف نقوم بتحديد العلاقة فيما بينهما.

والله ولي التوفيق

الفصل الأول

مدخل إلى المتسلسلات المتعامدة والطرائق المطلقة

Introduction to orthogonal series and absolute methods

في هذا الفصل نقوم بعرض تعاريف للمتسلسلات المتعامدة البسيطة والمضاعفة وبعض طرائق قابلية الجمع المطلقة، بحالتها العامة المثقّلة، كالطريقة المصفوفية المطلقة (البسيطة والمضاعفة) وطرائق نيورلند المطلقة ونيورلند المعممة المطلقة (البسيطة والمضاعفة) وطرائق سيزارو المطلقة مع أمثلة عليها، وعلاقة هذه الطرائق ببعضها البعض.

1.1. مفاهيم وتعاريف أساسية:

1.1.1. فضاء هيلبرت [30,32]:

هو فضاء جداء داخلي تام بالنسبة للمسافة المولدة بهذا الجداء الداخلي المعرفة بالعلاقة:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

بالإضافة إلى كونه فضاء باناخ.

2.1.1. الدالة ذات التغيرات المحدودة [32]:

لتكن f دالة معرفة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ ولتكن $P[a,b]$ تجزئة لهذا المجال أي:

$$P = P[a,b] = \begin{Bmatrix} a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\ ;\ x_i \in [a,b]; \\ i = 1,2,\dots,n\ ; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \end{Bmatrix}$$

ولنشكل المجموع: $V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$

عندئذٍ نقول عن الدالة f إنها ذات تغيرات محدودة على المجال $[a,b]$ ، ونرمز لذلك بـ $f \in BV$ ، إذا كانت المجموعة $\{V(f,P); P \in \mathbb{P}[a,b]\}$ محدودة.

أي يوجد عدد ثابت موجب M بحيث يكون:

$$V(f,P) \leq M\ ;\ \forall P \in \mathbb{P}[a,b]$$

حيث $\mathbb{P}[a,b]$ هي أسرة كل تجزئات المجال $[a,b]$.

3.1.1. القياس الخارجي [32]:

نسمي الدالة μ^* ، حيث: $\mu^*: \mathbb{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]\ ; A \longrightarrow \mu^*(A)$ قياساً خارجياً على $\mathbb{P}(X)$ إذا حققت الشروط الثلاث الآتية:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. من أجل أية مجموعتين A, B من $\mathbb{P}(X)$ و $A \subseteq B$ فإن: $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
3. μ^* دالة تحت جمعية تامة. هذا يعني أنه: من أجل أية متتالية $\{A_n\}$ من $\mathbb{P}(X)$ فإن:

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

4.1.1. المجموعة المقيسة بالنسبة لـμ^* [32]:

ليكن μ^* قياس خارجي على X. عندئذٍ نقول عن المجموعة $E \in \mathbb{P}(X)$ أنها مقيسة بالنسبة لـμ^* إذا تحققت المساواة:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)\ ;\ \forall A \in \mathbb{P}(X), E^c = X - E$$

5.1.1. قياس ليبغ [32]:

إن الدالة $\lambda^*: \mathbb{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,\infty]\ ; E \longrightarrow \lambda^*(E)$ حيث أن:

$$\lambda^*(E) = inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} 1(I_k)\ ; E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

و $1(I_k)$ هو طول المجال المفتوح I_k أي: $1\big((\alpha,\beta)\big) = \beta - \alpha$

تعرف قياس خارجي على $\mathbb{P}(\mathbb{R})$، ندعوه قياس ليبيغ في $\mathbb{R}$.

6.1.1. الدالة القيوسة [32]:

نقول عن الدالة $f(x)$ أنها قيوسة على المجموعة E إذا كانت المجموعة:

$E(f > c) = \{x \in E: f(x) > c\}$ مقيسة حسب ليبيغ من أجل أي عدد حقيقي c.

7.1.1. تعريف [30]:

نقول عن خاصة ما * إنها محققة تقريباً في كل مكان على المجموعة $E \in \mathcal{L}$ إذا كانت * محققة على $E - E_0$ حيث $\lambda(E_0) = 0$ ، ونكتب $\overset{a.e}{*}$ ($a.e$ تعني تقريباً في كل مكان)، حيث $\mathcal{L}$ هو صف المجموعات المقيسة بالنسبة لـ λ^* المعطى بالعلاقة:

$$\lambda^*(E) = inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} 1(I_k)\, ; E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

و $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}}$ هو قياس ليبيغ على $\mathcal{L}$.

8.1.1. الدالة الكمولة لوبيغياً [32]:

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $[a,b]$ ولنأخذ تجزئة $\mathbb{P}$ للمجال $[m,M]$ الذي يحوي كل قيم الدالة $f(x)$ حيث:

$$\mathbb{P} = \{m = y_0, y_1, \dots, y_n = M\}$$

ولنشكل المجموعات الآتية:

$$e_k = E(y_{k-1} \le f < y_k)\, ;\ \ k = 1,2, \dots, n$$

ولتكن الدالة $f(x)$ مقيسة ومحدودة على المجموعة المقيسة E حيث:

$$m < f(x) < M \quad ; x \in E \qquad , \lambda(E) < \infty$$

نجد بسهولة أن المجموعات e_k مقيسة ومنفصلة مثنى مثنى، كما أن:

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} e_k$$

$$\lambda(E) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(e_k) \quad ; \lambda(E) = inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} 1(I_k)\, ; E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

ولنشكل المجموعين التاليين:

مجموع ليبيغ الأدنى للدالة $f(x)$: $s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\lambda(e_k)$

مجموع ليبيغ الأعلى للدالة $f(x)$: $S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} y_k\lambda(e_k)$

ولنضع: $I_1 = sup_{\mathrm{P}\in\mathbb{P}[m,M]} s(f,P) \quad , \quad I_u = inf_{\mathrm{P}\in\mathbb{P}[m,M]} S(f,P)$

من هذا كله نجد أن: $s \leq I_1 \leq I_u \leq S$

وبما أن: $0 \leq S - s \leq \rho\lambda(E)$ ، حيث: $\rho = max_k(y_k - y_{k-1})$

وبأخذ ρ صغير بقدر كاف نجد أن: $I_1 = I_u$.

إن القيمة المشتركة لِ I_u و I_1 نسميها تكامل ليبيغ للدالة $f(x)$ على المجموعة E، ونقول أن الدالة $f(x)$ كمولة لوبيغياً على المجموعة E.

9.1.1. الفضاء $L_2[a,b]$ [32]:

هو فضاء الدوال المعرفة والقيوسة والكمولة لوبيغياً على المجال $[a,b]$ والمحققة للشرط: $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$

10.1.1. النظيم في الفضاء $L_2[a,b]$ [32] :

ليكن $L_2[a,b]$ فضاء هيلبرت المزود بالجداء الداخلي المعرف بالعلاقة:

$$\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

عندئذٍ يعطى النظيم بالعلاقة الآتية: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$

11.1.1. تمهيدية بيبو–ليفي [7]:

إذا كانت لدينا متتالية الدوال f_n غير سالبة وكمولة لوبيغياً على E ، أي $f_n \in L(E)$

وكان: $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E \ f_n(t)dt < \infty$، عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ متقاربة تقريباً في كل مكان على E من الدالة $f \in L(E)$.

علاوةً على ذلك تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E \ f_n(t)dt$ أيضاً متقاربة من الدالة f بالنظيم في $L(E)$.

12.1.1. تعريف: يمكن تعريف الرموز الآتية O, o كما يأتي: [32]

1. لتكن v_n, u_n متتاليتين عدديتين، عندئذٍ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0 \ \Leftrightarrow v_n = o(u_n)$$

$\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ محدودة المتتالية $\Leftrightarrow v_n = O(u_n)$

2. لتكن لدينا الدالة: $f : X \to Y$ عندئذٍ:

$$O(f) = \{\ g : X \to Y\ ;\ \exists\ x_0, c > 0; \forall x \geq x_0\ \Longrightarrow\ cf(x) \geq g(x) \geq 0\ \}$$

ونكتب: $g = O(f)$ أو $g \in O(f)$

3. لتكن لدينا الدالة: $f : X \to Y$ عندئذٍ:

$$o(f) = \{\ g : X \to Y\ ;\ \forall\ c > 0 \exists x_0 > 0; \forall x \geq x_0 \Longrightarrow cf(x) > g(x) \geq 0\}$$

ونكتب: $g = o(f)$ أو $g \in o(f)$.

13.1.1. متراجحة هولدر للتكاملات [32]:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

حيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

بوضع $p=\frac{2}{k}$ نجد أن $\frac{1}{p}=\frac{k}{2}$

$$\int_a^b |f(x)g(x)|^k dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^{k\times\frac{2}{k}} dx\right)^{\frac{k}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^{k\times\frac{2}{2-k}} dx\right)^{1-\frac{k}{2}}$$

بوضع $g(x)=1$

$$\int_a^b |f(x)|^k dx \le (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

لنفرض أن:$f(x)=\Delta t_n(x)$ ، فيكون:

$$\int_a^b |\Delta t_n(x)|^k dx \le (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left(\int_a^b |\Delta t_n(x)|^2 dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left(\int_a^b |t_n(x)-t_{n-1}(x)|^2 dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

14.1.1. متراجحة هولدر للمجاميع [32]:

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k b_k| \le \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

حيث إن $p>1, q>1$ مرتبطين بالعلاقة: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$، أو: $q=\frac{p}{p-1}$

15.1.1. متراجحة شوارتز للتكاملات [32] :

لتكن $\psi_1(x)$ و $\psi_2(x)$ دوال حقيقية قابلة للمكاملة في المجال $[a,b]$ عندئذٍ:

$$|\langle\psi_1,\psi_2\rangle|^2 \le \langle\psi_1,\psi_1\rangle\langle\psi_2,\psi_2\rangle$$

$$\left[\int_a^b \psi_1(x)\psi_2(x)dx\right]^2 \leq \int_a^b [\psi_1(x)]^2 dx \int_a^b [\psi_2(x)]^2 dx$$

وبجذر الطرفين نجد أن:

$$\int_a^b \psi_1(x)\psi_2(x)dx \leq \left(\int_a^b [\psi_1(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b [\psi_2(x)]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

16.1.1. متراجحة شوارتز للمجاميع [32]:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=0}^{n} {a_k}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} {b_k}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2.1. المتسلسلات المتعامدة:

1.2.1. الدوال المتعامدة [32] :

لتكن $f_1 \in H$ و f_2 حيث إن H فضاء هيلبرت للدوال. نقول عن الدالتين f_1 و f_2 إنهما متعامدتان على المجال $[a,b]$ إذا كان:

$$\langle f_1, f_2\rangle = 0 \;\; ; \; f_1 \neq f_2 \;\;\; , \qquad f_1, f_2 \neq 0$$

<u>مثال:</u> لنأخذ كثيرتي الحدود $f_1(x) = x \quad , f_2(x) = x^2 + 1$، نلاحظ أن:

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int_{-1}^{1} x.(x^2+1)dx = \int_{-1}^{1} (x^3+x)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

وبالتالي فإن الدالتين x, x^2+1 متعامدتان على المجال $[-1,1]$.

2.2.1. المجموعة المتعامدة [32]:

نقول عن مجموعة الدوال $\{\phi_0, \phi_1, \dots\}$ (التي تنتمي إلى فضاء هيلبرت) إنها متعامدة على المجال $[a,b]$ إذا كان:

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \int_a^b \phi_m(x).\phi_n(x)dx = 0 \quad ; m \neq n$$

<u>مثال:</u> إن مجموعة الدوال $\{\sin x\,, \sin 2x\,, \dots, \sin nx\,, \dots\}$ هي مجموعة متعامدة على المجال $[-\pi, \pi]$ وذلك لأن:

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin\, nx\,.\sin mx\, dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x - \cos(n-m)x]dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m} - \frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\,; n \neq m$$

3.2.1. الجملة المتعامدة النظامية [32]:

لتكن $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ عناصر في فضاء هيلبرت H. نقول إن هذه النقاط تشكل جملة متعامدة نظامية في H إذا كان:

$$\langle h_i, h_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \; i = j \\ 0 & ; \; i \neq j \end{cases}$$

أي أن هذه العناصر متعامدة مثنى مثنى ونظيم كل منها مساوٍ للواحد.

1.2.1. مبرهنة ديريخليه: [20]

بفرض أن f دالة دورية دورها 2π، معرفة ومستمرة هي ومشتقتها على الفترة $[-\pi, \pi]$، أو أن لها عدداً منتهياً من نقاط الانقطاع (من النوع الأول) على نفس الفترة.

عندئذٍ فإن متسلسلة فورييه للدالة f تكون متقاربة على الفترة $[-\pi, \pi]$، حيث إن:

في كل نقطة $t \in [-\pi, \pi]$ تكون فيها الدالة f مستمرة، فإن مجموع المتسلسلة يساوي الدالة f.

أما في كل نقطة انقطاع t_0 للدالة، فإن مجموع المتسلسلة يساوي: $\frac{f(t_0-)+f(t_0+)}{2}$.

حيث إن: $f(t_0\,-) = \lim\limits_{t\to t_0-} f(t) \quad , \quad f(t_0\,+) = \lim\limits_{t\to t_0+} f(t)$

وعلى أطراف الفترة $[-\pi, \pi]$، فإن مجموع المتسلسلة هو: $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$.

4.2.1. المتسلسلة المتعامدة البسيطة [9]:

لتكن $\{\varphi_n\}$ جملة من الدوال المتعامدة المعرفة على المجال $[a,b]$ وبفرض أن الدالة f تنتمي إلى الفضاء $L_2[a,b]$، ونعلم أن كل دالة تحقق شروط ديريخليه على المجال $[a,b]$ تكتب بالشكل:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

حيث: $a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \quad ; \quad n = 0,1,2,\dots$

نسمي المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ المتسلسلة المتعامدة للدالة f بالنسبة للجملة $\{\varphi_n\}$.

5.2.1. المتسلسلة المتعامدة المضاعفة [12]:

لتكن $\{\phi_{m,n}; m,n = 0,1,\dots\}$ جملة متعامدة معرفة على المجال $[a,b]$.

أي أن: $\int_a^b \phi_{m,n}(x).\phi_{k,l}(x)dx = 0$ من أجل m,n,k,l مختلفة مثنى مثنى.

إن المتسلسلة المتعامدة لأي دالة حقيقية f من الصف $L_2[a,b]$ بالنسبة للجملة $\{\phi_{m,n}\}$ تعطى بالشكل: $f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\phi_{m,n}(x)$

حيث إن: $a_{m,n} = \int_a^b f(x)\,\phi_{m,n}(x)dx \quad ; \quad m,n = 0,1,2,\dots$

نسمي المتسلسلة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\phi_{m,n}(x)$ المتسلسلة المتعامدة المضاعفة للدالة f بدلالة الجملة $\{\phi_{m,n}\}$.

ملاحظة (1): نقصد بالمتسلسلة المتعامدة أي جملتها متعامدة.

وبالتالي من أجل أي جملة متعامدة نحصل على متسلسلة متعامدة.

- والآن سنقوم بالحديث عن بعض المتسلسلات المتعامدة بأنواعها الثلاث الشهيرة، (متسلسلات فورييه، كثيرات حدود ليجندر، كثيرات حدود تشيبتشيف)، والتي لها تطبيقات مهمة جداً في فروع الهندسة:

مثال 1: إن متسلسلة فورييه الناتجة عن الجملة المتعامدة:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots , \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}} \text{و} \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \;\; ; m, n = 1,2, \dots ; x \in]-\pi, \pi[$$

والتي تكتب بالشكل:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$$

حيث:

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \;\; , b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$

هي متسلسلة متعامدة.

الجملة السابقة جملة متعامدة نظامية في فضاء الدوال $L_2[-\pi, \pi]$.

مثال 2: المتسلسلة الناتجة عن جملة كثيرات حدود ليجندر المعرفة على المجال $[-1,1]$، والتي تستخدم في تحديد الوظائف الموجية للالكترونات في مدارات الذرة وهي قابلة للتطبيق في ديناميكا الموائع وفي النماذج الطيفية للأرصاد الجوية (نظام التنبؤ العالمي)، وتعطى بالعلاقة التفاضلية الآتية:

$$P_n(x) = \frac{1}{n! \, 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \; ; n \in \mathrm{N} \qquad \dots (1)$$

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} P_{2k}(x)$$

حيث: $c_{2k} = (4k + 1) \int_0^1 f(x) P_{2k}(x) dx \;\; ; k \in \mathrm{N}$

كما أن:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} P_{2k-1}(x)$$

حيث: $c_{2k-1} = (4k-1)\int_0^1 f(x) P_{2k-1}(x)dx\,; k \in N$

- **نتيجة (1):** من العلاقة (1) نستنتج أن:

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$

$$P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$$

وهكذا تستمر العملية....

حيث نلاحظ أن:

$$P_n(1) = 1$$

$$P_n(0) = \begin{cases} 0 & ; \quad n \text{ فردي} \\ f(n) & ; \quad n \text{ زوجي} \end{cases}$$

ونلاحظ أن مجموع أمثال كل كثيرة حدود من كثيرات حدود ليجندر يساوي الواحد.

الآن: إن تكامل كثيرات حدود ليجندر المتعامدة:

$$\int_{-1}^{1} [P_2(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right]^2 dx = \frac{2}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} [P_3(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\right]^2 dx = \frac{2}{7}$$

$$\int_{-1}^{1} [P_4(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\right]^2 dx = \frac{2}{9}$$

نلاحظ أن:

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

مما سبق نستنتج أن:

- **نتيجة (2):** حتى تصبح جملة كثيرات حدود ليجندر متعامدة نظامية يجب تحقق الشرطين:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x).P_m(x) dx = 0 \qquad ; m \neq n$$

$$\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx = 1$$

- **علاقة الارتباط بين كثيرة حدود ليجندر وأي كثيرة حدود جبرية:**

2.2.1. مبرهنة: كل كثيرة حدود جبرية $f_n(x)$ تكتب على شكل مجموع لكثيرات حدود ليجندر.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x) \qquad \dots (1)$$

ونلاحظ أن: $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} b_k \quad \dots (2)$

❖ **تطبيقات:**

❖ **تطبيق 1:** بفرض $f_0(x) = a_0$

$$a_0 = \sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x) = b_0 \; ; \; P_0(x) = 1 \Rightarrow f_0 = a_0 = b_0$$

❖ **تطبيق 2:** بفرض $f_1(x) = a_0 + a_1 x$

$$a_0 + a_1 x = \sum_{k=0}^{n} b_k P_k(x) = b_0 + b_1 x \; ; \; P_0(x) = 1, P_1(x) = x$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

وذلك بمطابقة الأمثال.

من أجل: $f_1(x) = -20x + 7$

$$f_1(x) = 7 - 20x \Rightarrow b_0 = 7, b_1 = -20$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_0 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$$

❖ **تطبيق 3:** بفرض $f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = b_0 + b_1 x + b_2 \left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right); P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = b_0 - \frac{1}{2} b_2 + b_1 x + \frac{3}{2} b_2 x^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_0 - \frac{1}{2} b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} b_2 \end{pmatrix}$$

وذلك من مطابقة الأمثال.

لاحظ أن: $a_0 + a_1 + a_2 = b_0 + b_1 + b_2$

ملاحظة: مما سبق نجد أن كل كثيرة حدود من الدرجة n تشكل مصفوفة من المرتبة n.

وعندما يكون مجموع الأسطر(كل سطر على حدى) يساوي الواحد، تدعى المصفوفة عندئذً مصفوفة ماركوف، (المصفوفة الماركوفية النظامية)، وهي تستخدم في حفظ البيانات والتشفير، وهي تسرع عمل المبرمج وبالتالي زمن أقل وتكلفة أوفر، ونكون أعطيناه بذلك طرائق جديدة في الجمع.

مثال 3: المتسلسلة الناتجة عن جملة كثيرات حدود تشيبتشيف المتعامدة والتي تعطى بالعلاقة:

$$T_0(x) = 1 \,, \qquad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\, arccosx)$$

هي: $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(x)$

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \qquad c_n = \frac{2^{n-1}}{\pi} \int_{-1}^{+1} f(x) \frac{T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; n \in N$$

لاحظ هنا دالة الوزن: $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ معرفة على المجال $(-1, +1)$.

نستنتج من التعريف أن:

$T_0(x) = 1$ (مجموع الأمثال يساوي 1)

$T_1(x) = \frac{1}{2^0} \cos(arccosx) = x$ (مجموع الأمثال يساوي 1)

ولإيجاد $T_2(x)$: تلزمنا العلاقة المثلثية: $\cos(2v) = 2cos^2 v - 1$

$$T_2(x) = \frac{1}{2^1} \cos(2arccosx) = \frac{1}{2} [2cos^2(arccosx) - 1] = \frac{1}{2} [2x^2 - 1]$$

$$\Rightarrow T_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

(مجموع الأمثال يساوي $\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$)

ولإيجاد $T_3(x)$: تلزمنا العلاقة المثلثية: $\cos(3v) = 4cos^3 v - 3 \cos v$

$$T_3(x) = \frac{1}{2^2}\cos(3arccosx) = \frac{1}{4}[4cos^3(arccosx) - 3\cos(arccosx)]$$

$$\Longrightarrow T_3(x) = \frac{1}{4}[4x^3 - 3x] = x^3 - \frac{3}{4}x$$

(مجموع الأمثال يساوي $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$)

وبطريقة مشابهة لماسبق نجد أن:

$$T_4(x) = \frac{1}{2^3}\cos(4arccosx) = \frac{1}{2^3}\cos(3arccosx + arccosx)$$

ونعلم أن: $\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$ وبالتالي:

$$\cos(u+v) = 2\cos u\cos v - \cos(u-v)$$

$$\Longrightarrow T_4(x) = \frac{1}{8}[2\cos(3arccosx)\cos(arccosx) - \cos(2arccosx)]$$

$$= \frac{1}{8}[2(4x^3 - 3x) \times x - (2x^2 - 1)]$$

$$\Longrightarrow T_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$$

(مجموع الأمثال يساوي $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$)

وبطريقة مشابهة لما سبق نجد أن:

$$T_5(x) = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x$$

(مجموع الأمثال يساوي $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$)

$$T_6(x) = x^6 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{32}$$

(مجموع الأمثال يساوي $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$)

$$T_7(x) = x^7 - \frac{7}{4}x^5 + \frac{7}{8}x^3 - \frac{7}{64}x$$

(مجموع الأمثال يساوي $\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$)

وهكذا......

نلاحظ مما سبق أن: $T_1(0) = T_3(0) = T_7(0) = \cdots = 0$

كما أن: $T_2(0) = -\frac{1}{2}\ , T_4(0) = \frac{1}{8}\ , T_6(0) = -\frac{1}{32}\ , T_8(0) = \frac{1}{128}\ , \ldots$

وبالتالي نستنتج أن:

$$T_n(0) = \begin{cases} 0 & ; \quad n \text{ فردي} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} & ; \quad n \text{ زوجي} \end{cases}$$

- **نتيجة:** حتى تصبح جملة كثيرات حدود تشبتشيف متعامدة نظامية يجب تحقق الشرطين:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x).T_m(x)dx = 0 \qquad ; m \neq n$$

$$\frac{2^{2n-3}(4n^2-1)}{2n^2-1} \int_{-1}^{1} [T_n(x)]^2 dx = 1$$

أي: $\int_{-1}^{1}[T_n(x)]^2 dx = \frac{2n^2-1}{2^{2n-3}(4n^2-1)}$

وذلك بملاحظة أن:

$$\int_{-1}^{1} [T_2(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} \left[x^2 - \frac{1}{2}\right]^2 dx = \frac{7}{30} = \frac{2.4-1}{2^1(4.4-1)}$$

$$\int_{-1}^{1} [T_3(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} \left[x^3 - \frac{3}{4}x\right]^2 dx = \frac{17}{280} = \frac{2.9-1}{2^3(4.9-1)}$$

$$\int_{-1}^{1}[T_4(x)]^2dx = \int_{-1}^{1}\left[x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\right]^2 dx = \frac{31}{2016} = \frac{2.16-1}{2^5(4.16-1)}$$

$$\int_{-1}^{1}[T_5(x)]^2dx = \int_{-1}^{1}\left[x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x\right]^2 dx = \frac{49}{12672} = \frac{2.25-1}{2^7(4.25-1)}$$

3.1. الطرائق المطلقة:

1.3.1. الطريقة المصفوفية (A) [3,20,22]:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع إلى المجموع s بالطريقة المصفوفية التي مصفوفتها

$A = (a_{n,k})$ إذا كانت: $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^A = s$

حيث إن: $t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, S_k$ و $S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$، والمصفوفة $A = (a_{n,k})$ هي مصفوفة مثلثية سفلى غير منتهية من الأعداد الحقيقية.

(أو نقول إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع وفق (A) من العدد s).

ونكتب عندئذٍ: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s \;\; (A)$.

نسمي المصفوفة $A = (a_{n,k})$ **مصفوفة توبلتز (Toeplitz matrix)** إذا كان: [26]

$a_{n,k} = 0\,; k > n$ (أي إذا كانت A مصفوفة مثلثية سفلى غير منتهية).

2.3.1. تعريف [31]:

نقول عن طريقة في قابلية الجمع إنها نظامية إذا أدى تطبيقها على متسلسلة متقاربة إلى مجموع هذه المتسلسلة المألوف.

أي أنه هناك تطابق بين قيمتي الجمع للمتسلسلة المتقاربة وفق طريقة قابلية الجمع المستخدمة والطريقة المعتادة.

ملاحظة (2): إن الطرائق المدروسة في هذه الأطروحة كلها طرائق نظامية إضافةً إلى أن معظمها حالات خاصة من الطريقة المصفوفية.

3.3.1. شروط سيلفرمان – توبلتز للنظامية [22,30]:

نقول عن المصفوفة المثلثية السفلى غير المنتهية $A = \left(a_{n,k}\right)$ إنها تحقق شروط سيلفرمان – توبلتز للنظامية إذا تحققت الشروط الثلاث الآتية:

$$1. \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = 1$$

$2. a_{n,k} = 0 \;;\; k > n$ (أي أن المصفوفة مثلثية سفلى)

$3. \sum_{k=0}^{\infty} \left|a_{n,k}\right| \le M$ (أي أنها متقاربة مطلقاً)

(حيث إن M ثابت مستقل عن n).

4.3.1. تعريف [22,30]:

ونقول عن **المصفوفة** $\boldsymbol{A = \left(a_{n,k}\right)}$ إنها **نظامية** إذا حققت $a_{n,k}$ شروط سيلفرمان – توبلتز السابقة **[22]**.

ملاحظة (3) [20]: تكون المصفوفة $A = \left(a_{n,k}\right)$ نظامية إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = s \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} t_n^A = s$$

وتكون المصفوفة $A = \left(a_{n,k}\right)$ نظامية مطلقاً إذا وفقط إذا كان:

$$\{S_n\} \in BV \quad \Rightarrow \quad \{t_n^A\} \in BV$$

5.3.1. الطريقة المصفوفية المطلقة $|A|$ [20]:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المطلقة التي مصفوفتها $A = \left(a_{n,k}\right)$ إذا كان: $\sum_{n=1}^{\infty} \left|t_n^A - t_{n-1}^A\right| < \infty$

(أي أن t_n^A متتالية ذات تغيرات محدودة)

حيث إن: $t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, S_k$ و $S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$، والمصفوفة $A = \left(a_{n,k}\right)$ هي مصفوفة مثلثية سفلى غير منتهية من الأعداد الحقيقية.

(أو نقول إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع وفق الطريقة المصفوفية المطلقة $|A|$).

ملاحظة (4): في دراستنا الحالية لا يمكن القول بأنها قابلة للجمع مطلقاً (بإطلاق) وفق الطريقة المصفوفية، لأن ذلك يعني أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية، وهذا خارج عن نطاق الدراسة، فصفة الإطلاق تخص الطريقة وليست المتسلسلة.

6.3.1. الطريقة المصفوفية المطلقة المثقّلة $|A|_\lambda\,,\,\lambda \geq 1$ [16]:

لتكن $A = \left(a_{n,k}\right)$ مصفوفة مثلثية سفلى و (S_n) متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. عندئذٍ: $t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\ \ S_k$

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع $|A|_\lambda\,,\,\lambda \geq 1$ إذا كان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |t_n^A - t_{n-1}^A|^\lambda < \infty$$

وتكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع $|A,\delta|_\lambda\,,\,\lambda \geq 1\,,\,\delta \geq 0$ إذا كان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta\lambda+\lambda-1} |t_n^A - t_{n-1}^A|^\lambda < \infty$$

ملاحظة (5): الطريقة المصفوفية المطلقة $|A|$ هي الطريقة المصفوفية المطلقة المثقّلة $|A|_\lambda$ عندما $\lambda = 1$، أي أن: $|A|_1 = |A|$.

أي أن الطريقة المصفوفية المطلقة $|A|$ تعتبر حالة خاصة من الطريقة المصفوفية المطلقة المثقّلة $|A|_\lambda$ لأجل $\lambda = 1$.

ملاحظة (6): الطريقة المصفوفية المطلقة المثقّلة $|A|_\lambda$ هي الطريقة المصفوفية المطلقة المثقّلة $|A,0|_\lambda$.

7.3.1. الطريقة المصفوفية المطلقة $|A, \alpha_n|_\lambda$, $1 \le \lambda$ [6]:

لتكن $A = (a_{n,k})$ مصفوفة مثلثية سفلى و (S_n) متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. ولتكن (α_n) متتالية غير سالبة،

عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع $|A, \alpha_n|_\lambda$, $1 \le \lambda$ إذا كان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |t_n^A - t_{n-1}^A|^\lambda < \infty$$

حيث $t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k$

8.3.1. الطريقة المصفوفية المطلقة $|A, p_n|_\lambda$, $1 \le \lambda$ [6]:

لتكن $A = (a_{n,k})$ مصفوفة مثلثية سفلى. وليكن:

$$t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k \quad , n = 0,1, \dots$$

ولتكن $\{p_n\}$ متتالية عددية.

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع $|A, p_n|_\lambda$, $1 \le \lambda$ إذا كان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\lambda-1} |t_n^A - t_{n-1}^A|^\lambda < \infty$$

حيث إن: $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \to \infty \;\; ; n \to \infty$

وتكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع $|A, p_n, \delta|_\lambda$, $1 \le \lambda$, $0 \le \delta$ إذا كان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta\lambda+\lambda-1} |t_n^A - t_{n-1}^A|^\lambda < \infty$$

9.3.1. الطريقة المصفوفية المضاعفة (A, B) [18]:

لتكن $A = (a_{m,j})$ و $B = (b_{n,k})$ مصفوفتين مثلثيتين سفليتين غير منتهيتين،

ولتكن $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$ متسلسلة مضاعفة ولتكن $S_{m,n} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} u_{j,k}$ متتالية مجاميعها الجزئية. وليكن: $t_{m,n}^{(A,B)} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{m,j} b_{n,k} S_{j,k}$

تكون المتسلسلة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة (A,B) إذا كان: $\lim_{m,n\to\infty} t_{m,n}^{(A,B)} = s$

(أو نقول إن المتسلسلة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ قابلة للجمع وفق الطريقة المصفوفية المضاعفة (A,B) من العدد s).

ونكتب عندئذٍ: $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n} = s \quad (A,B)$.

10.3.1. الطرائق المصفوفية المضاعفة المطلقة [4,17]:

لتكن $A=(a_{m,j})$ و $B=(b_{n,k})$ مصفوفتين مثلثيتين سفليتين غير منتهيتين،

ولتكن $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ متسلسلة مضاعفة ولتكن $S_{m,n}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}u_{j,k}$ متتالية مجاميعها الجزئية،

وليكن: $t_{m,n}^{(A,B)}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{m,j}b_{n,k}S_{j,k}$

عندئذٍ من أجل أي متتالية مضاعفة (v_{mn}) نعرف Δ_{11} بالعلاقة:

$$\Delta_{11}v_{m,n}=v_{m,n}-v_{m+1,n}-v_{m,n+1}+v_{m+1,n+1}$$

تكون المتسلسلة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة $|A,B|$ إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta_{11}t_{m-1,n-1}^{(A,B)}\right|<\infty$$

وتكون المتسلسلة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة المثقّلة $|A,B|_k$, $1\le k$ إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|\Delta_{11}t_{m-1,n-1}^{(A,B)}\right|^{k}<\infty$$

وتكون قابلة للجمع $|A,B,\delta|_k$, $1\le k$, $0\le\delta$ إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{\delta k+k-1}\left|\Delta_{11}t_{m-1,n-1}^{(A,B)}\right|^{k}<\infty$$

وتكون قابلة للجمع $|A,B,p_m,q_n|_k$, $1 \le k$ إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{mnp_mq_n}{P_mQ_n}\right)^{k-1}\left|\Delta_{11}t_{m-1,n-1}^{(A,B)}\right|^k < \infty$$

حيث $Q_n = \sum_{j=0}^{n} q_j$, $P_m = \sum_{k=0}^{m} p_k$

وتكون قابلة للجمع $|A,B,p_m,q_n,\delta|_k$, $1 \le k$, $0 \le \delta$ إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{mnp_mq_n}{P_mQ_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\Delta_{11}t_{m-1,n-1}^{(A,B)}\right|^k < \infty$$

11.3.1. طريقة نيورلند (N,p_n) [2,23,29]:

لتكن $\{p_n\}$ متتالية حقيقية أو عقدية. تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند (N,p_n) إلى المجموع s إذا كان: $\lim_{n\to\infty} t_n^{(N,p_n)} = s$

حيث:

$$t_n^{(N,p_n)} = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}S_k \quad ; \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad , P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$$

أي:

$$t_n^{(N,p_n)} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}S_k \quad ; \; a_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-k}}{P_n} & ; 0 \le k \le n \\ 0 & ; \quad k > n \end{cases}$$

12.3.1. طريقة نيورلند المعممة (N,p_n,q_n) [12]:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متسلسلة غير منتهية، ولتكن $\{S_n\}$ متتالية مجاميعها الجزئية، ولتكن المتتاليتان $\{p_n\}$ و$\{q_n\}$، ولنعرف تلاقّهما بالشكل:

$$R_n = (p*q)_n = \sum_{m=0}^{n} p_m\, q_{n-m} = \sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\, q_m \quad ; \; (p*q)_n \ne 0 \; ; \forall n$$

إن تحويل طريقة نيورلند المعممة يعطى بالشكل:

$$t_n^{(N,p_n,q_n)} = \frac{1}{(p*q)_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\, q_m\, S_m$$

$$t_n^{(N,p_n,q_n)} = \frac{1}{R_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\, q_m\, S_m$$

ندعو p,q وسطاء طريقة نيورلند المعممة.

ملاحظة (7) [27]: تؤول الطريقة المصفوفية التي مصفوفتها $T = (a_{n,k})$ إلى:

1. طريقة سيزارو $(C,1)$ عندما يكون: $a_{n,k} = \frac{1}{n+1}$ وذلك $\forall k$.
2. الطريقة التوافقية $(H,1)$ عندما يكون: $a_{n,k} = \frac{1}{(n-k+1)\log n}$.
3. طريقة نيورلند(N,p_n) عندما يكون: $a_{n,k} = \frac{p_{n-k}}{P_n}$ حيث إن:

$$P_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \ ; P_n \neq 0$$

4. طريقة نيورلند المعممة (N,p,q) عندما يكون: $a_{n,k} = \frac{p_{n-k}q_k}{R_n}$ حيث إن:

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} p_k q_{n-k} \ ; R_n \neq 0$$

13.3.1. طريقة نيورلند المعممة المطلقة $|N,p_n,q_n|$ [12]:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المطلقة $|N,p_n,q_n|$ إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \left|t_n^{(N,p_n,q_n)} - t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}\right|$ متقاربة أي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|t_n^{(N,p_n,q_n)} - t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}\right| < \infty$$

حيث $t_{-1}^{(N,p_n,q_n)} = 0$ (أي عندما $n = 0$)

ونكتب: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \in |N,p_n,q_n|$، ونقصد بذلك أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع وفق طريقة نيورلند المعممة المطلقة $|N,p_n,q_n|$.

14.3.1. طريقة نيورلند المعممة المطلقة المثقّلة $|N, p_n, q_n|_k$ [12]:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المطلقة المثقّلة $|N, p_n, q_n|_k$ إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} \left|t_n^{(N,p_n,q_n)} - t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}\right|^k$ متقاربة.

أي: إذا تحقق الشرط:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} \left|t_n^{(N,p_n,q_n)} - t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}\right|^k < \infty$$

ملاحظة (8): تؤول الطريقة المصفوفية المضاعفة إلى طريقة نيورلند المضاعفة بوضع:

$$a_{m,j} = \frac{p_{m-j}}{P_m} \quad , b_{n,k} = \frac{q_{n-k}}{Q_n}$$

حيث:

$$0 \neq P_m = \sum_{k=0}^{m} p_k \quad , \quad Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k \neq 0$$

(أي أن الطريقة المصفوفية المضاعفة تعتبر تعميم لطريقة نيورلند المضاعفة).

15.3.1. طريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة $\left|N^{(2)}, p_n, q_n\right|$ [12]:

لتكن $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$ متسلسلة مضاعفة، ولتكن $\{S_{m,n}\}$ متتالية مجاميعها الجزئية،

ولتكن $\{p_{m,n}\}$ و $\{q_{m,n}\}$ متتاليتين مضاعفتين ولنرمز لهما بالرمز p و q .

من أجل المتتاليتين p و q نعرف جداء التلاف بالشكل:

$$R_{m,n} \coloneqq (p * q)_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_{i,k}\, q_{m-i,n-k} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_{m-i,n-k}\, q_{i,k}$$

وبالمثل نحتاج إلى الرموز الآتية:

$$R_{m,n}^{v,\mu}=\sum_{i=v}^{m}\sum_{k=\mu}^{n}p_{m-i,n-k}\,q_{i,k}\quad,\quad R_{m,n}^{0,0}=R_{m,n}$$

$$R_{m,n-1}^{v,n}=R_{m-1,n-1}^{v,n}=0\ ;\ 0\le v\le m$$

$$R_{m,n-1}^{m,\mu}=R_{m-1,n-1}^{m,\mu}=0\ ;\ 0\le \mu\le n$$

$$\Delta_{11}\left(\frac{R_{m,n}^{v,\mu}}{R_{m,n}}\right):=\frac{R_{m,n}^{v,\mu}}{R_{m,n}}-\frac{R_{m,n-1}^{v,\mu}}{R_{m,n-1}}-\frac{R_{m-1,n}^{v,\mu}}{R_{m-1,n}}+\frac{R_{m-1,n-1}^{v,\mu}}{R_{m-1,n-1}}$$

حيث: $(p*q)_{m,n}\neq 0$

إن تحويل طريقة نيورلند المعممة المضاعفة $t_{m,n}^{(N^{(2)},p_n,q_n)}$ يأخذ الشكل:

$$t_{m,n}^{(N^{(2)},p_n,q_n)}=\frac{1}{(p*q)_{m,n}}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_{m-i,n-k}\,q_{i,k}\,S_{i,k}$$

تكون المتسلسلة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة $\left|N^{(2)},p_n,q_n\right|$ إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta_{11}t_{m-1,n-1}^{(N^{(2)},p_n,q_n)}\right|<\infty$$

16.3.1. طريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة المثقّلة $\left|N^{(2)},p_n,q_n\right|_k$ $(k\ge 1)$: [12]

تكون المتسلسلة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة المثقّلة $\left|N^{(2)},p_n,q_n\right|_k$ حيث $(k\ge 1)$ إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|t_{m,n}^{(N^{(2)},p_n,q_n)}-t_{m,n-1}^{(N^{(2)},p_n,q_n)}-t_{m-1,n}^{(N^{(2)},p_n,q_n)}+t_{m-1,n-1}^{(N^{(2)},p_n,q_n)}\right|^k$$

متقاربة.

وبحيث يتحقق:

$$t_{m,-1}^{(N^{(2)},p_n,q_n)} = t_{-1,n}^{(N^{(2)},p_n,q_n)} = t_{-1,-1}^{(N^{(2)},p_n,q_n)} = 0 \; ; \; m,n = 0,1,2,\dots$$

ونكتب باختصار:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n} \in \left|N^{(2)},p_n,q_n\right|_k$$

ونقصد بذلك أن المتسلسلة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$ قابلة للجمع وفق طريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة المثقّلة $\left|N^{(2)},p_n,q_n\right|_k$.

بوضع $k=1$ نحصل على الطريقة $\left|N^{(2)},p_n,q_n\right|$.

17.3.1. طرائق سيزارو (C,m) [10]:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع بطريقة سيزارو $(C,1)$ إلى المجموع s إذا كانت $\lim_{n\to\infty} t_n^{(C,1)} = s$ حيث إن:

$$t_n^{(C,1)} = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}^{1} S_k \quad ; S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$$c_{n,k}^{1} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & ; 0 \le k \le n \\ 0 & ; \quad k > n \end{cases}$$

وتكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع بطريقة سيزارو $(C,2)$ إلى المجموع s إذا كانت $\lim_{n\to\infty} t_n^{(C,2)} = s$ حيث إن: $t_n^{(C,2)} = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}^{2} S_k$

$$c_{n,k}^{2} = \begin{cases} \dfrac{2(n-k+1)}{n+1} & ; 0 \le k \le n \\ 0 & ; \quad k > n \end{cases}$$

إن طرائق سيزارو $(C,m)\; ; m \in \mathbb{N}$ تعرّف بالشكل المصفوفي الآتي:

$$t_n^{(C,m)} = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}^{m} S_k$$

حيث إن:

$$c_{n,k}^{m}=\begin{cases}\dfrac{E_{n-k}^{m-1}}{E_{n}^{m}} & ;0\le k\le n\\ 0 & ;\ k>n\end{cases}$$

$$E_{n-k}^{m-1}=\binom{m+n-k-1}{n-k}\ ,E_{n}^{m}=\binom{m+n}{n}=\binom{m+n}{m}$$

وتكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ قابلة للجمع بطريقة سيزارو المطلقة المثقّلة $|C,m|_k$ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}\left|t_n^{(C,m)}-t_{n-1}^{(C,m)}\right|^k<\infty$$

ملاحظة (9) [10]: تؤول طريقة نيورلند (N,p_n) إلى طريقة سيزارو (C,α) إذا كان:

$$P_n=\binom{\alpha+n}{n}=C_n^{\alpha+n}\quad ,\ p_n=\binom{\alpha+n-1}{n}=C_n^{\alpha+n-1}$$

من أجل $\alpha=1$:

$$P_n=\binom{n+1}{n}=\frac{(n+1)!}{n!\,1!}=n+1$$

$$p_n=\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!\,0!}=1$$

أي أن: $(C,1)=(N,1)$

من أجل $\alpha=2$:

$$P_n=\binom{n+2}{n}=\frac{(n+2)!}{n!\,2!}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$$p_n=\binom{n+1}{n}=\frac{(n+1)!}{n!\,1!}=n+1$$

أي أن: $(C,2)=(N,n+1)$

من أجل $\alpha=3$:

$$P_n=\binom{n+3}{n}=\frac{(n+3)!}{n!\,3!}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!}$$

$$p_n = \binom{n+2}{n} = \frac{(n+2)!}{n!\,2!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

أي أن: $(C,3) = \left(N, \frac{(n+2)(n+1)}{2}\right)$

18.3.1. علاقة فوبيني للمجاميع [19]:

$$\sum_{i=0}^{m} f(i) \sum_{j=0}^{n} g(j) = \sum_{j=0}^{m} g(j) \sum_{i=j}^{m} f(i)$$

الآن لنتذكر التعريف الآتي: لتكن A مصفوفة مثلثية سفلى غير منتهية، عندئذٍ نقول إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع إلى المجموع s بالطريقة المصفوفية A إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} t_n^A = s$$

حيث إن:

$$t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}.S_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k}.S_{n-k}$$

ملاحظة (10): في التعريف السابق يمكننا أن نكتب:

$$t_n^A = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{n,k}.u_k \quad ; \quad \bar{a}_{n,k} = \sum_{r=k}^{n} a_{n,r}$$

وذلك لأن:

$$t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}.S_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}.\sum_{r=0}^{k} u_r = \sum_{r=0}^{n} u_r \sum_{k=r}^{n} a_{n,k}$$
$$= \sum_{r=0}^{n} \bar{a}_{n,r}.u_r = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{n,k}.u_k$$

وبفرض أن:

$$\hat{a}_{n,k} = \Delta_1 \bar{a}_{n-1,k} = \bar{a}_{n,k} - \bar{a}_{n-1,k}$$

ملاحظة (11): $\hat{a}_{n,n} = \bar{a}_{n,n} - \underbrace{\bar{a}_{n-1,n}}_{=0} = \bar{a}_{n,n}$

$$\bar{a}_{n-1,n} = \sum_{r=n}^{n} a_{n-1,r} \quad , (n = 1 \Rightarrow \sum_{r=1}^{1} a_{0,r} = a_{0,1} = 0)$$

كون المصفوفة مثلثية سفلى.

ملاحظة (12):

$$\bar{a}_{n,n} = \sum_{r=n}^{n} a_{n,r} = a_{n,n}$$

إذاً: $\hat{a}_{n,n} = \bar{a}_{n,n} = a_{n,n}$

كما أن:

$$\hat{a}_{0,0} = \bar{a}_{0,0} = a_{0,0}$$

$$\hat{a}_{1,1} = \bar{a}_{1,1} = a_{1,1}$$

كما أن:

$$\Delta_1 t_n^A = \sum_{k=0}^{n} \hat{a}_{n,k} u_k$$

وذلك لأن:

$$\Delta_1 t_n^A = t_n^A - t_{n-1}^A = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{n,k}. u_k - \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{n-1,k}. u_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\bar{a}_{n,k} - \bar{a}_{n-1,k}). u_k = \sum_{k=0}^{n} \hat{a}_{n,k} u_k$$

<u>الآن:</u> وفي التطبيقات الآتية سنقوم بتوضيح كل من $c_{n,k}$ ، $\bar{c}_{n,k}$ ، $\hat{c}_{n,k}$ لمصفوفات سيزارو $(C,1)$ و$(C,2)$ و$(C,3)$:

تطبيق 1: مصفوفة سيزارو $(C,1)$:

من المعلوم أن:

$$t_n^{(C,1)} = \frac{1!}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}^{1}.S_k$$

حيث:

$$C_{n,k}^{1} = \frac{1}{n+1}$$

كما أن:

$$t_n^{(C,1)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{C_{n,k}^{1}}.u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-k+1}{n+1}\right)u_k$$

حيث:

$$\overline{C_{n,k}^{1}} = \sum_{r=k}^{n} C_{n,r}^{1} = \sum_{r=k}^{n}\frac{1}{n+1} = \frac{\sum_{r=k}^{n} 1}{n+1} = \frac{n-k+1}{n+1}$$

$$\widehat{C_{n,k}^{1}} = \overline{C_{n,k}^{1}} - \overline{C_{n-1,k}^{1}} = \frac{n-k+1}{n+1} - \frac{n-k}{n}$$

$$= \frac{n(n-k+1)-(n+1)(n-k)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2-nk+n-n^2-n+nk+k}{n(n+1)} = \frac{k}{n(n+1)}$$

لاحظ أن:

$$C_{n,n}^{1} = \frac{1}{n+1} \quad ,\overline{C_{n,n}^{1}} = \frac{1}{n+1} \quad ,\widehat{C_{n,n}^{1}} = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

أي أن:

$$C_{n,n}^{1} = \overline{C_{n,n}^{1}} = \widehat{C_{n,n}^{1}}$$

تطبيق 2: لتكن مصفوفة سيزارو $(C,2)$:

$$t_n^{(C,2)}=\frac{2!}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)S_k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_{n,k}^{2}.S_k \qquad ;\ C_{n,k}^{2}=\frac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)}$$

كما أن:

$$t_n^{(C,2)}=\sum_{k=0}^{n}\overline{C_{n,k}^{2}}.u_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(n+1)(n+2)}.u_k$$

حيث: $\sum_{k=0}^{n}1=n+1$ و $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ وبالتالي:

$$\overline{C_{n,k}^{2}}=\sum_{r=k}^{n}C_{n,r}^{2}=\sum_{r=k}^{n}\frac{2(n-r+1)}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\widehat{C_{n,k}^{2}}=\overline{C_{n,k}^{2}}-\overline{C_{n-1,k}^{2}}$$

$$=\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(n+1)(n+2)}-\frac{(n-k)(n-k+1)}{n(n+1)}$$

$$=\frac{n(n-k+1)(n-k+2)-(n+2)(n-k)(n-k+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{(n-k+1)\{n(n-k+2)-(n+2)(n-k)\}}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{(n-k+1)\{n^2-nk+2n-n^2+nk-2n+2k\}}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{2k(n-k+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

لاحظ أن:

$$C_{n,n}^{2}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\overline{C_{n,n}^{2}} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\widehat{C_{n,n}^{2}} = \frac{2n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2!}{(n+1)(n+2)}$$

أي أن:

$$C_{n,n}^{2} = \overline{C_{n,n}^{2}} = \widehat{C_{n,n}^{2}}$$

<u>**تطبيق 3:**</u> مصفوفة سيزارو $(C,3)$:

$$t_n^{(C,3)} = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}^{3}.S_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{3(n-k+1)(n-k+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} S_k$$

حيث:

$$C_{n,k}^{3} = \frac{3(n-k+1)(n-k+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

كما أن:

$$t_n^{(C,3)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{C_{n,k}^{3}}.u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}.u_k$$

حيث:

$$\overline{C_{n,k}^{3}} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\widehat{C_{n,k}^{3}} = \overline{C_{n,k}^{3}} - \overline{C_{n-1,k}^{3}}$$

$$= \frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3) - (n+3)(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\{n(n-k+3)-(n+3)(n-k)\}}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\{n^2-nk+3n-n^2+nk-3n+3k\}}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{3k(n-k+1)(n-k+2)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

لاحظ أن:

$$C_{n,n}^{3} = \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\overline{C_{n,n}^{3}} = \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$\widehat{C_{n,n}^{3}} = \frac{3n(1)(2)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{3!}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

أي أن:

$$C_{n,n}^{3} = \overline{C_{n,n}^{3}} = \widehat{C_{n,n}^{3}}$$

<u>نتائج:</u>

$$\widehat{C_{n,k}^{1}} = \frac{k}{n(n+1)}$$

$$\widehat{C_{n,k}^{2}} = \frac{2k(n-k+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\widehat{C_{n,k}^{3}} = \frac{3k(n-k+1)(n-k+2)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

وبالمثل نجد أن:

$$\widehat{C_{n,k}^{m}} = \frac{mk(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-k+m-1)}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}$$

تطبيق 4:

$$\overline{(C,2)} = \left(\overline{C_{n,k}^{2}}\right)$$

حيث:

$$\overline{C_{n,k}^{2}} = \begin{cases} \dfrac{(n-k+1)(n-k+2)}{(n+1)(n+2)} & ; 0 \le k \le 2n+3 \\ 0 & ; k > 2n+3 \end{cases}$$

وبالتالي وبتعويض قيم k, n نجد أن:

$$\overline{(C,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \cdots \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & & & & \cdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & & & \cdots \\ 1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{5} & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ 1 & \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} & \frac{(n-1)n}{(n+1)(n+2)} & \cdots & \frac{2\times 2}{(n+1)(n+2)} & \frac{1\times 2}{(n+1)(n+2)} & \underbrace{0}_{k=n+1} & \underbrace{0}_{k=n+2} & \frac{2\times 1}{(n+1)(n+2)} & \cdots 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \end{pmatrix}$$

$$n = k = 0: \quad \overline{C_{0,0}^{2}} = \frac{(0-0+1)(0-0+2)}{(0+1)(0+2)} = 1$$

$$n = 0, k = 1: \quad \overline{C_{0,1}^{2}} = \frac{(0-1+1)(0-1+2)}{(0+1)(0+2)} = 0$$

وهكذا...

$$\overline{C_{n,0}^{2}} = \frac{(n-0+1)(n-0+2)}{(n+1)(n+2)} = 1$$

$$\overline{C_{n,2(n+1)+1}^{2}} = \overline{C_{n,2n+3}^{2}} = \frac{(n-2n-3+1)(n-2n-3+2)}{(n+1)(n+2)} = 1$$

أي أن: $\overline{C_{n,0}^{2}} = \overline{C_{n,\underbrace{2n+3}_{2(n+1)+1}}^{2}} = 1$

ومن المعلوم أن: $C_{n,n}^{2} = \overline{C_{n,n}^{2}}$

وبالتالي فإن: $\overline{C_{n,n+1}^2} = \overline{C_{n,n+2}^2} = 0$

وذلك لأن:

$$\overline{C_{n,n+1}^2} = \frac{(n-n-1+1)(n-n-1+2)}{(n+1)(n+2)} = 0$$

$$\overline{C_{n,n+2}^2} = \frac{(n-n-2+1)(n-n-2+2)}{(n+1)(n+2)} = 0$$

الفصل الثاني

قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بالطريقة المصفوفية المطلقة المثقّلة

On absolute weighted matrix summability of orthogonal series

في هذه الفقرة سنقوم بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة البسيطة بالطريقة المصفوفية المطلقة، وسنبين أنها تؤدي إلى الطريقة المصفوفية العادية، ثم في الفقرة الآتية سنقوم بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة بحالتها العامة المثقّلة.

1.2. قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة البسيطة بالطريقة المصفوفية المطلقة المثقّلة:

1.1.2. تعريف الطريقة المصفوفية المطلقة المثقّلة $|A|_\lambda$ حيث $1 \le \lambda$ [16]:

لتكن $A = \left(a_{n,k}\right)$ مصفوفة مثلثية سفلى غير منتهية و (S_n) متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. وبفرض أن: $t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\ S_k$

عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع $|A|_\lambda\ , 1 \le \lambda$ إذا كان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |t_n^A - t_{n-1}^A|^\lambda < \infty$$

الآن: لتكن $A = \left(a_{n,k}\right)$ تحقق شروط توبلتز – سيلفرمان النظامية.

ومن المعلوم أن الطريقة المصفوفية المطلقة $|A|$ تكون نظامية إذا كان [20]:

$$\{S_n\} \in BV \quad \Leftrightarrow \quad \{t_n^A\} \in BV$$

بالاعتماد على ما سبق سنقوم بإثبات المبرهنة الآتية:

مبرهنة (1): الشرط اللازم لتكون الطريقة المصفوفية المطلقة المثقّلة $|A|_\lambda$ (حيث $1 \le \lambda$) نظامية هو أن يتحقق:

1. $ka_{n,k} = n\hat{a}_{n,k}$ حيث $0 \le k \le n$

2. $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n,k} = \frac{1}{k}$

حيث إن: $\bar{a}_{n,k} = \sum_{r=k}^{n} a_{n,r}$, $\hat{a}_{n,k} = \bar{a}_{n,k} - \bar{a}_{n-1,k}$

الإثبات: بفرض أن الشرطين 1 و2 محققان من أجل المصفوفة النظامية $A = \left(a_{n,k}\right)$ ،
ولنثبت أن الطريقة المصفوفية المطلقة المثقّلة $|A|_\lambda$ نظامية:

لتكن المتتالية $\{S_n\}$ محققة للعلاقة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |S_n - S_{n-1}|^\lambda < \infty \quad \ldots (2.1)$$

ولنثبت أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |t_n^A - t_{n-1}^A|^\lambda < \infty \quad \ldots (2.2)$$

لدينا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |t_n^A - t_{n-1}^A|^\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |n(t_n^A - t_{n-1}^A)|^\lambda$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\tau_n^A|^\lambda$$

حيث إن:

$$\tau_n^A = n(t_n^A - t_{n-1}^A)$$

وبالاعتماد على الشرط 1 $(ka_{n,k} = n\hat{a}_{n,k})$ نحصل على:

$$\tau_n^A = n(t_n^A - t_{n-1}^A) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} k u_k$$

لأن:

$$l_2=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}ku_k=\sum_{k=0}^{n}n\hat{a}_{n,k}u_k$$

$$=n\sum_{k=0}^{n}\hat{a}_{n,k}u_k=n\sum_{k=0}^{n}(\bar{a}_{n,k}-\bar{a}_{n-1,k})u_k$$

$$=n\left(\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_{n,k}u_k-\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_{n-1,k}u_k\right)$$

$$=n\left(\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}S_k-\sum_{k=0}^{n-1}\bar{a}_{n-1,k}u_k-\underbrace{\bar{a}_{n-1.n}}_{=0}u_n\right)$$

$$=n\left(\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}S_k-\sum_{k=0}^{n-1}\bar{a}_{n-1,k}u_k\right)$$

$$=n\left(\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}S_k-\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-1,k}S_k\right)$$

$$=n(t_n^A-t_{n-1}^A)=l_1$$

إذاً:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda-1}|t_n^A-t_{n-1}^A|^{\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\tau_n^A|^{\lambda}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}ku_k\right|^{\lambda}$$

وحسب متراجحة هولدر (بوضع $p=\lambda\,,q=\frac{\lambda}{\lambda-1}$) للمجاميع نحصل على:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\lambda-1}|t_n^A-t_{n-1}^A|^{\lambda}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}k^{\lambda}|u_k|^{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\right)^{\lambda-1}$$

لكن: $\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}=1$ (وذلك لأن المصفوفة A نظامية)

وبالتالي وبتطبيق علاقة فوبيني نجد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1}|t_n^A - t_{n-1}^A|^{\lambda} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} k^{\lambda} |u_k|^{\lambda}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^{\lambda} |u_k|^{\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n,k}$$

وبالاعتماد على الشرط 2 $\left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n,k} = \frac{1}{k}\right)$ يكون لدينا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1}|t_n^A - t_{n-1}^A|^{\lambda} \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{\lambda} |u_k|^{\lambda} \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^{\lambda-1} |u_k|^{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |u_n|^{\lambda}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |S_n - S_{n-1}|^{\lambda} < \infty$$

وذلك حسب العلاقة (1). وهو المطلوب إثباته.

2.1.2. تعريف آخر للطريقة المصفوفية المطلقة المثقّلة $|A|_{\lambda}, \lambda \geq 1$ [13]:

لتكن $A = (a_{n,k})$ مصفوفة مثلثية سفلى غير منتهية و (S_n) متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. وبفرض أن: $t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\ S_k$

عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع $|A|_{\lambda}, \lambda \geq 1$ إذا كان:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n,n}|^{1-\lambda} |t_n^A - t_{n-1}^A|^{\lambda} < \infty$$

حيث إن:

$$|A|_{\lambda}|_{\lambda=1} = |A|$$

ملاحظة (1): إن طريقة نيورلند المعممة (N, p, q) تعدّ حالة خاصة من الطريقة المصفوفية وذلك بوضع:

$$t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \; S_k$$

$$a_{n,v} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-v} q_v}{R_n} & ; \; 0 \le v \le n \\ 0 & ; \quad v > n \end{cases}$$

ملاحظة (2): في طريقة نيورلند المعممة المطلقة المثقّلة يكون:

$$a_{n,n} = a_{n,v}\big|_{v=n} = \frac{p_{n-v} q_v}{R_n}\bigg|_{v=n} = \frac{p_{n-n} q_n}{R_n} = \frac{p_0 q_n}{R_n}$$

$$\left(a_{n,n}\right)^{1-\lambda} = \left(\frac{p_0 q_n}{R_n}\right)^{1-\lambda} = p_0^{1-\lambda} \left(\frac{q_n}{R_n}\right)^{1-\lambda} = p_0^{1-\lambda} \left(\frac{R_n}{q_n}\right)^{\lambda-1} = M \left(\frac{R_n}{q_n}\right)^{\lambda-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_{n,n}\right|^{1-\lambda} |t_n^A - t_{n-1}^A|^{\lambda} < \infty$$

$$\Leftrightarrow M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_n}{q_n}\right)^{\lambda-1} |t_n^A - t_{n-1}^A|^{\lambda} < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_n}{q_n}\right)^{\lambda-1} |t_n^A - t_{n-1}^A|^{\lambda} < \infty$$

وهو تعريف آخر لطريقة نيورلند المعممة المطلقة المثقّلة.

ملاحظة (3): في طريقة سيزارو المطلقة المثقّلة $|C,1|_k$:

$$a_{n,v} = \frac{1}{n+1} \;\Rightarrow\; a_{n,n} = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \; \left|a_{n,n}\right|^{1-\lambda} = \left|\frac{1}{n+1}\right|^{1-\lambda} = (n+1)^{\lambda-1}$$

ملاحظة (4): في طرائق سيزارو $P_0 = p_0 = 1$ لهذا فإن $M = 1^{1-\lambda} = 1$.

<u>الآن:</u> من أجل المصفوفة $A \coloneqq (a_{n,v})$ لدينا الرموز الآتية:

$$\bar{A} \coloneqq (\bar{a}_{n,v}) \;;\; \bar{a}_{n,v} = \sum_{i=v}^{n} a_{n,i} \quad ; n, i = 0,1,2, \ldots$$

$$\hat{A} \coloneqq (\hat{a}_{n,v}) \;;\; \hat{a}_{n,v} = \bar{a}_{n,v} - \bar{a}_{n-1,v} \quad ; n = 1,2, \ldots$$

$$\hat{a}_{n,n} = \bar{a}_{n,n} = a_{n,n}$$

$$\hat{a}_{0,0} = \bar{a}_{0,0} = a_{0,0}$$

مبرهنة (2) [13]: إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |a_{n,n}|^{\frac{2}{k}-2} \sum_{j=0}^{n} |\hat{a}_{n,j}|^2 |c_j|^2 \right\}^{\frac{k}{2}} \qquad \ldots (2.3)$$

متقاربة من أجل $1 \le k \le 2$، فإن المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ تكون قابلة للجمع بالطريقة $|A|_k$ تقريباً في كل مكان.

<u>تذكرة:</u> بيّنا في الفصل الأول أنه دائماً يمكننا كتابة:

$$\bar{\Delta} t_n^A(x) = t_n^A(x) - t_{n-1}^A(x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{a}_{n,k} u_k$$

حيث إن:

$$t_n^A(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{n,k} u_k(x)$$

مبرهنة (3) [13]: ليكن $1 \le k \le 2$ و لتكن $\{\Omega(n)\}$ متتالية موجبة والمتتالية $\left\{\frac{\Omega(n)}{n}\right\}$ متناقصة بحيث تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\Omega(n)}$ متقاربة.

عندئذٍ إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\Omega^{\frac{2}{k}-1}(n)H^{(k)}(A;n) \qquad \dots(2.4)$$

متقاربة، فإن المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ تكون قابلة للجمع $|A|_k$ تقريباً في كل مكان، حيث إن $H^{(k)}(A;j)$ معرفة بالشكل:

$$H^{(k)}(A;j) \coloneqq \frac{1}{j^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{n=j}^{\infty} n^{\frac{2}{k}}\left|na_{n,n}\right|^{\frac{2}{k}-2}\left|\hat{a}_{n,j}\right|^2 \qquad \dots(2.5)$$

ملاحظة (5): من أجل طريقة نيورلند المعممة $a_{n,v}=\frac{p_{n-v}q_v}{R_n}$ لدينا $a_{n,n}=\frac{p_0q_n}{R_n}$

$$\hat{a}_{n,v}=\bar{a}_{n,v}-\bar{a}_{n-1,v}$$

$$=\sum_{j=v}^{n}a_{n,j}-\sum_{j=v}^{n-1}a_{n-1,j}$$

$$=\frac{1}{R_n}\sum_{j=v}^{n}p_{n-j}q_j-\frac{1}{R_{n-1}}\sum_{j=v}^{n-1}p_{n-1-j}q_j$$

$$=\frac{R_n^v}{R_n}-\frac{R_{n-1}^v}{R_{n-1}}$$

وبالتالي فإن:

$$\hat{a}_{n,j}=\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}$$

<u>نتائج:</u>

من المعلوم في طريقة سيزارو $(C,2)$ أن:

$$C_{n,k}^2=\frac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)} \quad ,C_{n,n}^2=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\overline{C_{n,k}^2}=\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\widehat{C_{n,k}^{2}}=\frac{2k(n-k+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

وبالتالي وبالاعتماد على المبرهنة 2 نستنتج صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة (4): ليكن $1 \le k \le 2$ ، إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left|\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right|^{\frac{2}{k}-2}\sum_{j=0}^{n}\left|\frac{2j(n-j+1)}{n(n+1)(n+2)}\right|^{2}\left|c_j\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}} \quad \dots(2.6)$$

متقاربة، فإن المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ تكون قابلة للجمع $|C,2|_k$ تقريباً في كل مكان.

يمكن كتابة الشرط السابق كالآتي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{n^{k}(n+1)(n+2)}\right)^{\frac{2}{k}}\sum_{j=0}^{n} j^{2}(n-j+1)^{2}\left|c_j\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}} \quad \dots(2.7)$$

3.1.2. تعريف [21] :

لتكن B, A طريقتين من طرائق قابلية الجمع. عندئذٍ إذا كانت كل متسلسلة قابلة للجمع وفق A إلى مجموع منتهي، أيضاً هي قابلة للجمع وفق B إلى نفس المجموع، فإن: $A \subseteq B$

ونقول عندئذٍ إن: B أقوى تماماً (totally stronger) من A. أو نكتب: (B t.s A)

علاوةً على ذلك يكون، (A تؤدي إلى B): [24]

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n=\pm\infty\ (A) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n=\pm\infty\ (B)$$

أي أنه إذا كانت المتسلسلة المتباعدة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ قابلة للجمع وفق الطريقة A ، فهي أيضاً قابلة للجمع وفق الطريقة B.

4.1.2. تعريف [21]:

إذا كانت كل متسلسلة قابلة للجمع وفق $|A|$ هي قابلة للجمع أيضاً وفق $|B|$، يكون:

$$|A| \subseteq |B|$$

5.1.2. تعريف [21]:

نقول إن الطريقة A نظامية مطلقاً إذا كانت كل متسلسلة متقاربة مطلقاً هي متسلسلة قابلة للجمع $|A|$.

ملاحظة (6):

كل متتالية ذات تغيرات محدودة هي متتالية متقاربة، أي أن النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^A$ موجودة ومحدودة، وبالتالي فإن كل متسلسلة قابلة للجمع وفق الطريقة المصفوفية المطلقة $|A|$ تكون قابلة للجمع وفق الطريقة المصفوفية (A)، أي أن الطريقة المصفوفية المطلقة تؤدي إلى الطريقة المصفوفية العادية.

ونكتب عندئذٍ: $|A| \subseteq A$

الطريقة المصفوفية (A)	**الطريقة المصفوفية المطلقة $\|A\|$**
$\lim\limits_{n\to\infty} t_n^A = s$	t_n متتالية ذات تغيرات محدودة أي: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|t_n^A - t_{n-1}^A\| < \infty$
تعطينا مجموع المتسلسلة (المتباعدة) وفق هذه الطريقة (A) وهو النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^A$	لا تعطينا مجموع المتسلسلة المتباعدة وفق هذه الطريقة $\|A\|$
	المجموع يعطى من النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^A$ وذلك من كون الطريقة المصفوفية المطلقة تؤدي إلى الطريقة المصفوفية العادية

مبرهنة (5): لتكن B, A طريقتين مصفوفيتين نظاميتين من طرائق قابلية الجمع، عندئذٍ يكون:

$$|A| \subseteq |B| \Rightarrow A \subseteq B \qquad \dots (2.8)$$

الإثبات: إن $|A| \subseteq |B|$ تعني أنه إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty}|t_n^A - t_{n-1}^A| < \infty$ فإن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n^B - t_{n-1}^B| < \infty$$

أي أنه من تقارب $\sum_{n=1}^{\infty}|t_n^A - t_{n-1}^A|$ ينتج تقارب $\sum_{n=1}^{\infty}|t_n^B - t_{n-1}^B|$

$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n^A - t_{n-1}^A|$ (قيمة المتسلسلة عدد موجب محدود)

$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n^B - t_{n-1}^B|$ (قيمة المتسلسلة عدد موجب محدود)

$$\Rightarrow 0 < \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\left|t_k^B - t_{k-1}^B\right|}{\sum_{k=1}^{n}\left|t_k^A - t_{k-1}^A\right|} < \infty$$

ولنثبت أنه من تقارب $t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}S_k$ ينتج تقارب $t_n^B = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}S_k$.

نعلم من اختبارات المتسلسلات الموجبة أنه إذا كان:

$$0 < \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n} < \infty$$

تكون عندئذٍ المتسلسلتان $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ من طبيعة واحدة.

أي لنثبت أن:

$$0 < \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n,k}S_k}{a_{n,k}S_k} < \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n,k}S_k}{a_{n,k}S_k} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n,k}}{a_{n,k}}$$

وفي أطروحتي أتعامل مع مصفوفات ذات قيم موجبة (مثل مصفوفات سيزارو، مصفوفات نيورلند) وبالتالي:

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n,k}S_k}{a_{n,k}S_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n,k}}{a_{n,k}} < \infty$$

وبهذا يتم المطلوب.

توصيات ومقترحات: أوصي طلاب الدراسات العليا بتكملة ما وصلت إليه في المبرهنة (5) وإثبات صحتها من أجل أي مصفوفتين غير موجبتين بالضرورة.

نتائج:

1. إذا كانت $|N,p,\alpha| \subseteq |N,q,\beta|$ فإن:

$$(N,p,\alpha) \subseteq (N,q,\beta)$$

2. إذا كانت $|C,\alpha,\beta| \subseteq |C,\gamma,\delta|$ فإن:

$$(C,\alpha,\beta) \subseteq (C,\gamma,\delta)$$

3. إذا كانت $(C,\alpha,\beta) \nsubseteq (C,\gamma,\delta)$ فإن:

$$|C,\alpha,\beta| \nsubseteq |C,\gamma,\delta|$$

4. إذا كانت $(N,p,\alpha) \nsubseteq (N,q,\beta)$ فإن:

$$|N,p,\alpha| \nsubseteq |N,q,\beta|$$

ملاحظة (7): من المبرهنة السابقة وجدنا أنه إذا كان $|B| \subseteq |A|$ فإن $A \subseteq B$

لكن $|A| \subseteq A$ و $|B| \subseteq B$ بالتالي فإن:

$$|A| \subseteq A \subseteq B$$

$$|A| \subseteq |B| \subseteq B$$

ونمثل ذلك بالمخطط الآتي:

$$\begin{tikzcd}
& B & \\
\lvert B \rvert \arrow[ur] & & A \arrow[ul] \\
& \lvert A \rvert \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

مبرهنة (6) [15]: إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو المطلقة المثقّلة $|C,\alpha|_k$ ، فهي قابلة للجمع وفق طريقة سيزارو المطلقة المثقّلة $|C,\beta|_k$ من أجل $\beta > \alpha > -1$ وحيث $1 \leq k$.

ملاحظة (8): من المبرهنة السابقة نجد أن: $|C,1| \subseteq |C,2|$ وعندئذٍ يكون:

$$(C,1) \subseteq (C,2)$$

لكن $(C,1) \subseteq |C,1|$ و $(C,2) \subseteq |C,2|$ بالتالي فإن:

$$|C,1| \subseteq (C,1) \subseteq (C,2)$$

$$|C,1| \subseteq |C,2| \subseteq (C,2)$$

ونمثل ذلك بالمخطط الآتي:

$$\begin{tikzcd}
 & (C,2) & \\
|C,2| \arrow[ur] & & (C,1) \arrow[ul] \\
 & |C,1| \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

ملاحظة (9): وكتعميم للملاحظة (8) وبفرض أن: $\beta > \alpha > -1$ يكون:

$$|C,\alpha| \subseteq (C,\alpha) \subseteq (C,\beta)$$

$$|C,\alpha| \subseteq |C,\beta| \subseteq (C,\beta)$$

أي:

$$\beta \geq \alpha > -1 \Rightarrow \begin{cases} (C,\alpha) \subseteq (C,\beta) \\ |C,\alpha| \subseteq |C,\beta| \end{cases}$$

<u>الآن:</u> لندرس قابلية جمع متسلسلة فورييه للدالة $f(x) = \frac{1+\cos x}{4-2\cos x}$ بالطريقة المصفوفية المطلقة $|A|$ من أجل المصفوفة المثلثية السفلى غير المنتهية: $A = (a_{n,k}) = \left(\frac{1}{n^2}\right)$:

<u>تطبيق:</u> لنأخذ الدالة $f(x) = \frac{1+\cos x}{4-2\cos x}$ المعرفة على المجال $[-\pi,\pi]$.

إن هذه الدالة مستمرة ومحدودة على المجال $[-\pi,\pi]$ وبالتالي كمولة لوبيغياً على هذا المجال، كما أنها دورية دورها 2π على المجال نفسه.

إن متسلسلة فورييه للدالة f على المجال السابق تعطى بالعلاقة [26]:

$$f(x)=\frac{1+\cos x}{4-2\cos x}\sim\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}\cos nx$$

حيث إن:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos x}{4-2\cos x}dx=\sqrt{3}-1$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos x}{4-2\cos x}\cos nx\,dx=\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}\ ;n=1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos x}{4-2\cos x}\sin nx\,dx=0\quad;n=1,2,\dots$$

ولندرس قابلية جمع متسلسلة فورييه لهذه الدالة بالطريقة المصفوفية المطلقة من أجل المصفوفة المثلثية السفلى غير المنتهية: $A=\left(a_{n,k}\right)=\left(\frac{1}{n^2}\right)$،

أي لندرس هل $\sum_{n=1}^{\infty}\left|t_n^A-t_{n-1}^A\right|<\infty$؟

لدينا:

$$t_n^A(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}S_k(x)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\sqrt{3}\sum_{r=1}^{k}\left(2-\sqrt{3}\right)^{r}\cos rx\right\}$$

$$t_n^A(x)-t_{n-1}^A(x)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\sqrt{3}\sum_{r=1}^{k}\left(2-\sqrt{3}\right)^{r}\cos rx\right\}$$

$$-\frac{1}{(n-1)^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\sqrt{3}\sum_{r=1}^{k}\left(2-\sqrt{3}\right)^{r}\cos rx\right\}$$

$$t_n^A(x) - t_{n-1}^A(x) =$$

$$= \frac{1}{n^2(n-1)^2} \times \left\{ (n-1)^2 \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \sqrt{3} \sum_{r=1}^{k} \left(2-\sqrt{3}\right)^r \cos rx \right\} - n^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \sqrt{3} \sum_{r=1}^{k} \left(2-\sqrt{3}\right)^r \cos rx \right\} \right\}$$

$$t_n^A(x) - t_{n-1}^A(x) =$$

$$= \frac{1}{n^2(n-1)^2} \left\{ (n-1)^2 \left\{ \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \sqrt{3} \sum_{r=1}^{n} \left(2-\sqrt{3}\right)^r \cos rx \right\} + (n-1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \sqrt{3} \sum_{r=1}^{k} \left(2-\sqrt{3}\right)^r \cos rx \right\} - n^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \sqrt{3} \sum_{r=1}^{k} \left(2-\sqrt{3}\right)^r \cos rx \right\} \right\}$$

$$t_n^A(x) - t_{n-1}^A(x) =$$

$$= \frac{1}{n^2(n-1)^2} \left\{ (n-1)^2 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \sqrt{3} \sum_{r=1}^{n} \left(2-\sqrt{3}\right)^r \cos rx \right) - (2n-1) \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \sqrt{3} \sum_{r=1}^{k} \left(2-\sqrt{3}\right)^r \cos rx \right] \right\}$$

وباستخدام متراجحة المثلث: $|x+y| \le |x| + |y|$ وبما أن: $|a.b| = |a|.|b|$ نجد أن:

$$|t_n^A(x) - t_{n-1}^A(x)| \le$$

$$\le \frac{1}{n^2(n-1)^2} \left\{ (n-1)^2 \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \sqrt{3} \left| \sum_{r=1}^{n} \left(2-\sqrt{3}\right)^r \cos rx \right| \right) + (2n-1) \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \sqrt{3} \sum_{r=1}^{k} \left(2-\sqrt{3}\right)^r \cos rx \right| \right\}$$

$$\leq \frac{1}{n^2(n-1)^2}\Bigg\{(n-1)^2\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\sqrt{3}(n-1)^2\sum_{r=1}^{n}\left(2-\sqrt{3}\right)^r|\cos rx|$$

$$+(2n-1)\frac{\sqrt{3}-1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}1$$

$$+(2n-1)\sqrt{3}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=1}^{k}\left(2-\sqrt{3}\right)^r|\cos rx|\Bigg\}$$

وبالتالي فإن:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|t_n^A(x)-t_{n-1}^A(x)|dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2(n-1)^2}\Bigg\{(n-1)^2\frac{\sqrt{3}-1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx$$

$$+\sqrt{3}(n-1)^2\sum_{r=1}^{n}\left(2-\sqrt{3}\right)^r\int_{-\pi}^{\pi}|\cos rx|dx$$

$$+(2n-1)\frac{\sqrt{3}-1}{2}.n\int_{-\pi}^{\pi}dx$$

$$+(2n-1)\sqrt{3}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{r=1}^{k}\left(2-\sqrt{3}\right)^r\int_{-\pi}^{\pi}|\cos rx|dx\Bigg\}$$

لكن: $r \geq 1\;;\; \int_{-\pi}^{\pi}|\cos rx|dx = \left[\frac{\sin rx}{r}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ وبالتالي فإن:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|t_n^A(x)-t_{n-1}^A(x)|dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2(n-1)^2}\Bigg\{(n-1)^2\frac{\sqrt{3}-1}{2}.(2\pi)+0+(2n-1)\frac{\sqrt{3}-1}{2}.n.(2\pi)$$

$$+0\Bigg\}$$

$$= \left(\sqrt{3}-1\right)\pi \frac{1}{n^2(n-1)^2}\{(n-1)^2 + (2n-1).n\}$$

$$= \left(\sqrt{3}-1\right)\pi \frac{3n^2-3n+1}{n^2(n-1)^2}$$

وبالتالي فإن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |t_n^A(x) - t_{n-1}^A(x)|dx \leq \left(\sqrt{3}-1\right)\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-3n+1}{n^2(n-1)^2}$$

إن المتسلسلة في الطرف الأيمن متقاربة حسب اختبار نهاية النسبة مع المتسلسلة الريمانية المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ وبالتالي: $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |t_n^A(x) - t_{n-1}^A(x)|dx < \infty$

عندئذٍ وبحسب تمهيدية بيبو–ليفي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n^A(x) - t_{n-1}^A(x)|$ متقاربة تقريباً في كل مكان، وبالتالي فإن متسلسلة فورييه للدالة $f(x) = \frac{1+\cos x}{4-2\cos x}$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المطلقة $|A|$ حيث $A = \left(\frac{1}{n^2}\right)$ مصفوفة مثلثية سفلى غير منتهية.

2.2. قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة المثقّلة:

وجدنا في الفصل الأول من هذه الأطروحة أن تحويل الطريقة المصفوفية المضاعفة يعطى بالعلاقة:

$$t_{m,n}^{(A,B)} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{m,i} b_{n,j} S_{i,j}$$

حيث: $S_{i,j} = \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} u_{k,l}$ هي متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$.

ولنضع الرموز الآتية:

$$\bar{a}_{m,i} = \sum_{k=i}^{m} a_{m,k} \quad , \quad \bar{b}_{n,j} = \sum_{l=j}^{n} b_{n,l} \quad ; m,n,i,j = 0,1,\dots$$

$$\hat{a}_{m,i} = \bar{a}_{m,i} - \bar{a}_{m-1,i} \quad , \quad \hat{b}_{n,j} = \bar{b}_{n,j} - \bar{b}_{n-1,j}$$

وبفرض: $\bar{a}_{m-1,m} = \bar{b}_{n-1,n} = 0$

عندئذٍ يكون:

$$t_{m,n}^{(A,B)} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{m,i} b_{n,j} S_{i,j} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{m,i} b_{n,j} \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} u_{k,l}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} u_{k,l} \sum_{i=k}^{m}\sum_{j=l}^{n} a_{m,i} b_{n,j} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} \bar{a}_{m,k} \bar{b}_{n,l} u_{k,l}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \bar{a}_{m,i} \bar{b}_{n,j} u_{i,j}$$

ولنعرّف Δ_{11} من أجل أي متتالية مضاعفة $v_{m,n}$ بالعلاقة:

$$\Delta_{11} v_{m,n} = v_{m,n} - v_{m,n-1} - v_{m-1,n} + v_{m-1,n-1}$$

1.2.2. تعريف [12]:

نقول إن المتسلسلة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة المثقّلة $|A,B|_k$ إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} (mn)^{k-1} \left|\Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)}\right|^k$$

متقاربة، مع الأخذ بالحسبان أن:

$$t_{m,-1}^{(A,B)} = t_{-1,n}^{(A,B)} = t_{-1,-1}^{(A,B)} = 0$$

ونكتب: $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n} \in |A,B|_k$

ولنثبت صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة (7): إذا كانت المتسلسلات:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^{k} \qquad \dots (2.9)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,\mathrm{p}}\bar{b}_{n,0}\right)\right\}^{2}\left|c_{p,0}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}} \qquad \dots (2.10)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)\right\}^{2}\left|c_{0,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}} \qquad \dots (2.11)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,\mathrm{p}}\bar{b}_{n,q}\right)\right\}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}} \qquad \dots (2.12)$$

متقاربة من أجل $1 \le k \le 2$، كانت المتسلسلة المتعامدة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المطلقة $|A,B|_k$ تقريباً في كل مكان.

الإثبات: لدينا:

$$t_{m,n}^{(A,B)}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{m,i}b_{n,k}S_{i,k}(x)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{m,i}b_{n,k}\sum_{p=0}^{i}\sum_{q=0}^{k}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$=\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)\sum_{i=p}^{m}\sum_{k=q}^{n}a_{m,i}b_{n,k}=\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

(وذلك بتطبيق علاقة فوبيني)

وبالتالي فإن:

$$\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}=t_{m,n}^{(A,B)}-t_{m,n-1}^{(A,B)}-t_{m-1,n}^{(A,B)}+t_{m-1,n-1}^{(A,B)}$$

$$= \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x) - \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n-1} \bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$-\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x) + \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1} \bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

لكن فرضاً لدينا: $\bar{a}_{m-1,m} = \bar{b}_{n-1,n} = 0$ وبالتالي:

$$\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)} = \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x) - \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$-\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x) + \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

وبالتالي فإن:

$$\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)} = \sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x) + \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$-\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x) - \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$-\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x) - \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$+\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x) + \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

كما أن:

$$\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)} = \bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,0}c_{0,0}\phi_{0,0}(x) + \sum_{q=1}^{n} \bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x)$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,0}\phi_{p,0}(x)+\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$-\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,0}c_{0,0}\phi_{0,0}(x)-\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x)$$

$$-\sum_{p=1}^{m}\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,0}c_{p,0}\phi_{p,0}(x)-\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$-\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,0}c_{0,0}\phi_{0,0}(x)+\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x)$$

$$-\sum_{p=1}^{m}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,0}c_{p,0}\phi_{p,0}(x)-\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$+\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,0}c_{0,0}\phi_{0,0}(x)+\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x)$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,0}c_{p,0}\phi_{p,0}(x)+\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

عندئذٍ نجد أن:

$$\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}=\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,0}-\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,0}-\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,0}+\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,0}\right)\times c_{0,0}\phi_{0,0}(x)$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}-\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,0}-\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,0}+\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,0}\right)c_{p,0}\phi_{p,0}(x)$$

$$+\sum_{q=1}^{n}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}-\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,q}-\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,q}+\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,q}\right)c_{0,q}\phi_{0,q}(x)$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}-\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}-\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}-\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}\right)$$
$$\times c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

لكن:

$$\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,0}-\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,0}-\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,0}+\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,0}$$
$$=\bar{a}_{m,0}(\bar{b}_{n,0}-\bar{b}_{n-1,0})-\bar{a}_{m-1,0}(\bar{b}_{n,0}-\bar{b}_{n-1,0})$$
$$=\left(\bar{a}_{m,0}-\bar{a}_{m-1,0}\right)\left(\bar{b}_{n,0}-\bar{b}_{n-1,0}\right)$$

لكن:

$$\bar{a}_{m,i}=\sum_{k=i}^{m}a_{m,k}\quad,\quad \bar{b}_{n,j}=\sum_{l=j}^{n}b_{n,l}$$

$$\bar{a}_{m,0}-\bar{a}_{m-1,0}=\sum_{k=0}^{m}a_{m,k}-\sum_{k=0}^{m-1}a_{m,k}=a_{m,m}$$

$$\bar{b}_{n,0}-\bar{b}_{n-1,0}=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}-\sum_{k=0}^{n-1}b_{n,k}=b_{n,n}$$

وبالتالي فإن:

$$\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,0}-\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,0}-\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,0}+\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,0}=a_{m,m}b_{n,n}$$

أما بالنسبة لباقي الأسطر نستفيد من العلاقة:

$$\Delta_{11}v_{m,n}=v_{m,n}-v_{m,n-1}-v_{m-1,n}+v_{m-1,n-1}$$

عندئذٍ:

$$\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}=a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\phi_{0,0}(x)+\sum_{p=1}^{m}\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}\right)c_{p,0}\phi_{p,0}(x)$$

$$+\sum_{q=1}^{n}\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)c_{0,q}\phi_{0,q}(x)+\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

وبتطبيق المتراجحة الآتية ثلاث مرات متتالية:

$$|\alpha+\beta|^{r}\leq 2^{r}\left(|\alpha|^{r}+|\beta|^{r}\right)\quad ;r\geq 1$$

وبمكاملة الطرفين نستطيع أن نكتب:

$$\int_{a}^{b}\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}dx\leq 2^{k}\int_{a}^{b}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\phi_{0,0}(x)\right|^{k}dx$$

$$+4^{k}\int_{a}^{b}\left|\sum_{p=1}^{m}\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}\right)c_{p,0}\phi_{p,0}(x)\right|^{k}dx$$

$$+8^{k}\int_{a}^{b}\left|\sum_{q=1}^{n}\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)c_{0,q}\phi_{0,q}(x)\right|^{k}dx$$

$$+8^{k}\int_{a}^{b}\left|\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)c_{p,q}\phi_{p,q}(x)\right|^{k}dx$$

وبتطبيق متراجحة هولدر مع فرض أن: $p=\frac{2}{k}>1$, $p+q=pq$ أي:

$$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}=1-\frac{k}{2}\ ,\qquad \frac{1}{p}=\frac{k}{2}$$

أي أن: $\frac{1}{q}=\frac{2-k}{2}$, $q=\frac{2}{2-k}$

وبالتالي بمكاملة الطرفين نجد أن:

$$\int_{a}^{b}\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}dx\leq 2^{k}(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left(\int_{a}^{b}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\phi_{0,0}(x)\right|^{2}dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+4^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left(\int_a^b\left|\sum_{p=1}^{m}\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}\right)c_{p,0}\phi_{p,0}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left(\int_a^b\left|\sum_{q=1}^{n}\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)c_{0,q}\phi_{0,q}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left(\int_a^b\left|\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)c_{p,q}\phi_{p,q}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

لكن وبسبب التعامد نجد أن:

$$\int_a^b\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^k dx \le 2^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^k$$

$$+4^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left(\sum_{p=1}^{m}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}\right)\right\}^2\left|c_{p,0}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left(\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)\right\}^2\left|c_{0,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)\right\}^2\left|c_{p,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

إذن:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\int_{a}^{b}\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}dx \le$$

$$\le 2^{k}(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^{k}$$

$$+4^{k}(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}\right)\right\}^{2}\left|c_{p,0}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^{k}(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)\right\}^{2}\left|c_{0,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^{k}(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)\right\}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

والمتسلسلات الأربعة الأخيرة متقاربة فرضاً أي أن:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\int_{a}^{b}\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}dx<\infty$$

كما أن الدالة $\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}$ غير سالبة وبالتالي حسب تمهيدية بيبو ليفي نجد أن المتسلسلة:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}$$

متقاربة تقريباً في كل مكان، وبالتالي تكون المتسلسلة المتعامدة المضاعفة

$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة المثقّلة $|A,B|_{k}$ تقريباً في كل مكان.

و نكتب: $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)\overset{a.e}{\in}|A,B|_{k}$

ملاحظة (10): بوضع $k=1$ يكون:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x) \overset{a.e}{\widetilde{\in}} |A,B|$$

ملاحظة (11): يمكننا استبدال الرمز $\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)$ بالرمز $\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{n,q}$.

وذلك لأن:

$$\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)=\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}-\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}-\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}+\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}$$

كما أن:

$$\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{n,q}=\left(\bar{a}_{m,p}-\bar{a}_{m-1,p}\right)\left(\bar{b}_{n,q}-\bar{b}_{n-1,q}\right)$$
$$=\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}-\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}-\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}+\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}$$

- الآن لنفرض أن:

$$w^{(0,1)}(p,q;k):=\frac{1}{q^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{n=q}^{\infty} n^{\frac{2}{k}}\left(\hat{a}_{p,0}\hat{b}_{n,q}\right)^{2} \qquad \dots(2.13)$$

$$w^{(1,0)}(p,q;k):=\frac{1}{p^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{m=p}^{\infty} m^{\frac{2}{k}}\left(\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{q,0}\right)^{2} \qquad \dots(2.14)$$

$$w^{(1,1)}(p,q;k):=\frac{1}{(pq)^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{m=p}^{\infty}\sum_{n=q}^{\infty}(mn)^{\frac{2}{k}}\left(\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{n,q}\right)^{2} \qquad \dots(2.15)$$

ولنثبت صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة (8): لتكن $\{\Omega(m,n)\}$ متتالية مضاعفة موجبة تحقق أن $\left\{\frac{\Omega(m,n)}{mn}\right\}$ متناقصة بالنسبة لكل من m و n. وبفرض أن المتسلسلة $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\Omega(m,n)}$ متقاربة.

ولتكن المصفوفتان $A=\left(a_{m,i}\right), B=\left(b_{n,k}\right)$ مصفوفتين مثلثيتين سفليتين غير منتهيتين نظاميتين.

إذا تقاربت المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^{k} \qquad \dots(2.16)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{m,0}\right|^{2} n\,\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)w^{(1,0)}(m,n;k) \qquad \dots(2.17)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{0,n}\right|^{2} m\,\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)w^{(0,1)}(m,n;k) \qquad \dots(2.18)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{m,n}\right|^{2}\,\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)w^{(1,1)}(m,n;k) \qquad \dots(2.19)$$

كانت المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية $|A,B|_k$ من أجل $1 \le k \le 2$ تقريباً في كل مكان.

الإثبات: من المبرهنة السابقة وباستبدال مايلي:

$$\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}\right)=\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{n,0}\quad ,\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)=\hat{a}_{m,0}\hat{b}_{n,q}$$

$$\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)=\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{n,q}$$

نجد أن:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\int_{a}^{b}\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}dx \le$$

$$\le 2^{k}(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^{k}$$

$$+4^{k}(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,0}{}^{2}\left|c_{p,0}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,0}{}^2\hat{b}_{n,q}{}^2\left|c_{0,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{n,q}{}^2\left|c_{p,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$=G_1+G_2+G_3+G_4 \qquad \dots(2.20)$$

$$G_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^k \qquad \dots(2.21)$$

هذه المتسلسة متقاربة فرضاً.

$$G_2=4^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{n,0}{}^2\left|c_{p,0}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$=A\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\{mn\Omega(m,n)\}^{1-\frac{k}{2}}}\left\{mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\sum_{p=1}^{m}\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{n,0}{}^2\left|c_{p,0}\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبتطبيق متراجحة هولدر للمجاميع، بوضع $\frac{1}{p}=1-\frac{k}{2}$ ، نجد أن:

$$G_2 \le A\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\Omega(m,n)}\right)^{1-\frac{k}{2}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}n\sum_{m=1}^{\infty}m\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\sum_{p=1}^{m}\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{n,0}{}^2\left|c_{p,0}\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبتطبيق علاقة فوبيني وبالاستفادة من التقارب نجد أن:

$$G_2 \le A\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\left|c_{p,0}\right|^2\times\sum_{m=p}^{\infty}mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{n,0}{}^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= A\left\{\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\left|c_{p,0}\right|^2 \times \sum_{m=p}^{\infty} mq\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,q)\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{q,0}{}^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= A\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,0}\right|^2 \times \sum_{m=p}^{\infty} mq\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,q)\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{q,0}{}^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= A\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,0}\right|^2 \times \sum_{m=p}^{\infty} m.\frac{m^{\frac{2}{k}-1}}{m^{\frac{2}{k}-1}} q\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,q)\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{q,0}{}^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\leq A\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,0}\right|^2 \left(\frac{\Omega(p,q)}{p}\right)^{\frac{2}{k}-1} q\sum_{m=p}^{\infty} m^{\frac{2}{k}}\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{q,0}{}^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= A\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,0}\right|^2 q\Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,q)w^{(1,0)}(p,q;k)\right\}^{\frac{k}{2}} \quad \dots (2.22)$$

- الآن:

$$G_3 = 8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,0}{}^2\hat{b}_{n,q}{}^2\left|c_{0,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= B\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,0}{}^2\hat{b}_{n,q}{}^2\left|c_{0,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= B\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\{mn\Omega(m,n)\}^{1-\frac{k}{2}}}\left\{mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,0}{}^2\hat{b}_{n,q}{}^2\left|c_{0,q}\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

ولنطبق متراجحة هولدر للمجاميع، بوضع $\frac{1}{p} = 1 - \frac{k}{2}$ نجد أن:

$$\leq B\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\Omega(m,n)}\right)^{1-\frac{k}{2}}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}m\sum_{n=1}^{\infty}n\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,0}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\left|c_{0,q}\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبتطبيق علاقة فوبيني وبالاستفادة من التقارب نجد أن:

$$G_3\leq B\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{0,q}\right|^{2}\times\sum_{n=q}^{\infty}mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\hat{a}_{m,0}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$=B\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{0,q}\right|^{2}\times\sum_{n=q}^{\infty}pn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,n)\hat{a}_{p,0}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$=B\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{0,q}\right|^{2}\times\sum_{n=q}^{\infty}pn.\frac{n^{\frac{2}{k}-1}}{n^{\frac{2}{k}-1}}\Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,n)\hat{a}_{p,0}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\leq B\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{0,q}\right|^{2}\left(\frac{\Omega(p,q)}{q}\right)^{\frac{2}{k}-1}p\sum_{n=q}^{\infty}n^{\frac{2}{k}}\hat{a}_{p,0}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$=B\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{0,q}\right|^{2}p\Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,q)w^{(0,1)}(p,q;k)\right\}^{\frac{k}{2}}\qquad\ldots(2.23)$$

- الآن:

$$G_4=8^{k}(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$G_4=C\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= C\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\{mn\Omega(m,n)\}^{1-\frac{k}{2}}}\left\{mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

ولنطبق متراجحة هولدر للمجاميع، بوضع $\frac{1}{p} = 1 - \frac{k}{2}$ نجد أن:

$$\leq C\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\Omega(m,n)}\right)^{1-\frac{k}{2}}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبتطبيق علاقة فوبيني وبالاستفادة من التقارب نجد أن:

$$\leq C\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,q}\right|^{2}\times\sum_{m=p}^{\infty}\sum_{n=q}^{\infty}mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= C\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,q}\right|^{2}\times\sum_{m=p}^{\infty}\sum_{n=q}^{\infty}mn\frac{(mn)^{\frac{2}{k}-1}}{(mn)^{\frac{2}{k}-1}}\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\leq C\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,q}\right|^{2}\left(\frac{\Omega(p,q)}{pq}\right)^{\frac{2}{k}-1}\sum_{m=p}^{\infty}\sum_{n=q}^{\infty}(mn)^{\frac{2}{k}}\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= C\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,q}\right|^{2}\Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,q)w^{(1,1)}(p,q;k)\right\}^{\frac{k}{2}} \qquad \dots(2.24)$$

من G_1 و G_2 و G_3 و G_3 وبما أن المتسلسلات الأربعة متقاربة فرضاً، نجد أن المتسلسلة

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\int_{a}^{b}\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}dx < \infty$$

كما أن الدالة $\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}$ غير سالبة، وبالتالي وحسب تمهيدية بيبو ليفي تكون المتسلسلة $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}$ متقاربة تقريباً في كل مكان.

وبالتالي تكون المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية $|A,B|_k$ تقريباً في كل مكان.

- في الفصل الثاني قمت بإيجاد الشرط اللازم لتكون الطريقة المصفوفية المطلقة المثقّلة $|A|_\lambda$ (حيث $\lambda \le 1$) نظامية وذلك من خلال المبرهنة (1).
- كما قمت بإثبات أن المتسلسلة المتعامدة المضاعفة من الشكل

$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ تكون قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة المثقّلة $|A,B|_k$ تقريباً في كل مكان، وذلك من خلال المبرهنتين (7) و (8).

الفصل الثالث

قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بطريقة نيورلند المعممة المطلقة المثقّلة

On absolute generalaized weighted Norlund summability of orthogonal series

في الفقرة الأولى سنقوم بدراسة مرجعية حول قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة البسيطة بطريقة نيورلند المعممة المطلقة المثقّلة، وسنعرض أهم المبرهنات المدروسة والنتائج الجديدة التي تم الحصول عليها التي تخص طرائق نيورلند وريس وسيزارو المطلقة، من خلال ربط هذه الطرائق بطريقة نيورلند المعممة المطلقة، وسنقوم بوضع تطبيق حول تعريف هذه الطريقة.

وفي الفقرة الثانية سنقوم بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة المثقّلة، وذلك من خلال ربط الطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة.

1.3. قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة البسيطة بطريقة نيورلند المعممة المطلقة المثقّلة:

1.1.3. طرائق نيورلند المعممة المطلقة [14]:

$$|N,p_n,q_n| \to |N,p_n| \;;\; q_n = 1$$

$$|N,p_n,q_n| \to |\overline{N},q_n| \;;\; p_n = 1$$

$(\overline{N},q_n)$ هي طريقة ريس، أو نكتب: $|R,q_n|$

$$|N,p_n,q_n| \to |C,1| \;;\; p_n = q_n = 1$$

$$\Rightarrow |C,1| = |N,1| = |\overline{N},1|$$

$$|N,p_n,q_n| \to |C,2| \;;\; p_n = n+1 \,, q_n = 1$$

$$|N,p_n,q_n| \to |C,3| \;;\quad p_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, q_n = 1$$

$$|N, p_n, q_n| \to \left|N, \frac{1}{n+1}\right| \ ; \ p_n = \frac{1}{n+1} \ , q_n = 1$$

وهي الطريقة التوافقية المطلقة ذات التحويل: $t_n^{(H,1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k+1)\log n} S_k$

حيث إن: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = \log n + O(1)$

يمكننا كتابة: $|R, \log n, 1| = \left|N, \frac{1}{n+1}\right| = |H, 1|$

$$|N, p_n, q_n| \xrightarrow{q_n = 1} |N, p_n| \xrightarrow{p_n = \binom{\alpha+n-1}{n}} |C, \alpha| \ ; \ \alpha > -1$$

أما فيما يخص طريقة سيزارو المعممة المطلقة فإن:

$$|N, p_n, q_n| \xrightarrow{p_n = \binom{\alpha+n-1}{n}, q_n = \binom{\beta+n}{n}} |C, \alpha, \beta|$$

حيث إن:

$$E_n^{\alpha} = \binom{\alpha+n}{n} = \binom{\alpha+n}{\alpha} \ , E_{n-k}^{\alpha-1} = \binom{\alpha+n-k-1}{n-k}$$

مبرهنة (1) [1]: إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}} \right)^2 |a_j|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \dots (3.1) \dots$$

متقاربة، عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المطلقة $|N, p_n, q_n|$ تقريباً في كل مكان.

حيث إن:

$$R_n \coloneqq (p * q)_n = \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} q_m \qquad \dots (3.2)$$

$$R_n^j \coloneqq \sum_{m=j}^{n} p_{n-m} q_m \ \ , \ \ R_n^{n+1} = 0 \ \ , \ \ R_n^0 = R_n \qquad \dots (3.3)$$

$$P_n := (p * 1)_n = \sum_{m=0}^{n} p_m \quad , \qquad Q_n := (1 * q)_n = \sum_{m=0}^{n} q_m \qquad \dots (3.4)$$

نتيجة $(\mathbf{1})$ [19]: إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} p_{n-j}^2 \left(\frac{P_n}{p_n} - \frac{P_{n-j}}{p_{n-j}} \right)^2 |a_j|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \dots (3.5)$$

متقاربة، تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المطلقة $|N, p_n|$ تقريباً في كل مكان.

نتيجة$(\mathbf{2})$ [19]: إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} Q_{j-1}^2 a_j^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \dots (3.6) \dots$$

متقاربة، فإن المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ تكون قابلة للجمع $|\bar{N}, q_n|$ تقريباً في كل مكان.

أو نكتب: قابلة للجمع بطريقة ريس $|R, q_n|$ تقريباً في كل مكان.

نتيجة $(\mathbf{3})$: إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left\{ \sum_{j=1}^{n} j^2 |a_j|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \dots (3.7)$$

متقاربة، تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ قابلة للجمع $|N, 1| = |C, 1|$ تقريباً في كل مكان.

الإثبات: لنضع $p_n = 1$ في العلاقة (3.5) نجد أن:

$$P_n=\sum_{k=0}^{n}(1)=n+1 \qquad , \qquad P_{n-1}=n$$

$$p_{n-j}=1 \qquad ,P_{n-j}=n-j+1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\left\{\sum_{j=1}^{n}p_{n-j}^2\left(\frac{P_n}{p_n}-\frac{P_{n-j}}{p_{n-j}}\right)^2|a_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n}\left\{\sum_{j=1}^{n}1^2\left(\frac{n+1}{1}-\frac{n-j+1}{1}\right)^2|a_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left\{\sum_{j=1}^{n}j^2|a_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

وبالمقارنة مع العلاقة (3.1) نجد أن:

$$\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}=\frac{j}{n(n+1)}$$

عندئذٍ وحسب المبرهنة (1) تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المطلقة $|N,1|$ تقريباً في كل مكان.

(تذكّر أن سيزارو $(C,1)$ هي حالة خاصة من نيورلند وتساويها عندما $p_n=1$).

نتيجة (4): إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)(n+2)}\left\{\sum_{j=1}^{n}j^2(n-j+1)^2|a_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots(3.8)$$

متقاربة، تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع $|C,2|=|N,n+1|$ تقريباً في كل مكان.

الإثبات: لنضع $p_n = n+1$ في العلاقة (3.5) نجد أن:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad , \quad P_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$p_{n-j} = n-j+1 \qquad ,P_{n-j} = \frac{(n-j+2)(n-j+1)}{2}$$

وبالتالي فإن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\left\{\sum_{j=1}^{n}p_{n-j}^2\left(\frac{P_n}{p_n}-\frac{P_{n-j}}{p_{n-j}}\right)^2|a_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}.\frac{n(n+1)}{2}} \times\left\{\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)^2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)} - \frac{(n-j+1)(n-j+2)}{2(n-j+1)}\right)^2|a_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+1)(n+2)}\left\{\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)^2\left(\frac{n+2-n+j-2}{2}\right)^2|a_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+1)(n+2)}\left\{\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)^2\left(\frac{j}{2}\right)^2|a_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)(n+2)}\left\{\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)^2j^2|a_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

لكن وبالاعتماد على العلاقة (3.8)، وحسب النتيجة (1) تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع $|N,n+1| = |C,2|$ تقريباً في كل مكان.

نتيجة (5): إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3!}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \times \left\{\sum_{j=1}^{n} j^2(n-j+1)^2(n-j+2)^2|a_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots (3.9)$$

متقاربة، تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع بالطريقة $|C,3|$ تقريباً في كل مكان.

الإثبات: لنضع $p_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ نجد أن:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+2)(k+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

$$P_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$p_{n-j} = \frac{(n-j+2)(n-j+1)}{2}$$

$$P_{n-j} = \frac{(n-j+1)(n-j+2)(n-j+3)}{6}$$

وبالتعويض في العلاقة (3.5) وبطريقة مشابهة لما جاء في النتيجة (4) نجد أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left\{\sum_{j=1}^{n} p_{n-j}^2 \left(\frac{P_n}{p_n} - \frac{P_{n-j}}{p_{n-j}}\right)^2 |a_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$
$$\times \left\{\sum_{j=1}^{n} j^2(n-j+1)^2(n-j+2)^2|a_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

مبرهنة (2) [19]: لتكن $\{\Omega(n)\}$ متتالية موجبة تحقق أن $\left\{\frac{\Omega(n)}{n}\right\}$ متتالية متناقصة وبحيث تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\Omega(n)}$ متقاربة. و $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ متتاليتين موجبتين.

وبفرض أن المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\Omega(n)w(n) \qquad \dots (3.10)$$

متقاربة، عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع $|N,p_n,q_n|$ تقريباً في كل مكان. حيث $w(j)$ تعرف بالشكل:

$$w(j)=\frac{1}{j}\sum_{n=j}^{\infty}n^2\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2 \qquad \dots (3.11)$$

مبرهنة (3) [14]: إذا كانت من أجل $1\le k\le 2$ المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{n^{2-\frac{2}{k}}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2|a_j|^2\right\}^{\frac{k}{2}} \qquad \dots (3.12)$$

متقاربة، كانت المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع $|N,p_n,q_n|_k$ تقريباً في كل مكان.

ملاحظة (1): من أجل $k=1$ نحصل على المبرهنة (1)، والتي تعد نتيجة أولى للمبرهنة (3) السابقة. (أي أن المبرهنة (3) هي تعميم للمبرهنة (1)).

نتيجة (6) [14]: من أجل $1\le k\le 2$ إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^{1-\frac{k}{2}}p_n}{P_nP_{n-1}}\right)^k\left\{\sum_{j=1}^{n}p_{n-j}^2\left(\frac{P_n}{p_n}-\frac{P_{n-j}}{p_{n-j}}\right)^2|a_j|^2\right\}^{\frac{k}{2}} \qquad \dots (3.13)$$

متقاربة، تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع $|N,p_n|_k$ تقريباً في كل مكان.

نتيجة (7) [14]: إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^{1-\frac{1}{k}}q_n}{Q_nQ_{n-1}}\right)^k\left\{\sum_{j=1}^{n}Q_{j-1}^2\left|a_j\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}} \qquad \dots(3.14)$$

متقاربة من أجل $1 \le k \le 2$ ، تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع $|\bar{N},q_n|_k$ تقريباً في كل مكان.

مبرهنة (4) [14]: لتكن $1 \le k \le 2$ ولتكن المتتالية $\{\Omega(n)\}$ موجبة وتحقق أن المتتالية $\left\{\frac{\Omega(n)}{n}\right\}$ متناقصة والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\Omega(n)}$ متقاربة. و$\{p_n\}$ و$\{q_n\}$ متتاليتين موجبتين.

وبفرض أن المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\Omega^{\frac{2}{k}-1}(n)w^{(k)}(n) \qquad \dots(3.15)$$

متقاربة، عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع $|N,p_n,q_n|_k$ تقريباً في كل مكان حيث إن $w^{(k)}(j)$ معرفة بالشكل:

$$w^{(k)}(j)=\frac{1}{j^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{n=j}^{\infty}n^{\frac{2}{k}}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2 \qquad \dots(3.16)$$

يمكننا أن نكتب: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x) \overset{a.e}{\widetilde{\in}} |N,p_n,q_n|_k$

($a.e$ تعني تقريباً في كل مكان)

ملاحظة (2): بوضع $k=1$ في المبرهنة (4) نحصل على المبرهنة (2).

2.1.3. تعريف آخر لطريقة نيورلند المعممة المطلقة المثقّلة [7]:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المطلقة المثقّلة $|N,p_n,q_n|_k$ إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|t_n^{(N,p_n,q_n)}-t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}\right|^k$ متقاربة. ونكتب:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \in |N, p_n, q_n|_k$$

(حيث قمنا بوضع $n = \frac{R_n}{q_n}$)

مبرهنة (5) [7]: إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{R_n}{q_n}\right)^{2-\frac{2}{k}} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2 |a_j|^2 \right\}^{\frac{k}{2}} \qquad \dots (3.17)$$

متقاربة من أجل $1 \le k \le 2$ ، تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ قابلة للجمع $|N, p_n, q_n|_k$ تقريباً في كل مكان.

ملاحظة (3): بوضع $k = 1$ في المبرهنة (5) نحصل على المبرهنة (1) .

مبرهنة (6) [7]: لتكن $1 \le k \le 2$ ولتكن $\{\Omega(n)\}$ متتالية موجبة وتحقق أن المتتالية $\left\{\frac{\Omega(n)}{n}\right\}$ متناقصة وبحيث تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\Omega(n)}$ متقاربة.

عندئذٍ إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \Omega^{\frac{2}{k}-1}(n) \Lambda^{(k)}(n) \qquad \dots (3.18)$$

متقاربة، تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ قابلة للجمع $|N, p_n, q_n|_k$ تقريباً في كل مكان، حيث إن $\Lambda^{(k)}(j)$ معرفة بالشكل:

$$\Lambda^{(k)}(j) = \frac{1}{j^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{n=j}^{\infty} n^{\frac{4}{k}-2} \left(\frac{R_n}{q_n}\right)^{2-\frac{2}{k}} \left(\frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}\right)^2 \qquad \dots (3.19)$$

ملاحظة (4) [13]: إن طريقة نيورلند المعممة (N, p_n, q_n) تعد حالة خاصة من الطريقة المصفوفية وذلك بوضع:

$$t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}.S_k \quad , \qquad a_{n,k} = \frac{p_{n-k}q_k}{R_n}$$

3.1.3. تذكرة بتعريف طريقة نيورلند المعممة المطلقة $|N, p_n, q_n|$ [12]:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المطلقة $|N, p_n, q_n|$ إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \left|t_n^{(N,p_n,q_n)} - t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}\right|$ متقاربة أي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|t_n^{(N,p_n,q_n)} - t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}\right| < \infty$$

<u>تطبيق:</u> لتكن لدينا المتسلسلة: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cos nx$

إن هذه المتسلسلة متباعدة، وذلك لأن الحد العام لايسعى نحو الصفر عندما $n \to \infty$.

إن هذه المتسلسلة متعامدة، وذلك لأن المتسلسلة تكتب بالشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos nx$$

كما أن:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x).\varphi_m(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \,.\cos mx\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \,; n \neq m$$

أي أن المتسلسلة متعامدة كون جملتها متعامدة.

ولنطبق طريقة نيورلند المعممة (N, p_n, q_n) من أجل المتتاليتين الموجبتين $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ حيث [1]:

$$p_n = 1\,; n \geq 0 \;\; ; \; q_0 = 1 \;\&\; q_n = n + \frac{1}{2} \; ; n \geq 1$$

إن التلاف لهاتين المتتاليتين يعطى بالشكل:

$$R_n = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, q_k = 1.1 + \sum_{k=1}^{n} 1.\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 1 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}n = \frac{n^2 + 2n + 2}{2}$$

إن تحويل طريقة نيورلند المعممة يعطى بالشكل:

$$t_n^{(N,p_n,q_n)}(x) = \frac{1}{R_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, q_k\, S_k$$

$$= \frac{2}{n^2 + 2n + 2}\left\{1.1.1 + \sum_{k=1}^{n} 1.\left(k + \frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cos ix\right\}$$

$$= \frac{2}{n^2 + 2n + 2}\left\{1 + \sum_{k=1}^{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cos ix\right\}$$

حيث إن متتالية المجاميع الجزئية لهذه المتسلسلة تعطى بالعلاقة:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cos kx$$

الآن: لنطبق طريقة نيورلند المعممة المطلقة $|N, p_n, q_n|$ من أجل المتتاليتين $\{p_n\}$ و$\{q_n\}$ السابقتين: ولنكتب بدايةً:

$$t_n^{(N,p_n,q_n)}(x) - t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}(x)$$
$$= \frac{1}{R_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, q_k\, S_k - \frac{1}{R_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1-k}\, q_k\, S_k$$

$$= \frac{2}{n^2+2n+2}\left\{1+\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix\right\}$$

$$-\frac{2}{n^2+1}\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix\right\}$$

$$= \frac{2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}\left\{n^2+1\right.$$

$$+(n^2+1)\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix-(n^2+2n+2)$$

$$\left.-(n^2+2n+2)\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix\right\}$$

$$= \frac{2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}\left\{-2n-1+n^2\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix$$

$$-n^2\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix$$

$$-2n\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix$$

$$\left.-2\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix\right\}$$

$$= \frac{2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}\Bigg\{-2n-1+n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cos ix$$
$$-2n\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix$$
$$+\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cos ix+\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix$$
$$-2\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix\Bigg\}$$

$$= \frac{2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}\Bigg\{-2n-1+\left(n^3+\frac{n^2}{2}\right)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cos ix$$
$$+\left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cos ix$$
$$-(2n+1)\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix\Bigg\}$$

الآن:

$$\left|t_n^{(N,p_n,q_n)}(x)-t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}(x)\right|$$
$$\leq \frac{2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}\Bigg\{2n+1$$
$$+\left(n^3+\frac{n^2}{2}\right)\left|\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cos ix\right|+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left|\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cos ix\right|$$
$$+(2n+1)\left|\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cos ix\right|\Bigg\}$$

وبالتالي:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| t_n^{(N,p_n,q_n)}(x) - t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}(x) \right| dx$$

$$\leq \frac{2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} \Bigg\{ (2n+1) \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

$$+ \left(n^3 + \frac{n^2}{2}\right) \sum_{i=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos ix| dx$$

$$+ \left(n + \frac{1}{2}\right) \sum_{i=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos ix| dx$$

$$+ (2n+1) \sum_{k=1}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) \sum_{i=0}^{k} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos ix| dx \Bigg\}$$

لكن: $i \geq 1$; $\int_{-\pi}^{\pi} \cos ix \, dx = \left[\frac{\sin ix}{i}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ وبالتالي:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| t_n^{(N,p_n,q_n)}(x) - t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}(x) \right| dx$$

$$\leq \frac{2}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} \{(2n+1).2\pi\}$$

$$= \frac{4\pi(2n+1)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$

وبالتالي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| t_n^{(N,p_n,q_n)}(x) - t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}(x) \right| dx$$

$$\leq 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$

إن المتسلسلة في الطرف الأيمن متقاربة حسب اختبار نهاية النسبة مع المتسلسلة الريمانية المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ وبالتالي:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| t_n^{(N,p_n,q_n)}(x) - t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}(x) \right| dx < \infty$$

عندئذٍ وبحسب تمهيدية بيبو –ليفي تكون المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|t_n^{(N,p_n,q_n)}(x)-t_{n-1}^{(N,p_n,q_n)}(x)\right|$$

متقاربة تقريباً في كل مكان. وبالتالي فإن المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cos nx$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المطلقة $|N,p_n,q_n|$.

2.3. قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة المثقّلة:

وجدنا في الفصل الثاني من هذه الأطروحة وعند دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة مايأتي:

مبرهنة (7): إذا كانت المتسلسلات:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^k \qquad \dots(3.20)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,\mathrm{p}}\bar{b}_{n,0}\right)\right\}^2\left|c_{p,0}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}} \qquad \dots(3.21)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)\right\}^2\left|c_{0,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}} \qquad \dots(3.22)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,\mathrm{p}}\bar{b}_{n,q}\right)\right\}^2\left|c_{p,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}} \qquad \dots(3.23)$$

متقاربة من أجل $1\le k\le 2$، كانت المتسلسلة المتعامدة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المطلقة $|A,B|_k$ تقريباً في كل مكان.

- وبفرض أن:

$$w^{(0,1)}(p,q;k) := \frac{1}{q^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{n=q}^{\infty} n^{\frac{2}{k}} \left(\hat{a}_{p,0} \hat{b}_{n,q}\right)^2 \qquad \dots (3.24)$$

$$w^{(1,0)}(p,q;k) := \frac{1}{p^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{m=p}^{\infty} m^{\frac{2}{k}} \left(\hat{a}_{m,p} \hat{b}_{q,0}\right)^2 \qquad \dots (3.25)$$

$$w^{(1,1)}(p,q;k) := \frac{1}{(pq)^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{m=p}^{\infty} \sum_{n=q}^{\infty} (mn)^{\frac{2}{k}} \left(\hat{a}_{m,p} \hat{b}_{n,q}\right)^2 \qquad \dots (3.26)$$

قمنا بإثبات صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة $(\mathbf{8})$: لتكن $\{\Omega(m,n)\}$ متتالية مضاعفة موجبة تحقق أن $\left\{\frac{\Omega(m,n)}{mn}\right\}$ متناقصة بالنسبة لكل من m و n. وبفرض أن المتسلسلة $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn\Omega(m,n)}$ متقاربة.

ولتكن المصفوفتان $A = \left(a_{m,i}\right), B = \left(b_{n,k}\right)$ مصفوفتين مثلثيتين سفليتين نظاميتين.

إذا تقاربت المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left|a_{m,m} b_{n,n} c_{0,0}\right|^k \qquad \dots (3.27)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left|c_{m,0}\right|^2 n\, \Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n) w^{(1,0)}(m,n;k) \qquad \dots (3.28)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left|c_{0,n}\right|^2 m\, \Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n) w^{(0,1)}(m,n;k) \qquad \dots (3.29)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left|c_{m,n}\right|^2 \Omega(m,n) w^{(1,1)}(m,n;k) \qquad \dots (3.30)$$

كانت المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\, \phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية $|A,B|_k$ من أجل $1 \le k \le 2$ تقريباً في كل مكان.

الآن: لنضع العلاقات التي تربط بين الطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة وطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة، وذلك بدايةً من خلال وضع علاقتي المصفوفتين A, B كما يلي:

$$a_{m,j} = \frac{p_{m-j}q_j}{R_m}, \qquad b_{n,k} = \frac{\acute{p}_{n-k}\acute{q}_k}{\acute{R}_n}$$

ومن ثم ربطها بوسطاء طريقة نيورلند المعممة المضاعفة $p_n, q_n, \acute{p}_n, \acute{q}_n$ على النحو الآتي:

ليكن:

$$t_n^{(N,p_n,q_n)} = \frac{1}{R_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}q_kS_k$$

$$R_n = (p*q)_n = \sum_{m=0}^{n} p_{n-m}q_m \quad , R_n^j = \sum_{m=j}^{n} p_{n-m}q_m$$

عندئذٍ نجد أن:

$$\bar{a}_{m,\mathrm{j}} = \sum_{l=j}^{m} a_{m,l} = \sum_{l=j}^{m} \frac{p_{m-l}q_l}{R_m} = \frac{\sum_{l=j}^{m} p_{m-l}q_l}{R_m} = \frac{R_m^j}{R_m}$$

$$\bar{b}_{n,k} = \sum_{l=k}^{n} b_{n,l} = \sum_{l=k}^{n} \frac{\acute{p}_{n-l}\acute{q}_l}{\acute{R}_n} = \frac{\sum_{l=k}^{n} \acute{p}_{n-l}\acute{q}_l}{\acute{R}_n} = \frac{R_n^k}{\acute{R}_n}$$

أي أن:

$$\bar{a}_{m,\mathrm{j}}.\bar{b}_{n,k} = \frac{R_m^j}{R_m}.\frac{R_n^k}{\acute{R}_n}$$

فيكون:

$$\hat{a}_{m,i} = \bar{a}_{m,i} - \bar{a}_{m-1,i} = \frac{R_m^i}{R_m} - \frac{R_{m-1}^i}{R_{m-1}}$$

$$\hat{b}_{n,j} = \bar{b}_{n,j} - \bar{b}_{n-1,\mathrm{j}} = \frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}$$

لكن:

$$\frac{R_m^j}{R_m}\cdot\frac{R_n^k}{\acute{R}_n}=\frac{\sum_{i=j}^m p_{m-i}q_i}{\sum_{i=0}^m p_{m-i}q_i}\cdot\frac{\sum_{l=k}^n \acute{p}_{n-l}\acute{q}_l}{\sum_{l=0}^n \acute{p}_{n-l}\acute{q}_l}=\frac{\sum_{i=j}^m\sum_{l=k}^n p_{m-i}\acute{p}_{n-l}q_i\acute{q}_l}{\sum_{i=0}^m\sum_{l=0}^n p_{m-i}\acute{p}_{n-l}q_i\acute{q}_l}$$

ولنضع:

$$\left(p_{m-i}\acute{p}_{n-l}=p_{m-i,n-l}\right)$$

$$\left(q_i\acute{q}_l=q_{i,l}\right)$$

$$\left(R_m.\acute{R}_n=R_{m,n}\right)$$

$$\left(R_m^j.R_n^k=R_{m,n}^{j,k}\right)$$

$$R_{m,n}^{j,k}=\sum_{i=j}^m\sum_{l=k}^n p_{m-i,n-l}.\,q_{i,l}$$

$$R_{m,n}=R_{m,n}^{0,0}=\sum_{i=0}^m\sum_{l=0}^n p_{m-i,n-l}.\,q_{i,l}$$

وبالتالي فإن:

$$\bar{a}_{m,\mathrm{j}}.\,\bar{b}_{n,k}=\frac{R_m^j}{R_m}.\frac{R_n^k}{\acute{R}_n}=\frac{R_{m,n}^{j,k}}{R_{m,n}}$$

وبتبديل هذه العلاقة في المبرهنة (7) نحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة $(\mathbf{8})$: إذا كانت المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^k \qquad \dots(3.31)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\left\{\Delta_{11}\left(\frac{R_{m,n}^{p,0}}{R_{m,n}}\right)\right\}^2\left|c_{p,0}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}} \qquad \dots(3.32)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\frac{R_{m,n}^{0,q}}{R_{m,n}}\right)\right\}^{2}\left|c_{0,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}} \quad \dots(3.33)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\frac{R_{m,n}^{p,q}}{R_{m,n}}\right)\right\}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}} \quad \dots(3.34)$$

متقاربة من أجل $1 \le k \le 2$. عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة المثقّلة $\left|N^{(2)},p,q\right|_{k} = |N,p_n,q_n,\acute{p}_n,\acute{q}_n|_k$ تقريباً في كل مكان.

ملاحظة (5): وجدنا في الفصل الثاني من هذه الأطروحة أنه بإمكاننا استبدال الرمز $\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)$ بالرمز $\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{n,q}$.

لكن: $\bar{a}_{m,\mathrm{p}}.\,\bar{b}_{n,q} = \frac{R_{m,n}^{p,q}}{R_{m,n}}$

أي أن:

$$\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{n,q} = \Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right) = \Delta_{11}\left(\frac{R_{m,n}^{p,q}}{R_{m,n}}\right)$$

الآن لنضع:

$$w^{(1,0)}(p,q;k) \coloneqq \frac{1}{p^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{m=p}^{\infty} m^{\frac{2}{k}}\left[\Delta_{11}\left(\frac{R_{m,q}^{p,0}}{R_{m,q}}\right)\right]^{2} \quad \dots(3.35)$$

$$w^{(0,1)}(p,q;k) \coloneqq \frac{1}{q^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{n=q}^{\infty} n^{\frac{2}{k}}\left[\Delta_{11}\left(\frac{R_{p,n}^{0,q}}{R_{p,n}}\right)\right]^{2} \quad \dots(3.36)$$

$$w^{(1,1)}(p,q;k) \coloneqq \frac{1}{(pq)^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{m=p}^{\infty}\sum_{n=q}^{\infty}(mn)^{\frac{2}{k}}\left[\Delta_{11}\left(\frac{R_{m,n}^{p,q}}{R_{m,n}}\right)\right]^{2} \quad \dots(3.37)$$

وباستخدام المبرهنة (8) نحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة (9): لتكن $\{\Omega(m,n)\}$ متتالية مضاعفة موجبة والمتتالية $\left\{\frac{\Omega(m,n)}{mn}\right\}$ متناقصة بالنسبة لكل من m و n. وبفرض أن المتسلسلة $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\Omega(m,n)}$ متقاربة.

ولتكن المتتاليتين $\{p_{m,n}\}$ و $\{q_{m,n}\}$ موجبتين. عندئذٍ إذا تقاربت المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^{k} \quad \dots(3.38)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{m,0}\right|^{2}n\,\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)w^{(1,0)}(m,n;k) \quad \dots(3.39)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{0,n}\right|^{2}m\,\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)w^{(0,1)}(m,n;k) \quad \dots(3.40)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{m,n}\right|^{2}\,\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)w^{(1,1)}(m,n;k) \quad \dots(3.41)$$

كانت المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة المثقّلة $|N,p_n,q_n,\acute{p}_n,\acute{q}_n|_k$ من أجل $1\le k\le 2$ تقريباً في كل مكان.

حيث: $a_{m,m}=\frac{p_0q_m}{R_m}\ ,b_{n,n}=\frac{\acute{p}_0\acute{q}_n}{\acute{R}_n}$

- في الفصل الثالث قمت بإثبات النتائج (3) و(4) و(5)، وبينت فيها متى تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع $|C,1|$ ، $|C,2|$ ، $|C,3|$ تقريباً في كل مكان.
- وحصلت على النتيجتين (8) و(9) اللتين تبينان متى تكون المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة المثقّلة $|N,p_n,q_n,\acute{p}_n,\acute{q}_n|_k$ من أجل $1\le k\le 2$ تقريباً في كل مكان، وذلك من خلال الربط بين الطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة وطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة.

الفصل الرابع

قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بالطريقة المصفوفية التقريبية المطلقة المثقّلة

On absolute weighted almost matrix summability of orthogonal series

في هذا الفصل سوف تتم دراسة فقرتين أساسيتين وتتضمن الفقرة الأولى عدداً من التعاريف حول الطريقة المصفوفية التقريبية المطلقة، مع توضيح كيفية الانتقال من الطريقة المصفوفية التقريبية المطلقة إلى طرائق (نيورلند، نيورلند المعممة، ريس، سيزارو، سيزارو المعممة، التوافقية) التقريبية المطلقة، وسنقوم بعرض أهم المبرهنات والنتائج حول هذه الطرائق.

أما الفقرة الثانية فهي تدرس قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية التقريبية المضاعفة المطلقة المثقّلة، وذلك بعد وضع تعريف هذه الطريقة بشكل مشابه للطريقة المصفوفية التقريبية البسيطة المطلقة، وتم إثبات مبرهنة هامة جديدة حول هذه الطريقة.

1.4. قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة البسيطة بالطريقة المصفوفية التقريبية المطلقة المثقّلة:

1.1.4. تعريف [8]:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متسلسلة لانهائية، ولتكن $A = \left(a_{n,k}\right)$ مصفوفة مثلثية سفلى عناصر قطرها الرئيسي غير صفرية، عندئذٍ يعطى تحويل الطريقة المصفوفية التقريبية كالآتي:

$$t_{n,m}^{(A)m} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_{k,m} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k} S_{n-k,m}$$

$$S_k = \sum_{r=0}^{k} u_r \ \ , S_{k,m} = \frac{1}{k+1} \sum_{r=m}^{k+m} S_r = \frac{1}{k+1} \sum_{r=0}^{k} S_{r+m}$$

2.1.4. تعريف [8]:

تكون المتتالية $\{S_n\}$ متقاربة تقريباً (غالباً) من النهاية s إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,m} = s \ ; \ \forall m \in \mathbb{N}$$

3.1.4. تعريف [8]:

تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية التقريبية المطلقة إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}\left|\bar{\Delta}A_{n,m}(s)\right|^k$ متقاربة بانتظام من أجل كل m حيث إن:

$$\bar{\Delta}A_{n,m}(s) = A_{n,m}(s) - A_{n-1,m}(s)$$

$$A_{n,m}(s) = \sum_{v=0}^{n} a_{n,v} S_{v,m}$$

ونكتب: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in |A|_{m;k}$

حالة خاصة [8]: إذا كان $k = 1$ ، $a_{n,v} = 0 \ ; v = 0,1,\dots,n-1 \ \ , a_{n,n} = 1$. فإن المتسلسة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة تقريباً بإطلاق وذلك بشرط تقارب المتسلسلة:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{n,m} - S_{n-1,m}\right|$ بانتظام من أجل كل m.

ولنضع الرموز:

$A = (a_{n,v})$ مصفوفة مثلثية سفلى عناصر قطرها الرئيسي غير صفرية، والمصفوفات الأربع السفلية المرتبطة بها:

$$\overline{a_{n,v}} = \sum_{i=v}^{n} a_{n,i} \quad ; n,i = 0,1,2,\dots \quad , \widehat{a_{n,v}} = \overline{a_{n,v}} - \overline{a_{n-1,v}}$$

$$\widetilde{a_{n,v}} = \sum_{j=v}^{n} \frac{a_{n,j}}{j+1} \ \ ; n,j = 0,1,2,\dots, \widetilde{\widetilde{a_{n,v}}} = \widetilde{a_{n,v}} - \widetilde{a_{n-1,v}}$$

$$n = 1,2,\dots.$$

حيث إن: $a_{0,0} = \overline{a_{0,0}} = \widehat{a_{0,0}} = \widetilde{a_{0,0}} = \widetilde{\widetilde{a_{0,0}}}$

مبرهنة (1) [8]: إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n^{2\left(1-\frac{1}{k}\right)}\sum_{j=0}^{n}\left(\widehat{a_{n,J}}-j\widetilde{\widetilde{a_{n,J}}}\right)^{2}\left|c_{m+j}\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}} \qquad \dots (4.1)$$

متقاربة بانتظام من أجل كل m حيث $1 \le k \le 2$ عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ قابلة للجمع بالطريقة $|A|_{m;k}$ تقريباً في كل مكان.

ملاحظة (1) [8]: تؤول الطريقة المصفوفية التقريبية المطلقة $|A|_{m;k}$ إلى:

1. طريقة نيورلند المعممة التقريبية المطلقة $|N, p_n, q_n|_{m;k}$ إذا كان:

$$a_{n,v} = \frac{p_{n-v}q_v}{R_n} \quad ; 0 \le v \le n$$

$$a_{n,v} = 0 \quad ; v > n$$

حيث $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ متتاليتان من الأعداد الحقيقية الموجبة والتلاف $R_n = (p * q)_n$

يعرف بالشكل الآتي:

$$(p * q)_n = \sum_{v=0}^{n} p_v q_{n-v} = \sum_{v=0}^{n} p_{n-v} q_v$$

2. طريقة نيورلند التقريبية المطلقة $|N, p_n|_{m;k}$ إذا كان:

$$q_n = 1 \; ; \; \forall n \quad , R_n = P_n$$

3. طريقة ريس التقريبية المطلقة $|R, q_n|_{m;k}$ إذا كان:

$$p_n = 1 \; ; \; \forall n \quad , R_n = Q_n$$

4. طريقة سيزارو التقريبية المطلقة $|C, \alpha|_{m;k}$ إذا كان:

$$p_n = \binom{n+\alpha-1}{\alpha-1} \; ; \; \alpha > -1 \;\; , q_n = 1 \, , \forall n \, , R_n = P_n$$

5. طريقة سيزارو المعممة التقريبية المطلقة $|C, \alpha, \beta|_{m;k}$ إذا كان:

$$p_n = \binom{n+\alpha-1}{\alpha-1} = \binom{n+\alpha-1}{n} \;, q_n = \binom{\beta+n}{\beta} = \binom{\beta+n}{n}$$

$$R_n = \binom{\alpha+\beta+n}{n}$$

$$\alpha, \beta > -1 \;, \alpha+\beta > -1$$

6. الطريقة التوافقية التقريبية المطلقة $|H,1|_{m;k}$ أو $\left|N, \frac{1}{n+1}\right|_{m;k}$ إذا كان:

$$p_n = \frac{1}{n+1} \;, q_n = 1 \,, \forall n \,, R_n = \log n$$

ملاحظة (2):

$$R_n^j = \sum_{v=j}^{n} p_{n-v} q_v \;, \qquad R_{n-1}^n = 0 \,, R_n^0 = R_n$$

$$\widehat{R_n^j} = \sum_{v=j}^{n} \frac{p_{n-v} q_v}{v+1} \;, \qquad \widehat{R_{n-1}^n} = 0$$

نتيجة $(\mathbf{1})$ [8]: إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n^{2\left(1-\frac{1}{k}\right)} \sum_{j=0}^{n} \left[\frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}} - j\left(\frac{\widehat{R_n^j}}{R_n} - \frac{\widehat{R_{n-1}^j}}{R_{n-1}} \right) \right]^2 \left| c_{m+j} \right|^2 \right\}^{\frac{k}{2}} \qquad \dots (4.2)$$

متقاربة بانتظام لأجل كل m حيث $1 \le k \le 2$ عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ قابلة للجمع بالطريقة $|N, p_n, q_n|_{m;k}$ تقريباً في كل مكان.

نتيجة $(\mathbf{2})$ [8]: إذا كانت من أجل $1 \le k \le 2$ المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^{\left(1-\frac{1}{k}\right)} p_n}{P_n P_{n-1}} \right)^k \left\{ \sum_{j=1}^{n} p_{n-j}^2 \left[1 - \frac{P_{n-1-j}}{p_{n-j}} + j \sum_{v=0}^{n-j} \frac{P_n - (n+1-v) p_n}{(n-v)(n+1-v) p_n p_{n-j}} p_v \right]^2 \left| c_{m+j} \right|^2 \right\}^{\frac{k}{2}} \qquad \dots (4.3)$$

متقاربة بانتظام لأجل كل m عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع بالطريقة $|N, p_n|_{m;k}$ تقريباً في كل مكان.

نتيجة (3) [8]: إذا كانت من أجل $1 \le k \le 2$ المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^{\left(1-\frac{1}{k}\right)}q_n}{Q_nQ_{n-1}}\right)^k \times\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[Q_{j-1}+j\left(\frac{Q_n}{n+1}-\sum_{v=J}^{n}\frac{q_v}{v+1}\right)\right]^2\left|c_{m+j}\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}} \quad \dots (4.4)$$

متقاربة بانتظام لأجل كل m عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع بالطريقة $|R, q_n|_{m;k}$ تقريباً في كل مكان.

مبرهنة (2) [8]: لتكن $1 \le k \le 2$ و$\{\Omega(n)\}$ متتالية موجبة بحيث تكون $\left\{\frac{\Omega(n)}{n}\right\}$ متتالية غير متزايدة والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\Omega(n)}$ متقاربة.

إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_{m+n}|^2\Omega^{\frac{2}{k}-1}(n)\mathrm{B}^{(k)}(n) \quad \dots (4.5)$$

متقاربة بانتظام لأجل كل m عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع بالطريقة $|A|_{m;k}$ تقريباً في كل مكان حيث إن:

$$B^{(k)}(j)=\frac{1}{j^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{n=j}^{\infty}n^{\frac{2}{k}}\left(\widehat{a_{n,J}}-j\widetilde{\widetilde{a_{n,J}}}\right)^2 \quad \dots (4.6)$$

نتيجة (4) [8]: لتكن $1 \le k \le 2$ و$\{\Omega(n)\}$ متتالية موجبة بحيث تكون $\left\{\frac{\Omega(n)}{n}\right\}$ متتالية غير متزايدة والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\Omega(n)}$ متقاربة.

إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_{m+n}|^2\Omega^{\frac{2}{k}-1}(n)\mathrm{N}^{(k)}(n) \qquad \ldots (4.7)$$

متقاربة بانتظام لأجل كل m عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع بالطريقة $|N,p_n,q_n|_{m;k}$ تقريباً في كل مكان حيث إن:

$$\mathrm{N}^{(k)}(j)=\frac{1}{j^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{n=j}^{\infty}n^{\frac{2}{k}}\left(\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}-j\left(\frac{\widehat{R_n^j}}{R_n}-\frac{\widehat{R_{n-1}^j}}{R_{n-1}}\right)\right)^2 \qquad \ldots (4.8)$$

ملاحظة (3): عندما $p_v=1$ من أجل كل v فإن:

$$\mathrm{H}_n^j=\frac{R_n^j}{R_n}-\frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}-j\left(\frac{\widehat{R_n^j}}{R_n}-\frac{\widehat{R_{n-1}^j}}{R_{n-1}}\right)$$

$$=-\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\left[Q_{j-1}+j\left(\frac{Q_n}{n+1}-\sum_{v=j}^{n}\frac{q_v}{v+1}\right)\right]$$

وعندما $q_v=1$ من أجل كل v فإن:

$$\mathrm{X}_n^j=\frac{p_np_{n-j}}{P_nP_{n-1}}\left[1-\frac{P_{n-1-j}}{p_{n-j}}+j\sum_{v=0}^{n-j}\frac{P_n-(n+1-v)p_n}{(n-v)(n+1-v)p_np_{n-j}}p_v\right]$$

نتيجة (5) [8]: لتكن $1\le k\le 2$ و$\{\Omega(n)\}$ متتالية موجبة بحيث تكون $\left\{\frac{\Omega(n)}{n}\right\}$ متتالية متناقصة والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\Omega(n)}$ متقاربة.

إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_{m+n}|^2\Omega^{\frac{2}{k}-1}(n)\mathcal{R}^{(k)}(n) \qquad \ldots (4.9)$$

متقاربة بانتظام لأجل كل m عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع بالطريقة $|\bar{N},q_n|_{m;k}$ تقريباً في كل مكان حيث إن:

$$\mathcal{R}^{(k)}(j)=\frac{1}{j^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{n=j}^{\infty}n^{\frac{2}{k}}\times\left(\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\left[Q_{j-1}+j\left(\frac{Q_n}{n+1}-\sum_{v=J}^{n}\frac{q_v}{v+1}\right)\right]\right)^2 \quad \dots(4.10)$$

نتيجة (6) [8]: لتكن $1 \le k \le 2$ و$\{\Omega(n)\}$ متتالية موجبة بحيث تكون $\left\{\frac{\Omega(n)}{n}\right\}$ متتالية غير متزايدة والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\Omega(n)}$ متقاربة.

إذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_{m+n}|^2\Omega^{\frac{2}{k}-1}(n)\mathcal{P}^{(k)}(n) \quad \dots(4.11)$$

متقاربة بانتظام لأجل كل m عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع بالطريقة $|N,p_n|_{m;k}$ تقريباً في كل مكان حيث إن:

$$\mathcal{P}^{(k)}(j)=\frac{1}{j^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{n=j}^{\infty}n^{\frac{2}{k}}\left\{\frac{p_np_{n-j}}{P_nP_{n-1}}\left[1-\frac{P_{n-1-j}}{p_{n-j}}+j\sum_{v=0}^{n-j}\frac{P_n-(n+1-v)p_n}{(n-v)(n+1-v)p_np_{n-j}}p_v\right]\right\}^2 \quad \dots(4.12)$$

2.4. قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية التقريبية المضاعفة المطلقة المثقّلة:

بدايةً سنقوم بتعريف الطريقة المصفوفية التقريبية المضاعفة بطريقة مشابهة لتعريف الطريقة المصفوفية التقريبية البسيطة:

1.2.4. تعريف: لتكن $A=\left(a_{m,j}\right)$ و $B=\left(b_{n,k}\right)$ مصفوفتين مثلثيتين سفليتين غير منتهيتين، ولتكن $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ متسلسلة مضاعفة ولتكن $S_{m,n}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}u_{j,k}$

متتالية مجاميعها الجزئية. إن تحويل الطريقة المصفوفية التقريبية المضاعفة $(A,B)_{r,s}$ يعطى بالشكل:

$$t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}=\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{v=0}^{n}a_{m,\mu}b_{n,v}S_{\mu,v,r,s}$$

$$S_{\mu,v,r,s}(x)=\frac{1}{(\mu+1)(v+1)}\sum_{k=r}^{\mu+r}\sum_{l=s}^{v+s}S_{k,l}(x)$$

مبرهنة (3): إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(mn)^{k-1}\left\{\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\left(\widehat{a_{m,p}}-p\widetilde{\widehat{a_{m,p}}}\right)^2\left(\widehat{b_{n,q}}-q\widetilde{\widehat{b_{n,q}}}\right)^2\left|c_{r+p,s+q}\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}} \quad (4.13)$$

متقاربة بانتظام من أجل كل r,s ، تكون المتسلسلة المتعامدة المضاعفة

$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\varphi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية التقريبية المطلقة المضاعفة المطلقة المثقّلة $|A,B|_{r,s;k}$ تقريباً في كل مكان.

الإثبات: لدينا:

$$S_{\mu,v,r,s}(x)=\frac{1}{(\mu+1)(v+1)}\sum_{k=r}^{\mu+r}\sum_{l=s}^{v+s}S_{k,l}(x)$$

$$=\frac{1}{(\mu+1)(v+1)}\sum_{k=0}^{\mu}\sum_{l=0}^{v}S_{k+r,l+s}(x)$$

$$=\frac{1}{(\mu+1)(v+1)}\sum_{k=0}^{\mu}\sum_{l=0}^{v}\sum_{i=0}^{k+r}\sum_{j=0}^{l+s}c_{i,j}\varphi_{i,j}(x)$$

لكن:

$$\frac{1}{(\mu+1)(v+1)}\sum_{k=0}^{\mu}\sum_{l=0}^{v}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1}c_{i,j}\varphi_{i,j}(x)=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1}c_{i,j}\varphi_{i,j}(x)$$

(وذلك لأن الدالة التي نريد جمعها لاتتعلق بالدليلين k,l)

وبالتالي:

$$S_{\mu,v,r,s}(x) = \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1} c_{i,j}\varphi_{i,j}(x) + \frac{1}{(\mu+1)(v+1)}\sum_{k=0}^{\mu}\sum_{l=0}^{v}\sum_{i=0}^{k+r}\sum_{j=0}^{l+s} c_{i,j}\varphi_{i,j}(x) - \frac{1}{(\mu+1)(v+1)}\sum_{k=0}^{\mu}\sum_{l=0}^{v}\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1} c_{i,j}\varphi_{i,j}(x)$$

$$= S_{r-1,s-1}(x) + $$

$$+ \frac{1}{(\mu+1)(v+1)}\sum_{k=0}^{\mu}\sum_{l=0}^{v}\left(\sum_{i=0}^{k+r}\sum_{j=0}^{l+s} c_{i,j}\varphi_{i,j}(x) - \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1} c_{i,j}\varphi_{i,j}(x)\right)$$

$$= S_{r-1,s-1}(x) + \frac{1}{(\mu+1)(v+1)}\sum_{k=0}^{\mu}\sum_{l=0}^{v}\sum_{i=r}^{k+r}\sum_{j=s}^{l+s} c_{i,j}\varphi_{i,j}(x)$$

$$= S_{r-1,s-1}(x) + \frac{1}{(\mu+1)(v+1)}\sum_{k=0}^{\mu}\sum_{l=0}^{v}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$= S_{r-1,s-1}(x) + \frac{1}{(\mu+1)(v+1)}\sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{v}\sum_{k=i}^{\mu}\sum_{l=j}^{v} c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$= S_{r-1,s-1}(x) + $$

$$+ \frac{1}{(\mu+1)(v+1)}\sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{v}(\mu-i+1)(v-j+1)c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$= S_{r-1,s-1}(x) + \sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{v}\left(1-\frac{i}{\mu+1}\right)\left(1-\frac{j}{v+1}\right)c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

الآن:

$$t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}} = \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{v=0}^{n} a_{m,\mu} b_{n,v} S_{\mu,v,r,s}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{v=0}^{n} a_{m,\mu} b_{n,v} \left(S_{r-1,s-1}(x) \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{v} \left(1 - \frac{i}{\mu+1}\right)\left(1 - \frac{j}{v+1}\right) c_{r+i,s+j} \varphi_{r+i,s+j}(x) \right)$$

$$= S_{r-1,s-1}(x) + \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{v=0}^{n} a_{m,\mu} b_{n,v} \sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{v} c_{r+i,s+j} \varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$- \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{v=0}^{n} \frac{a_{m,\mu} b_{n,v}}{v+1} \sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{v} j.\, c_{r+i,s+j} \varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$- \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{v=0}^{n} \frac{a_{m,\mu} b_{n,v}}{\mu+1} \sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{v} i.\, c_{r+i,s+j} \varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$+ \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{v=0}^{n} \frac{a_{m,\mu} b_{n,v}}{(\mu+1)(v+1)} \sum_{i=0}^{\mu}\sum_{j=0}^{v} ij.\, c_{r+i,s+j} \varphi_{r+i,s+j}(x)$$

وبالتالي:

$$t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x) = S_{r-1,s-1}(x) + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{r+i,s+j} \varphi_{r+i,s+j}(x) \sum_{\mu=i}^{m}\sum_{v=j}^{n} a_{m,\mu} b_{n,v}$$

$$- \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} j.\, c_{r+i,s+j} \varphi_{r+i,s+j}(x) \sum_{\mu=i}^{m}\sum_{v=j}^{n} \frac{a_{m,\mu} b_{n,v}}{v+1}$$

$$- \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} i.\, c_{r+i,s+j} \varphi_{r+i,s+j}(x) \sum_{\mu=i}^{m}\sum_{v=j}^{n} \frac{a_{m,\mu} b_{n,v}}{\mu+1}$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} ij.\, c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)\sum_{\mu=i}^{m}\sum_{v=j}^{n}\frac{a_{m,\mu}b_{n,v}}{(\mu+1)(v+1)}$$

عندئذٍ يكون:

$$t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x) = S_{r-1,s-1}(x) + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\overline{a_{m,\iota}}.\,\overline{b_{n,\jmath}}.\, c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} j.\,\overline{a_{m,\iota}}.\,\widetilde{b_{n,\jmath}}.\, c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} i.\,\widetilde{a_{m,\iota}}.\,\overline{b_{n,\jmath}} c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} ij.\,\widetilde{a_{m,\iota}}.\,\widetilde{b_{n,\jmath}}.\, c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

حيث إن:

$$\widetilde{a_{m,\iota}} = \sum_{k=i}^{m}\frac{a_{m,k}}{k+1} \qquad ,\widetilde{b_{n,\jmath}} = \sum_{l=j}^{n}\frac{b_{n,l}}{l+1}$$

$$\widetilde{\widetilde{a_{m,\iota}}} = \widetilde{a_{m,\iota}} - \widetilde{a_{m-1,\iota}} \quad , \qquad \widetilde{\widetilde{b_{n,\jmath}}} = \widetilde{b_{n,\jmath}} - \widetilde{a_{n-1,\jmath}}$$

وبالتالي:

$$t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x) = S_{r-1,s-1}(x) +$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\overline{a_{m,\iota}} - i\widetilde{a_{m,\iota}}\right).\left(\overline{b_{n,\jmath}} - j\widetilde{b_{n,\jmath}}\right).\, c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

عندئذٍ يكون:

$$\Delta_{11} t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x) = t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x) - t_{m-1,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x)$$

$$-t_{m,n-1,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x)+t_{m-1,n-1,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\overline{a_{m,\iota}}-i\widetilde{a_{m,\iota}}\right).\left(\overline{b_{n,\jmath}}-j\widetilde{b_{n,\jmath}}\right).c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$-\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n}\left(\overline{a_{m-1,\iota}}-i\widetilde{a_{m-1,\iota}}\right).\left(\overline{b_{n,\jmath}}-j\widetilde{b_{n,\jmath}}\right).c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$-\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\overline{a_{m,\iota}}-i\widetilde{a_{m,\iota}}\right).\left(\overline{b_{n-1,\jmath}}-j\widetilde{b_{n-1,\jmath}}\right).c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$+\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\overline{a_{m-1,\iota}}-i\widetilde{a_{m-1,\iota}}\right).\left(\overline{b_{n-1,\jmath}}-j\widetilde{b_{n-1,\jmath}}\right).c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

لكن:

$$\overline{a_{m-1,m}}=a\widetilde{_{m-1,m}}=\overline{b_{n-1,n}}=b\widetilde{_{n-1,n}}=0$$

وبالتالي فإن:

$$\Delta_{11}t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left[\left(\overline{a_{m,\iota}}-i\widetilde{a_{m,\iota}}\right)-\left(\overline{a_{m-1,\iota}}-i\widetilde{a_{m-1,\iota}}\right)\right]$$
$$\times\left[\left(\overline{b_{n,\jmath}}-j\widetilde{b_{n,\jmath}}\right)-\left(\overline{b_{n-1,\jmath}}-j\widetilde{b_{n-1,\jmath}}\right)\right].c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$\Delta_{11}t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left[\left(\overline{a_{m,\iota}}-\overline{a_{m-1,\iota}}\right)-i\left(\widetilde{a_{m,\iota}}-\widetilde{a_{m-1,\iota}}\right)\right]$$
$$\times\left[\left(\overline{b_{n,\jmath}}-\overline{b_{n-1,\jmath}}\right)-j\left(\widetilde{b_{n,\jmath}}-\widetilde{b_{n-1,\jmath}}\right)\right].c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\widehat{a_{m,\iota}}-i\widetilde{\widetilde{a_{m,\iota}}}\right)\times\left(\widehat{b_{n,\jmath}}-j\widetilde{\widetilde{b_{n,\jmath}}}\right).c_{r+i,s+j}\varphi_{r+i,s+j}(x)$$

وباستخدام متراجحة هولدر وبفرض أن:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\quad ,p=\frac{2}{k}\quad ,q=\frac{2}{2-k}$$

نجد أن:

$$\int_a^b \left|\Delta_{11} t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x)\right|^k dx \leq (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left(\int_a^b \left|\Delta_{11} t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x)\right|^2 dx \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= A \left\{ \int_a^b \left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left(\widehat{a_{m,i}} - i\widetilde{\widetilde{a_{m,i}}}\right)\left(\widehat{b_{n,j}} - j\widetilde{\widetilde{b_{n,j}}}\right) . c_{r+i,s+j} \varphi_{r+i,s+j}(x) \right|^2 dx \right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبالاستفادة من التعامد نجد أن:

$$\int_a^b \left|\Delta_{11} t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x)\right|^k dx$$

$$= A \left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left(\widehat{a_{m,i}} - i\widetilde{\widetilde{a_{m,i}}}\right)^2 \left(\widehat{b_{n,j}} - j\widetilde{\widetilde{b_{n,j}}}\right)^2 . \left|c_{r+i,s+j}\right|^2 \right)^{\frac{k}{2}}$$

ومنه نجد أن:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \int_a^b \left|\Delta_{11} t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x)\right|^k dx \leq$$

$$\leq A \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left(\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left(\widehat{a_{m,i}} - i\widetilde{\widetilde{a_{m,i}}}\right)^2 \times \left(\widehat{b_{n,j}} - j\widetilde{\widetilde{b_{n,j}}}\right)^2 . \left|c_{r+i,s+j}\right|^2 \right)^{\frac{k}{2}}$$

لكن المتسلسلة الأخيرة فرضاً متقاربة بانتظام من أجل كل r, s ، كما أن الدالة $\left|\Delta_{11} t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x)\right|$ غير سالبة.

وحسب تمهيدية بيبو–ليفي المضاعفة نجد أن المتسلسلة:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|\Delta_{11}t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x)\right|^{k}$$

متقاربة تقريباً في كل مكان، وبالتالي فإن المتسلسلة المتعامدة المضاعفة

$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\varphi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية التقريبية المضاعفة المطلقة المثقّلة $|A,B|_{r,s;k}$ تقريباً في كل مكان.

ملاحظة (4): في المبرهنة (3):

من أجل $k=1$ نعتمد على متراجحة شفارتز.

ومن أجل $k=2$ نستخدم خاصية التعامد.

كما أنه يمكننا إثبات صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة (4): لتكن $\{\Omega(m,n)\}$ متتالية مضاعفة موجبة بحيث تكون $\left\{\frac{\Omega(m,n)}{mn}\right\}$ متتالية غير متزايدة بالنسبة لكل من m و n ، وبفرض أن المتسلسلة $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\Omega(m,n)}$ متقاربة.

إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{r+m,s+n}\right|^{2}\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\mathrm{B}^{(k)}(m,n) \qquad \dots(4.14)$$

متقاربة بانتظام لأجل كل r و s ، عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة المضاعفة

$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\varphi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية التقريبية المضاعفة المطلقة المثقّلة $|A,B|_{r,s;k}$ تقريباً في كل مكان. حيث إن:

$$B^{(k)}(i,j)=\frac{1}{(ij)^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{m=i}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}(mn)^{\frac{2}{k}}\left(\widehat{a_{m,\imath}}-i\widetilde{\widetilde{a_{m,\imath}}}\right)^{2}\left(\widehat{b_{n,\jmath}}-j\widetilde{\widetilde{b_{n,\jmath}}}\right)^{2} \quad (4.15)$$

الإثبات: وجدنا من المبرهنة (3) أن:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\int_{a}^{b}\left|\Delta_{11}t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x)\right|^{k}dx \leq$$

$$\leq A\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\widehat{a_{m,\iota}}-i\widetilde{\widetilde{a_{m,\iota}}}\right)^{2}\times\left(\widehat{b_{n,J}}-j\widetilde{\widetilde{b_{n,J}}}\right)^{2}.\left|c_{r+i,s+j}\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= A\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\{mn\Omega(m,n)\}^{1-\frac{k}{2}}}\left\{mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\widehat{a_{m,\iota}}-i\widetilde{\widetilde{a_{m,\iota}}}\right)^{2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\widehat{b_{n,J}}-j\widetilde{\widetilde{b_{n,J}}}\right)^{2}.\left|c_{r+i,s+j}\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

ولنطبق متراجحة هولدر للمجاميع، بوضع $\frac{1}{p}=1-\frac{k}{2}$ نجد أن:

$$\leq A\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\Omega(m,n)}\right)^{1-\frac{k}{2}}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\right.$$

$$\left.\times\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left(\widehat{a_{m,\iota}}-i\widetilde{\widetilde{a_{m,\iota}}}\right)^{2}\times\left(\widehat{b_{n,J}}-j\widetilde{\widetilde{b_{n,J}}}\right)^{2}.\left|c_{r+i,s+j}\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبالاستفادة من التقارب وبتطبيق علاقة فوبيني نجد أن:

$$\leq A\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|c_{r+i,s+j}\right|^{2}\right.$$

$$\left.\times\sum_{m=i}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\left(\widehat{a_{m,\iota}}-i\widetilde{\widetilde{a_{m,\iota}}}\right)^{2}\left(\widehat{b_{n,J}}-j\widetilde{\widetilde{b_{n,J}}}\right)^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\leq A\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|c_{r+i,s+j}\right|^{2}\sum_{m=i}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}mn\frac{(mn)^{\frac{2}{k}-1}}{(mn)^{\frac{2}{k}-1}}\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\right.$$

$$\left.\times\left(\widehat{a_{m,\iota}}-i\widetilde{\widetilde{a_{m,\iota}}}\right)^{2}\left(\widehat{b_{n,\jmath}}-j\widetilde{\widetilde{b_{n,\jmath}}}\right)^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\leq A\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|c_{r+i,s+j}\right|^{2}\left(\frac{\Omega(i,j)}{ij}\right)^{\frac{2}{k}-1}\sum_{m=i}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}(mn)^{\frac{2}{k}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\widehat{a_{m,\iota}}-i\widetilde{\widetilde{a_{m,\iota}}}\right)^{2}\left(\widehat{b_{n,\jmath}}-j\widetilde{\widetilde{b_{n,\jmath}}}\right)^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\leq A\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|c_{r+i,s+j}\right|^{2}\Omega^{\frac{2}{k}-1}(i,j)B^{(k)}(i,j)\right\}^{\frac{k}{2}}$$

لكن المتسلسلة الأخيرة فرضاً متقاربة بانتظام من أجل كل r,s ، كما أن الدالة $\left|\Delta_{11}t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x)\right|$ غير سالبة.

وحسب تمهيدية بيبو–ليفي المضاعفة نجد أن المتسلسلة:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|\Delta_{11}t_{m,n,r,s}^{(A,B)_{r,s}}(x)\right|^{k}$$

متقاربة تقريباً في كل مكان، وبالتالي فإن المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\varphi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية التقريبية المضاعفة المطلقة المثقّلة $|A,B|_{r,s;k}$ تقريباً في كل مكان.

ملاحظة (5):

بشكل مشابه لحالة المتغير الواحد نحصل على الطرائق المضاعفة الآتية:

$$\left|C,\alpha,\beta,\acute{\alpha},\acute{\beta}\right|_{r,s;k}\ ,|N,p,q,\acute{p},\acute{q}|_{r,s;k}\ ,|N,p,\acute{p}|_{r,s;k}\ ,|\bar{N},q,\acute{q}|_{r,s;k}$$

- في الفصل الرابع قمت بتعريف الطريقة المصفوفية التقريبية المضاعفة بطريقة مشابهة لتعريف الطريقة المصفوفية التقريبية البسيطة، ثم بينت من خلال المبرهنتين (3) و(4) متى تكون المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\varphi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية التقريبية المضاعفة المطلقة المثقّلة $|A,B|_{r,s;k}$ تقريباً في كل مكان.

الفصل الخامس

قابلية جمع متسلسلة فوربيه بطريقة نيورلند المعممة–باناخ المطلقة

On absolute generalized Norlund-Banach summability of Fourier series

في هذا الفصل ستتم دراسة قابلية جمع متسلسلة فوربيه بطريقة نيورلند المعممة–باناخ المطلقة، على اعتبار متسلسلة فوربيه من أهم المتسلسلات المتعامدة المعروفة، وسيتم ذكر التعاريف والمفاهيم الأساسية اللازمة لذلك، وسيتم تعميم طريقة نيورلند–باناخ المطلقة، والحصول على مبرهنة هامة جديدة حول هذه الدراسة، وتجدر الإشارة إلى أن الدراسات السابقة اقتصرت على قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بطريقة نيورلند المطلقة فقط، وطريقة باناخ المطلقة فقط.

5.1. تعاريف ومفاهيم أساسية:

5.1.1. تحويل طريقة باناخ B [11]:

لتكن $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ عندئذٍ يعطى تحويل طريقة باناخ B بالعلاقة:

$$t_k(n) = \frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1} S_{n+r} \quad ; k \in \mathbb{N}$$

5.1.2. طريقة باناخ B [11]:

إذا كانت $\lim_{k\to\infty} t_k(n) = s$ (حيث s عدد منتهٍ) بانتظام عند كل $n \in \mathbb{N}$، عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ قابلة للجمع بطريقة باناخ إلى العدد s.

بانتظام يعني أن: $\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_k(n) - s| = 0$

5.1.3. طريقة باناخ المطلقة $|B|$ [11]:

إذا كانت المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{\infty}|t_k(n)-t_{k+1}(n)|$ متقاربة بانتظام لكل $n\in\mathbb{N}$، فإننا نقول إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ قابلة للجمع بطريقة باناخ المطلقة $|B|$.

5.1.4. طريقة نيورلند–باناخ $(N,p_n)-B$ [11]:

يعطى تحويل طريقة نيورلند–باناخ، $(N,p_n)-B$ ، بالعلاقة:

$$T_k(n)=\frac{1}{P_k}\sum_{r=0}^{k-1}p_{k-r}S_{n+r}\quad ;k\in\mathbb{N}\,,P_k\neq 0\,,p_0=0$$

$$P_k=p_1+p_2+\cdots+p_{k-1}+p_k$$

5.1.5. طريقة نيورلند–باناخ المطلقة $|(N,p_n)-B|$ [11]:

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}|T_k(n)-T_{k-1}(n)|$ متقاربة بانتظام لكل $n\in\mathbb{N}$، فإننا نقول إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند–باناخ المطلقة $|(N,p_n)-B|$.

ملاحظة (1): إذا كانت $\{p_n\}=\{1\}$ تؤول طريقة نيورلند–باناخ المطلقة أيضاً إلى طريقة باناخ المطلقة.

ولندرس طريقة نيورلند المعممة–باناخ المطلقة ولنطبقها على إحدى أهم المتسلسلات المتعامدة والتي تدعى متسلسلة فورييه $(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n h_n)$، بعد وضع تعريف طريقة نيورلند المعممة–باناخ المطلقة بطريقة مشابهة لتعريف طريقة نيورلند–باناخ المطلقة:

5.1.6. طريقة نيورلند المعممة–باناخ المطلقة $|(N,p_n,q_n)-B|$:

يعطى تحويل الطريقة $(N,p_n,q_n)-B$ بالعلاقة:

$$T_k(n)=\frac{1}{R_k}\sum_{r=0}^{k-1}p_{k-r}q_rS_{n+r}\quad ;k\in\mathbb{N}\,,R_k\neq 0,q_{-1}\neq 0,p_0=0$$

حيث إن:

$$R_k=\sum_{r=0}^{k}p_{k-r}q_r=\sum_{r=0}^{k-1}p_{k-r}q_r+\underbrace{p_0}_{=0}q_k=\sum_{r=0}^{k-1}p_{k-r}q_r$$

$$=p_kq_0+p_{k-1}q_1+\cdots+p_1q_{k-1}$$

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}|T_k(n)-T_{k+1}(n)|$ متقاربة بانتظام لكل $n\in\mathbb{N}$، عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة–باناخ المطلقة $|(N,p_n,q_n)-B|$.

ملاحظة (2): وجدنا في الفصل الأول أنه إذا كانت:

$$p_n=E_n^{\alpha-1}=C_n^{\alpha+n-1}$$

$$q_n=E_n^{\beta}=C_n^{\beta+n}$$

$$R_n=E_n^{\alpha+\beta}=C_n^{\alpha+\beta+n}$$

فإن طريقة نيورلند المعممة (N,p_n,q_n) تؤول إلى طريقة سيزارو المعممة (C,α,β)، وهذا يختلف عن طرائق باناخ.

ملاحظة (3): إذا كانت:

$$p_k=E_{k-1}^{\alpha-1}\ ,q_k=E_{k-1}^{\beta}\ ,R_k=E_{k-1}^{\alpha+\beta}$$

فإن الطريقة $(N,p_n,q_n)-B$ تؤول إلى طريقة سيزارو–باناخ المعممة $(C,\alpha,\beta)-B$.

ملاحظة (4): يمكن التحقق وبسهولة أن:

$$\sum_{r=1}^{k}E_{k-r}^{\alpha-1}=E_{k-1}^{\alpha-1}+E_{k-2}^{\alpha-1}+\cdots+E_0^{\alpha-1}=E_{k-1}^{\alpha}$$

ملاحظة (5): عند نشر المجموع الآتي سنحصل على التلاف R_{k-j+n}:

$$\sum_{r=j-n}^{k-1} p_{k-r}q_r = p_{k-j+n}q_{j-n} + p_{k-j+n-1}q_{j-n+1} + \cdots + p_2q_{k-2} + p_1q_{k-1}$$

$$= \sum_{r=1}^{k-j+n} p_{k-j+n-r+1}q_{j-n+r-1} = R_{k-j+n}$$

2.5. قابلية جمع متسلسلة فورييه بطريقة نيورلند المعممة–باناخ المطلقة $|(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{p_n}, \boldsymbol{q_n},) - \boldsymbol{B}|$:

لتكن f دالة دورية دورها 2π كمولة لوبيغياً على المجال $(-\pi, \pi)$ ولتكن متسلسلة فورييه للدالة f معطاة بالعلاقة [11,25,27,28,29]:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \qquad \dots (5.1)$$

عندئذٍ يكون:

$$A_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(t) \cos nt\, dt \quad ; n = 0,1,2, \dots$$

حيث إن:

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t)\} \qquad \dots (5.2)$$

وسنقوم فيما يأتي باستنتاج أن:

$$A_n(x) = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin nt\, d\phi(t) \qquad \dots (5.3)$$

انطلاقاً من الحد العام للمتسلسلة أعلاه:

$$A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

نجد أن:

$$A_n(x) = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \cos nt\, dt \right) \cos nx + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \sin nt\, dt \right) \sin nx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ [\cos nt\,.\cos nx + \sin nt\,.\sin nx] dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \cos n(t-x)\, dt$$

ولنفرض $u = t - x$ عندئذٍ:

$$A_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\ \cos nu\, du$$

لكن f دالة دورية دورها 2π وبالتالي:

$$A_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\ \cos nu\, du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x+u)\ \cos nu\, du + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+u)\ \cos nu\, du$$

$$= \frac{1}{\pi} H_1 + \frac{1}{\pi} H_2$$

نعوض في H_1 كل u بـ $-t$ ، وفي H_2 كل u بـ t ، نجد:

$$A_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x-t)\ \cos nt\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+t)\ \cos nt\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} [f(x-t) + f(x+t)]\ \cos nt\, dt$$

ولنفرض: $\phi(t) = \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t)\}$

عندئذٍ يكون:

$$A_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(t)\ \cos nt\, dt$$

ولنكامل بالتجزئة:

$$u = \phi(t) \qquad , dv = \cos nt\, dt$$

$$du = \acute{\phi}(t)dt = d\phi(t) \qquad , v = \frac{\sin nt}{n}$$

وبالتالي فإن:

$$A_n(x) = \frac{2}{\pi}\left\{\phi(t).\frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin nt\, d\phi(t)\right\}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \sin nt\, d\phi(t)$$

<u>مبرهنات:</u>

مبرهنة (1) [11]: إذا كانت $\phi(t) \in BV(0,\pi)$ فإن متسلسة فورييه $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ للدالة f قابلة للجمع بطريقة باناخ المطلقة $|B|$.

مبرهنة (2) [11]: إذا كانت $\phi(t) \in BV(0,\pi)$ وكانت $\{p_n\}$ متتالية عددية غير سالبة تحقق:

$$np_n = O(P_n) \qquad \dots (5.4)$$

$$P_n = O(np_n) \qquad \dots (5.5)$$

$$kp_{k-r+1}p_k - (k-r)p_{k-r}p_{k+1} = O(rp_kp_{k+1}) \qquad \dots (5.6)$$

عندئذٍ تكون متسلسلة فورييه $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ للدالة f قابلة للجمع بطريقة نيورلند–باناخ المطلقة $|(N,p_n) - B|$.

مبرهنة (3): إذا كانت الدالة $\phi(t)\in BV(0,\pi)$ وكانت $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ متتاليتان عدديتان تحققان معاً الشروط:

$$1.\ R_n = O(np_n q_{k-n}) \quad ; k\in\mathbb{N} \qquad \dots(5.7)$$

$$\begin{aligned}2.\ & kp_{k-r+1}q_{r-1}p_k q_0-(k-r)p_{k+1}q_{-1}p_{k-r}q_r \\ &= O(rp_{k+1}q_{-1}p_k q_0)\end{aligned} \qquad \dots(5.8)$$

عندئذٍ تكون متسلسلة فورييه $\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)$ للدالة f قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة–باناخ المطلقة $|(N,p_n,q_n)-B|$.

الإثبات: ليكن $T_k(n)$ تحويل الطريقة $(N,p_n,q_n)-B$ المطبق على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ عندئذٍ:

$$T_k(n)=\frac{1}{R_k}\sum_{r=0}^{k-1}p_{k-r}q_r S_{n+r} \quad ; k\in\mathbb{N}\,, R_k\neq 0, q_{-1}\neq 0, p_0=0$$

$$=\frac{1}{R_k}\sum_{r=0}^{k-1}p_{k-r}q_r\sum_{j=1}^{n+r}a_j$$

$$=\frac{1}{R_k}\left\{\sum_{j=1}^{n}a_j\sum_{r=0}^{k-1}p_{k-r}q_r+\sum_{j=n}^{n+k-1}a_j\sum_{r=j-n}^{k-1}p_{k-r}q_r\right\}$$

$$=\frac{1}{R_k}\left\{R_kS_n+\sum_{j=n}^{n+k-1}R_{k-j+n}a_j\right\}$$

$$=S_n+\frac{1}{R_k}\sum_{r=0}^{k-1}R_{k-r}a_{n+r}$$

حيث بدلنا كل j بـِ $n+r$ واعتمدنا على الملاحظة (5)، وباستخدام العلاقة الآتية:

$$R_k=\sum_{r=0}^{k}p_{k-r}q_r=\sum_{r=0}^{k-1}p_{k-r}q_r+\underbrace{p_0}_{=0}q_k=\sum_{r=0}^{k-1}p_{k-r}q_r$$

نحصل على:

$$T_k(n) - T_{k+1}(n) = S_n + \frac{1}{R_k}\sum_{r=0}^{k-1} R_{k-r}a_{n+r} - S_n + \frac{1}{R_{k+1}}\sum_{r=0}^{k} R_{k+1-r}a_{n+r}$$

$$= \sum_{r=1}^{k}\left(\frac{R_{k-r}}{R_k} - \frac{R_{k-r+1}}{R_{k+1}}\right)a_{n+r}$$

$$= \sum_{r=1}^{k}\left(\frac{R_{k+1}R_{k-r} - R_{k-r+1}R_k}{R_kR_{k+1}}\right)a_{n+r}$$

$$= \sum_{r=1}^{k}\left(\frac{p_{k+1}q_{-1}R_{k-r} - p_{k-r+1}q_{r-1}R_k}{R_kR_{k+1}}\right)a_{n+r}$$

وذلك لأن:

$$R_k = \sum_{r=0}^{k-1} p_{k-r}q_r$$

$$R_{k+1} = \sum_{r=0}^{k} p_{k+1-r}q_{r-1}$$

$$= p_{k+1}q_{-1} + p_kq_0 + p_{k-1}q_1 + \cdots + p_2q_{k-2} + p_1q_{k-1}$$

$$= p_{k+1}q_{-1} + \sum_{r=0}^{k-1} p_{k-r}q_r = p_{k+1}q_{-1} + R_k$$

كما أن:

$$R_{k-r} = \sum_{r=0}^{k-r-1} p_{k-r-r}q_{r-(-r)}$$

وبطريقة مشابهة نجد أن:

$$R_{k-r+1} = \sum_{r=0}^{k-r} p_{k-r+1-r} q_{r-(1-r)}$$

$$= p_{k-r+1} q_{r-1} + p_{k-r} q_r + \cdots + p_{k-r+1-(k-r-1)} q_{r-\{1-(k-r-1)\}} + p_{k-r+1-(k-r)} q_{r-\{1-(k-r)\}}$$

وبالتالي فإن:

$$R_{k-r+1} = p_{k-r+1} q_{r-1} + (p_{k-r} q_r + \cdots + p_2 q_{k-2} + p_1 q_{k-1})$$
$$= p_{k-r+1} q_{r-1} + R_{k-r}$$

حيث:

$$R_{k-r} = p_{k-r} q_r + p_{k-r-1} q_{r+1} + \cdots + p_{k-r-(k-r-2)} q_{r-\{-(k-r-2)\}} + p_{k-r-(k-r-1)} q_{r-\{-(k-r-1)\}}$$
$$= p_{k-r} q_r + p_{k-r-1} q_{r+1} + \cdots + p_2 q_{k-2} + p_1 q_{k-1}$$

ومنه فإن:

$$R_{k+1} R_{k-r} - R_{k-r+1} R_k = (p_{k+1} q_{-1} + R_k) R_{k-r} - (p_{k-r+1} q_{r-1} + R_{k-r}) R_k$$
$$= p_{k+1} q_{-1} R_{k-r} - p_{k-r+1} q_{r-1} R_k$$

وبالتالي من أجل متسلسلة فورييه $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ يكون لدينا:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |T_k(n) - T_{k+1}(n)| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{r=1}^{k} \left(\frac{p_{k+1} q_{-1} R_{k-r} - p_{k-r+1} q_{r-1} R_k}{R_k R_{k+1}} \right) A_{n+r}(x) \right|$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_k R_{k+1}} \left| \sum_{r=1}^{k} \int_0^{\pi} (p_{k+1} q_{-1} R_{k-r} - p_{k-r+1} q_{r-1} R_k) \frac{\sin(n+r)t}{n+r} \, d\phi(t) \right|$$

وبما أن $\phi(t) \in BV(0,\pi)$ فإن المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}|T_k(n) - T_{k+1}(n)|$ متقاربة، وذلك لأن:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|T_k(n) - T_{k+1}(n)| =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{R_kR_{k+1}}\left|\sum_{r=1}^{k}(p_{k+1}q_{-1}R_{k-r} - p_{k-r+1}q_{r-1}R_k)\frac{\sin(n+r)t}{n+r}\right| < \infty$$

متقاربة بانتظام من أجل كل $0 < t < \pi$.

بفرض $\tau = \left[\frac{1}{t}\right]$ لنضع:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|T_k(n) - T_{k+1}(n)| =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{R_kR_{k+1}}\left|\sum_{r=1}^{k}(p_{k+1}q_{-1}R_{k-r} - p_{k-r+1}q_{r-1}R_k)\frac{\sin(n+r)t}{n+r}\right|$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\tau} + \sum_{k=\tau+1}^{\infty}\right\}\frac{1}{R_kR_{k+1}}\left|\sum_{r=1}^{k}(p_{k+1}q_{-1}R_{k-r} - p_{k-r+1}q_{r-1}R_k)\frac{\sin(n+r)t}{n+r}\right|$$

ومنه ينتج مجموع المتسلسلتين:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|T_k(n) - T_{k+1}(n)| = \sum_{1} + \sum_{2}$$

الآن، المتسلسلة الأولى هي:

$$\sum_{1} = \sum_{k=1}^{\tau}\frac{1}{R_kR_{k+1}}\left|\sum_{r=1}^{k}(p_{k+1}q_{-1}R_{k-r} - p_{k-r+1}q_{r-1}R_k)\frac{\sin(n+r)t}{n+r}\right|$$

$$\leq O(t)\sum_{k=1}^{\tau}\frac{1}{R_kR_{k+1}}\left|\sum_{r=1}^{k}p_{k+1}q_{-1}R_{k-r} - p_{k-r+1}q_{r-1}R_k\right|$$

$$= O(t)\sum_{k=1}^{\tau}\frac{1}{R_k R_{k+1}}\sum_{r=1}^{k} p_{k-r+1}q_{r-1}R_k$$

حيث إن:

$$p_{k-r+1}q_{r-1}R_k \geq p_{k+1}q_{-1}R_{k-r} \quad ; 1 \leq r \leq k$$

وبالتالي فإن:

$$\sum_{1} \leq O(t)\sum_{k=1}^{\tau}\frac{R_k}{R_{k+1}} \leq O(t).\tau = O(1)$$

مع الأخذ بالحسبان أن:

$$\sum_{r=1}^{k} p_{k-r+1}q_{r-1} = R_k$$

كما أن:

$$\sin nt \leq n\sin t \quad , \quad \sin t \sim t \quad , \quad \sum_{k=1}^{\tau}(1) = \tau$$

أما المتسلسلة الثانية فهي:

$$\sum_{2} = \sum_{k=\tau+1}^{\infty}\frac{1}{R_k R_{k+1}}\left|\sum_{r=1}^{k}(p_{k+1}q_{-1}R_{k-r} - p_{k-r+1}q_{r-1}R_k)\frac{\sin(n+r)t}{n+r}\right|$$

من الشرط (5.7) لدينا: $R_n = O(np_n q_{k-n})$ وبالتالي:

$$\sum_{2} = O(1)\sum_{k=\tau+1}^{\infty}\frac{1}{R_k R_{k+1}}\left|\sum_{r=1}^{k}\{(k-r)p_{k+1}q_{-1}R_{k-r}q_r - kp_{k-r+1}q_{r-1}p_k q_0\}\frac{\sin(n+r)t}{n+r}\right|$$

$$\underset{\text{من الشرط (5.8)}}{\underset{ب}{=}} O(1)\sum_{k=\tau+1}^{\infty}\frac{1}{R_kR_{k+1}}\left|\sum_{r=1}^{k}\frac{rp_{k+1}q_{-1}p_kq_0}{n+r}\sin(n+r)t\right|$$

$$=O(1)\sum_{k=\tau+1}^{\infty}\frac{p_{k+1}q_{-1}p_kq_0}{R_kR_{k+1}}\times\frac{k}{n+k}\left|\sum_{r=1}^{k}\sin(n+r)t\right|$$

$$=O(\tau)\sum_{k=\tau+1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(n+k)}$$

$$=O(\tau)O(\tau^{-1})=O(1)$$

وبالتالي فإن $\infty > \sum_{k=1}^{\infty}|T_k(n)-T_{k+1}(n)| = \sum_1 \quad + \sum_2$ متقاربة بانتظام من أجل كل n.

وبالتالي فإن $\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)$ قابلة للجمع بالطريقة $|(N,p_n,q_n)-B|$.

ملاحظة (6):

تم استخدام الفرضيات الآتية في المبرهنة السابقة:

$$R_n=O(np_nq_{k-n})$$

$$R_k=O(kp_kq_0)$$

$$R_{k-r}=O\left((k-r)p_{k-r}q_{k-(k-r)}\right)$$

$$\Rightarrow R_{k-r}=O\big((k-r)p_{k-r}q_r\big)$$

(لاحظ أن مجموع الأدلة يساوي k)

كذلك تم استخدام الفرضية:

$$kp_{k-r+1}q_{r-1}p_kq_0-(k-r)p_{k+1}q_{-1}p_{k-r}q_r=O(rp_{k+1}q_{-1}p_kq_0)$$

ملاحظات (7):

$$|(N,p_n,q_n)-B| \Rightarrow |(N,p_n)-B| \quad if\ q_n=1$$

$$|(N,p_n,q_n)-B| \Rightarrow |(\bar{N},q_n)-B| \quad if\ p_n=1$$

$$|(N,p_n,q_n)-B| \Rightarrow |B| \quad if\ p_n=q_n=1$$

$$|(N,p_n,q_n)-B| \Rightarrow |(C,\alpha,\beta)-B| \quad if\ p_n=E_{n-1}^{\alpha-1}\ ,q_n=E_{n-1}^{\beta}$$

$$|(N,p_n,q_n)-B| \Rightarrow |(C,1)-B| \quad if\ p_n=q_n=1$$

لاحظ أن: $|(C,1)-B|=|B|$

تمهيدية (1) [5]: ليكن تحويل طريقة باناخ: $t_k(n)=\frac{1}{k}\sum_{v=0}^{k-1}S_{n+v} \quad ; k\in\mathbb{N}$

عندئذٍ يكون:

$$t_k(n)-t_{k+1}(n)=-\frac{1}{k(k+1)}\sum_{v=1}^{k}vu_{n+v} \qquad \dots(5.9)$$

تمهيدية (2) [5]: لتكن $\{p_n\}$ متتالية حقيقية موجبة غير متناقصة، ولتكن $\tau=\left[\frac{1}{t}\right]$، عندئذٍ من أجل $a,b\in\mathrm{N}$ يكون:

$$\sum_{n=a}^{b}p_n\cos nt=O(p_\tau) \qquad \dots(5.10)$$

$$\sum_{n=a}^{b}p_n\sin nt=O(p_\tau) \qquad \dots(5.11)$$

<u>تطبيق:</u> إن متسلسلة فورييه للدالة x^2 على المجال $(-\pi,\pi)$ تعطى بالعلاقة:

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

ولنضع:

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

يجب أن يكون $\sum_{K=1}^{\infty}|t_k(n)-t_{k+1}(n)|<\infty$ حتى تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ قابلة للجمع بطريقة باناخ المطلقة $|B|$.

لدينا حسب التمهيدية (1) من أجل تحويل طريقة باناخ يكون:

$$t_k(n)-t_{k+1}(n)=-\frac{1}{k(k+1)}\sum_{v=1}^{k}vu_{n+v}$$

$$=-\frac{4}{k(k+1)}\sum_{v=1}^{k}v\frac{(-1)^{n+v}}{(n+v)^2}\cos(n+v)x$$

وحسب التمهيدية (2):

$$t_k(n)-t_{k+1}(n)=-\frac{4}{k(k+1)}.k\frac{(-1)^{n+k}}{(n+k)^2}.O(1)$$

وبالتالي:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|t_k(n)-t_{k+1}(n)|=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)(n+k)^2}<\infty$$

وذلك حسب اختبار نهاية النسبة مع المتسلسلة الريمانية المتقاربة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$.

وبالتالي فإن متسلسلة فورييه للدالة x^2 قابلة للجمع بطريقة باناخ المطلقة $|B|$.

3.5. المناقشة والنتائج:

1. هل طريقة باناخ حالة خاصة من الطريقة المصفوفية أم لا؟

كلا، وذلك لأن صيغة تحويل طريقة باناخ لا تنتج عن صيغة تحويل الطريقة المصفوفية باستبدال a_{nk} بمصفوفة ما.

2. هل لطريقة باناخ علاقة بالطريقة المصفوفية التقريبية؟

$$t_k(n)=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}S_{n+r}=\frac{1}{k}\sum_{r=n}^{n+k-1}S_r$$

$$\Rightarrow t_n(m) = \frac{1}{n}\sum_{k=m}^{m+n-1} S_k$$

لكن:

$$t_n^{(A)_m} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_{k,m} \quad ; \; S_{n,m} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=m}^{m+n} S_k$$

ومنه:

$$t_n(m) = S_{n-1,m} \quad (*)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} t_n(m) = \lim_{n\to\infty} S_{n-1,m}$$

أي أن طريقة باناخ تكافئ الطريقة المصفوفية التقريبية.

وإذا كانت $\lim_{n\to\infty} S_{n,m}$ موجودة كانت $\lim_{n\to\infty} t_n^{(A)_m}$ موجودة.

أي نحصل على:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \quad |B| \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_{n,m} = s \quad ; \left(s \text{ عدد معين}\right)$$

ومنه فإن:

$$|(C,1) - B| = |B| \Rightarrow B \Rightarrow (A)_m$$

3. هل طريقة باناخ وطريقة باناخ المطلقة نظاميتين ولماذا؟

بما أن كل متتالية متقاربة هي متتالية متقاربة تقريباً فإن طريقة باناخ هي طريقة نظامية دوماً حيث $t_n(m) = S_{n,m}$.

كما أن: $t_n(m) - t_{n+1}(m) = S_{n-1,m} - S_{n,m}$

لنفرض أن $\{S_n\}$ متتالية ذات تغيرات محدودة عندئذٍ لنثبت أن $t_n(m)$ ذات تغيرات محدودة.

- إن كون $t_n(m)$ ذات تغيرات محدودة يكافئ كون $S_{n,m}$ ذات تغيرات محدودة حسب $(*)$

وحتى تكون طريقة باناخ المطلقة نظامية يجب إثبات أن $S_{n,m}$ ذات تغيرات محدودة.

- الفرض $\{S_n\}$ ذات تغيرات محدودة أي $\sum_{n=1}^{\infty}|S_n - S_{n+1}| < \infty$

الطلب $\{S_{n,m}\}$ ذات تغيرات محدودة أي $\sum_{n=1}^{\infty}\left|S_{n,m} - S_{n+1,m}\right| < \infty$

أو الطلب $\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=m}^{m+n} S_k\right\} = \{S_{n,m}\}$ ذات تغيرات محدودة يعني:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=m}^{m+n} S_k - \frac{1}{n+2}\sum_{k=m}^{m+n+1} S_k\right| < \infty$$

- $\frac{1}{n+1}\sum_{k=m}^{m+n} S_k = \frac{S_m}{n+1} + \frac{S_{m+1}}{n+1} + \cdots + \frac{S_{m+n-1}}{n+1} + \frac{S_{m+n}}{n+1}$

لكن المتتالية $\{S_{m+n}\}$ ذات تغيرات محدودة وكذلك المتتالية $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ ذات تغيرات محدودة لأن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right|$$
$$= 1 < \infty$$

وبالتالي المتتالية $\left\{\frac{S_{m+n}}{n+1}\right\}$ ذات تغيرات محدودة وبالتالي $\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=m}^{m+n} S_k\right\}$ ذات تغيرات محدودة لأنه مجموع عدد منتهٍ من المتتاليات ذات التغيرات المحدودة.

فطريقة باناخ المطلقة نظامية دوماً.

- في الفصل الخامس قمت بدراسة قابلية جمع متسلسلة فورييه بطريقة نيورلند المعممة– باناخ المطلقة، وذلك من خلال المبرهنة (3).

ملخص عربي

تحتوي هذه الأطروحة على خمسة فصول:

في الفصل الأول: تم ذكر تعاريف للمتسلسلات المتعامدة البسيطة والمضاعفة وبعض طرائق قابلية الجمع المطلقة، بحالتها العامة المثقّلة، كالطريقة المصفوفية المطلقة (البسيطة والمضاعفة) وطرائق نيورلند المطلقة ونيورلند المعممة المطلقة (البسيطة والمضاعفة) وطرائق سيزارو المطلقة، وعلاقة هذه الطرائق ببعضها البعض.

وفي الفصل الثاني: قمت بإيجاد الشرط اللازم لتكون الطريقة المصفوفية المطلقة المثقّلة $|A|_\lambda$ (حيث $\lambda \leq 1$) نظامية وذلك من خلال المبرهنة (1).

كما قمت بإثبات أن المتسلسلة المتعامدة المضاعفة من الشكل $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ تكون قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة المثقّلة $|A,B|_k$ تقريباً في كل مكان، وذلك من خلال المبرهنتين (7) و(8).

وفي الفصل الثالث: قمت بإثبات النتائج (3) و(4) و(5)، وبينت فيها متى تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ قابلة للجمع وفق طرائق سيزارو $|C,1|$ ، $|C,2|$ ، $|C,3|$ تقريباً في كل مكان.

وحصلت على النتيجتين (8) و(9) اللتين تبينان متى تكون المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة المثقّلة $|N,p_n,q_n,\acute{p}_n,\acute{q}_n|_k$ من أجل $1 \leq k \leq 2$ تقريباً في كل مكان، وذلك من خلال الربط بين الطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة وطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة.

وفي الفصل الرابع: قمت بتعريف الطريقة المصفوفية التقريبية المضاعفة بطريقة مشابهة لتعريف الطريقة المصفوفية التقريبية البسيطة، ثم بينت من خلال المبرهنتين (3) و(4) متى تكون المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\varphi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية التقريبية المضاعفة المطلقة المثقّلة $|A,B|_{r,s;k}$ تقريباً في كل مكان.

أما في الفصل الخامس: قمت بدراسة قابلية جمع متسلسلة فورييه بطريقة نيورلند المعممة–باناخ المطلقة، وذلك من خلال المبرهنة (3).

Abstract

This thesis contains five chapters:

In the first chapter: We presented definitions of simple and double orthogonal series, and some absolute summability methods, in their general weighted case, such as the absolute matrix method (simple and double), the absolute Norlund and the absolute generalized Norlund methods (simple and double) and absolute Cesaro methods, and the relationship of these methods to each other.

In the second chapter: I found the necessary condition for the weighted absolute matrix method $|A|_\lambda\,;\ 1 \le \lambda$ to be regular through theorem (1).

I also proved that double orthogonal series $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ is summable by Weighted absolute double matrix method $|A,B|_k$ almost everywhere, according to theorems (7) and (8).

And in the third chapter: I proved the results (3), (4) and (5), and I show when the orthogonal series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ is summable $|C,1|$, $|C,2|$, $|C,3|$ almost everywhere.

And I got the results (8) and (9) which show when the double orthogonal series $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ is summable by absolute double generalized weighted Norlund method $|N,p_n,q_n,\acute{p}_n,\acute{q}_n|_k$ for $1 \le k \le 2$ almost everywhere, by match between the absolute double matrix summability method and the absolute double generalized Norlund method.

In the fourth chapter: I defined the absolute almost double matrix summability method in a similar way to the simple absolute almost matrix summability method, then I showed through theorems (3) and (4) when the double orthogonal series $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\varphi_{m,n}(x)$ is summable by absolute weighted almost double matrix method $|A,B|_{r,s;k}$ almost everywhere.

And finally in the fifth chapter: I studied summability of Fourier series by the generalized Norlund-Banach method, through theorem (3).

قائمة المراجع المستخدمة:

[1]. Amjed. Zraiqat, (2019), "Inclusion and equivalence relations between absolute Norlund and absolute weighted mean summability methods", Soc. Paran. Mat.

[2]. Mehmet. Ali. Sarigol, (2019), "Absolute almost weighted summability methods".

[3]. S. Yildiz, (2017), “Anew generalization on absolute matrix summability factors of Fourier series”, 65-73.

[4]. V. N. Misra, S. K. Pakray, P. Palo, P. N. Samanta, M. Misra, U. K. Misra, (2017), "On double absolute factorable matrix summability", De gruyter.

[5]. P. N. Samanta, (2016), “Indexed absolute Banach summability of a Fourier series”.

[6]. Hikmet Seyhan, Ozarslan and Enes Yarus, (2014), “New theorems for absolute matrix summability factors”, Indian acad.

[7]. Xhevat Z. Krasniqi, (2014), "Certain sufficient conditions on $|N, p_n, q_n|_k$ summability of orthogonal series".

[8]. Xhevat Z. Krasniqi, (2013), "on absolute almost matrix summability of orthogonal series".

[9]. Xhevat Z. Krasniqi, Huseyin Bor, Naim L. Braha and Marjan Dema, (2012), "On absolute matrix summability of orthogonal series".

[10]. Basar. F, Colak. R, (2011), "Summability theory and its applications", Fatih university, faculty art and sciences, department of mathematics.

[11]. Mahendra. Misra, U. K. Misra and B. P. Padhy, (2011), "On absolute Norlund-Banach summability of Fourier series".

[12]. Xhevat Z. Krasniqi, (2011), "On absolute generalized Norlund summability of double orthogonal series".

[13]. Xhevat Z. Krasniqi, (2011), “On absolute weighted mean summability of orthogonal series”.

[14]. Xhevat Z. Krasniqi, (2010), “A note on $|N, p, q|_k, (1 \leq k \leq 2)$ summability of orthogonal series”.

[15]. Hamdullah Sevli and Ekrem Savas, (2009), “On absolute Cesaro summability”, Journal of inequalities and applications.

[16]. H. S. Ozarslan and H. N. Ogduk, (2007), "On absolute matrix summability methods ", 213-220.

[17]. S. K. Pokray, B. Kumar Majhi, P. Samanta, M. Misra, (2007), “On double absolute factorable index matrix summability”.

[18]. S. Lal, V. N. Tripathi, (2003), "On the study of double Fourier series by double matrix summability method", Tamkang journal of mathematics.

[19]. Yasuo Okuyama, (2002), "On absolute generalized Norlund summability of orthogonal series".

[20]. S. Jena, P. Padhi, (1988), “Absolute matrix summability of the allied series of Fourier series”, Indian acad.

[21]. Minoru Tanaka, (1978), “On generalized Norlund methods of summability”.

[22]. P. L. Sharma, P. D. Kathal, (1969), “A study of the matrix method of summability of the trigonometrical series”, Sagar (India).

[23]. L. Tripathi, B. Prasad, (1963), “On the Norlund summability of the derived Fourier series”, department of mathematics.

[24]. G. H. Hardi, (1949), “Divergent series”, Oxford at the clarendon press, (65-66).

[25]. A. Zygmund, (1959), “Trigonometric series”, Combridge university press, Combridge.

[26].عبد الهادي. كرزون، (2018−2019)، "أطروحة دكتوراه بعنوان قابلية جمع متسلسلات فورييه بطريقة الجداء"، إشراف الدكتور محمد عامر، جامعة البعث، كلية العلوم، قسم الرياضيات.

[27]. غنى. الهاشمي، (2016−2017)، رسالة ماجستير بعنوان قابلية جمع متسلسلة فورييه ومرافقتها بالطريقة المصفوفية"، إشراف الدكتور محمد عامر، جامعة البعث، كلية العلوم، قسم الرياضيات.

[28]. غنى. الهاشمي، محمد. عامر، (2015-2016)، "بحث بعنوان قابلية جمع متسلسلة فورييه بالطريقة المصفوفية"، جامعة البعث، كلية العلوم، قسم الرياضيات.

[29].محمد. عامر، (1990−1991)، "أطروحة دكتوراه بعنوان جمع متسلسلات فورييه المثلثية البسيطة والمضاعفة ومرافقاتها بطريقة نيورلند في الفضائين C و L .

[30]. إيروين. كريزيك، (1985)، "مدخل إلى التحليل الدالي"، ترجمة الدكتور خضر حامد الأحمد.

[31]. وايدر. دافيد، (ترجمة أنيس كنجو)، "الحساب المتقدم"، (1982−1981)، منشورات جامعة دمشق، كلية العلوم.

[32]. أ. كولموغوروف، س. فومين، "مبادئ في نظرية التوابع وفي التحليل التابعي"، تعريب أبو بكر خالد سعد الله، (1973).

الأبحاث المنشورة:

[1].غنى. الهاشمي، محمد. عامر، (2021)، "بحث بعنوان قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة"، جامعة البعث، كلية العلوم، قسم الرياضيات.

[2]. غنى. الهاشمي، محمد. عامر، (2021)، "بحث بعنوان قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بطريقة نيورلند المعممة المطلقة"، جامعة البعث، كلية العلوم، قسم الرياضيات.

[3]. غنى. الهاشمي، محمد. عامر، (2020)، "بحث بعنوان قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بالطريقة المصفوفية المطلقة"، غزة، المجلة العربية للعلوم ونشر الأبحاث، مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية، المجلد الرابع، العدد الثالث.

المصطلحات العلمية:

absolute	مطلقة	function	دالة
absolute double	مضاعفة مطلقة	generalized	معممة
absolute method	طريقة مطلقة	harmonic	توافقية
absolutely convergent	متقاربة مطلقاً	hypothesis	فرضية
absolutely regular	نظامية مطلقاً	increasing	متزايد
almost	تقريبي	infinite	غير منتهية
almost convergent	متقاربة تقريباً (غالباً)	integer	عدد صحيح
almost every where	تقريباً في كل مكان	integral	تكامل
almost matrix	مصفوفية تقريبية	integrable	قابلة للمكاملة (كمولة)
bounded	محدودة	integrable (L)	كمولة لوبيغياً
bounded variation	محدودة التغير	integration by parts	تكامل بالتجزئة
cesaro matrix	مصفوفة سيزارو	interval	فترة (مجال)
consequence	نتيجة	inequality	متراجحة
constant	ثابت	lemma	تمهيدية
continuous	مستمر	limit	نهاية
convergence	تقارب	lower	سفلى
convergent	متقارب	lower triangular	مثلثية سفلى
convolution	تلاف	matrix	مصفوفة (مصفوفية)
decreasing	متناقص	method	طريقة
double	مضاعف	nondecreasing	غير متناقص
double series	متسلسلة مضاعفة	nonincreasing	غير متزايد
derived	مشتقة	nonnegative	غير سالب

norm	النظيم	regular	نظامي
not convergent	متباعدة	regularity	نظامية
orthogonal	متعامدة	sequence	متتالية
orthogonality	التعامد	series	متسلسلة
orthogonal series	متسلسلة متعامدة	sum	مجموع
orthogonal function	دالة متعامدة	summability	قابلية جمع
partial sum	مجموع جزئي	summable	قابل للجمع
period	دور	Theorem	مبرهنة
periodic	دوري	transform	تحويل
polynomial	كثيرة حدود	triangle inequality	متراجحة المثلث
positive	موجب	triangular	مثلثي
proof	إثبات	uniformaly convergent	متقاربة بانتظام
real	عدد حقيقي	weighted	متقّلة

Syrian Arab Republic

Al-Baath University

Faculty of Science
Department of Mathematics

Summability of Orthogonal Series by Absolute Methods

Submitted to P.h.Degree in Pure Mathematics

Submitted by

Ghina Mohammad Gehad Alhashemi

Supervision by
Prof. Mohammad Amer

Academic Year: $\frac{\mathbf{2021-2022}}{\mathbf{1443-1444}}$