

سليم تقيح الرياضيات / 3 / - قسم الطاقة

الفضل الثاني - العام الدراسي 2023-2024

السؤال الأول: (30 درجة) 5 درجات كل بند

1) الثانية

$$y = y_1 + z \quad (2)$$

$$y' = p \quad (3)$$

$$\ln(z) \quad (4)$$

5) نقطة تاذة: $\frac{1}{z}$

$$f'(z) = 2z \quad (6)$$

السؤال الثاني: (35 درجة)

أولاً:

$$1) y' + (\sin x) y = x$$

معادلة خطية تعيد عامل التكامل

$$M(x) = e^{\int \sin(x) dx} = e^{-\cos(x)} = \sin(x) \quad (4)$$

ومن هنا العام يعطى بالعلاقة

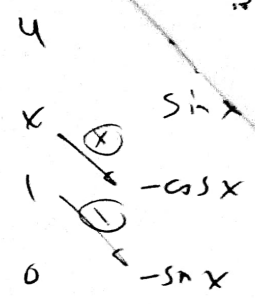
$$y = \frac{1}{M} \left[\int Q(x) M(x) dx + C \right]$$

(11)

ونسئ كئم الام

$$= \frac{1}{\sin(x)} \left[\int x \sin(x) dx + c \right]$$

$$= \frac{1}{\sin(x)} \left[-x \cos(x) + \sin(x) + c \right] \quad (6)$$



2) $y'' + y' - 2y = e^{2x} \cdot \sin x \cdot \cos x$

نوجد أولاً اكل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1 \quad (5)$$

وهذه اكل العام للمعادلة المتجانسة:

$$y_1 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$$

نوجد ثانياً y_2 اكل الخاص للمعادلة غير المتجانسة

$$y_2 = \frac{1}{D^2 + D - 2} e^{2x} \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right] \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Im} \left[\frac{1}{D^2 + D - 2} e^{(2+2i)x} \right] \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Im} \left[\frac{1}{(2+2i)^2 + (2+2i) - 2} e^{2x} (\cos(2x) + i \sin(2x)) \right] \quad (3)$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} \text{Im} \left[\frac{-10i}{100} (\cos 2x + i \sin 2x) \right]$$

$$= \frac{-e^{2x}}{20} \cos(2x) \Rightarrow \quad (3)$$

الاجابة

$$y = y_1 + y_2$$

(2)

~~3~~

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2xy \quad (3), \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 2xy \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} \quad (2) \quad \text{وبالتالي}$$

وهذه المعادلات هي صادرة تامّة

السؤال الثالث: (35) درجة

أولاً: $z^4 = -1 + i$; $-1 + i = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$

$$z = r \left[\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right] \Rightarrow \quad (1)$$

$$z^4 = r^4 \left[\cos(4\theta) + i \sin(4\theta) \right]$$

بالمطابقة نجد أن: $r^4 = \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt[8]{2} \quad (3)$

$$4\theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2} k ; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$k=0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[8]{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) \right]$$

$$k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[8]{2} \left[\cos\left(\frac{11\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{16}\right) \right] \quad (4)$$

$$k=2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[8]{2} \left[\cos\left(\frac{19\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{19\pi}{16}\right) \right]$$

$$k=3 \Rightarrow z_3 = \sqrt[8]{2} \left[\cos\left(\frac{27\pi}{16}\right) + i \sin\left(\frac{27\pi}{16}\right) \right]$$

[Handwritten signature]

$$u(x,y) = x^3 - 2x - 3xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 2 - 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0 \Rightarrow \text{التابع توافقى (2)}$$

لك $v(x,y)$ مرتبة توافقى للتابع $u(x,y)$ وبذلك وصف
كوشي - ريمان يكون

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2) \quad (2)$$

من (1) نجد v :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 2 - 3y^2 \Rightarrow v(x,y) = \int (3x^2 - 2 + 3y^2) dy + l(x)$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \cancel{x^3} 3x^2 y - 2y - y^3 + l(x) \quad (*) \quad (3)$$

نشق العلاقة (*) بالاجزاء x نجد v :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + l'(x)$$

نوفقها مع (2) نجد v :

$$6xy + l'(x) = 6xy \Rightarrow l'(x) = 0 \Rightarrow l(x) = c \quad (3)$$

حيث c ثابتة كبرى

نوفقها في (x) نجد v :

$$v(x,y) = 3x^2 y - y^3 + c$$

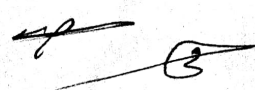
وبالتالي التابع الكلي هو:

$$f(z) = (x^3 - 2x - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3 + c) \quad (2)$$

هي هولت



(4)



$$I_1 = \int_C \frac{2z+1}{(z-i)^3(z+1)} dz \quad C: |z - \frac{1}{2}i| = 2$$

$z_1 = i, z_2 = -1$ نقاط داخلية

C دائرة مركزها $(0, -\frac{1}{2})$ ونصف قطرها $r=2$ وبالتالي $z_1 = i \in C, z_2 = -1 \in C$ (2)

$z = i$ قطب من الدرجة الثالثة لأن

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i)^3 f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z+1}{z+1} = \frac{2i+1}{i+1} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \neq 0$$

$$\text{Res } f(i) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{d^2}{dz^2} \frac{2z+1}{z+1} \right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$
 (4)

$z_1 = -1$ قطب بسيط لأن

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2z+1}{(z-i)^3} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$
 (3)

$$\Rightarrow \text{Res } f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) f(z) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

$$\Rightarrow I_1 = 2\pi i [\text{Res } f(i) + \text{Res } f(-1)]$$
 (2)

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \right] = 0$$
 (1)

انتقى اسم د. محمد الفاخوري



(5)

