سلم تصحيح الرياضيات /3/ - قسم الطاقة

الفصل الثاني - العام الدراسي 2023-٢٠٢٤

السؤال الأول : (30 درجة) 5 درجات لكل بند

1) الثانية

2) $y = y_1 + z$

3) $y' = p$

4) $\ln(x)$

5) نقطة شاذة أساسية

6) $f'(z) = 2z$

السؤال الثاني : (35 درجة)

أولاً :

1) $y' + (\cot x)\, y = x$

معادلة خطية تقبل عامل تكميل

$$M(x) = e^{\int \cot(x)\,dx} = e^{\ln(\sin x)} = \sin(x) \quad 4$$

ومنه حلها العام يعطى بالعلاقة

$$y = \frac{1}{M}\left[\int Q(x)\, M(x)\, dx + c\right]$$

رئيس قسم الرياضيات

$$= \frac{1}{\sin(x)}\left[\int x\sin(x)\,dx + c\right]$$

$$= \frac{1}{\sin(x)}\left[-x\cos(x) + \sin(x) + c\right] \quad (6)$$

4		$\sin x$
x	$(+)$	$-\cos x$
1	$(-)$	$-\sin x$
0		

2) $y'' + y' - 2y = e^{2x}\cdot \sin x \cdot \cos x$

نوجد أولاً الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1 \quad (5)$$

ومنه الحل العام ~~هو~~ الأول هو :

$$y_1 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$$

نوجد ثانياً y_2 الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة

$$y_2 = \frac{1}{D^2+D-2}\, e^{2x}\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right] \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2}\, Im\left[\frac{1}{D^2+D-2}\, e^{(2+2i)x}\right] \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2}\, Im\left[\frac{1}{(2+2i)^2+(2+2i)-2}\, e^{2x}(\cos(2x)+i\sin(2x))\right] \quad (3)$$

$$= \frac{e^{2x}}{2}\, Im\left[\frac{-10i}{100}(\cos 2x + i\sin 2x)\right]$$

$$= \frac{-e^{2x}}{20}\cos(2x) \Rightarrow \quad (3)$$

الحل العام $y = y_1 + y_2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy \quad (3) \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy \quad (3)$$

وبالتالي

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2)$$

ومنه المعادلة هي معادلة تامة

السؤال الثالث: (35) درجة

أولاً:

$$z^4 = -1 + i \quad ; \quad -1+i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] \quad (1)$$

ليكن $z = r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right] \Rightarrow$

$$z^4 = r^4\left[\cos(4\theta) + i\sin(4\theta)\right]$$

بالمطابقة نجد أن:

$$r^4 = \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt[8]{2} \quad (3)$$

$$4\theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{2}k \quad ; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$k = 0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right]$$

$$k = 1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{16}\right)\right] \quad (4)$$

$$k = 2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{19\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{16}\right)\right]$$

$$k = 3 \Rightarrow z_3 = \sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{27\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{27\pi}{16}\right)\right]$$

$u(x,y) = x^3 - 2x - 3xy^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 2 - 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$ (4)

$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0 \Rightarrow$ الدالة توافقي (2)

ليكن $V(x,y)$ مرافق توافقي للدالة $u(x,y)$ وبالتالي وحسب كوشي - ريمان يكون

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ (1) , $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ (2) (2)

من (1) نجد أن :

$\frac{\partial V}{\partial y} = 3x^2 - 2 - 3y^2 \Rightarrow V(x,y) = \int (3x^2 - 2 + 3y^2)\,dy + l(x)$

$\Rightarrow V(x,y) = \cancel{x^3 - 2x}\ 3x^2y - 2y - y^3 + l(x)$ --- (*) (3)

نشتق العلاقة (*) بالنسبة لـ x نجد أن :

$\frac{\partial V}{\partial x} = 6xy + l'(x)$

نعوض في (2) نجد أن :

$6xy + l'(x) = 6xy \Rightarrow l'(x) = 0 \Rightarrow l(x) = c$ (3)

حيث c ثابت كيفي

نعوض في (*) نجد أن :

$V(x,y) = 3x^2y - y^3 + c$

وبالتالي التابع الكلي هو :

$f(z) = (x^3 - 2x - 3xy^2) + i\,(3x^2y - y^3 + c)$ (2)

~~هو تابع~~ هي

$$I_1 = \int_C \frac{2z+1}{(z-i)^3(z+1)}\,dz \qquad C: \left|z-\tfrac{1}{2}i\right| = 2$$

$z_1=i$, $z_2=-1$ نقاط شاذة

C دائرة مركزها $(0,-\frac{1}{2})$ ونصف قطرها $r=2$ وبالتالي (2)

$z_1=i \in C \quad , \quad z_2=-1 \in C$

$z_1=i$ قطب من الدرجة الثالثة لأن

$$\lim_{z\to i}(z-i)^3 f(z) = \lim_{z\to i}\frac{2z+1}{z+1} = \frac{2i+1}{i+1} = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i \neq 0$$

(4)

$$\operatorname{Res} f(i) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to i}\left[\frac{d^2}{dz^2}\,\frac{2z+1}{z+1}\right] = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$$

$z_1=-1$ قطب بسيط لأن

$$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{2z+1}{(z-i)^3} = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$$

(3)

$$\Rightarrow \operatorname{Res} f(-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$$

(2)

$$\Rightarrow I_1 = 2\pi i\left[\operatorname{Res} f(i)+\operatorname{Res} f(-1)\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right] = 0$$

(1)

انتهى السلم د. مجد الفاخوري