جامعة البعث **سلم تصحيح مادة رياضيات /2/**

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية **لطلاب السنة الأولى قسم المعادن** **الدرجة: 100**

قسم العلوم الأساسية **الفصل الثاني للعام 2023-2024** **المدة: ساعتين**

السؤال الأول: احسب قيمة التكاملات غير المحددة التالية: **(35 درجة)**

1) $I=\int \frac{ln^4x}{x}dx$ 2) $I=\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$ 3) $I=\int e^{2x}\cos\frac{1}{2}x\,dx$

4) $I=\int(-2x+3)sin(2x)dx$ 5) $I=\int \frac{arctan\frac{x}{4}}{16+x^2}dx$

.1 $I=\int \frac{ln^4x}{x}dx$ **(5 درجات)**

نفرض أن: $lnx=t$ ومنه : $dt=\frac{dx}{x}$ نعوض في التكامل نجد:

$$I=\int t^4 dt=\frac{t^5}{5}+c$$

نعود للمتغيرات الأصلية نجد: $I=\frac{ln^5x}{5}+c$

.2 $I=\int \frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$ **(10 درجات)**

نلاحظ أن درجة البسط أكبر من درجة المقام لذلك نقسم البسط على المقام (قسمة إقليدية) نجد:((يجب كتابة عملية القسمة بالتفصيل))

$$I=\int\left(\text{الناتج}+\frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}\right)dx=\int\left(x+1-\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}\right)dx=\int(x+1)dx-\int\left(\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}\right)dx=$$

نقوم بتفريق الكسور للكسر التالي: $\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}$ لأن درجة البسط أقل من درجة المقام كما يلي:

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+1)} \quad ...(*)$$

نقوم بتوحيد المقامات وحذفها نجد:

$$\boldsymbol{A}=-1 \ , \boldsymbol{B}=\frac{2}{3} , C=\frac{1}{3}$$

بتعويض قيمة الثوابت في العلاقة (*) نجد:

$$I_1=\int\left[\frac{-1}{x}+\frac{\frac{2}{3}}{(x-2)}+\frac{\frac{1}{3}}{(x+1)}\right]dx=\int\left[\frac{-1}{x}\right]dx+\int\left[\frac{\frac{2}{3}}{(x-2)}\right]dx+\int\left[\frac{\frac{1}{3}}{(x+1)}\right]dx$$
$$=-ln|x|+\frac{2}{3}ln|x-2|+\frac{1}{3}ln|x+1|+c$$

بالتعويض بالتكامل نجد:

جامعة البعث
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
قسم العلوم الأساسية

سلم تصحيح مادة رياضيات /2/
لطلاب السنة الأولى قسم المعادن
الفصل الثاني للعام 2023-2024

الدرجة: 100
المدة: ساعتين

....

$$I=\frac{x^2}{2}+x+ln|x|-\frac{2}{3}ln|x-2|-\frac{1}{3}ln|x+1|+c$$

---

3. $I=\int e^{2x}\cos\frac{1}{2}x\,dx$ **(10 درجات)**

نفرض أن : $u=e^{2x}$, $dv=\cos\left(\frac{1}{2}x\right)dx$

$du=2e^{2x}\,dx$, $v=2\sin(\frac{1}{2}x)$

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة: $I=u.v-\int vdu$ نجد:

$$I=2e^{2x}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-4\int e^{2x}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)dx=2e^{2x}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-4I_1+c \quad ...(*)$$

نكامل $I_1=\int e^{2x}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)dx$ مرة ثانية بالتجزئة نجد:

نفرض أن : $u=e^{2x}$, $dv=\sin\left(\frac{1}{2}x\right)dx$

$du=2e^{2x}\,dx$, $v=-2\cos(\frac{1}{2}x)$

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة نجد:

$$I_1=-2e^{2x}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+4\int e^{2x}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)dx=-2e^{2x}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+4I$$

نعوض في العلاقة (*) نجد:

$$I=2e^{2x}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-4I_1+c=2e^{2x}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-4\left(-2e^{2x}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+4I\right)+c=$$
$$2e^{2x}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+8e^{2x}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-16I+c$$

ومنه نجد : $I+16I=2e^{2x}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+8e^{2x}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+c$

$$17I=2e^{2x}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+8e^{2x}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+c$$

$$I=\frac{1}{17}\left[2e^{2x}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+8e^{2x}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right]+c$$

---

4. $I=\int(-2x+3)\sin(2x)dx$ **(5 درجات)**

نفرض أن : $u=(-2x+3)$, $dv=\sin(2x)dx$

$du=-2\,dx$, $v=-\frac{1}{2}\cos(2x)$

8

سلم تصحيح مادة رياضيات /2/

ـيه الهندسة الميكانيكية والكهربائية	لطلاب السنة الأولى قسم المعادن	الدرجة: 100
قسم العلوم الأساسية	الفصل الثاني للعام 2023-2024	المدة: ساعتين

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة: $I=u.v-\int vdu$ نجد:

$$I=-\frac{1}{2}(-2x+3)\cos(2x)-\int\cos(2x)\,dx=-\frac{1}{2}(-2x+3)\cos(2x)-\frac{1}{2}\sin(2x)+c$$

.5 $I=\int\frac{\arctan\frac{x}{4}}{16+x^2}dx$ **(5 درجات)**

نفرض أن: $\arctan\frac{x}{4}=t$ ومنه نفاضل الطرفين نجد : $dt=\frac{4}{16+x^2}dx$ لأنه من الشكل :

$y=\arctan\frac{x}{a}$ ومنه: $y'=\frac{a}{a^2+x^2}$ (حيث $a^2=16$ و $a=4$) نعوض في التكامل نجد:

$$I=\frac{1}{4}\int tdt=\frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}\right]+c=\left[\frac{t^2}{8}\right]+c=\left[\frac{\arctan^2\frac{x}{4}}{8}\right]+c$$

<u>السؤال الثاني: احسب قيمة التكاملات المحددة التالية:</u> **(15 درجة)**

1) $I=\int_0^1 xe^x$ 2) $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3-x^2}}dx$ 3) $I=\int_0^{\pi}\cos(20x)\cos(15x)dx$

.1 $I=\int_0^1 xe^x$ **(5 درجات)**

(نكامل $\int_0^1[xe^x]dx$ بالتجزئة) نجد:

$$\int_0^1[xe^x]dx=1$$

.2 $I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3-x^2}}dx$ **(5 درجات)**

نفرض أن: $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}=t$ ومنه نفاضل الطرفين نجد : $dt=\frac{1}{\sqrt{3-x^2}}dx$ لأنه من الشكل :

$y=\arcsin\frac{x}{a}$ ومنه: $y'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (حيث نعوض $a^2=3$ و $a=\sqrt{3}$) وعندما $x=0$ فإن

$t=\arcsin(0)=0$ وعندما $x=\sqrt{3}$ فإن $t=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$ نعوض في التكامل نجد:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}tdt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-(0)^2\right]=\frac{1}{2}.\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{8}$$

.3 $I=\int_0^{\pi}\cos(20x)\cos(15x)dx$ **(5 درجات)**

نطبق قوانين التحويل من الجداء إلى المجموع نجد:

جامعة البعث	سلم تصحيح مادة رياضيات /2/	
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية	لطلاب السنة الأولى قسم المعادن	الدرجة: 100
قسم العلوم الأساسية	الفصل الثاني للعام 2023-2024	المدة: ساعتين

$$I=\int_0^{\pi} cos(20x)cos(15x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}[cos(35x)+\cos(5x)]\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{2}[\int_0^{\pi} cos(35x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi} cos(5x)\mathrm{d}x]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{35}sin(35x)\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}sin(5x)\right]_0^{\pi}=0$$

السؤال الثالث: لتكن لدينا المعادلات الوسيطية التالية: (20 درجة)

x= $3(t-\sin t)$ y= $3(1-\cos t)$ $;0\le t\le 2\pi$

والمطلوب :

1) احسب مساحة المنطقة المحددة بالسيكلوئيد ذو المعادلات الوسيطية السابقة والمحور ox؟ **(10 درجات)**

$\beta=2\pi$ ، $\alpha=\mathbf{0}$

y= $g(t)=3(1-\cos t)$, x= $h(t)=3(t-\sin t)$

نوجد: dx= $h'(t)=3(1-cost)\mathrm{d}t$

نعوض في قانون المساحة:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} g(t)h'(t)dt=\int_0^{2\pi} 3(1-\cos t).3(1-cost)dt=9\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt$$

$$=9\int_0^{2\pi}(1-2cost+cos^2t)dt=9\int_0^{2\pi}\left(1-2cost+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos2t\right)dt=$$

$$=9[\frac{3}{2}t-2sint+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}sin2t]_0^{2\pi}=9\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2cost+\frac{1}{2}cos2t\right)dt$$

$$=9\left[\left(\frac{3}{2}2\pi-2sin2\pi+\frac{1}{4}sin4\pi\right)-\left(\frac{1}{2}0-2sin0+\frac{1}{4}sin0\right)\right]=27\pi$$

2) احسب طول قوس السيكلوئيد ذو المعادلات الوسيطية السابقة؟ **(10 درجات)**

نوجد: dy= $g'(t)=3\sin t\mathrm{d}t$

نعوض في قانون طول القوس:

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[h'(t)]^2+[g'(t)]^2\mathrm{d}t}=\int_0^{2\pi}\sqrt{[3(1-cost)]^2+[\,3\sin t]^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{9(1-\cos t)^2+\frac{1}{1}sin^2t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{9(1-2cost+cos^2t+sin^2t)}\,dt=$$

8

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{9(1-2cost+1)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9(2-2cost)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{18(1-cost)}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{18.\, \mathbf{2sin^2\frac{t}{2}}}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{36sin^2\frac{t}{2}}\, dt = \int_0^{2\pi} 6\sin\frac{t}{2} dt = -12[\cos\frac{t}{2}]_0^{2\pi}$$

$$= -12\left[\cos\frac{2\pi}{2} - \cos(0)\right] = -12[\cos\pi - \cos(0)] = -12(-1-1) = -12(-2) = 24$$

السؤال الرابع: أجب عن الأسئلة التالية: (30درجة)

1. $I_1 = \int_0^1 \int_{1-y}^1 e^{\,y}\, dydx$ (10 درجات)

نكامل بالنسبة لـ x (ونعتبر y ثابت) نجد:

$$I_1 = \int_0^1 dy[\int_{1-y}^1 e^{\,y}\, dx] = \int_0^1 dy[xe^{\,y}]_{1-y}^1 = \int_0^1 ye^{\,y} dy = 1$$

(نكامل بالنسبة لـ y بالتجزئة)

2. أوجد قيمة التكامل الثنائي التالي: (10 درجات)

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 (y - x^2)\, dy$$

$$\boldsymbol{I_2} = \int_0^1 dx \int_0^1 (y - x^2)\, dy$$

نكامل بالنسبة لـ y (ونعتبر x ثابت) نجد:

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_0^1 (y - x^2)\, dy$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2} - x^2 y\right]_0^1 = \int_0^1 [\left(\frac{1}{2} - x^2 - 0\right)]dx$$

$$= \int_0^1 [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \mathbf{x^2}]\boldsymbol{dx}$$

نكامل بالنسبة لـ x نجد:

سلم تصحيح مادة رياضيات /2/

ـيه الهندسة الميكانيكية والكهربائية
قسم العلوم الأساسية

لطلاب السنة الأولى قسم المعادن — الدرجة: 100

الفصل الثاني للعام 2023-2024 — المدة: ساعتين

$$I_2 = \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

3. أوجد قيمة التكامل الثلاثي التالي: $I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x - yz + xyz)dz$ **(10 درجات)**

نكامل بالنسبة لـ z (نعتبر x و y ثوابت) نجد :

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[xz - y\frac{z^2}{2} + xy\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \int_0^1 dx \int_0^1 [x - y\frac{1}{2} + xy\frac{1}{2}]dy =$$

نكامل بالنسبة لـ y نجد (نعتبر x ثابت):

$$I = \int_0^1 dx \left[xy - \frac{y^2}{4} + x\frac{y^2}{4}\right]_0^1 = \int_0^1 dx[x - \frac{1}{4} + x\frac{1}{4}] = \int_0^1 (x\frac{5}{4} - \frac{1}{4})dx$$

وأخيرا نكامل بالنسبة x .

$$I = \left[\frac{5x^2}{8} - x\frac{1}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

ملاحظة: إذا حل الطالب أي طلب بطريقة ثانية صحيحة ينال الدرجة المخصصة لذلك الطلب.

.... انتهى سلم التصحيح ....

مدرس المقرر: د. رائد محمد قراحسن

حمص في 21 / 7 / 2024