سلم تصحيح مقرر الرياضيات /3/

السنة الثانية - قسم الكيمياء - الفصل الثاني 2023 - 2024

السؤال الأول : (30 درجة) 5 درجات لكل بند

1) صفر (لا يوجد)

2) ذات تحولات منفصلة

3) $f(z) = c$ حيث c ثابت اختياري

4) $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$

أو $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$

5) $Im[f(z)] = e^x \cdot \sin(y)$

6) قطب من الدرجة الثالثة

السؤال الثاني : (35 درجة)

1) المعادلة المطاة مجانسة نعوض $z = \frac{y}{x}$ ومنه $y = zx$

$\Rightarrow dy = z\,dx + x\,dz$ (4)

نعوض في المعادلة

$$(x^2 + z^2x^2)dx + (x^2 - 2x^2z)(z\,dx + x\,dz) = 0$$

$$(1 + z - z^2)dx + x(1 - 2z)dz = 0$$

نقسم على $x(1 + z - z^2) \neq 0$ نجد:

$$\frac{dx}{x} + \frac{1 - 2z}{1 + z - z^2}dz = 0$$ (3)

بالمكاملة نجد: (3)

$$\ln|x| + \ln(1 + z - z^2) = \ln(c)$$

50 درجة
ساعة ونصف

$$\Rightarrow x(1+z-z^2) = c$$

(2) نعود للمتحولات الأصلية ونعوض $z = \frac{y}{x}$

2) نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة y_1 من خلال المعادلة المميزة

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \mp 2i \Rightarrow$$

$$y_1 = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$ (5)

نوجد الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة y_2:

$$y_2 = \frac{1}{D^2+4}(x^2 e^{3x})$$

$$= e^{3x} \frac{1}{(D+3)^2+4} x^2 = e^{3x} \frac{1}{D^2+6D+13} x^2$$ (4)

$$13+6D+D^2 \overline{)\,1} \quad \frac{\frac{1}{13} - \frac{6}{(13)^2}D + \frac{35}{(13)^3}D^2}{}$$

$$1 \mp \frac{6}{13}D \mp \frac{1}{13}D^2$$

$$-\frac{6}{13}D - \frac{1}{13}D^2$$

$$\pm \frac{6}{13}D + \frac{36}{(13)^2}D^2 \pm \frac{6D^3}{(13)^2}$$

$$\frac{35}{(13)^2}D^2 + \frac{6}{(13)^3}D^3$$ (3)

$$y_2 = e^{3x}\left(\frac{1}{13} - \frac{6}{(13)^2}D + \frac{35}{(13)^3}D^2\right) x^2$$

(3)

$$= e^{3x}\left(\frac{1}{13}x^2 - \frac{12}{(13)^2}x + \frac{70}{(13)^3}\right)$$

$$\Rightarrow y = y_1 + y_2$$

$$xy' - y = xy^2$$

ثانياً: نقسم على xy^2 ونجد: (3)

$$\frac{y'}{y^2} - \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right) = 1$$

نفرض $z = \frac{1}{y}$ ومنه: (3)

$$z' = \frac{-y'}{y^2} \Rightarrow -z' - \frac{1}{x} z = 1$$

$$\Rightarrow z' + \frac{1}{x} z = -1 \quad (2)$$

السؤال الثالث: (3 ع درجة)

1) لـ:

$$|z+i|^2 \leq Im(z+2i)$$

نفرض $z = x+iy$ ومنه

$$|x+iy+i|^2 \leq Im(x+iy+2i)$$

$$|x+i(y+1)|^2 \leq Im(x+i(y+2))$$

$$x^2 + (y+1)^2 \leq y+2 \quad (5)$$

$$x^2 + y^2 + y - 1 \leq 0$$

نتمم الى مربع كامل

$$x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 \leq 0$$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4} \quad (3)$$

(3) تمثل قرص دائري مغلق مركزه $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ ونصف قطره $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

ثانياً:

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3 - i z^2} = \frac{z+1}{z^2(z-i)} \quad (2)$$

$z_1 = 0$, $z_2 = i$ نقاط شاذة

$$\lim_{z \to 0} z^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z+1}{z-i} = \frac{1}{-i} = -i \quad (2)$$

ومنه $z_1 = 0$ قطب من الدرجة الثانية

(3)

$$\text{Res } f(i) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{d}{dz} z^2 f(z)\right]$$ (3)

$$= \lim_{z\to 0}\left[\frac{z+1}{z-i}\right]' = \lim_{z\to 0} \frac{-1-i}{(z-i)^2} = 1+i$$

$$\lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z\to i} \frac{z+1}{z^2} = -1-i \neq 0$$ (2)

$\Rightarrow$ قطب بسيط $z_2 = i$

$$\text{Res } f(i) = -1-i$$

$C: |z-i| = \frac{1}{2}$ دائرة مركزها $(0,1)$ ونصف قطرها $r = \frac{1}{2}$

$z_1 = 0 \notin C$ (2)

$z_2 = i \in C$

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 2\pi i\left[\text{Res } f(i)\right]$$ (3)

$$= 2\pi i\left[-1-i\right] = +2\pi - 2\pi i$$

ثانياً:

$$f(z) = \frac{4}{z^3}\cdot\cos(z)$$

$$= \frac{4}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$ (3)

$$= \frac{4}{z^3}\left[1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \cdots\right]$$ (4)

$$= \frac{4}{z^3} - \frac{2}{z} + \frac{1}{6}z - \frac{4}{6!}z^3 + \cdots$$

(4)

$\frac{4}{z^3} - \frac{2}{z}$ الرئيسي هو

وبالتالي $z = 0$ قطب من الدرجة الثالثة ، (3)

$$\text{Res } f(0) = -2$$

انتهى السلام

د. مجد الفاطوري

اسم الطالب:
الدرجة: 50
المدة: ساعة