جامعة البعث
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
قسم العلوم الأساسية

الاســـم :
الدرجـة : 100 درجـة
المـــدة : 120 دقيقة

امتحان الرياضيات (2) – لطلاب السنة الأولى (هندسة المعادن)– الفصل الدراسي الثاني لعام 2022-2023

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول:(30 درجة):

احسب كل من التكاملات التالية :

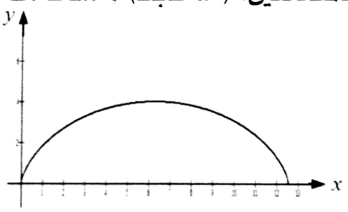
$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} \quad , \quad I_2 = \int \cos 2x . \cos x \, dx \quad , \quad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

السؤال الثاني:(35 درجة) :

1 -ادرس تقارب كل من التكاملين المعتلين التاليين :

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \quad , \quad I_2 = \int_{-\infty}^{1} e^x dx$$

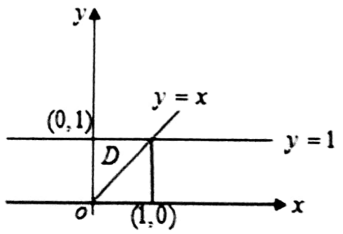
2 - احسب طول قوس السيكلوئيد المعطى بالمعادلتين: (a ثابت) ، $0 \le t \le 2\pi$ ، $y = a(1 - \cos t)$ ، $x = a(t - \sin t)$



السؤال الثالث:(35 درجة) :

1 -احسب حجم الجسم الناتج من دوران نصف دائرة حول المحور ox ، علماً أن معادلة دائرة نصف قطرها R ومركزها المبدأ تعطى بالشكل: $x^2 + y^2 = R^2$.

2 - أحسب التكامل: $I = \iint_D xy^2 dxdy$ (حيث D المنطقة المحددة بالمستقيمات $x = 0, y = 1, y = x$).



انتهت الاسئلة

مع اطيب التمنيات بالتوفيق

في 23 -07- 2023

د. سمير خلوف

سلم تصحيح مقرر امتحان الرياضيات (2) – لطلاب السنة الأولى (هندسة المعادن) – الفصل الدراسي الثاني لعام 2022-2023

السؤال الأول: (30 درجة)

التكامل الأول: 10 درجات

في المقام نتمم إلى مربع كامل فنجد:

4 درجات

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 4}$$

نفرض $x - 1 = u \Rightarrow dx = du$ نعوض في التكامل فنجد:

6 درجات

$$I = \int \frac{du}{u^2 + 4} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{du}{2}}{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} + c = \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + c$$

التكامل الثاني: 10 درجات

4 درجات

$$I = \int \cos 2x.\cos x\,dx = \frac{1}{2}\left[\int \cos 3x.dx + \int \cos x.dx\right]$$

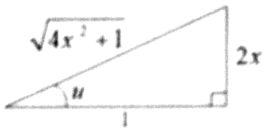
6 درجات

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3x + \sin x\right] + c = \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{2}\sin x + c$$

التكامل الثالث: 10 درجات

نفرض:

2 درجة



$2x = \tan u \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\sec^2 u du, \sqrt{4x^2+1} = \sec u$ وبالتالي:

4 درجات

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 u}{\sec u} du = \frac{1}{2}\int \sec u du = \frac{1}{2}\ln\left|\sec u + \tan u\right| + c$$

بالعودة للمتغير الأساسي x نجد:

4 درجات

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1} + 2x\right| + c$$

السؤال الثاني: (35 درجة):

1 – **30 درجة**

8 درجات **7 درجات**

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{k\to\infty}\int_1^k \frac{dx}{x^2} = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^k = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{k} + 1\right] = 1$$ (التكامل متقارب)

8 درجات **7 درجات**

$$I_2 = \int_{-\infty}^{1} e^x dx = \lim_{k\to-\infty}\int_k^1 e^x dx = \lim_{k\to-\infty}\left[e^x\right]_k^1 = \lim_{k\to-\infty}\left[e - e^k\right] = e$$ (التكامل متقارب)

3 درجات

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\int_0^{2\pi}2\sqrt{(1-\cos t)}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

2 درجة

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a$$

السؤال الثالث:(35 درجة) :

1 - **15 درجة**

الكرة جسم دوراني ناتج عن دوران نصف دائرة حول المحور ox ، وإن معادلة دائرة نصف قطرها R ومركزها المبدأ o هي: **4 درجات**

$$x^2+y^2=R^2$$

وبالتالي:

3 درجات

$$y^2=R^2-x^2$$

ومنه باستخدام العلاقة السابقة نجد:

8 درجات

$$V=\pi\int_{-R}^{R}y^2\,dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=2\pi\int_0^{R}(R^2-x^2)\,dx=2\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3$$

2 - **20 درجة**

4 درجات

الدالة $f(x,y)$ المكاملة مستمرة على المنطقة D وإن أي مستقيم يوازي المحور oy يقطع المنطقة في نقطتين على الأكثر لذلك المنطقة نظامية باتجاه oy والمنطقة D تكون بالشكل:

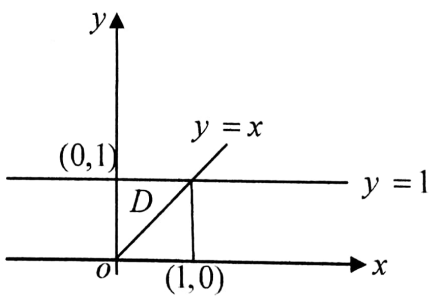
4 درجات

$$D=\left\{(x,y);0\le x\le 1,x\le y\le 1\right\}$$

4 درجات **4 درجات** **4 درجات**

ومنه:

$$I=\iint_D xy^2dxdy=\int_0^1dx\int_x^1xy^2dy=\int_0^1dx\left[\frac{xy^3}{3}\right]_x^1=\int_0^1\left(\frac{x}{3}-\frac{x^4}{3}\right)dx=\left[\frac{x^2}{6}-\frac{x^5}{15}\right]_0^1=\frac{1}{10}$$



انتهى سلم التصحيح

د. سمير خلوف