كلية الهمك - قسم العلوم الأساسية

سلم تصحيح أسئلة رياضيات ٢ - سنة ثانية معادن - فصل ثاني ٢٠٢٣-٢٠٢٤

السؤال الأول : (٢٠ درجات)

نعلم أنه إذا كان التابع العقدي f بالمتحول الحقيقي x فإن الرمز $L\ f\ = F(p)$ يعني صورة التابع f وفقاً لتحويل لابلاس . عندئذٍ جد كلاً مما يلي : (مع ذكر شرط وجود التحويل)

$$L\ c\quad , L\left[x^{c}\right] , L\left[\sqrt{x}\right] , L\left[e^{\lambda x}\right] , L\ \cos x$$

حيث : $c,\lambda\in\mathbb{C}\ , x\in\mathbb{R}$

حـــل **٤ درجات لكل تكامل**

$$L\ c = \int_0^{+\infty} c\cdot e^{-px}\ dx = c\ \frac{1}{-p}\ e^{-px}\Big|_0^{+\infty} = \frac{c}{p}\ ;\ \mathrm{Re}(p)>0$$

$$L\left[x^{c}\right]= \int_0^{+\infty} x^{c}\cdot e^{-px}\ dx = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{p}\right)^{c}\cdot e^{-t}\ \frac{dt}{p} =$$

$$= \frac{1}{p^{c+1}}\int_0^{+\infty} t^{c+1-1}\cdot e^{-t}\ dt = \frac{\Gamma(c+1)}{p^{c+1}}\quad ;\ \mathrm{Re}(p)>0\ \mathit{and}\ \mathrm{Re}(c)>-1$$

$$L\left[\sqrt{x}\right] = L\left[x^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{p^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{p^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{1}{2}+1}}$$

$$L\left[e^{\lambda x}\right] = \int_0^{+\infty} e^{\lambda x}\cdot e^{-px}\ dx = \int_0^{+\infty} e^{(\lambda-p)x}\ dx = e^{(\lambda-p)x}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{p-\lambda}\ ;\ \mathrm{Re}(p)>\mathrm{Re}(\lambda)>0$$

$$L\left[\cos x\right] = \int_0^{+\infty} \cos x\cdot e^{-px}\ dx = \int_0^{+\infty}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\cdot e^{-px}\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{ix}\cdot e^{-px}\ dx + \int_0^{+\infty} e^{-ix}\cdot e^{-px}\ dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(L\left[e^{ix}\right] + L\left[e^{-ix}\right]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i}+\frac{1}{p+i}\right) = \frac{p}{p+1}$$

السؤال الثاني : (١٥ درجات)

احسب كلاً من التكاملين التاليين :

$$I=\int_{0}^{1}\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx \quad , \quad J=\int_{0}^{+\infty}x^{4}e^{-ax^{2}}\,dx \;;\; a>0$$

حـل

<u>لأجل</u> التكامل $I=\int_{0}^{1}\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx$: **سبع درجات**

نفرض أن $\ln\frac{1}{x}=t$ إذن $x=e^{-t}$ و $x=e^{-t}$ و $dx=-e^{-t}dt$ ، ويكون :

$t\to+\infty$ عندما $x\to0^{+}$ و $t\to0$ عندما $x\to1$ ، إذن :

$$I=\int_{0}^{1}\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx=\int_{+\infty}^{0}\sqrt{t}\,(-e^{-t}dt)=\int_{0}^{+\infty}t^{\frac{3}{2}-1}e^{-t}dt=\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

<u>لأجل</u> التكامل $J=\int_{0}^{+\infty}x^{4}e^{-ax^{2}}\,dx$: **ثمان درجات**

نفرض أن $ax^{2}=t$ فيكون $x=\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ و $dx=\frac{1}{2a}\left(\frac{t}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}dt$ وأيضاً :

$t\to+\infty$ عندما $x\to+\infty$ و $t\to0$ عندما $x\to0$ ، إذن :

$$J=\int_{0}^{+\infty}x^{4}e^{-ax^{2}}\,dx=\int_{0}^{+\infty}\left(\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{4}e^{-t}\,\frac{1}{2a}\left(\frac{t}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}dt==$$

$$=\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}\int_{0}^{+\infty}t^{\frac{5}{2}-1}e^{-t}\,dt=\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}\Gamma(\frac{5}{2})=$$

$$=\frac{1}{2a^{\frac{3}{2}}}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{3\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{a}}$$

السؤال الثالث : (١٥ درجات)

احسب باستخدام التابع بيتا مايلي: $\beta(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$, $\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $\beta(5,4)$.

حـل **(٣ + ٥ + ٧)**

$$\beta(5,4)=\frac{\Gamma(5)\,\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)}=\frac{4!\cdot 3!}{8!}=\frac{1}{280}$$

$$\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=\frac{\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi}}{0!}=\pi$$

$$\beta(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2})}=\frac{\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}}\;\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=-\pi$$

السؤال الرابع : (٢٠ درجات)

مثّـلْ بتكامل فورييه التابع f المعرف وفق العلاقة : $f(x)=\begin{cases}1\;;\;x\in 0,1\\ 0\;;\;x\notin 0,1\end{cases}$ ،

ثم استنتج قيمة كلٍ من التكاملين التاليين :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}\,d\alpha \quad , \quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

حـل (خمس درجات لإنجاز تكامل فورييه + خمس درجات لاستنتاج التكاملين)

يعطى تكامل فورييه لتابع f بالشكل : $I_f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cdot\cos(\alpha u-\alpha x)du\right)d\alpha$

لنحسب التكامل الذي يحدث نسبةً للمتحول u :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cdot\cos(\alpha u-\alpha x)du=\int_0^1 1\cdot\cos(\alpha u-\alpha x)du=\frac{\sin(\alpha-\alpha x)+\sin(\alpha x)}{\alpha}$$

بالتالي يكون تكامل فورييه للتابع المفروض هو :

$$I_f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha-\alpha x)+\sin(\alpha x)}{\alpha}d\alpha$$

و بما أن التابع يعاني انقطاعاً من النوع الأول عند النقطة $x=0$ فإن :

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{1}{2}=I_f(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}$$

أيضاً باعتبار التابع مستمر عند النقطة $x=\frac{1}{2}$ يكون :

$$f(\tfrac{1}{2})=1=I_f(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}d\alpha\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}$$

يمكن للطالب أن يحصل على قيمة التكامل الثاني من الأول بتغيير للمتحول $\alpha\longrightarrow\frac{\alpha}{2}$

السؤال الخامس (٣٠ درجة)

ليكن لدينا تابع f ، يقبلُ قاعدةَ ربطٍ له على المجال 0,2 كما يلي :

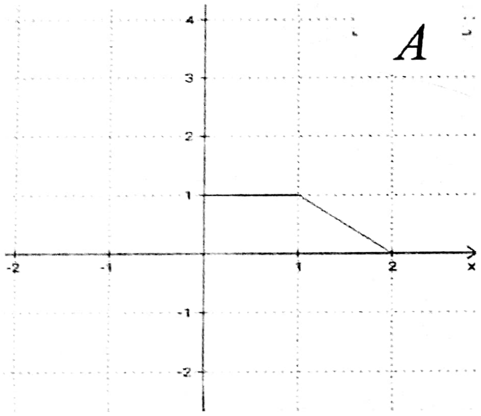
$$f(x)=\begin{cases}1 & ;x\in 0,1\\ -x+2 & ;x\in 1,2\end{cases}$$

و المطلوب :

١. مدِّد التابع ليكونَ دورياً و مستمراً على كامل $\mathbb{R}$ ، ثم ارسم الخط البياني له .
٢. جد $S_f(x)$ منشور فورييه للتابع .
٣. عين التابع الذي تكون متسلسة فورييه $S_f(x)$ متقاربة منه دوماً .
٤. استنتج قيمة مجموع كلٍّ من المتسلسلتين المتقاربتين $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

حل (١٠ + ٥ + ١٠ + ٥)

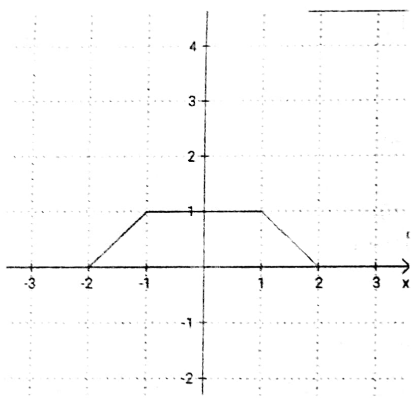
الطلب الأول (٨ درجات)



بملاحظة قاعدة الربط ، أو الشكل A ،

فإن التابع يُمدد على المجال $-2,+2$ وفق قاعدة الربط :

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & ; x\in -2,-1 \\ 1 & ; x\in -1,+1 \\ -x+2 & ; x\in 1,2 \end{cases}$$



عندئذٍ يكون الخط البياني على المجال $-2,+2$ هو كما في الشكل B ، بذلك يكون التابعُ المعرفُ على $\mathbb{R}$ دورياً دورُه الأصغري هو $T=4$ ، و زوجياً ، و مستمراً على كامل $\mathbb{R}$.

لو أن الطالب مدد التابع بحيث يصبح فرديا يخسر فقط خمس درجات (التابع لن يكون مستمرا على كامل $\mathbb{R}$)

الطلب الثاني (١٥ درجات)

يعطى نشر فورييه لتابع f :

$$S_f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)\right)$$

حيث :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx$$

و هذه المعاملات معدومة لأن تكامل تابع فردي على مجال متناظر هو الصفر .

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{2}{4}\int_{-2}^{+2} f(x)dx = \frac{2}{4}2\int_{0}^{+2} f(x)dx =$$

$$= \int_0^1 (1)dx + \int_1^2 (2-X)dx = \frac{3}{2}$$

حيث التابع المُستمكل زوجي .

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx = \frac{2}{4}\int_{-2}^{+2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx = \frac{2}{4}2\int_{0}^{+2} f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx$$

حيث التابع المُستمكل زوجي ، إذن :

$$a_n = \int_0^1 (1)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx + \int_1^2 (2-X)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Bigg|_0^1 + \frac{2}{n\pi}(2-X)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Bigg|_1^2 + \frac{2}{n\pi}\int_1^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= -\frac{4}{(n\pi)^2}\cos(n\pi) + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4(-1)^{n+1} + 4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n\pi)^2}$$

إذن يكون :

$$S_f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4(-1)^{n+1} + 4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n\pi)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right)$$

الطلب الثالث (٣ درجات)

بما أن التابع مستمرٌ على كامل $\mathbb{R}$ فإن متسلسة فورييه له تتقارب منه دوماً أي يكون لأجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $S_f(x)=f(x)$.

الطلب الرابع (٥ درجات)

$$S_f(0)=\frac{3}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4(-1)^{n+1}+4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n\pi)^2}\cos 0\right)=f(0)=1$$

حيث التابع مستمر عند الصفر ،

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}=(1-\frac{3}{4})\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2}{16}$$

لكن المجموع في الطرف الأيمن يكتب بالشكل :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n+1+1}+\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n+1}+\cos\left(\frac{2n\pi}{2}\right)}{(2n)^2}=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1+(-1)^n}{(2n)^2}=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-1-1}{4(2n+1)^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

إذن :

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{16}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

من ناحية أخرى :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Rightarrow$$

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

انتهى ، حمص ٢٠٢٤/٧/٣

مدرس المادة : رامح ديب

د. ابراهيم