**جامعة البعث**
**كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية**
**قسم العلوم الأساسية**

**سلم تصحيح مادة رياضيات /2/**
**لطلاب السنة الأولى قسم التحكم**
**الفصل الثاني للعام 2023-2024**

**الدرجة: 100**
**المدة: ساعتين**

**السؤال الأول: احسب قيمة التكاملات غير المحددة التالية:** **(40 درجة)**

1) $I=\int \frac{\sin^3 x}{4+cosx}dx$ 2) $I=\int \frac{3x-1}{(x-2)(x+1)}dx$

3) $I=\int e^{-2x}\cos 4x\,dx$ 4) $I=\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$

**1.** $I=\int \frac{\sin^3 x}{4+cosx}dx$ **(10 درجات)**

نكتب التكامل بالشكل: $I=\int \frac{\sin^2 x(sinx)}{4+osx}dx=\int \frac{(1-\cos^2 x)}{4+cosx}sinx\,dx$

لذلك نفرض أن: $cosx=t$ ومنه :dt= $-sinx$ dx نعوض في التكامل نجد:

$$I=-\int \frac{(1-t^2)}{4+t}dt=\int \frac{t^2-1}{4+t}dt$$

نلاحظ أن درجة البسط أكبر من درجة المقام لذلك نقسم البسط على المقام (قسمة إقليدية) نجد:((يجب كتابة عملية القسمة بالتفصيل))

$$I=\int\left(\text{الناتج}+\frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}\right)dt=\int\left(t-\cancel{5}4+\frac{\cancel{20}15}{t+4}\right)dt=\int(t-\cancel{5}4)dt+\int\left(\frac{\cancel{20}15}{t+4}\right)dt=$$

$$=\frac{t^2}{2}-\cancel{5}4t+\cancel{20}15\,ln|t+4|+c$$

نعود للمتغيرات الأصلية نجد:

$$I=\frac{cos^2x}{2}-\cancel{5}4cosx+\cancel{20}15\,ln|cosx+4|+c$$

---

**2.** $I=\int \frac{3x-1}{(x-2)(x+1)}dx$ **(10 درجات)**

نقوم بتفريق الكسور للكسر التالي: $\frac{3x-1}{(x-2)(x+1)}$ لأن درجة البسط أقل من درجة المقام كما يلي:

$$\frac{3x-1}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}\quad ...(*)$$

نقوم بتوحيد المقامات وحذفها نجد: $3x-1=A(x+1)+B(x-2)$

$$3x-1=Ax+A+Bx-2B\ \rightarrow 3x-1=Ax+Bx+A-2B=x(A+B)\ +A-2B$$

بالمطابقة بين الطرفين في العلاقة السابقة نجد:

$$A + B = 3 \quad ...(1)$$
$$A - 2B = -1 \quad ...(2)$$

نحل المعادلتين (1) و(2) حل مشترك بالطرح نجد: $3B=4$ ومنه $B=\frac{4}{3}$ **نعوض في المعادلة (1) نجد:**

$$A + \frac{4}{3} = 3 \text{ ومنه } A = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \text{ أي } \boldsymbol{A = \frac{5}{3}}$$

بتعويض قيمة الثابتين $\boldsymbol{B, A}$ في العلاقة (*) نجد:

$$I=\int \left[\frac{\frac{5}{3}}{(x-2)} + \frac{\frac{4}{3}}{(x+1)}\right] dx = \int \left[\frac{\frac{5}{3}}{(x-2)}\right] dx + \int \left[\frac{\frac{4}{3}}{(x+1)}\right] dx = \frac{5}{3} ln|x-2| + \frac{4}{3} ln|x+1| + c$$

---

.3 $I=\int e^{-2x}\cos 4x dx$ (**10** درجات)

نفرض أن : $u=e^{-2x}$ , $dv= \cos(4x)\, dx$

$du= -2e^{-2x}\, dx$ , $v=\frac{1}{4}\sin(4x)$

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة: $I=u.v-\int vdu$ نجد:

$$I=\frac{1}{4}e^{-2x}\sin(4x) + \frac{2}{4}\int e^{-2x}\sin(4x)\, dx = \frac{1}{4}e^{-2x}\sin(4x) + \frac{1}{2}I_1 + c \quad ...(*)$$

نكامل $I_1 = \int e^{-2x}\sin(4x)\, dx$ مرة ثانية بالتجزئة نجد:

---

نفرض أن : $u=e^{-2x}$ , $dv= \sin(4x)\, dx$

$du= -2e^{-2x}\, dx$ , $v=-\frac{1}{4}\cos(4x)$

نعوض في دستور التكامل بالتجزئة نجد:

$$I_1 = -\frac{1}{4}e^{-2x}\cos(4x) - \frac{2}{4}\int e^{-2x}\cos(4x)\, dx = -\frac{1}{4}e^{-2x}\cos(4x) - \frac{1}{2}I$$

**نعوض في العلاقة (*) نجد:**

$$I=\frac{1}{4}e^{-2x}\sin(4x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}e^{-2x}\cos(4x) - \frac{1}{2}I\right) + c = \frac{1}{4}e^{-2x}\sin(4x) - \frac{1}{8}e^{-2x}\cos(4x) - \frac{1}{4}I + c$$

ومنه نجد : $I+\frac{1}{4}I= \frac{1}{4}e^{-2x}\sin(4x) - \frac{1}{8}e^{-2x}\cos(4x) + c$

$$\frac{5}{4}I= \frac{1}{4}e^{-2x}\sin(4x) - \frac{1}{8}e^{-2x}\cos(4x) + c$$

---

د.محمد عباس

جامعة البعث　　　　سلم تصحيح مادة رياضيات /2/

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية　　　　لطلاب السنة الأولى قسم التحكم　　　　الدرجة: 100

قسم العلوم الأساسية　　　　الفصل الثاني للعام 2023-2024　　　　المدة: ساعتين

---

$$I=\frac{4}{5}\left[\frac{1}{4}e^{-2x}\sin(4x)-\frac{1}{8}e^{-2x}\cos(4x)\right]+c$$

$$I=\left[\frac{1}{5}e^{-2x}\sin(4x)-\frac{1}{10}e^{-2x}\cos(4x)\right]+c$$

---

.4 $I=\int\frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$ 　　(10 درجات)

نفرض أن: $\arcsin\frac{x}{2}=t$ ومنه نفاضل الطرفين نجد : $dt=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ لأنه من الشكل :

$y=\arcsin\frac{x}{a}$ ومنه: $y'=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (حيث نعوض $a^2=4$ و $a=2$ ) نعوض في التكامل نجد:

$$I=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+c=\frac{\arcsin^2\frac{x}{2}}{2}+c$$

---

**<u>السؤال الثاني: احسب قيمة التكاملات المحددة التالية:</u>** 　　**(20 درجة)**

1) $I=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x(1+\ln x)}$ 　　　2) $I=\int_0^5\frac{\arctan\frac{x}{5}}{25+x^2}dx$

.1 $I=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x(1+\ln x)}$ 　　(10 درجات)

نفرض أن: $\ln x=t$ ومنه : $dt=\frac{dx}{x}$ وعندما $x=e$ فإن $t=1$ وعندما $x=e^2$ فإن $t=2$ نعوض في التكامل نجد:

$$I=\int_1^2\frac{dt}{1+t}=[\ln(1+t)]_1^2=\ln3-\ln2=\ln\frac{3}{2}$$

---

.2 $I=\int_0^5\frac{\arctan\frac{x}{5}}{25+x^2}dx$ 　　(10 درجات)

نفرض أن: $\arctan\frac{x}{5}=t$ ومنه نفاضل الطرفين نجد : $dt=\frac{5}{25+x^2}dx$ لأنه من الشكل :

$y=\arctan\frac{x}{a}$ ومنه: $y'=\frac{a}{a^2+x^2}$ (حيث $a^2=25$ و $a=5$ ) وعندما $x=0$ فإن $t=\arctan(0)=0$

وعندما $x=5$ فإن $t=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$ نعوض في التكامل نجد:

$$I=\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\,dt=\frac{1}{5}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{10}\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-(0)^2\right]=\frac{1}{10}\cdot\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{160}$$

**السؤال الثالث: لتكن لدينا المعادلات الوسيطية التالية: (20 درجة)**

$x=\frac{1}{2}(t-\sin t)$ $\quad$ $y=\frac{1}{2}(1-\cos t)$ $\quad$ $;0\le t\le 2\pi$

والمطلوب :

1) احسب مساحة المنطقة المحددة بالسيكلوئيد ذو المعادلات الوسيطية السابقة والمحور ox؟ **(10 درجات)**

$\beta=2\pi \ ، \ \alpha=0$

$y=g(t)=\frac{1}{2}(1-\cos t) \quad , \quad x=h(t)=\frac{1}{2}(t-\sin t)$

نوجد: $dx=h'(t)=\frac{1}{2}(1-cost)dt$

نعوض في قانون المساحة:

$$S=\int_\alpha^\beta g(t)h'(t)dt=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos t).\frac{1}{2}(1-cost)dt=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1-2cost+cos^2t)dt=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(1-2cost+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos2t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2cost+\frac{1}{2}cos2t\right)dt=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}t-2sint+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}sin2t\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{3}{2}2\pi-2sin2\pi+\frac{1}{4}sin4\pi\right)-\left(\frac{1}{2}0-2sin0+\frac{1}{4}sin0\right)\right]=\frac{3\pi}{4}$$

2) احسب طول قوس السيكلوئيد ذو المعادلات الوسيطية السابقة؟ **(10 درجات)**

نوجد: $dy=g'(t)=\frac{1}{2}\text{sint}dt$

نعوض في قانون طول القوس:

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[h'(t)]^2+[g'(t)]^2}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{[\frac{1}{2}(1-cost)]^2+[\frac{1}{2}\text{sint}]^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4}(1-\cos t)^2+\frac{1}{1}sin^2t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4}(1-2cost+cos^2t+sin^2t)}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4}(1-2cost+1)}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1}{4}(2-2cost)}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{2}{4}(1-cost)}\,dt=$$

جامعة البعث
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
قسم العلوم الأساسية

**سلم تصحيح مادة رياضيات /2/**
**لطلاب السنة الأولى قسم التحكم**
**الفصل الثاني للعام 2023-2024**

**الدرجة: 100**
**المدة: ساعتين**

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2}{4}.\,2sin^2\frac{t}{2}}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{4}{4}sin^2\frac{t}{2}}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{2}{4}\sin\frac{t}{2}dt = -\frac{2}{2}[\cos\frac{t}{2}]_0^{2\pi}$$

$$= -\left[\cos\frac{2\pi}{2} - \cos(0)\right] = -[\cos\pi - \cos(0)] = -(-1-1) = -(-2) = 2$$

---

**السؤال الرابع: أجب عن الأسئلة التالية: (20 درجة)**

**1) أوجد قيمة التكامل الثنائي التالي: (10 درجات)**

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dydx$$

نكامل بالنسبة لـ $y$ (ونعتبر $x$ ثابت) نجد:

$$I_1 = \int_0^1 dx[\int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}dy] = \int_0^1 dx\left[\frac{1}{\frac{1}{x}}e^{\frac{y}{x}}\right]_0^{x^2} =$$

$$= \int_0^1 dx\left[xe^{\frac{y}{x}}\right]_0^{x^2} = \int_0^1 dx[xe^{\frac{x^2}{x}} - xe^{0}] = \int_0^1 dx[xe^{x} - x] = \int_0^1 [xe^{x} - x]dx$$

نكامل بالنسبة لـ $x$ نجد:

$$I_1 = \int_0^1 [xe^{x}]dx - \int_0^1 x\,dx = 1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - [\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

حيث (نكامل $\int_0^1[xe^{x}]dx$ بالتجزئة) نجد:

$$\int_0^1 [xe^{x}]dx = 1$$

**2) أوجد قيمة التكامل الثلاثي التالي: $I=\int_1^2 dx\int_0^x dy\int_0^{y\sqrt{3}}\frac{y}{y^2+z^2}dz$ (10 درجات)**

نكامل بالنسبة لـ $z$ (نعتبر $x$ و $y$ ثوابت) نجد :

جامعة البعث سلم تصحيح مادة رياضيات /2/

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية لطلاب السنة الأولى قسم التحكم الدرجة: 100

قسم العلوم الأساسية الفصل الثاني للعام 2023-2024 المدة: ساعتين

---

$$I=\int_1^2 dx\int_0^x ydy\left[\frac{1}{y}arctan\frac{z}{y}\right]_0^{y\sqrt{3}}=$$

$$\int_1^2 dx\int_0^x ydy\left[\frac{1}{y}arctan\frac{y\sqrt{3}}{y}-\frac{1}{y}arctan(0)\right]=\int_1^2 dx\int_0^x[ydy]\left[\frac{1}{y}arctan(\sqrt{3})-0\right]=$$

$$\int_1^2 dx\int_0^x\frac{\pi}{3}dy=$$

نكامل بالنسبة لـ $y$ نجد (نعتبر $x$ ثابت):

$$I=\frac{\pi}{3}\int_1^2[y]_0^x dx=\frac{\pi}{3}\int_1^2[x-0]dx=\frac{\pi}{3}\int_1^2 xdx$$

وأخيرا نكامل بالنسبة $x$ .

$$I=\frac{\pi}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{\pi}{2}$$

**ملاحظة: إذا حل الطالب أي طلب بطريقة ثانية صحيحة ينال الدرجة المخصصة لذلك الطلب.**

.................................. انتهى سلم التصحيح ..........................

حمص في 28 / 7 / 2024

مدرس المقرر : د. رائد محمد قراحسن