جامعة البعث
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية
قسم العلوم الأساسية

اسم الطالب :
الرقـــم :

امتحان الرياضيات (1) – لطلاب السنة الأولى (حملة) قسم التصميم والانتاج لعام 2023-2024 م

السؤال الأول : (40 علامة)

1. لتكن لدينا المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ ، وكثير الحدود $f(x)=x^2-x+1$ أوجد كثير حدود المصفوفة A وفق f .

الحل :

(15 علامات)

$$f(A)=A^2-A+I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

2. لدينا المجموعة $V=\{(x,1,2)\ ;\ x\in\mathbb{R}\}$ ونعرف عليها العمليتين

$$\forall\ (x,1,2)\ ,\ (y,1,2)\in V$$
$$(x,1,2)+(y,1,2)=(x+y,1,2)$$
$$\forall\ r\in\mathbb{R}\ \ ;\ \ r(x,1,2)=(rx,1,2)$$

(15 علامة)

أثبت أن $(V,+,.)$ تشكل فضاء متجهي فوق $\mathbb{R}$

الحل :

العملية $(+)$ تبديلية لأن

$$(x,1,2)\ ,\ (y,1,2)\in V$$

$$(x,1,2)\ ,\ (y,1,2)=(x+y,1,2)=(y+x,1,2)=(y,1,2)\ ,\ (x,1,2)$$

العملية $(+)$ تجميعية لأن

ليكن $(x_1,1,2),(x_2,1,2),(x_3,1,2)\in V$ فإن

$$\left[(x_1,1,2)+(x_2,1,2)\right]+(x_3,1,2)=(x_1+x_2,1,2)+(x_3,1,2)=((x_1+x_2)+x_3,1,2)$$
$$=(x_1+(x_2+x_3),1,2)=(x_1,1,2)+((x_2+x_3),1,2)$$
$$=(x_1,1,2)+\left[(x_2,1,2)+(x_3,1,2)\right]$$

يوجد عنصر حيادي $(0,1,2)$

$$\forall (x,1,2) \in V$$

$$(0,1,2)+(x,1,2)=(0+x,1,2)=(x,1,2)$$

يوجد عنصر نظير $(0,1,2)$

$$\forall (x,1,2) \in V \Rightarrow \exists (-x,1,2) \in V$$

$$(x,1,2)+(-x,1,2)=(x+(-x),1,2)=(0,1,2)$$

أي $(v,+)$ زمرة تبديلية .

العملية $(.)$ تجميعية

$\alpha ,\beta \in \mathbb{R}$

$$\forall (x,1,2) \in V$$

$$\alpha(\beta(x,1,2))=\alpha(\beta x,1,2)=(\alpha(\beta x),1,2)=(\alpha.\beta x,1,2)=(\alpha.\beta)(x,1,2)$$

العملية $(.)$ توزيعية

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(x,1,2)&=((\alpha+\beta)x,1,2)=(\alpha x+\beta x,1,2)=(\alpha x,1,2)+(\beta x,1,2)\\&=\alpha(x,1,2)+\beta(x,1,2)\end{aligned}$$

1 حقل

$$1.(x,1,2)=(1x,1,2)=(x,1,2)$$

وبالتالي $(V,+,.)$ فضاء متجهي .

3. ليكن لدينا المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ ، أحسب محدد المصفوفة A ، وهل يوجد مقلوب للمصفوفة A ؟

الحل :

اسم الطالب :
الرقــــــم :

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&3\\3&4&2\\0&1&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}1&-1\\3&4\\0&1\end{matrix}$$

(١٥ علامات)

$$=-4+0+9-(0+2+3)=5-5=0$$

السؤال الثاني : (30 علامة)

1. أوجد مشتق الدوال : $y_3=\cos^4(x)$, $y_2=(1+x)^{x^2}$, $y_1=\arcsin x$.

الحل :

$$1)\quad y=\arcsin x \Rightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2)\quad y=(1+x)^{x^2} \Rightarrow \ln y=x^2\ln(1+x) \Rightarrow \frac{y'}{y}=2x\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x}$$

$$\Rightarrow y'=(1+x)^{x^2}\left(2x\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x}\right)$$

$$3)\quad y_3=\cos^4(x) \Rightarrow y'=4(-\sin x)\cos^3 x \Rightarrow y'=-4\sin x\cos^3 x$$

(١٥ علامة)

2. أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}$

الحل :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\tan 3x}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos 2x}{3(1+\tan^2 3x)}=\frac{2(1)}{3(1+0)}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)=0-0=0$$

(١٥ علامة)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^5=e^5$$

السؤال الثالث : (30 علامة)

1. ادرس نهاية الدالة :

$$f(x)=\begin{cases}x^2-5 & x\le 3\\ \sqrt{x+13} & x>3\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x+13} = \sqrt{3+13} = \sqrt{16} = 4$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2 - 5 = 9 - 5 = 4$$

بما أن $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$ فإن يوجد للدالة f نهاية و يكون $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$.

(١٥ علامة)

2. ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

الحل :

يمكنا كتابة متتالية المجاميع الجزئية بالشكل $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ومنه

(١٥ علامة)

$$S_1 = x_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad , \quad S_2 = x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$S_3 = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ فإن متتالية المجاميع الجزئية متقاربة .

(انتهت الأسئلة)