

# مجلة جامعة البعث

سلسلة العلوم الأساسية



مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 46 . العدد 8

1445 هـ - 2024 م

الأستاذ الدكتور عبد الباسط الخطيب

رئيس جامعة البعث

المدير المسؤول عن المجلة

رئيس هيئة التحرير	أ. د. محمود حديد
رئيس التحرير	أ. د. درغام سلوم

مدير مكتب مجلة جامعة البعث  
د. إبراهيم عبد الرحمن

عضو هيئة التحرير	د. محمد هلال
عضو هيئة التحرير	د. فهد شريباتي
عضو هيئة التحرير	د. معن سلامة
عضو هيئة التحرير	د. جمال العلي
عضو هيئة التحرير	د. عباد كاسوحة
عضو هيئة التحرير	د. محمود عامر
عضو هيئة التحرير	د. أحمد الحسن
عضو هيئة التحرير	د. سونيا عطية
عضو هيئة التحرير	د. ريم ديب
عضو هيئة التحرير	د. حسن مشرقي
عضو هيئة التحرير	د. هيثم حسن
عضو هيئة التحرير	د. نزار عبشي

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها

الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة البعث

سورية . حمص . جامعة البعث . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : 963 31 2138071 ++

. موقع الإنترنت : [www.albaath-univ.edu.sy](http://www.albaath-univ.edu.sy)

. البريد الإلكتروني : [magazine@ albaath-univ.edu.sy](mailto:magazine@albaath-univ.edu.sy)

**ISSN: 1022-467X**

## شروط النشر في مجلة جامعة البعث

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
- طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
- إذا كان الباحث طالب دراسات عليا: يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقة على النشر في المجلة.
- إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية: يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.
- إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث : يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.
- إذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية : يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.
- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):  
عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي ( كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
  - 1- مقدمة
  - 2- هدف البحث
  - 3- مواد وطرق البحث
  - 4- النتائج ومناقشتها .
  - 5- الاستنتاجات والتوصيات .
  - 6- المراجع.

- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات ( الآداب - الاقتصاد - التربية - الحقوق - السياحة - التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):
- عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي ( كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1. مقدمة.
- 2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
- 3. أهداف البحث و أسئلته.
- 4. فرضيات البحث و حدوده.
- 5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
- 6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
- 7. منهج البحث و إجراءاته.
- 8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
- 9. نتائج البحث.
- 10. مقترحات البحث إن وجدت.
- 11. قائمة المصادر والمراجع.
- 7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:
  - أ- قياس الورق 25×17.5 B5.
  - ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 - يمين 2.5- يسار 2.5 سم
  - ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8
  - ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20
- . كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي . العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.
- ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.
- 8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.
- 9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.
- 10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة . الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة . سنة النشر . وتتبعها معترضة ( - ) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة . دار النشر وتتبعها فاصلة . الطبعة ( ثانية . ثالثة ) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة . وفيما يلي مثال على ذلك:

-MAVRODEANUS, R1986- Flame Spectroscopy. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

. بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة . المجلد والعدد ( كتابة مختزلة ) وبعدها فاصلة . أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة . مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases Clinical Psychiatry News , Vol. 4. 20 – 60

ج . إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد

بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: ( المراجع In Arabic )

## رسوم النشر في مجلة جامعة البعث

1. دفع رسم نشر (40000) ل.س أربعون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (100000) ل.س مئة الف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (6000) ل.س ستة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

## المحتوى

الصفحة	اسم الباحث	اسم البحث
48-11	يوسف كاجان د. حامد عباس د. كامل محمد	تصنيف النقاط الثابتة للمنظومات الديناميكية والتشعبات في المنظومات أحادية البعد والتصوير اللوجستي
74-49	د أنيس بلال أوس علي	دراسة التباينات الطاقية للعوام من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخلي للكمون الضوئي للتفاعل $(\alpha + Fe_{26}^{56})$ باستخدام طريقة (VMA)
96-75	د. سهى علي سلامة	متباينة هاردي على زمرة هايزنبرغ
114-97	مجد عبد الرحمن عياش د. حسن بدور د. محمد علي	استخدام نتائج محسنة للمعامل الثالث لتقدير محدد هانكل الثاني في بعض صفوف التوابع ثنائية التباين
146-115	ساهر العثمان د. عدنان ديب د. فاروق قنديل	اصطناع خمس مركبات عضوية جديدة تحوي حلقات غير متجانسة انطلاقاً من الكربازول ودراسة فعاليتها المضادة للأكسدة





# تصنيف النقاط الثابتة للمنظومات الديناميكية والتشعبات في المنظومات أحادية البعد والتصوير اللوجستي

طالب الدراسات العليا : يوسف كاجان

الدكتور المشرف : حامد عباس + د. كامل محمد

كلية العلوم – جامعة البعث

## الملخص:

لنظرية التشعب دور رئيسي في دراسة الاستقرار البنيوي للمنظومات الديناميكية التي تتم دراستها في المجالات المختلفة للعلوم والهندسات والعلوم الاجتماعية.

عند دراسة هذه الظواهر تظهر سلوكيات ديناميكية غير متوقعة في المنظومات غير الخطية عند تغيير قيمة وسطاء هذه المنظومات، بحيث نصل إلى قيم حرجة لهذه الوسطاء تختلف في جوارها السلوكية الديناميكية لها.

نقدم في هذا البحث دراسة لنقاط توازن المنظومات الديناميكية غير الخطية بشكل عام، من خلال دراسة المنظومات الخطية الموافقة لها في جوار نقاط التوازن.

## الكلمات مفتاحية:

المنظومة الديناميكية، تشعب الطي، تشعب العقدة السرجية، التشعب مماسي، الأشكال النظامية، التشعب الحرج، تشعب المذراة، التصوير اللوجستي.

# Classification of Fixed Points of Dynamical Systems and Bifurcations in One -Dimensional Systems and Logistic Map

## Abstract:

Bifurcations theory has a key role in the study of structural stability of dynamical systems encountered in various branches of scientific fields as humanities, engineering, social science, etc.

Studying such phenomenae, unexpected dynamical behaviors occur in nonlinear systems when changing values of systems' parameters, so that, we may reach critical values of such parameters at which the dynamical behavior of such systems differs through passing these critical parameters' values.

In this paper, we present a study of equilibrium points of nonlinear dynamical systems, in general, using the corresponding linearized systems in neighborhoods of such points.

**Key words:** Dynamical System, Fold Bifurcation, Saddle–Node Bifurcation, Tangent Bifurcation, Transcritical Bifurcation, Normal Form, Pitchfork Bifurcation, Logistic Map.

## 1- مقدمة:

التشعب هو تغير نوعي في السلوك الديناميكي لمنظومة ديناميكية عند تغير قيمة وسيط المنظومة. عند الضغط على قطعة خشبية بقوة في منتصفها تنقوس الخشبة وتستمر بالنقوس حتى تصل القوة إلى قيمة معينة، تسمى قيمة التشعب، عندها يتغير سلوك القطعة الخشبية فتتكسر. تسمى النقطة التي يظهر عندها هذا السلوك نقطة التشعب، ويتم رسم هذا السلوك في مخطط يسمى مخطط التشعب، سنبدأ البحث بتقديم بعض التعاريف الأساسية .

**المنظومة الديناميكية:** هي مجموعة من المتحولات التي تتفاعل فيما بينها بطريقة ما تؤدي إلى تغير قيم هذه المتحولات مع مرور الزمن، ويعبر عن أي منظومة بمعادلات رياضية تعبر عن طريقة ارتباط هذه المتحولات مع بعضها البعض. وندرس في الرياضيات عادةً نوعين أساسيين من المنظومات الديناميكية، وهي:

1. **التصوير (Map):** وهي منظومة ديناميكية ذات زمن منقطع (Discrete) تعرف من خلال مجموعة غير خالية  $X$  مزودة بتطبيق من الشكل  $f : X \rightarrow X$  بحيث تبين أي معادلة فروق من الشكل  $x_{n+1} = f(x_n)$  ;  $n \in \mathbb{N}$  طريقة الانتقال من أي حالة  $x_n \in X$  للمنظومة إلى الحالة التالية  $x_{n+1} \in X$ . ونعرف مسار المنظومة وفقاً لشرط ابتدائي معين  $x_0$  بمتتالية النقاط  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$  في فضاء الحالة للمنظومة.

2. **التدفق (Flow):** هي منظومة ديناميكية ذات زمن مستمر (Continuous)، يمكن تعريفها من خلال أسرة من التصاویر  $\{f^t : X \rightarrow X ; t \in \mathbb{R}\}$  تحقق الخواص التالية:

$$f^t \circ f^s = f^{t+s} \quad , \quad f^{-t} = (f^t)^{-1} \quad ,$$

$$(f^t)^n = f^{t \cdot n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \& \quad t, s \in \mathbb{Z}$$

نعتبر عادةً عن التدفق بمعادلة تفاضلية من الشكل  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ، حيث تمثل حلول

هذه المعادلة الموافقة لشروط ابتدائية مختلفة المسارات المختلفة لهذه المنظومة.

### مخطط فضاء الحالة (phase portrait):

وهو المخطط الذي يبين تطور مسارات المنظومة الديناميكية ضمن فضاء الحالة  $X$  للمنظومة عندما  $t \rightarrow \pm\infty$ . وعلى الرغم من استحالة رسم جميع مسارات المنظومة، إلا أنه يكفي رسم المسارات المفتاحية فقط والتي يمكن من خلالها الحصول على المعلومات الكافية حول سلوك المنظومة.

### نقطة التوازن لمنظومة ديناميكية:

تعرف نقطة التوازن لأي منظومة ديناميكية بأنها نقطة من فضاء الحالة للمنظومة أي مسار يبدأ بهذه النقطة يبقى فيها مع تقدم الزمن. وبناءً على ذلك تعرف نقطة التوازن لتدفق

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

بأنها أي نقطة  $x^*$  تحقق العلاقة  $f(x^*) = 0$ . أما نقطة التوازن لتصوير من الشكل

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (2)$$

فهي أي نقطة  $x^*$  تحقق الشرط  $f(x^*) = x^*$ .

**تعريف الاستقرار:** نقول عن مدار (مسار مغلق)  $\bar{x}(t)$  للمنظومة (1) أنه مستقر، إذا كانت جميع الحلول التي تبدأ بجوارٍ ما لهذا المدار تبقى ضمن هذا الجوار مع تقدم الزمن.

### تعريف الاستقرار حسب ليابونوف (Liapunov Stability) :

نقول إن المدار  $\bar{x}(t)$  مستقر حسب ليابونوف، إذا كان لأجل أي  $\varepsilon > 0$ ، يوجد  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ، بحيث يكون من أجل أي حل  $y(t)$  للمعادلة  $x^\square = f(x)$  يحقق أن  $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < \delta$ ، يكون  $|\bar{x}(t) - y(t)| < \varepsilon$  وذلك من أجل كل  $t > t_0$ .

### تعريف الاستقرار التقاربي (Asymptotic Stability) :

نقول إن المدار  $\bar{x}(t)$  مستقر تقريبا، إذا تحقق استقرار ليابونوف وكان من أجل أي حل آخر  $y(t)$  للمعادلة  $x^\square = f(x)$ ، يوجد  $b > 0$  بحيث أيتحقق إذا كان  $|\bar{x}(t_0) - y(t_0)| < b$  عندئذ  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - y(t)| = 0$ .

لتحديد استقرار المدار  $\bar{x}(t)$  يجب فهم طبيعة الحلول بجوار  $\bar{x}(t)$ ، لذلك سنضع  $x = \bar{x}(t) + y$  ونعوض في المعادلة (1) ونستخدم نشر تايلور في جوار  $\bar{x}(t)$ ، لنجد:

$$x^\square = \bar{x}^\square + y^\square = f(\bar{x}(t)) + Df(\bar{x}(t))y + O(|y|^2)$$

وبما أن  $\bar{x}^\square(t) = f(\bar{x}(t))$ ، نجد المعادلة  $y^\square = Df(\bar{x}(t))y + O(|y|^2)$  التي تصف سلوك مسارات المنظومة في جوار  $\bar{x}(t)$ . لذلك وللبحث عن سلوك المسارات في جوار المدار  $\bar{x}(t)$ ، ندرس سلوك المنظومة الخطية الموافقة  $y^\square = Df(\bar{x}(t))y$  في جوار الحل  $y = 0$ ، على النحو التالي:

$$-1 \text{ نحدد فيما إذا كان } y = 0 \text{ حل مستقر للمعادلة } y^\square = Df(\bar{x}(t))y.$$

2- يؤدي استقرار (أو عدم استقرار)  $y = 0$  إلى استنتاج استقرار (أو عدم استقرار) المدار  $\bar{x}(t)$ .

وبما أنه لا يمكن في الحالة العامة إيجاد حل تحليلي للمعادلات التفاضلية ذات الأمثال التي تعتمد على الزمن، وبفرض أن  $\bar{x}(t)$  هي نقطة توازن للمنظومة، أي أن  $\bar{x}(t) = \bar{x}$ ، تصبح المصفوفة  $Df(\bar{x}(t)) = Df(\bar{x})$  ذات مدخلات ثابتة، ويمكن كتابة حل المعادلة  $y' = Df(\bar{x}(t))y$  المزودة بالشرط  $y(0) = y_0$  ;  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  بالشكل:

$$y(t) = e^{Df(\bar{x})t} y_0$$

وبالتالي يكون الحل  $y(t)$  مستقرًا تقاربياً إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة اليعقوبية ذات جزء حقيقي سالب.

**مبرهنة:** إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة اليعقوبية  $Df(\bar{x}(t))$  لها جزء حقيقي

سالب عندئذ يكون حل التوازن  $x = \bar{x}$  للمنظومة (1) مستقرًا تقاربياً [Wiggins 2003].

كما يعرف الاستقرار للتساوير من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة:** ليكن التصوير  $x \rightarrow g(x)$  ,  $x \in \mathbb{R}^n$  من الصف  $C^r$  ( $r \geq 1$ )، وبفرض أن  $x = x^*$  نقطة ثابتة لهذه التصوير، وأن التصوير الخطي الموافق لهذا التصوير يعطى بالصيغة  $y \rightarrow Ay$  ,  $y \in \mathbb{R}^n$  حيث  $A \equiv Dg(x)$ . إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة اليعقوبية  $Dg(x^*)$  تقع داخل الدائرة الواحدة عندئذ تكون النقطة الثابتة  $x^*$  للتصوير الخطي مستقرًا تقاربياً، أما إذا كانت إحدى القيم الذاتية على الأقل واقعة خارج الدائرة الواحدة فإن النقطة الثابتة  $x^*$  غير مستقرة [Wiggins 2003].

**2- هدف البحث:** تصف المنظومة الديناميكية الصيغة الرياضية للأفكار العلمية العامة المرتبطة بالعمليات القطعية، مما يساعد على التنبؤ بحالات المنظومات الكيميائية والبيولوجية والبيئية والاقتصادية والاجتماعية من خلال معرفة القانون المحدد للتطور والحالة الابتدائية. نستعرض في هذا البحث أولاً بعض التعاريف الأساسية وتصنيف نقاط التوازن (الثابتة) في حال عدم وجود وسيط للمنظومة، ثم ننتقل إلى تصنيف هذه النقاط في حال وجود وسيط، ومناقشة سبب نشوء السلوك الجديد للمنظومة في جوار نقطة التوازن.

### 3- طرائق البحث:

البحث نظري يشمل بعض التطبيقات، لذلك سوف نعتمد على الدراسة النظرية المرجعية من المراجع و الكتب المتوفرة التي تعنى بهذا الموضوع مع إضافة بعض التطبيقات ودراسة بعض المنظومات الديناميكية المعروفة.

### 4- الدراسة النظرية

سنعتبر و بدون المساس بعمومية المسألة أن نقطة التوازن للمنظومة هي مركز الإحداثيات، ولدراسة استقرار المنظومة غير الخطية في جوار نقطة التوازن سنقوم بنشر هذه المنظومة في جوار نقطة التوازن والاكتفاء بالحدود الخطية في هذا النشر، لتصبح المنظومة الخطية المكافئة بالشكل

$$x^{\dot{}} = Df(x) \cdot x$$

حيث أن  $Df(x)$  هي المصفوفة اليعقوبية للدالة  $f$  والتي تعرف من خلال المشتقات الجزئية لمركبات هذه الدالة بالنسبة لمركبات المتجه  $x$ .

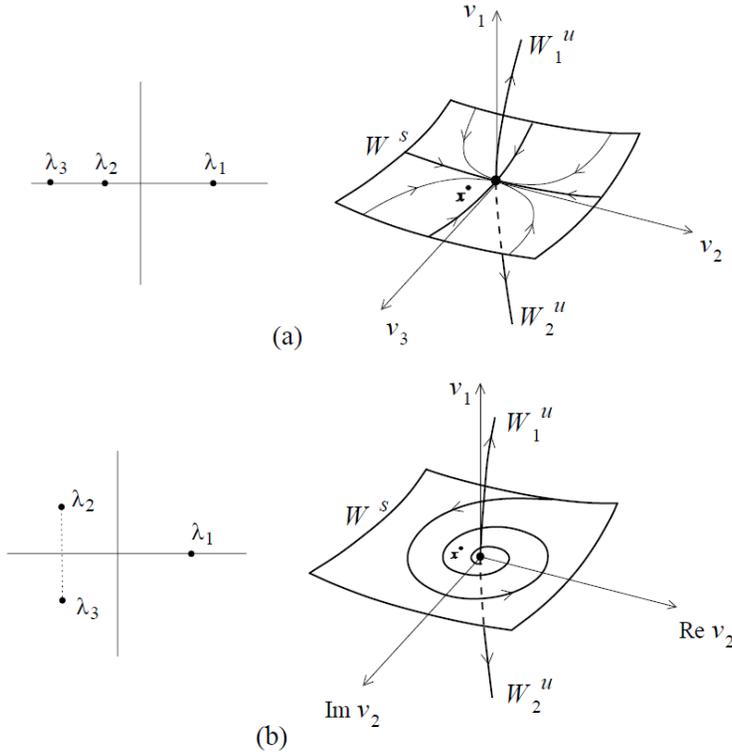
**تعريف:** نقول أن  $x^*$  نقطة توازن زائدية للمنظومة (1) إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة اليعقوبية  $Df(x^*)$  ذات جزء حقيقي غير معدوم.

لدراسة مخطط فضاء الحالة للمنظومة (1) في جوار نقطة التوازن الزائدية، نعرف المجموعتين الصامدتين  $W^s(x^*) = \{x : \phi^t(x) \rightarrow x^*; t \rightarrow +\infty\}$  و  $W^u(x^*) = \{x : \phi^t(x) \rightarrow x^*; t \rightarrow -\infty\}$  حيث ندعو الأولى المجموعة المستقرة للنقطة  $x^*$  والثانية غير المستقرة للنقطة  $x^*$ . ل نرمز بـ  $n$  إلى عدد القيم الذاتية للمصفوفة اليعقوبية، و  $n_-$  ذات الجزء الحقيقي السالب،  $n_+$  ذات الجزء الحقيقي الموجب،  $n_0$  ذات الجزء الحقيقي الصفري.

### مبرهنة المتنوعة الموضعية المستقرة:

لتكن  $x^*$  نقطة توازن زائدية حيث  $n_0 = 0$  ,  $n_- + n_+ = n$ . عندئذ يحوي تقاطع  $W^s(x^*)$ ,  $W^u(x^*)$  في جوار صغير لنقطة التوازن  $x^*$  متوعتين جزئيتين ملسائيتين محليتين  $W^s(x^*)$  ذات بعد  $n_-$  و  $W^u(x^*)$  ذات بعد  $n_+$  مماسيتين للفضائين الذاتيين المعممين  $T^s$ ,  $T^u$  على الترتيب في  $x^*$  الموافقين لاجتماع كل القيم الذاتية للمصفوفة اليعقوبية  $Df(x^*)$ . ندعو  $W^s(x^*)$  و  $W^u(x^*)$  المتنوعتين الصامدتين المستقرة وغير المستقرة للنقطة  $x^*$ ، كنقاط التوازن السرجية والبؤر السرجية في  $\mathbb{R}^3$  [Kuznetsov 1997].

يبين الشكل (1) نموذجاً للمتوعتين المستقرة وغير المستقرة من أجل  $n = 3$  وفيها  $n_+ = 1$  ,  $n_- = 2$  حيث يوجد متوعتين صامدتين  $W^s(x^*)$ ,  $W^u(x^*)$  تتقاطعان في نقطة التوازن، تتشكل المتنوعة المستقرة  $W^s(x^*)$  ذات البعدين



**الشكل (1):** (a) نقطة سرجية (b) بؤرة سرجية، حيث أن  $v_k$  هي الأشعة الذاتية الموافقة للقيم الذاتية  $\lambda_k$  من كل المدارات الداخلة و تتشكل المتنوعة غير المستقرة  $W^u(x^*)$  ذات البعد الواحد من كل المدارات الخارجة، وكل المسارات التي لا تنتمي لهاتين المتنوعتين تقترب من نطفه التوازن ضمن جوار لها ثم تغادر هذا الجوار. القيم الذاتية في الحالة (a) حقيقية  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$  وتدعى نقطة التوازن سرجية، أما في الحالة (b) تكون  $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$  ,  $\text{Re}(\lambda_3, \lambda_2) < 0 < \lambda_1$  وتدعى نقطة التوازن بؤرة سرجية.

**تعريف:** نقول عن منظومتين  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  ,  $\frac{dx}{dt} = g(x)$  أنهما متكافئتان طبولوجياً

إذا وجد تحويل تقابل (هوميو مورفيزم) يقابل مدارات المنظومتين مع الحفاظ على نفس جهة الزمن (الهوميومورفيزم هو تصوير عكوس يكون فيه بحيث كلا التصوير ومعكوسه

مستمران).

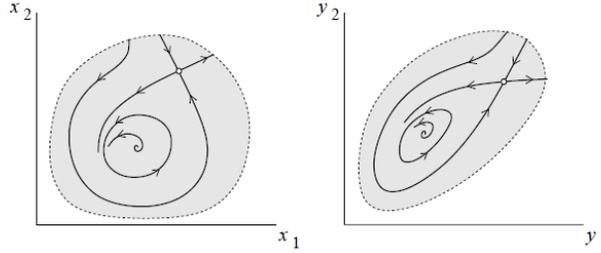
مبرهنة: تكون لوحتي الفضاء للمنظومة (1) بجوار نقطتي التوازن الزائديتين  $x^*, y^*$  متكافئتين طبولوجياً إذا وفقط إذا كان لهما نفس العدد من القيم الذاتية  $n_+, n_-$ .

التصنيف الطبولوجي لنقاط التوازن الزائدية للمنظومات المستمرة في المستوي:

لتكن  $x^*$  نقطة توازن للمنظومة ذات البعدين  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x^* = f(x)$  حيث  $f$  أملس.  $\lambda_1, \lambda_2$  القيم الذاتية للمصفوفة اليعقوبية، يبين الجدول التالي ثلاثة أصناف طبولوجية لنقاط التوازن الزائدية وهي عقدة مستقرة وغير مستقرة وسرجية. العقدة والبؤرة المتوافقة بنوع الاستقرار متكافئتان طبولوجياً.

$(n_+, n_-)$	القيم الذاتية	نوع نقطة الاستقرار	لوحة فضاء حالة	الاستقرار
(0, 2)		عقدة		مستقر
		بؤرة		
(1, 1)		عقدة سرجية		غير مستقر
(2, 0)		عقدة		غير مستقر
		بؤرة		

تقودنا دراسة الخواص العامة للمنظومات الديناميكية لتصنيف سلوكها ومقارنتها. وبالتالي نقول إن منظومتان متكافئتان إذا كان لهما نفس عدد نقاط التوازن والحلقات ونفس نوع استقرارها، كما نجد التشابه بين المجموعات الصامدة وشكل مناطق الجذب. ونلخص التكافؤ لمنظومتين بوجود تشابه بين لوحتي الفضاء لهما. الشكل (2)



الشكل (2): التكافؤ الطوبولوجي.

دراسة التدفق في حال وجود وسيط : سندرس المنظومة الديناميكية من الشكل

$$\frac{dx}{dt} = f(x, c) \quad ; x \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

حيث أن  $c$  وسيط المنظومة.

**تعريف:** نقول إن المنظومة  $\frac{dx}{dt} = f(x, c)$  مستقرة بنيوياً عند  $c = c^*$  إذا كانت

$$\frac{dx}{dt} = f(x, c) \text{ مكافئة طوبولوجياً للمنظومة } \frac{dx}{dt} = f(x, c^*) \text{ لكل قيم } c \text{ القريبة من } c^* .$$

**مبرهنة التابع الضمني:** بفرض أن المنظومة (3) تمتلك نقطة توازن زائدية مستقرة (غير مستقرة)  $x^* = 0$  عندما  $c^* = 0$ . عندئذ يوجد جوار للقيمة  $c^* = 0$  يكون فيه للمنظومة نقطة توازن لها نفس نوع الاستقرار [Panfilov 2005].

تبين هذه المبرهنة اختبار استقرار بنية المنظومة عند تغير قيمة الوسيط .

**مبرهنة:** إذا كان للمنظومة  $x^{\square} = f(x, c)$  عدداً منتهياً من نقاط التوازن جميعها زائدية، عندئذٍ تكون المنظومة مستقرة بنيوياً.

### التشعب (Bifurcation) ومخططات التشعب:

التشعب يعني الانقسام إلى إثنين أو الانشطار أو التغير [Devaney (1989)]. الهدف من نظرية التشعب في المنظومات الديناميكية التي تحتوي على وسطاء هو دراسة التغيرات في السلوكيات التقاربية (asymptotic behaviors) لهذه المنظومات عند تغير قيم هذه الوسطاء. وتشتمل هذه الدراسة على دراسة التغيرات الكيفية (qualitative) والكمية (quantitative) الطارئة في فضاء موضع المنظومة الديناميكية المدروسة، أي التغيرات الطارئة في استقرار و طبيعة جواذب هذه المنظومة. إن مخطط التشعب لتصوير ما هو رسم بياني يتم فيه توضيح السلوك التقاربي لمتحول أو أكثر من متحولات المنظومة و تعيين قيم هذا المتحول عندما يسعى الزمن إلى اللانهاية في مجال معين لقيم وسيط المنظومة الديناميكية موضع الاهتمام.

**الشكل النظامي (normal forms):** هي طريقة لإيجاد منظومة إحداثيات جديدة بشكل موضعي في جوار معين للحل يمكن من خلالها تحويل المنظومة الديناميكية لأبسط شكل ممكن.

سنبحث في الاستقرار البنيوي للمنظومة في حال تغير قيمة الوسيط، حيث يمكن أن نواجه إحدى الحالتين التاليتين: إما أن لا يتغير شيء أي أن الخواص النوعية للمعادلة تبقى كما هي، أو أن يحدث تغير ما في هذه الخواص، وسنناقش فيما يلي هذا التغير رياضياً على النحو التالي

1- ندرس فضاء الحالة للمنظومة عند قيمة معينة للوسيط.

2- تطبيق اختبار الاستقرار البنيوي في جوار نقطة التوازن.

3- إذا كانت المنظومة غير مستقرة بنيوياً ندرس التشعب ونوع التشعب الناتج.

بعض التشعبات في المنظومات الديناميكية المستمرة:

### 1- التشعب المماسي (Tangent):

مبرهنة: لتكن  $x^*$  نقطة توازن غير زائدية للمنظومة  $\frac{dx}{dt} = f(x, c)$  عند قيمة الوسيط

$$c = c^* ، فيها  $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, c^*) = 0$  و  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x^*, c^*) \neq 0$  ،  $\frac{\partial f}{\partial c}(x^*, c^*) \neq 0$  ، فإن$$

المنظومة المعطاة تكافئ طبولوجياً أحد الأشكال النظامية التالية

$$\frac{d\eta}{dt} = \pm\mu \pm \eta^2$$

في جوار نقطة التوازن  $x = x^*$  ، ويحدث عند القيمة  $c = c^*$  تشعباً للمنظومة يسمى

التشعب المماسي حيث  $\mu$  وسيط جديد مناسب للمنظومة. كما يشار إلى هذا التشعب

في بعض الأحيان بتشعب الطي (Fold). الشكل (3)، [Panfilov 2005].

ملاحظة: إشارة الحد  $\mu$  في الشكل النظامي هي إشارة  $\frac{\partial f}{\partial c}$  وإشارة الحد  $\eta^2$  هي ذاتها

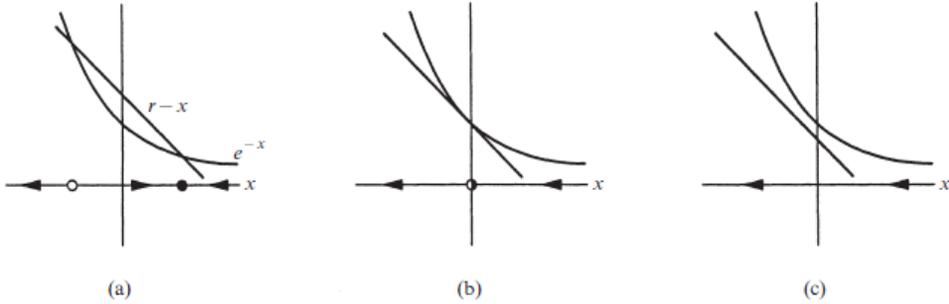
$$\text{إشارة } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} .$$



$$f(x) = r - x - e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -1 + e^{-x}$$

$$f'(x) = -1 + e^{-x} > 0 \Rightarrow x < 0$$

$$f'(x) = -1 + e^{-x} < 0 \Rightarrow x > 0$$



الشكل (4): النقاط الثابتة عند تغير قيم الوسيط  $r$

ولإيجاد نقطة التشعب  $r_c$ ، نستخدم شرط التماس  $\frac{d}{dx} e^{-x} = \frac{d}{dx} (r - x)$  الذي تنتج عنه

القيمة  $r_c = 1$  الموافقة لنقطة التشعب  $x = 0$ . بما أن جميع التشعبات المماسية لها الشكل

النظامي  $x^{\square} = r \pm x^2$ ، يمكن الوصول لأحد هذه الصيغ باستخدام نشر تايلور للدالة

$e^{-x}$  في جوار النقطة  $x = 0$  كما يلي:

$$x^{\square} = r - x - e^{-x} = r - x - [1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots] = (r - 1) - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

هذه الصياغة تشبه الصيغة الجبرية للمعادلة  $x^{\square} = r - x^2$ .

## 2- التشعب الحرج (Transcritical bifurcation) :

باعتبار المنظومة  $\frac{dx}{dt} = f(x, c) = x g(x, c)$ ، والتي تستخدم عادةً لتمثيل النمو

السكاني، نلاحظ أن النقطة  $x = 0$  هي نقطة توازن دائمة للمنظومة. ولدراسة هذه

المنظومة في جوار  $x = 0$ ، نلاحظ أن

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,c) = \frac{\partial(xg)}{\partial x} = x \frac{\partial(g)}{\partial x}(0,c) + g(0,c) = g(0,c)$$

فإذا كانت  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,c) = g(0,c) \neq 0$ ، كانت النقطة  $x=0$  زائدية ولا نتوقع هنا وجود تشعب في جوارها. أما إذا كان  $g(0,c^*) = 0$  من أجل قيمة ما للوسيط  $c^*$ ، فإننا نتوقع حدوث التشعب.

**مبرهنة :**

إذا كانت  $x = 0$  نقطة توازن غير زائدية للمنظومة  $\frac{dx}{dt} = f(x,c) = xg(x,c)$  عند قيمة الوسيط  $c = 0$  فيها  $g(0,0) = 0$  و  $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \neq 0$ ،  $\frac{\partial g}{\partial c}(0,0) \neq 0$  فإن المنظومة المعطاة في جوار نقطة التوازن  $x = 0$ ، تكافئ طبولوجياً أحد الأشكال النظامية التالية

$$\frac{d\eta}{dt} = \pm\mu\eta \pm \eta^2$$

ويحدث تشعباً للمنظومة يسمى التشعب الحرج عند القيمة  $c = 0$ ، حيث  $\mu$  وسيط جديد مناسب للمنظومة [Panfilov 2005].

**ملاحظة:** إشارة الحد  $\mu$  في الشكل النظامي هي ذاتها إشارة المقدار  $\frac{\partial g}{\partial c}$  وإشارة الحد

$$\eta^2 \text{ ذاتها إشارة } \frac{\partial g}{\partial x}.$$

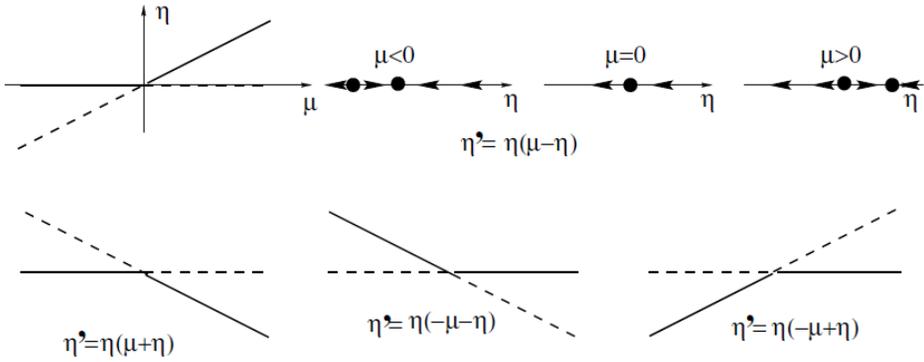
$$\text{لندرس التشعب الحاصل في الشكل النظامي } \frac{d\eta}{dt} = \mu\eta - \eta^2.$$

تمتلك هذه المنظومة نقاط التوازن  $\eta = \mu$ ،  $\eta = 0 \Rightarrow \mu\eta - \eta^2 = 0$ . ويعطى معامل

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(0) = \mu \text{ نجد } \eta = 0 \text{ من أجل نقطة التوازن } \frac{\partial f}{\partial \eta} = \mu - 2\eta \text{ خلال}$$

فهي مستقرة لأجل  $\mu < 0$  و غير مستقرة لأجل  $\mu > 0$  . ومن أجل نقطة التوازن  
فهي مستقرة لأجل  $\mu > 0$  و غير مستقرة لأجل  $\mu < 0$  . نجد  $\eta = \mu$   $\frac{\partial f}{\partial \eta}(0) = -\mu$

يوضح الشكل (5) مخطط التشعب الحرج.



الشكل 5: مخطط التشعب الحرج

مثال: تخضع المنظومة  $x^{\square} = x(1-x^2) - a(1-e^{-bx})$  للتشعب الحرج عند نقطة التوازن  $x = 0$  من أجل جميع قيم الوسطين  $a, b$  . تعرف هذه المعادلة منحني التشعب في فضاء الوسطاء  $(a, b)$  . لإيجاد صيغة تقريبية للنقطة الثابتة التي تتشعب من النقطة  $x = 0$  ، نستخدم نشر ماكلوران بالشكل التالي

$$1 - e^{-bx} = 1 - [1 - bx + \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3)] = bx - \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3) \Rightarrow$$

$$x^{\square} = x - a(bx - \frac{1}{2}b^2x^2) + O(x^3) = (1-ab)x + (\frac{1}{2}ab^2)x^2 + O(x^3)$$

يحدث تشعب الحرج عندما  $ab = 1$ ، وهي معادلة منحنى التشعب. تملك النقطة الثابتة غير الصفرية الصيغة  $x^* \approx \frac{2(ab-1)}{ab^2}$  والتي تنتج من خلال حل المعادلة

$$.1-ab + \left(\frac{1}{2}ab^2\right)x \approx 0$$

هذه الصيغة صحيحة تقريباً فقط إذا كانت  $x^*$  صغيرة، وعندما تكون  $ab$  قريبة من 1، وهذا ما نقصده بقولنا أن الوسطاء يجب أن تكون قريبة من نقطة التشعب.

### 3- تشعب المذراة (Pitchfork):

مبرهنة: إذا كانت  $x = 0$  نقطة توازن غير زائدية للمنظومة  $\frac{dx}{dt} = f(x, c)$  عند قيمة

الوسيط  $c = 0$  حيث  $f(x, c)$  تابع فردي، وتحقق  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$  وكان

عندئذ تكون المنظومة في جوار  $(0, 0)$  مكافئة  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) \neq 0$ ،  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$

طوبولوجياً لواحدة من الأشكال النظامية التالية:

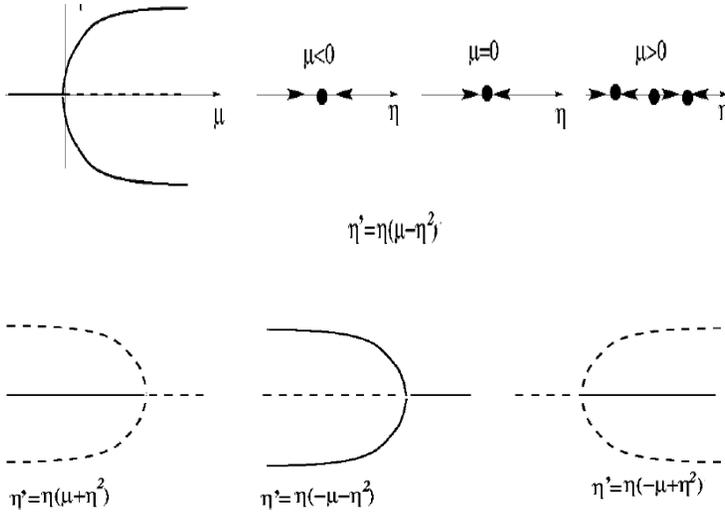
$$\frac{d\eta}{dt} = \eta(\pm\mu \pm \eta^2)$$

وعند  $x = 0, c = 0$  يقع تشعب المذراة، الشكل (6)، [Panfilov 2005].

### ملاحظات:

1- إشارة الحد  $\mu$  في الشكل النظامي هي نفس إشارة  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}$ ، كما أن إشارة الحد  $\eta^2$

هي نفسها إشارة  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ .



الشكل (6): مخطط التشعب لتشعب المذرة.

2- يحدد استقرار نقطة التوازن عند نقطة التشعب استقرار الحلول المولدة الجديدة، فإذا كانت نقطة التوازن عند  $\mu = 0$  مستقرة فإن نقطتي التوازن الجديدتين مستقرتين أيضاً.

3- يدعى تشعب المذرة حرج بشدة (supercritical) إذا كانت نقطتي التوازن الجديدتين مستقرتان، ويدعى حرج جزئياً (subcritical) إذا كانت نقطتي التوازن الجديدتين غير مستقرتين.

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu\eta - \eta^3$$

بوضع  $\mu\eta - \eta^3 = 0$  نجد نقاط التوازن التالية  $\eta = 0$  ,  $\eta = \pm\sqrt{\mu}$  إذا كان  $\mu > 0$

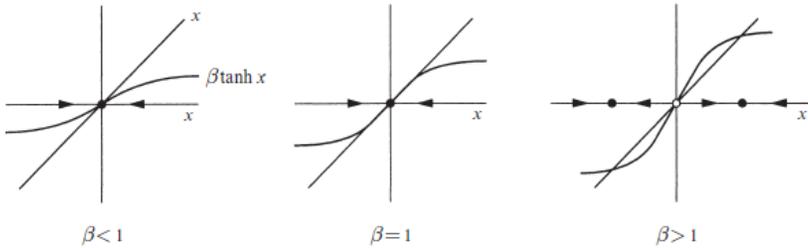
$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \mu - 3\eta^2$$

من أجل نقطة التوازن  $\eta = 0$  نجد  $\frac{\partial f}{\partial \eta}(0) = \mu$  فهي مستقرة من أجل  $\mu < 0$  و غير مستقرة من أجل  $\mu > 0$ . ومن أجل نقطتي التوازن  $\eta = \pm\sqrt{\mu}$ ، نجد أن  $\frac{\partial f}{\partial \eta}(\pm\sqrt{\mu}) = -2\mu < 0$  مما يعني أن نقطتي التوازن مستقرتان عندما  $\mu > 0$ . وفي

حال كانت  $\mu = 0$ ، نجد أن نقطة التوازن مستقرة.

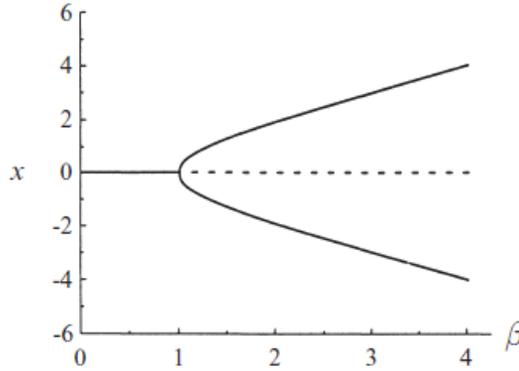
**ملاحظة:** نحدد استقرار نقطة التوازن عندما  $\mu = 0$  من خلال إشارة الحد  $\pm\eta^3$  والتي تحدد من إشارة  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ . فإذا كانت الإشارة سالبة، كانت نقطة الأصل مستقرة، أما إذا كانت الإشارة موجبة كانت نقطة الأصل غير مستقرة.

**مثال:** لندرس المنظومة الديناميكية  $x^{\square} = -x + \beta \tanh x$  والتي تظهر في النماذج الميكانيكية الإحصائية للمغناطيس والشبكات العصبية (Palmer 1989). تخضع هذه المعادلة لتشعب المذرة الحرج بشدة عند تغير الوسيط  $\beta$ . تنتج النقاط الثابتة من تقاطع الخطين البيانيين للتابعين  $y = -x$ ،  $y = \beta \tanh x$  في الشكل (7)، ومع زيادة قيمة الوسيط  $\beta$ ، يصبح منحنى الدالة  $y = \beta \tanh x$  أكثر حدة عند نقطة الأصل (ميله يكون  $\beta$ )،



الشكل (7): آلية نشوء النقاط الثابتة

وتكون نقطة الأصل هي النقطة الثابتة الوحيدة. يقع تشعب المذراة عند  $\beta=1, x^*=0$ ، عندها يكون ميل المنحنى  $y = \beta \tanh x$  مقداره 1 عند نقطة الأصل. ومع تزايد قيمة الوسيط تظهر نقطتان ثابتتان مستقرتان جديدتان عندما  $\beta > 1$ ، وتصبح نقطة الأصل غير مستقر الشكل (7). نلاحظ أن  $x^*=0$  نقطة ثابتة دائمة للمنظومة، وللبحث عن النقاط الثابتة الأخرى نقوم بحل المعادلة  $x^* = \beta \tanh x^*$  بأي طريقة عددية. نكتب المعادلة بالشكل  $\beta = x^* / \tanh x^*$  لتسهيل عمليات الحساب، حيث يبين الشكل (8) مخطط تشعب المنظومة.



الشكل 8: مخطط تشعب المنظومة

التشعبات في المنظومات الديناميكية المتقطعة (التساوير) أحادية البعد:

لتكن  $x^*$  نقطة ثابتة للتصوير  $x \in \mathbb{R}^n; x \rightarrow f(x)$ . بفرض أن هذا التصوير أملس ومعكوسه  $f^{-1}$  أملس أيضاً وكلاهما من الصف  $C^r$  حيث  $r \geq 1$ ، وبفرض أن المصفوفة اليعقوبية لهذه المنظومة  $A = \frac{df}{dx}$  عند  $x^*$  تملك المصفوفة اليعقوبية القيم

الذاتية  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . حيث لا يوجد قيم ذاتية صفرية لان التصوير  $f$  عكوس.

**تعريف:** نقول أن  $x^*$  نقطة ثابتة زائدية للمنظومة  $x \in \mathbb{R}^n$ ;  $x \rightarrow f(x)$  إذا كان جميع القيم الذاتية للمصفوفة اليعقوبية  $A$  لا تقع على دائرة الوحدة أي  $n_0 = 0$ .

كما في حالة المنظومات المستمرة يمكن بحالة المنظومة المتقطعة تعريف المجموعتان الصامدتان لنقطة الثابتة  $x^*$  المستقرة  $W^s(x^*) = \{x : f^k(x) \rightarrow x^*; k \rightarrow +\infty\}$  وغير المستقرة  $W^u(x^*) = \{x : f^k(x) \rightarrow x^*; k \rightarrow -\infty\}$ .

**مبرهنة التابع الضمني:** إذا كان للتصوير  $x_{t+1} = f(x_t, c)$  نقطة ثابتة زائدية  $x^*$  لأجل قيمة الوسيط  $c^*$ . عندئذ يوجد جوار للقيمة  $c^*$  يكون فيه للمنظومة نقطة ثابتة زائدية أخرى لها نفس نوع الاستقرار  $x^*$ .

**مبرهنة:** لتكن  $x^*$  نقطة ثابتة زائدية للتصوير  $x_{t+1} = f(x_t)$ ، عندئذ يوجد جوار للنقطة الثابتة يكون فيه التصويران الخطي وغير الخطي متكافئان طبولوجياً.

دراسة التشعبات في التصاوير أحادية البعد مع وجود وسيط:

### 1- تشعب الطي :

مبرهنة التشعب المماسي (Tangent) أو الطي (Fold) أو العقدة السرجية (Saddle- node) للتصاوير:

إذا كان للمنظومة  $x_{t+1} = f(x_t, c)$  نقطة ثابتة  $x^* = 0$  غير زائدية  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$  في جوار  $c^* = 0$  وتحقق الشروط  $\frac{\partial f}{\partial c}(0,0) \neq 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$  عندئذ بجوار  $(0,0)$  يقع التشعب المماسي وتكون المنظومة مكافئة طبولوجياً لواحدة من الأشكال النظامية التالية:

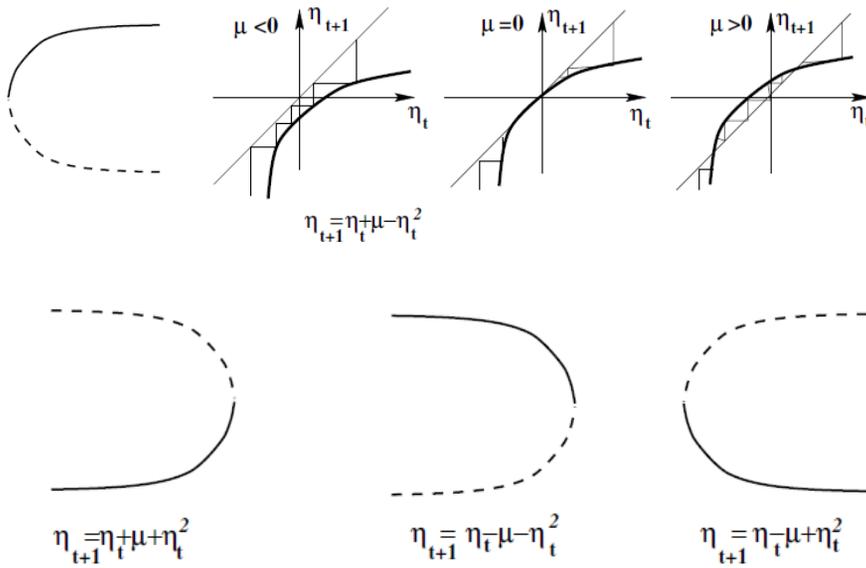
$$\eta_{t+1} = \eta_t \pm \mu \pm \eta_t^2$$

الشكل (9)، [Panfilov 2005].

ملاحظة: إشارة الحد  $\mu$  هي نفسها إشارة الحد  $\frac{\partial f}{\partial c}$ ، كما أن إشارة الحد  $\eta^2$  هي نفسها

$$\text{إشارة الحد } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

دراسة هذه الحالة مشابهة لدراسة الحالة المستمرة حيث نحتاج لنشر تايلور للطرف اليميني من التصوير وتبسيط العلاقات حتى نحصل على الأشكال النظامية. لندرس أحد



الشكل (9): مخطط تشعب الطي.

الأشكال النظامية:

$$\eta_{t+1} = \eta_t + \mu - \eta_t^2$$

النقاط الثابتة للمنظومة  $\eta = \eta + \mu - \eta^2$  موجودة بحال  $\mu > 0$  وهي  $\eta = \pm\sqrt{\mu}$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1 - 2\eta \quad \text{يعطى معامل الاستقرار بالعلاقة}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(\sqrt{\mu}) = 1 - 2\sqrt{\mu} < 1 \quad \text{النقطة الثابتة } \eta = \sqrt{\mu} \text{ مستقرة لأن}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(-\sqrt{\mu}) = 1 + 2\sqrt{\mu} > 1 \quad \text{أما النقطة الثابتة } \eta = -\sqrt{\mu} \text{ غير مستقرة لأن}$$

## 2- التشعب الحرج ( transcritical ):

مبرهنة: إذا كان للمنظومة  $x_{t+1} = f(x_t, c) = x_t + g(x_t, c)$  نقطة ثابتة غير زائدية

$$x^* = 0 \text{ بجوار } c^* = 0 \text{ وتحقق أن: } \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \neq 0, \frac{\partial g}{\partial c}(0,0) \neq 0, \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 1,$$

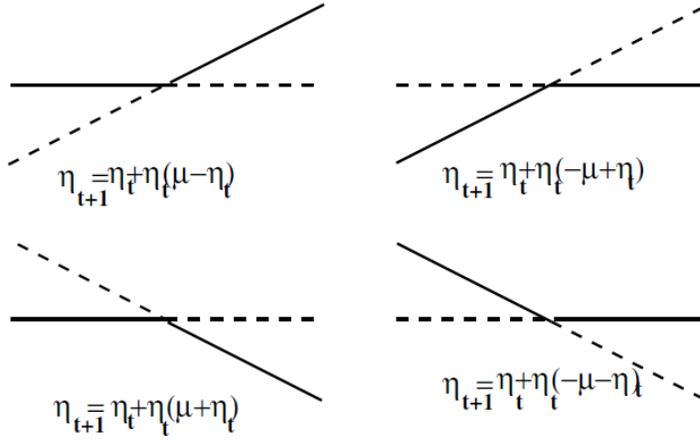
عندئذ يقع التشعب الحرج في جوار  $(0,0)$  وتكون المنظومة مكافئة طبولوجياً لإحدى الأشكال النظامية التالية :

$$\eta_{t+1} = \eta_t \pm \mu \eta_t \pm \eta_t^2$$

الشكل (10)، [Panfilov 2005].

ملاحظة: إن إشارة الحد  $\mu$  هي نفسها إشارة الحد  $\frac{\partial g}{\partial c}$  ، كما أن إشارة الحد  $\eta^2$  هي نفسها

$$\text{إشارة الحد } \frac{\partial g}{\partial x}.$$



الشكل (10): مخطط تشعب التغيير الحرج.

لندرس أحد الأشكال النظامية:  $\eta_{t+1} = \eta_t + \eta_t(\mu - \eta_t)$

تعطى النقاط الثابتة لهذا التصوير بالعلاقة  $\eta + \eta(\mu - \eta) = \eta$

نلاحظ أن لهذا التصوير نقطتين ثابتتين هما  $\eta = 0$  ,  $\eta = \mu$

ويعطى معامل الاستقرار بالعلاقة  $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 1 + \mu - 2\eta$

النقطة الثابتة  $\eta = 0$  مستقرة إذا كانت  $\mu < 0$  وغير مستقرة إذا  $\mu > 0$  حيث

أما النقطة الثابتة  $\eta = \mu$  مستقرة إذا كانت  $\mu > 0$  وغير مستقرة  $\frac{\partial f}{\partial \eta}(0) = 1 + \mu$

لأن  $\mu < 0$  إذا  $\frac{\partial f}{\partial \eta}(\mu) = 1 - \mu$

### 3- تشعب المذرة للتصاوير (pitchfork):

مبرهنة : بفرض  $x^* = 0$  نقطة ثابتة غير زائدية للتصوير  $x_{t+1} = f(x_t, c)$  بجوار

$c^* = 0$ ، ويفرض أن هذا التصوير فردي  $f(-x, c) = -f(x, c)$  ويحقق

عندئذ بجوار  $(0, 0)$  تكون  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ ،  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) \neq 0$ ،  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$

المنظومة مكافئة طبولوجياً لواحدة من الأشكال النظامية التالية :

$$\eta_{t+1} = \eta_t + \eta_t(\pm\mu \pm \eta_t^2)$$

وعندها يقع تشعب المذرة، الشكل (11)، [Panfilov 2005].

#### ملاحظات:

1- إن إشارة الحد  $\mu$  هي نفسها إشارة  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}$ ، وإشارة الحد  $\eta^2$  هي إشارة  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ .

2- يحدد استقرار النقطة الثابتة عند نقطة التشعب استقرار الحلول المولدة الجديدة.

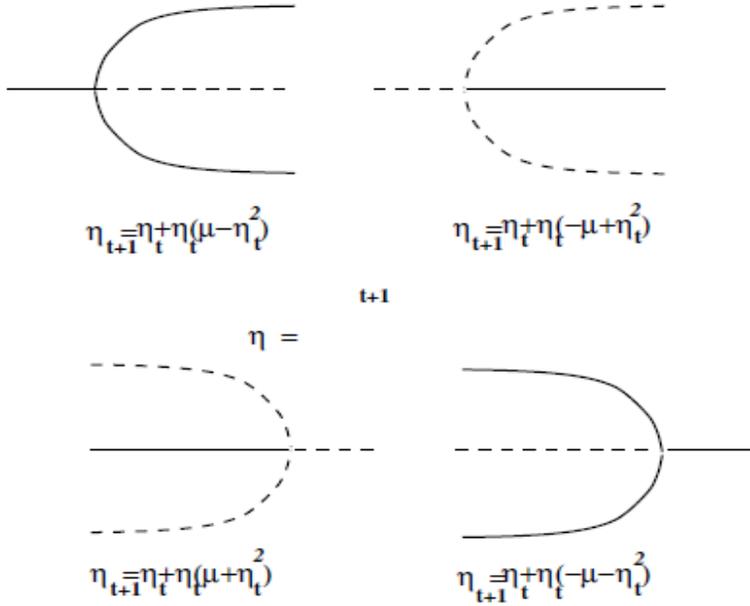
3- في حالة وجود نقاط ثابتة مستقرة ندعو هذه الحالة تشعب المذرة الحرج بشدة

(supercritical) وحالة نقاط ثابتة غير مستقرة ندعوها تشعب المذرة الحرج جزئياً

(sub-critical).

لندرس أحد هذه الأشكال النظامية:

$$\eta_{t+1} = \eta_t + \mu\eta_t - \eta_t^3$$



الشكل (11): مخطط تشعب المذرة.

النقاط الثابتة  $\eta + \mu\eta - \eta^3 = \eta$  هي ثلاث نقاط ثابتة  $\eta = \pm\sqrt{\mu}$  ,  $\eta = 0$  بحال

$$\mu > 0, \text{ يعطى معامل الاستقرار بالعلاقة } \frac{\partial f}{\partial \eta} = 1 + \mu - 3\eta^2$$

النقطة الثابتة  $\eta = 0$  مستقرة إذا كانت  $\mu < 0$  وغير مستقرة إذا  $\mu > 0$  حيث

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(0) = 1 + \mu \text{ أما النقطتين } \eta = \pm\sqrt{\mu} \text{ مستقرة لأن}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(\mu) = 1 - 2\mu, \quad \mu > 0$$

عندما  $\mu = 0$  لدينا نقطة ثابتة وحيدة هي  $\eta = 0$  مستقرة. بشكل عام يحدد استقرار

النقطة الثابتة  $\eta = 0$  من خلال إشارة الحد  $\pm\eta^3$ . فإذا كانت الإشارة سالبة تكون النقطة

الثابتة  $\eta = 0$  مستقرة، وإذا كانت موجبة تكون غير مستقرة. كما أن إشارة  $\pm \eta^3$  تحدد

من خلال إشارة  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ .

## التصوير اللوجستي

في مقالة رائعة ومؤثرة، أكد روبرت ماي (1976) على أن التصاوير غير الخطية البسيطة يمكن أن تحتوي على ديناميكيات معقدة للغاية. سنقوم في هذه الفقرة بدراسة التصوير اللوجستي

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad (4)$$

لقد أشار ماي (1976) إلى أنه يمكن اعتبار هذا التصوير كنموذج بسيط مثالي للتكاثر السنوي في تعداد صنف ما من الحشرات بافتراض شروط سنوية ثابتة فإن التعداد في السنة  $n$  يحدد و بشكل وحيد التعداد في السنة التالية  $n + 1$ . سنهتم بدراسة كيفية تغير خواص مدارات التصوير التي تبدأ من شروط ابتدائية نموذجية مع تغير قيمة الوسيط  $r$ . إن القيمة العظمى لهذه الدالة هي  $r/4$ . وبالتالي طالما أن  $0 \leq r \leq 4$  و أن  $x_n \in [0,1]$  فإن  $x_{n+1} \in [0,1]$  ويبقى المدار داخل المجال  $[0,1]$ .

## تحليل التصوير اللوجستي:

يمتلك التصوير اللوجستي

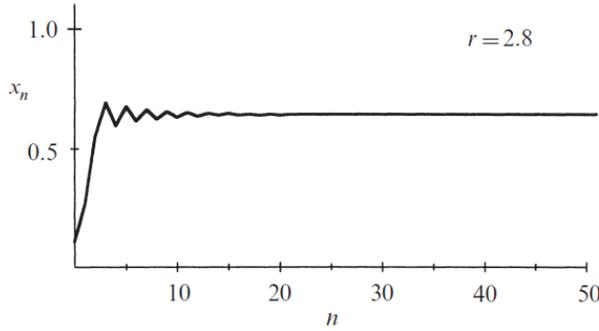
$$M(x) = r x (1 - x)$$

نقطتان ثابتتان وهما  $\{0, 1 - 1/r\}$ . الأولى نقطة الأصل هي نقطة ثابتة لكل قيم  $r$ . النقطة  $1 - 1/r$  موجودة لأجل  $r \geq 1$ . يعطى معامل الاستقرار من خلال الدالة

$M'(0) = r$  مستقرة لأجل  $r < 1$  وغير  
مستقرة لأجل  $r > 1$ . أما النقطة الثانية  $M'(x^*) = 2 - r$  وهي مستقرة لأجل  
 $1 < r < 3$  وغير مستقرة لأجل  $r > 3$ .

بتثبيت  $r$  واختيار شرط ابتدائي  $x_0$  وتوليد متتالية النقاط  $(n, x_n)$  نجد : من أجل

$0 \leq r < 1$  التعداد السكاني  $x_n \rightarrow 0$  عندما  $n \rightarrow \infty$ . يتزايد التعداد السكاني عندما  
 $1 < r < 3$  كما في الشكل (12).

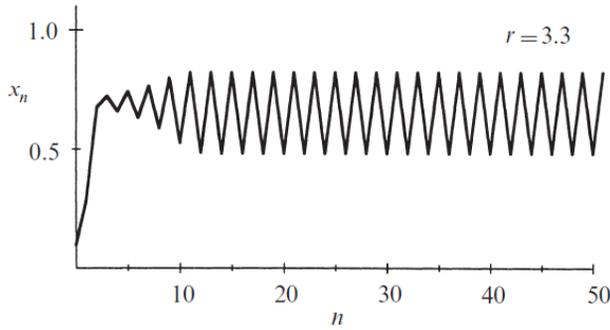


الشكل 12: يتزايد التعداد السكاني حتى يصل لقيمة غير معدومة ويثبت عندها لأجل كل قيم الوسيط

$$1 < r < 3$$

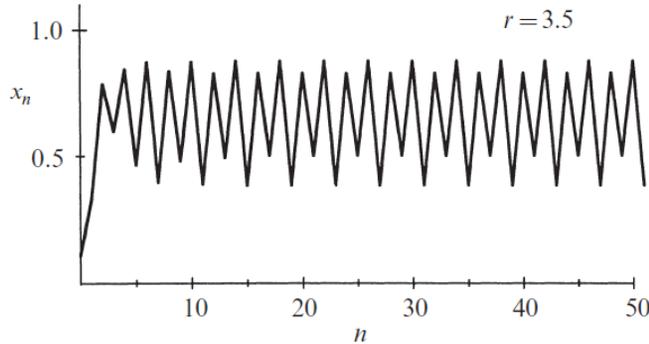
بحال  $r = 3.3$  يتزايد عدد السكان مرة أخرى ولكن يتأرجح الآن حول حالة الاستقرار السابقة ، بالتناوب بين عدد كبير من السكان في أحد الأجيال وعدد سكان أصغر في الجيل التالي (الشكل 13). في هذا النوع من التذبذب يتكرر  $x_n$  كل تكرارين، ويطلق

عليه مدار دوري ذي دور 2. [Strogatz 2015]



**الشكل 13:** تشكل مدار دوري لعدد السكان دوره 2 لأجل قيمة الوسيط  $r = 3.3$

بحال  $r = 3.5$ ، يقترب التعداد السكاني من دورة تتكرر كل أربعة أجيال حيث ضاعفت الدورة السابقة فترتها إلى دور 4، الشكل (14).



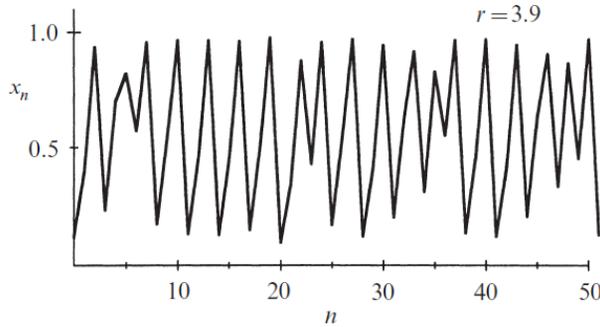
**الشكل 14:** تشكل مدار دوري لعدد السكان دوره 4 لأجل قيمة الوسيط  $r = 3.5$

ينتج بزيادة  $r$  المزيد من تضاعفات الدور للحلقات لتصبح بدور  $8, 16, 32, \dots$  ويمكن تصنيفها بالشكل التالي

$r_1 = 3$	period	2
$r_2 = 3.449\dots$		4
$r_3 = 3.54409\dots$		8
$r_4 = 3.5644\dots$		16
$r_5 = 3.568759\dots$		32
$\vdots$		
$r_\infty = 3.569946\dots$		$\infty$

نلاحظ أن التشعبات المتتالية تأتي أسرع وأسرع. في النهاية تنتهي قيم الوسيط إلى  $r_\infty$ . التقارب هندسي في الأساس، وتنقلص المسافة بين التحولات المتتالية بعامل ثابت .

كتب (Gleick 1987,p.69) على سبورة أحد الممرات مسألة لطلاب الدراسات العليا وسأل ، "ماذا سيحدث عندما  $r > r_\infty$  ؟ تبين أن الإجابة معقدة: حيث إن المتتالية  $\{x_n\}$  لا تستقر أبداً في نقطة ثابتة أو مدار دوري بدلاً من ذلك نجد أن السلوك غير دوري، كما في الشكل(15).



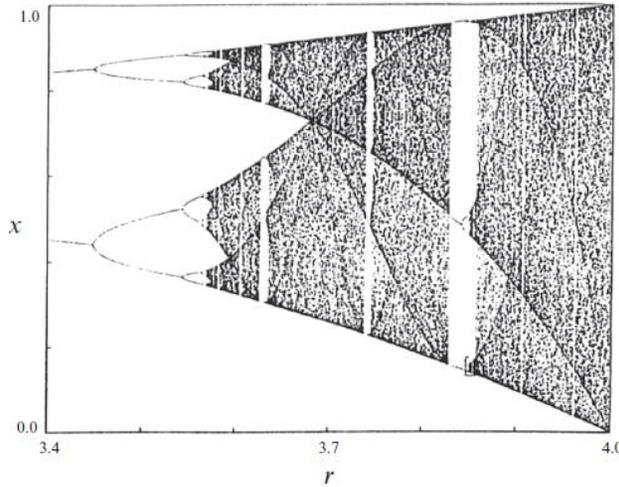
الشكل 15: السلوك غير الدوري للتعداد السكاني لأجل قيم الوسيط  $r > r_\infty$

لرؤية سلوك الزمن الطويل لجميع قيم  $r$  مرة واحدة، نرسم مخطط المدار، هذه الصورة الرائعة التي أصبحت رمزاً لديناميكيات غير الخطية (الشكل 16). التي تظهر جاذب

المنظومة (نقاط التوازن) كتابع للوسيط  $r$ . يوضح الشكل (16) أنه عند  $r = 3.4$  يكون الجاذب عبارة عن مدار دوري دوره 2، كما يتضح من الفرعين. ومع زيادة  $r$ ، ينقسم كلا الفرعين في وقت واحد، مما ينتج عنه مدار دوري دوره 4. هذا الانقسام هو فترة مضاعفة التشعب المذكورة سابقا. ويحدث مزيد من المضاعفات مع زيادة  $r$ ، حلقات بدور  $8, 16, \dots$ ، حتى نصل  $r = r_{\infty} = 3.569946\dots$ ، يصبح التصوير فوضوي ويتغير الجاذب من مجموعة منتهية النقاط لمجموعة غير منتهية. ومن أجل  $r > r_{\infty}$ ، يكشف مخطط المدار عن مزيج غير متوقع من النظام والفوضى.

و نطرح هنا التساؤل التالي "كيف" نشأ العدد اللانهائي من المدارات الدورية عند  $r = 4$  التي رافقت نشوء الجاذب الفوضوي و ذلك بازدياد قيمة الوسيط من  $r = 3$  إلى  $r = 4$ ؟ الذي سنجيب عنه بشيء من التفصيل.

لنأخذ التصوير المضاعف  $M^2$  المبين في الشكل (20). إن النقطة الثابتة  $x^* = 1 - 1/r$  هي أيضاً

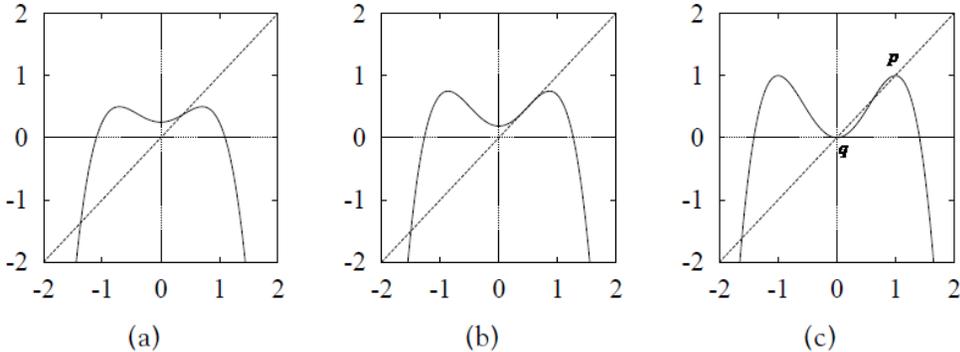


**الشكل 16:** انقسام جاذب المنظومة للوصول إلى الفوضى لأجل  $3.4 \leq r \leq 4$

نقطة ثابتة للتصوير  $M^2$  أي  $M^2(1-1/r) = 1-1/r$  أما ميل  $M^2$  عند  $x^* = 1-1/r$  فهو  $[M^2]'(x^*) = (2-r)^2$ . عندما تزداد قيمة الوسيط لتصبح  $r = 3$ ، تصبح النقطة  $x^*$  غير مستقر حيث أن  $M'(1-1/r) = -1$ ، و بنفس الآن تتزايد قيمة ميل  $M^2(x)$  عند النقطة  $x^* = 1-1/r$  من قيم أقل من الواحد كما في الشكل (17-a) إلى قيم أكبر كما في الشكل (17-c)، و يؤدي ذلك إلى نشوء نقطتين ثابتتين جديدتين  $p, q = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$  للتصوير  $M^2$  ليستا نقطتين ثابتتين للتصوير  $M$  و تقعان على مدار دوري ثنائي الدور وموجودتان عندما  $r \geq 3$  وتحققان  $M(p) = q, M(q) = p$ ، أي أنه و بالضبط عندما تصبح  $x^* = 1-1/r$  غير مستقر ينشأ مدار دوري ثنائي الدور وهو ما ندعوه تشعب تضاعف الدور.

ويظهر أن المدار ثنائي الدور مستقر لأجل قيم الوسيط  $3 < r < 1 + \sqrt{6} = 3.449\dots$  لأن:

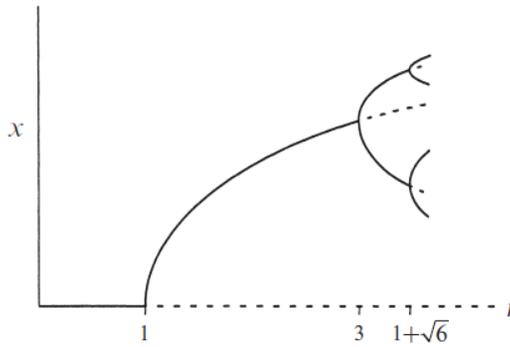
$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{d}{dx} (M(M(x)))|_{x=p} = M'(M(p)) \cdot M'(p) = M'(p) \cdot M'(q) \\ &= r(1-2q)r(1-2p) \\ &= 4 + 2r - r^2 \end{aligned}$$



الشكل 17: آلية نشوء مدار دوري ثنائي الدور

وضمن المجال  $3 < r < 1 + \sqrt{6} = 3.449\dots$  يكون  $|4 + 2r - r^2| < 1$ .

يوضح الشكل (18) مخطط تشعب جزئي للتصوير اللوجستي. يخضع التصوير اللوجستي للتشعب الحرج عندما  $r = 1$  وتشعب تضاعف الدور عندما  $r = 3$ ، وتختلف مخططات التشعب عن مخطط المدار، حيث يعرض مخطط التشعب المدارات غير المستقرة والمستقرة، بينما في مخطط المدار تظهر المدارات الجاذبة فقط.



الشكل 18: مخطط تشعب جزئي للخريطة اللوجستية

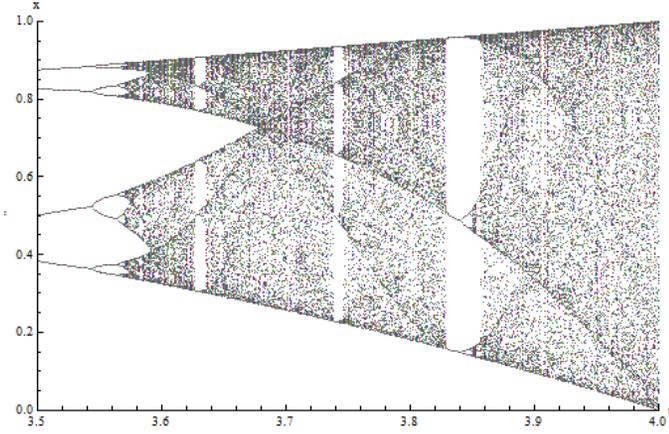
وجدنا أن معامل استقرار النقطة الثابتة  $x^* = 1 - 1/r$  هو  $\lambda_1 = M'(x^*) = 2 - r$ ، وأن  $\lambda_1 = 1$  من أجل  $r = 1$ ، وتتناقص قيمة معامل الاستقرار لتصبح  $\lambda_1 = -1$  مع تزايد قيمة الوسيط حتى تصبح  $r = 3$  وهي قيمة الوسيط التي يحدث عندها تشعب تضاعف الدور الأول، أي أن النقطة الثابتة  $x^* = 1 - 1/r$  (المدار الدوري أحادي الدور) مستقرة ضمن المجال  $1 < r < 3$ . أما معامل استقرار المدار ثنائي الدور المذكور سابقا فهو  $\lambda_2 = M'(p)M'(q) = (M^2)'(p) = (M^2)'(q)$  و  $\lambda_2 = 1$  من أجل قيمة

الوسيط  $r=3$ ، و بتزايد قيمة الوسيط بعد 3 تتناقص قيمة معامل الاستقرار  $\lambda_2$  حتى يصبح  $\lambda_2 = -1$  من أجل قيمة الوسيط  $r=3.449\dots$  ويصبح المدار ثنائي الدور غير مستقر ( $|\lambda_2| > 1$ ) ومستقر ضمن المجال  $3 < r < 3.449\dots$  و مع تزايد قيمة الوسيط بعد  $r=3.449\dots$  التي يحصل عندها تشعب تضاعف الدور الثاني يظهر مدار دوري رباعي الدور (دوره  $2^2$ ) مستقر ويتناقص معامل استقراره  $\lambda_3$  مع تزايد قيمة الوسيط حتى يصبح  $\lambda_3 = -1$  ليصبح هذا المدار غير مستقر من أجل قيمة للوسيط  $r=3.54409\dots$  والتي يحصل عندها تشعب تضاعف الدور الثالث ليظهر مدار دوري ثماني الدور (دوره  $2^3$ ) مستقر و هكذا... . نحصل أخيراً على عدد لانتهائي من تشعبات تضاعف الدور المتتابعة ضمن المجالات  $r_{m-1} < r < r_m$  التي يظهر فيها مدار دوري مستقر دوره  $2^m$ .

ماذا يحدث بعد قيمة الوسيط  $r_\infty$  (أي ضمن المجال  $r_\infty \leq r \leq 4$ ) ؟

يبين الشكل (19) مخطط تشعب التصوير اللوجيستي من أجل  $3.5 \leq r \leq 4$ ، يملأ المدار الجاذب كامل المجال  $[0,1]$ . و من أجل قيم أصغر من  $r=4$  بقليل، فإن الجاذب هو عبارة عن مجال وحيد محتوى في المجال  $[0,1]$  كما هو مبين في الشكل (19) و يظهر من الشكل أن هذه المدارات فوضوية و بتناقص قيمة الوسيط خلال القيمة  $r'_0$  ينشطر الجاذب إلى قسمين وقد تبين أن المدار على هذا الجاذب يتناوب بين شطري الجاذب ( أي أنه بتطبيق التصوير مرتين متتاليتين يبقى المدار على أحد شطري الجاذب و يكون سلوكه فوضوياً بحيث يقترب كيفياً من كل نقطة في هذا الشطر). و باستمرار تناقص قيمة الوسيط ينقسم كل شطر من الجاذب إلى شطرين جديدين ونحصل

على جاذب مؤلف من أربعة أجزاء عند قيمة الوسيط  $r_1'$  و باستمرار تناقص قيمة الوسيط ينشط من جديد كل شطر من الجاذب السابق إلى شطرين جديدين لنحصل على جاذب مؤلف من



الشكل (19): مخطط تشعب التصوير اللوجستي

ثمانية أجزاء عند قيمة الوسيط  $r_2'$  وهكذا تتراكم عملية الانشطار المضاعف عند قيمة الوسيط  $r_\infty$  من الأعلى بنفس المقياس الهندسي لتتراكم تشعبات تضاعف الدور عند  $r_\infty$  من الأدنى.

## النتائج :

1. قمنا في هذا البحث بتصنيف نقاط التوازن للمنظومات الديناميكية طبولوجياً.
2. المقارنة بين المنظومات الديناميكية الخطية وغير الخطية بجوار نقطة التوازن.
3. دراسة التشعبات الحاصلة في المنظومات الديناميكية المستمرة والمنقطعة عند تغيير قيم الوسيط .
4. إيجاد الأشكال النظامية للمنظومات الديناميكية بجوار نقاط التوازن.
5. دراسة مفصلة للتشعب اللوجستي و إيضاح تشعب تضاعف الدور وسبب تشكل عدد غير منتهي من المدارات الدورية وطريقة انتقال المسارات من الحالة الدورية إلى الحالة الفوضوية عند تغيير قيم الوسيط.

## التوصيات :

يظهر الشكل (19) ظاهرة غريبة وهي انكسار الجاذب الفوضوي لأجل قيم الوسيط  $2.7 < r < 3.6$ ، ونرجو دراسة هذه الظاهرة بشكل مفصل في الأبحاث القادمة.

المراجع:

- Wiggins. S, Marsden. J.E, Antman.S.S, & Sirovich. L, (2003) . **Introduction To Applied Nonlinear Dynamical Systems And Chaos** . Library of Congress Springer–Verlag, Second Edition . New York.
- Kuznetsov. Y. A, (1997) . **Elements of Applied Bifurcation Theory** . Library of Congress , Second Edition. Springer–Verlag, New York.
- Strogatz S. H, (2015) . **Nonlinear Dynamics And Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering** . Library of Congress, Westview Press , Second Edition. New York.
- Panfilov. A, & Mar´ee S. (2005). **Non–Linear Dynamical Systems.**
- **Theoretical Biology & Bioinformatics** . Utrecht University, Utrecht.
- Devaney, R.L, (1992), **A First Course in Chaotic Dynamical Systems**. Westview Press, Second Edition.
- Gleick. J, (1987). **Chaos: Making a New Science**. Viking Penguin Inc, New York.
- Pomeau, Yves; Manneville, Paul (1980). **Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems**. Commun. Math. Phys. 74 (2): 189–197.

# دراسة التباينات الطاقية للعزوم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخليبي للكمون الضوئي للنفاعل $(\alpha + Fe_{26}^{56})$ باستخدام طريقة (VMA)

\*أ. د أنيس بلال

\*\* أوس علي

\* أستاذ دكتور في كلية العلوم - قسم الفيزياء - جامعة البعث

\*\* طالب دراسات عليا (ماجستير) في قسم الفيزياء النظرية - جامعة البعث

## الملخص:

تمّ في هذا البحث دراسة السلوك الطاقى للعزوم من المرتبة الثانية  $[r^2]_w(E)$  بالنسبة للجزء التخليبي للكمون الضوئي لجسيمات  $(\alpha)$  المقذوفة بطاقة  $E_\alpha = (1 - 50)MeV$  ولنواة الهدف  $(Fe_{26}^{56})$  باستخدام طريقة (VMA) ، هذه الطريقة تقوم على الإرتباط الداخلي بين الجزئين التخليبي والحقيقي للكمون الضوئي الذي بدوره سيقبل من عدد المتغيرات ( البارامترات ) الى بارامترين اثنين فقط وقد تبين من خلال هذه الدراسة والقيم العددية المحسوبة باستخدام البرنامج (الكود) (SPI) والكود (VMA) للمقادير، وهي العزم الكلي من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخليبي  $[r^2]_w(E_\alpha)$  والسطحي  $[r^2]_{w_a}(E_\alpha)$  والحجمي  $[r^2]_{w_w}(E_\alpha)$  :

1. بأنّ سلوكها الطاقى في المجال الطاقى المنخفض والمتوسط يظهر تبايناً مختلفاً

حيث أنّ السطحي يزداد مع ازدياد الطاقة حتى يصل إلى قيمة عظمى ثمّ يبدأ

بالانهيار، أمّا الحجمي فيزداد بزيادة ملحوظة مع تزايد الطاقة، ويُعزى ذلك لأنّ

دراسة التباينات الطاقية للعزوم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخلي للكمون الضوئي  
للتفاعل  $(\alpha + Fe_{26}^{56})$  باستخدام طريقة (VMA)

التأثيرات السطحية تكون أكبر من التأثيرات الحجمية من أجل قيم طاقية منخفضة أما من أجل قيم طاقية متوسطة وعالية فإن التأثيرات الحجمية تلعب دوراً أكبر من التأثيرات السطحية.

2. تمّ تحديد وسطاء الكمون الضوئي واستنباط شكل الكمون الضوئي للتفاعل  $(\alpha + Fe_{26}^{56})$ .

3. تمّ دراسة وتحديد قيم المقاطع التفاعل  $(\alpha + Fe_{26}^{56})$  ضمن المجال الطاقى المدروس ومقارنتها مع مثيلاتها التجريبية ووجدنا توافقاً جيداً فيما بينها.

4. تمّ إيجاد القيم العددية للكمون الضوئي واستنباط شكل الكمون وتمّ أيضاً التّوصل إلى علاقة رياضية بين الكمون والطاقة يمكن من خلالها تحديد قيمة الكمون من أجل كل خطوة طاقية وهذا يقدم إضافة جديدة في قاعدة البيانات المتعلقة بالكمونات الضوئية والعزوم ومقاطع التفاعل وخاصة في المناطق الطاقية التي تفتقد للقيم المرجعية وهذه العلاقة هي :

$$V = -0.1394 (E_{\alpha}) + 46.736$$

**كلمات مفتاحية:**

طريقة (VMA)، الكمون الضوئي، المقطع الكلي للتفاعل، تحليل النموذج الضوئي التبددي.

## Study of energy variations of the second-order moments with the imaginary part of the optical potential of the reaction $(\alpha + Fe_{26}^{56})$ using the (VMA) method

### Abstract:

In this research, the energy behavior of second-order moments  $[r^2]_w(E)$  was studied for the imaginary part of the optical potential of particles ( $\alpha$ ) projected with energy  $E_\alpha = (1 - 50)MeV$  and for the target nucleus using the VMA method

This method is based on the internal connection between the imaginary and real parts of the optical potential, which in turn will reduce the number of variables (parameters) to only two parameters. It has been shown through this study and the numerical values calculated using the program (code) (*SPI*) and code (*VMA*) for the quantities, which are the total torque of the second order for the imaginary part  $[r^2]_w(E_\alpha)$ , the surface  $[r^2]_{w_d}(E_\alpha)$ , and the volumetric part  $[r^2]_{w_w}(E_\alpha)$ :

1. Its energy behavior in the low and medium energy range shows a different variation, as the surface increases with increasing energy until it reaches a maximum value and then begins to collapse, while the bulk increases with a noticeable increase with increasing energy. This is due to the fact that surface effects are greater than volumetric effects for low energy values, while for medium and high energy values, volumetric effects play a greater role than surface effects.

2. The photopotential mediators were identified and the photopotential forms of the reaction were derived ( $\alpha + Fe_{26}^{56}$ ).
3. The values of the reaction sections ( $\alpha + Fe_{26}^{56}$ ) were studied and determined within the studied energy range and then compared with their experimental counterparts, and good agreement was found between them.
4. The numerical values of the optical potential were found and the shape of the potential was deduced. A mathematical relationship between potential and energy was also reached through which the value of the potential can be determined for each energy step. This provides a new addition to the database related to optical potentials, moments, and interaction sections, especially in energy regions that lack reference values. This relationship is:

$$V = -0.1394 (E_{\alpha}) + 46.736$$

**Keywords:**

VMA method, Optical potential, Total reaction cross section, DOMA

## مقدمة:

تنبثق دراسة الفيزياء النووية من محورين أساسيين وهما الأول: هو محاولة فهم خواص القوة التي تربط أجزاء النواة ببعضها البعض، أمّا المحور الثاني: محاولة فهم تصرف المنظومات متعددة الجسيمات كالنواة مثلاً، ان هذين المحورين مرتبطين ببعضهما البعض وذلك لأنّ دراسة تلك المنظومات لها علاقة بمعرفة طبيعة القوة التي تمسك الجسيمات (النيوكليونات) بداخل تلك المنظومات مع بعضها البعض، ولكن بعض خصائص تلك المجموعات (النيوكليونات) يمكن اشتقاقها بمجرد افتراض أنّ مكونات المجموعة تتجاذب مع بعضها البعض. تتم دراسة تلك المنظومات من قبل الباحثين والمهتمين في مجال حقل الفيزياء باستخدام بعض التقريبات التي تعينها إحدى الحقائق التجريبية المراد تأويلها. تدعى تلك الطرق التقريبية المختلفة والمستخدمه لوصف النواة بالنماذج ومن أبرز و أهم تلك النماذج النموذج الضوئي التقليدي، ينطلق هذا النموذج بتعيينه لقيم بارامترات الكمون الضوئي من مسألتين أساسيتين الأولى: التخمين والمقاربة، أما الثانية: المحاكاة مع القيم المرجعية. طبعاً هذه المنهجية ظلت سائدة منذ بداية نشوء وتكوّن النموذج الضوئي (1936) [20 - 15 - 10 - 8 - 9] ، وحتى منتصف ثمانينات القرن الماضي بعدئذ تمّ تحديث وتطوير للنموذج الضوئي التقليدي إلى نموذج آخر أكثر تطوراً دُعي بالنموذج الضوئي التبددي [7 - 6 - 5 - 4]. بُني هذا النموذج على علاقات رياضية وفيزيائية متقدمة ومتطورة ومتسلسلة ومن بينها العلاقة

دراسة التباينات الطاقية للعزوم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخلي للكمون الضوئي  
للتفاعل ( $\alpha + Fe_{26}^{56}$ ) باستخدام طريقة (VMA)

التبديدية (Dispersion-Relation) التي تقوم على الارتباط الداخلي لجزئي الكمون الضوئي (الحقيقي والتخيلي) وبالتالي فإن قيم بارامترات الكمون الضوئي تُحدد بدقة وبشكل منطقي وبعيداً عن التقدير والتخمين العشوائي، لأنَّ الطريقة المبتكرة الجديدة مبنية على أسس ومبادئ رياضية وفيزيائية متقدمة ومتطورة ومتسلسلة .

وللنموذج الضوئي التبديدي فرعين أساسيين الأول يدعى بتحليل النموذج الضوئي التبديدي Dispersion Optical Model Analysis اختصاراً (DOMA)، أما النوع الثاني فيدعى بالتقريب التغييري للعزوم (Variational Moment Approach) اختصاراً (VMA).

طبقت طريقة (VMA) لدراسة تبعثر النيوكليونات بواسطة النوى السحرية وغير السحرية في مجالات طاقية مختلفة  $(n + A)$ ,  $(P + A)$  [1 - 2 - 3 - 11 - 12]، ثمَّ مُدّدت وطوّرت لدراسة نبعث (نواة + نواة) مثلاً كتبعثر نواة الهيليوم (جسيمات ألفا) بواسطة نوى مختلفة  $(\alpha + A)$  .

في بحثنا هذا وجدنا من الأهمية بمكان محاولة استخدام طريقة (VMA) لدراسة التفاعل في المجال الطاقى  $(\alpha + {}_{26}^{56}Fe)$   $(1 \leq E_{\alpha} \leq 50) MeV$  لأنَّ  ${}_{26}^{56}Fe$  يحتوي على بروتونين أقل من القلب المغلق للنيكيل و أربع نيوترونات أعلى من هذا القلب المغلق من جهة، ومن جهة أخرى لمعرفة ماهي الخصائص الذي سيتم لحصول عليها نتيجة هذا التفاعل.

## الهدف:

معرفة التباينات الطاقية التي تظهرها العزوم التخيلية من المرتبة الثانية للكمون الضوئي  $[r^2]_{W_d}(E)$  و  $[r^2]_{W_w}(E)$  وللتفاعل  $(\alpha + {}^{56}_{26}Fe)$  وفي المجال الطاقى  $(1 \leq E_\alpha \leq 50) \text{ MeV}$  باستخدام طريقة (VMA).

- تحديد القيم العددية للعزوم التخيلية من المرتبة الثانية للكمون الضوئي تبعاً للطاقة  $[r^2]_{W_d}(E)$  و  $[r^2]_{W_w}(E)$  باستخدام الكودين (VMA + SPI) و (SPI)
- الاستنتاج الدقيق لوسطاء الكمون الضوئي للتفاعل (نواة + نواة)  $(\alpha + {}^{56}_{26}Fe)$  وفقاً لطريقة (VMA).

## طريقة (VMA) (التقريب التغياري للعزوم): [1 - 2 - 3 - 20 - 22]

تعتمد طريقة (VMA) (التقريب التغياري للعزوم) في حسابها للتكاملات الحجمية (الحقيقية والتخيلية) في استنباطها لشكل الكمون و لوسطائه الهندسية على التصور القائم الذي يعتبر بأنَّ الجزء المركزي للحقل الوسطي  $M(r, E)$  الناشئ عن التبادلية في التأثير للتفاعل (نواة + نواة) موضعياً (محلياً) و يوصف بالعلاقة التالية: [1]

$$M(r, E) = V(r, E) + iW(r, E) + V_{ls}(r, E) + V_c \quad (1)$$

وكما هو مبين و واضح من العلاقة (1) أنَّ الحقل الوسطي المتشكل ناجم عن اتحاد عدة مكونات أساسية وهي المكون الحقيقي  $V(r, E)$  ويتكون بدوره من مركبتين الأولى

دراسة التباينات الطاقية للعوام من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخلي للكمون الضوئي  
للتفاعل  $(\alpha + Fe^{56})$  باستخدام طريقة (VMA)

وهي دالة آسية بالنسبة للطاقة وتأخذ شكل انسيابي والمركبة الثانية تدعى

بالمكون التبددي  $\Delta V(r, E)$ .

وبما أنَّ النموذج الضوئي التقليدي يقدم من خلال التحليل الكيفي للمعطيات التجريبية المتعلقة بمقاطع التفاعل مجموعات متنوعة ومختلفة من البارامترات الهندسية التي توصف الكمون الضوئي وتعطي قيم مطابقة لمقاطع التفاعل، كان لأبَد من الانتقال بخطوة متقدمة من أجل تخطي الكيفية والعشوائية بتحديد وإيجاد بارامترات الكمون الضوئي وأولى هذه الخطوات كانت طريقة (VMA) المعروفة بطريقة التقريب التغيري للعوام، والتي من خلالها يُمكن التحديد الدقيق لبارامترات الكمون الضوئي وتخفيف دورها، وتعطي تفسيراً صحيحاً لسلوك الكمون بالنسبة للطاقة، والعوام (التكاملات الحجمية) تشمل:

1- العزم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء الحقيقي للكمون  $J_w(E)$

2- العزم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخلي للكمون  $J_w(E)$

3- العزم التبددي من المرتبة الثانية للكمون  $J_{\Delta V}(E)$

يحدد العزم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخلي للكمون بالعلاقة التالية: [2 - 1]

$$\begin{aligned} J_w(E) &= J_{nw}(E) + J_{wd}(E) \\ &= \frac{4\pi}{A_P A_T} \int_0^\infty [W_d(r_1 E) + W_w(r_1 E)] r^2 dr \quad (2) \end{aligned}$$

يمثل (  $J_{wd} , J_{ww}$  ) العزم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخيلي للكمون والسطحي على الترتيب.

يتم توصيف تلك العزوم الحسابية بعد تحديدها بعلاقة براون - راو التالية :

$$J_w(E) = P_2 \frac{(E - E_0)^2}{(E - E_0)^2 + \rho_2^2} \quad (3)$$

$$J_{ww}(E) = P_2 \frac{(E - E_0)^2}{(E - E_0)^2 + \rho_w^2} \quad (4)$$

علماً أن (  $p_w, r_2, \beta_2$  ) تُمثل وسطاء هندسية أُخذت بطريقة المطابقة بين القيم المرجعية للعزوم من المرتبة الثانية للجزء التخيلي للكمون والقيم الحسابية وفق علاقة (براون ، راو). [20 – 22]

وفقاً لطريقة (VMA) فإنَّ الكمون التبددي يعرّف أيضاً بمركبتين (سطحية وحجمية) ويُعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$\Delta V(r_1 E) = \Delta V_w(E) f(r_w) + \Delta V_d(E) g(r_d) \quad (5)$$

ويتحددان بدورها وفق العلاقتين التكامليتين التاليتين :

$$\Delta V_w(E) = \frac{2}{\pi} (E - E_S) \int_{E_S}^{\infty} \frac{J_{ww}(E') dE'}{g_{ww}(E') [(E - E_S)^2 - (E' - E_S)^2]} \quad (6)$$

دراسة التباينات الطاقية للعوام من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخيلي للكمون الضوئي  
للتفاعل  $(\alpha + Fe_{26}^{56})$  باستخدام طريقة (VMA)

$$\Delta V_d (E)$$

$$= \frac{2}{\pi} (E - E_S) \int_{E_0}^{\infty} \frac{J_{wd} (E') dE'}{g_{wd} (E') [(E - E_S)^2 - (E' - E_S)^2]} \quad (7)$$

$E_S$  تمثل الطاقة المرجعية وإنَّ كل من  $g_{ww}$  ،  $g_{wd}$  عبارة عن ثوابت متعلقة بالطاقة

وإنَّ الدالة  $F(r_w)$  ،  $g(r_d)$  عبارة عن توابع ( وودا- ساكسون ) وفق التالي:

[1 - 2 - 3]

$$F(r_d) = [1 + \exp(X_d)]^{-1} , X_W = \frac{r - R_W}{a_W} ,$$

$$R_W = r_w A^{1/3} \quad (8)$$

أمَّا المكون الثاني من العلاقة (1) هو  $v_0(r, E)$  يتحدد وفق العلاقة التالية :

$$V_0(r, E) = V_0(E) f(r) \quad (9)$$

$f(r)$  دالة لها شكل التابع ( وودا- ساكسون).

$V_0(E)$  يتعلق بالطاقة وهو ناجم عن استبدال الكمون اللامحلي بكمون محلي على

التأثيرات المتبادلة النووية مركزة في مكان محدد.

والكمون  $V_0(E)$  يتحدد وفق مقالة [11 - 12] بالصيغة التالية :

$$V_0(E) = V_0(E_S) \exp \alpha (E - E_S) \quad (10)$$

والعزم من المرتبة الثانية المتعلقة بـ  $V_0(E)$  يعطى بالعلاقة التالية :

$$J_0(E) = J_0(E_S) \exp \alpha(E - E_S) \quad (11)$$

أخيراً بعد تحديد مكوني الجزء الحقيقي للكمون الحد الأول من العلاقة (1) تصبح بصيغته النهائية التالية :

$$V(r, E) = \frac{J_0(E_S)}{g_v} [\exp \alpha(E - E_S) f(r_v) + \Delta V_w f(r_w) + \Delta V_d(E) g(r_d)] \quad (12)$$

بالمقابل تصبح الصيغة النهائية للعزم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء الحقيقي للكمون (24) بالشكل التالي :

$$J_v(E) = J_0(E) + J_{\Delta v}(E) \quad (13)$$

$$= J_0(E) + J_{\Delta v_w}(E) + J_{\Delta v_d}(E)$$

تجدر الإشارة إلى أنّ جميع العلاقات السابقة مبرمجة وفق برنامج مساعد للبرنامج SPI يدعى برنامج (SPI - VMA)، إذ من خلاله يمكن إعطاء أفضل وأدق قيم لبارامترات الكمون الضوئي والتي بدورها يتم إدخالها إلى البرنامج الرئيسي SPI الذي كتب بلغة الفورتران ، ومن خلاله يمكن إيجاد مقاطع التفاعل بنوعها (الكلية والتفاضلية والتبعثر والتفاعل) إضافة إلى الاستقطابية.

بعد حساب تلك المقادير المقطع التفاضلي  $\sigma(\theta)$  والمقطع الكلي  $\sigma(E)$  ، تتم مقارنتها مع مثيلاتها التجريبية ومع المكتبات المعتمدة عالمياً ويتم بعدها استنباط شكل الكمونات الضوئية والتزود بقيم مقاطع التفاعل في المناطق الطاقية الخالية من القيم المرجعية.

## الأدوات والبرامج المستخدمة:

تم في هذا البحث استخدام برنامجين (كودين) كود (SPI) وكود آخر (VMA-SPI) وهو مساعد للأول حيث يتكون البرنامج (SPI) من صفتين: الأولى تعرف بصفحة الدخل وتتضمن جميع مكونات العلاقة (I) بما فيها بارامتراتنا (انصاف أقطار (r) ونفاذية (a) بالإضافة إلى عدة اسطر أخرى تتضمن طاقة القذيفة وعددها الكتلي وشحنتها والعدد الكتلي للهدف وعدده الذري (الشحنة) أمّا صفحة الخرج فتتضمن نتائج الحسابات المتعلقة بالعزوم من المرتبة الثانية ومقاطع التفاعل الكلية والتفاضلية.

أما الكود الثاني (VMA - SPI) فهو برنامج مساعد يقوم بأخذ البيانات من البرنامج الأول ليصار إلى تعديلها و إعطاء أفضل و أدق القيم الحسابية المتعلقة بالوسطاء الهندسية للعزوم والتي بدورها تعطي أفضل القيم المتعلقة بالكمونات ليصار فيما بعد إلى معادلة شرودينغر الموجية (SPI) وإعطاء قيم لمقاطع التفاعل الكلية والتفاضلية متوافقة بشكل كلي مع البيانات التجريبية.

## طريقة العمل :

1. تم في البداية اختيار النوى (الأهداف) من حيث توفر البيانات التجريبية والمكتبات العالمية المتعلقة بمقاطع التفاعل الكلية والتفاضلية وثانياً من حيث عدد النيوكليونات.
2. تمّ اختيار قيم مرجعية للطاقة ( $E_G$ )، حيث يمكن من خلالها مكاملة العلاقة التبدلية و إيجاد العزوم من المرتبة الثانية وفق طريقة (براون \_ راو).
3. تمّ إيجاد الوسطاء الهندسية للكمون الضوئي ووسطاء العزوم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخليبي للكمون (السطحي والحجمي). وقيمتها هي :

$$\beta_2 = 110 \text{ MeV} F_m^3, \rho_2 = 11 \text{ MeV}, \rho_w = 150 \text{ MeV}, E_s = -100 \text{ MeV}$$

4. تم نقل البيانات الناتجة في الخطوة (3) إلى البرنامج (VMA-SPI) من أجل

معالجتها والحصول على بارامترات مثالية للكمون الضوئي.

5. تنتقل البيانات المستنتجة من الخطوة (4) إلى البرنامج (SPI) من أجل إيجاد

مقاطع التفاعل (الكلية والتفاضلية) والعزوم من المرتبة الثانية بالنسبة إلى جزئي الكمون (التخليبي (السطحي والحجمي) والحقيقي) ومن ثم يتم مقارنتها مع مثيلاتها التجريبية .

### النتائج والمناقشة:

تبعاً للخطوات السابقة الواردة في طريقة العمل، فقد تمّ التوصل إلى القيم المثالية لبارامترات الكمون الضوئي وإلى قيم الوسطاء الهندسية للعزوم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخليبي للكمون (السطحي والحجمي) للتفاعل ( $\alpha + {}^{56}_{26}\text{Fe}$ ) مستخدمين بذلك البرنامجين (SPI) و (VMA - SPI) وهذه القيم تمّ جدولتها في الجدول (1).

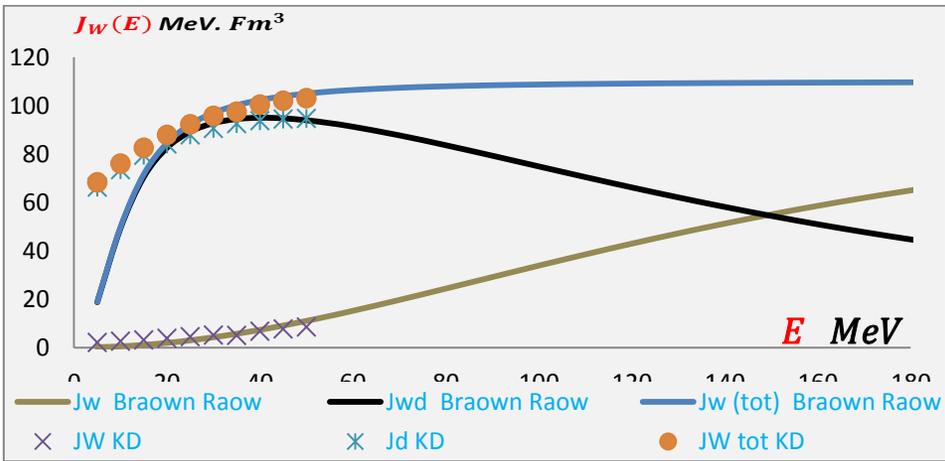
$E$ MeV	$V_r$ MeV	$r_v$ Fm	$a_v$ Fm	$W_w$ MeV	$r_w$ Fm	$a_w$ Fm	$W_d$ MeV	$r_d$ Fm	$a_d$ Fm
<b>5</b>	46.703	1.368	0.449	0.0127	1.2559	0.6208	1.39	1.2559	<b>0.6208</b>
<b>10</b>	45.759	1.372	0.449	0.0504	1.2559	0.6208	3.65	1.2559	<b>0.6208</b>
<b>15</b>	44.854	1.363	0.449	0.113	1.2559	0.6208	5.21	1.2559	<b>0.6208</b>
<b>20</b>	43.984	1.351	0.449	0.199	1.2559	0.6208	6.11	1.2559	<b>0.6208</b>
<b>25</b>	43.143	1.34	0.449	0.308	1.2559	0.6208	6.60	1.2559	<b>0.6208</b>
<b>30</b>	42.328	1.329	0.449	0.438	1.2559	0.6208	6.86	1.2559	<b>0.6208</b>
<b>35</b>	41.536	1.32	0.449	0.589	1.2559	0.6208	6.99	1.2559	<b>0.6208</b>
<b>40</b>	40.763	1.311	0.449	0.757	1.2559	0.6208	7.03	1.2559	<b>0.6208</b>
<b>45</b>	40.007	1.303	0.449	0.941	1.2559	0.6208	7.01	1.2559	<b>0.6208</b>
<b>50</b>	39.265	1.296	0.449	1.14	1.2559	0.6208	6.95	1.2559	<b>0.6208</b>
$\beta_2(\text{MeV})$	$\rho_2(\text{MeV})$		$\rho_w(\text{MeV})$		$E_s(\text{MeV})$		$\alpha(\text{MeV})$		
110	11		150		-100		0.448		
$V_{so} = 5.8 \text{ MeV}$		$r_{so} = 1.067 \text{ Fm}$		$a_{so} = 0.59 \text{ Fm}$		$r_c = 1.26 \text{ Fm}$			

دراسة التباينات الطاقية للعزوم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخلي للكمون الضوئي  
للتفاعل  $(\alpha + Fe^{56})$  باستخدام طريقة (VMA)

كما هو مبين من الجدول أعلاه (1) إنّ الجزء الحقيقي للكمون الضوئي والجزء التخلي (السطحي والحجمي) تابعة للطاقة ، أي سلوكها يتغير بتغير الطاقة ، إضافة إلى ذلك ان البارامترات المثالية للكمون الضوئي تظهر تغيرات بقيمتها تبعاً للطاقة وهذا يتوافق مع [16 – 19] ، وبالتالي سنبيين وتبعاً للجدول (1) النتائج المستخلصة وهي:

أولاً: الدالة الطاقية للعزوم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخلي للكمون الضوئي  $[r^2]_w(E)$  ،  $[r^2]_{w_d}(E)$  ،  $[r^2]_{w_w}(E)$  للتفاعل  $(\alpha + {}^{56}_{26}Fe)$  وفي المجال الطاقى المدروس  $(1 \leq E_\alpha \leq 50 \text{ MeV})$  .

لقد تمّ الحصول وفقاً لطريقة المحاكاة (براون \_ راو) للعزوم بين قيمها الحسابية المستنتجة وفق النموذج الضوئي التقليدي وقيمها المرجعية [17 – 18 – 21] ، التوصل إلى الوسطاء الهندسية  $(\beta_2, \rho_2, \rho_w, E_s)$  والتي تعتبر بالمنطلق الأساسي لطريقة (VMA) (برنامج (VMA – SPI)) والشكل التالي يبين السلوك الطاقى للعزوم  $[r^2]_w(E)$  ،  $[r^2]_{w_d}(E)$  ،  $[r^2]_{w_w}(E)$  .



الشكل (1): الوسطاء الهندسية المستنتجة بطريقة محاكاة (براون - راو) للعزوم التخليية المحسوبة وفق النموذج التقليدي ومثيلاتها المرجعية [21].

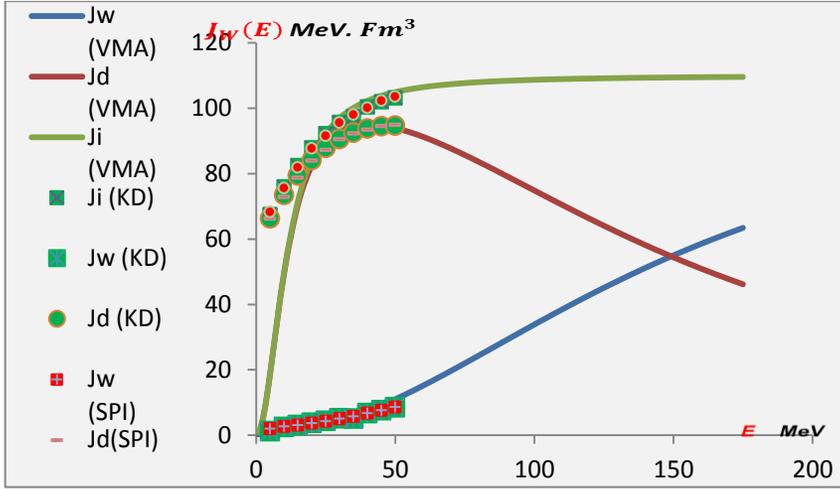
باستخدام طريقة  $VMA$  ومن الجدول (1) وبعد اختيار قيمة مرجعية للطاقة  $E_S$  تمَّ الحصول على القيم العددية للعزوم التخيلية بنوعها السطحي والحجمي  $[r^2]_w(E)$ ,  $[r^2]_{w_w}(E)$ ,  $[r^2]_{w_d}(E)$ ، للتفاعل  $(\alpha + {}^{56}_{26}Fe)$  وضمن المجال الطاقي المدروس وتمَّ إدراجها في الجدول (2):

$(E)$ $MeV$	$[r^2]_{w_w}(E)$ $MeV.Fm^3$	$[r^2]_{w_d}(E)$ $MeV.Fm^3$	$[r^2]_w(E)$ $MeV.Fm^3$
5	0.122	18.714	18.836
10	0.487	49.287	49.774
15	1.089	70.443	71.532
20	1.921	82.532	84.453
25	2.973	89.185	92.158
30	4.231	92.733	96.964
35	5.68	94.432	100.111
40	7.303	94.963	102.266
45	9.083	94.715	103.798
50	11	93.922	104.922

نلاحظ من الجدول (2) السلوك الطاقي للعزوم التخيلية والسطحية والحجمية حيث تظهر تزايداً وانهيئاً في السلوك الطاقي للعزم  $[r^2]_{w_d}(E)$  وتزايداً بطيئاً في البداية مع الطاقة ل  $[r^2]_{w_w}(E)$  ثم تزايداً سريعاً مع تزايد الطاقة ويعزى ذلك إلى الشرح أعلاه، ونلاحظ أيضاً انسجام القيم العددية المحددة لتفكك العزوم مع مثيلاتها في المكتبات العالمية [21].

أمّا التمثيل البياني للقيم في الجدول (2) كانت وفق الشكل (2):

دراسة التباينات الطاقية للعزوم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخليوي للكمون الضوئي  
للتفاعل  $(\alpha + Fe^{56})$  باستخدام طريقة (VMA)



الشكل (2): التباينات الطاقية للعزوم التخليوية من المرتبة الثانية الكلي  $[r^2]_w(E)$

والسطحي  $[r^2]_{w_d}(E)$  والحجمي  $[r^2]_{w_w}(E)$  للتفاعل  $(\alpha + {}^{56}_{26}Fe)$  في المجال الطاقى المدروس  $(1 \leq E_\alpha \leq 50 \text{ MeV})$  والقيم المرجعية الموافقة [7-3-21].

نلاحظ من الشكل (2) أن العزوم التخليوية تبدي سلوكاً وتبايناً طاقياً مختلفاً. فنجد بالنسبة لـ  $[r^2]_{w_d}(E)$  يزداد بازدياد الطاقة إلى أن يصل إلى قيمة عظمى ثم يبدأ بالانهيار مع ازدياد الطاقة ويُعزى ذلك إلى التأثيرات السطحية الناتجة عن المشاركة الفعالة للنيوكليد السطحية (الهدف) والتي تزداد مع ازدياد الطاقة ومن ثم تصل إلى حد أعظمي بعدها تتناقص التأثيرات السطحية وتبدأ بالانهيار، لكن بالمقابل فإن التأثيرات الحجمية تزداد مع ازدياد الطاقة ويعزى ذلك إلى المشاركة الفعالة إلى جميع النيوكليونات بداخل النواة هذا ما يعبر عنه من خلال السلوك الطاقى  $[r^2]_{w_w}(E)$  المتزايد مع ازدياد الطاقة.

أمّا الامتصاص الكلي  $[r^2]_w(E)$  وكما هو مبين من المنحني (1) فيبدي سلوكاً متزايداً في البداية ومن ثمّ استقراراً ملحوظاً وهذا يعود إلى السلوك الطاقى المتباين لكل من السطحي والحجمي.

ثانياً: الدالة الطاقية للعزوم الحقيقية من المرتبة الثانية  $[r^2]_V(E)$  للتفاعل

$\alpha + {}^{56}_{26}\text{Fe}$  وفي المجال الطاقى المدروس  $1 < E_\alpha \leq 50 \text{ MeV}$  :

تمّ وباستخدام الجدول (1) وباستخدام الكودين  $(VMA + SPI)$  و  $(SPI)$  التّوصّل

إلى منظومة من القيم العددية للعزوم الحقيقية  $[r^2]_V(E)$  بدلالة الطاقة وتمّ وضع

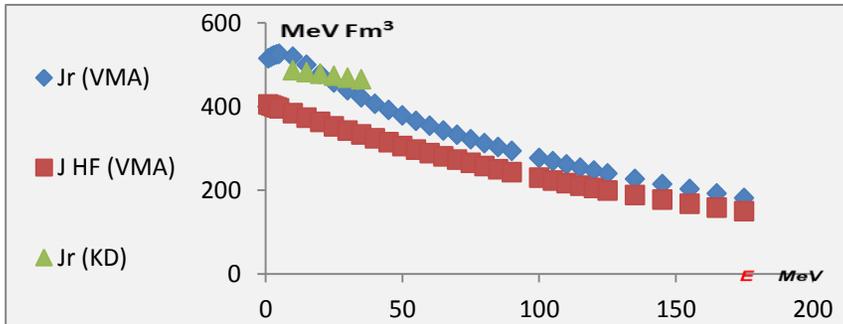
النتائج المستخلصة وفق طريقة  $(VMA)$  ومثيلاتها المرجعية [21] في الجدول (3)

التالي:

$(E)$ $MeV$	$[r^2]_{VMA}(E)$ $MeV \cdot Fm^3$	$[r^2]_{VKD}(E)$ $MeV \cdot Fm^3$
5	525.76	4.86E+02
10	518.86	4.82E+02
15	499.09	4.78E+02
20	477.32	4.73E+02
25	456.88	4.69E+02
30	438.29	4.65E+02
35	421.39	4.60E+02
40	405.89	4.56E+02
45	391.56	4.52E+02
50	378.2	4.48E+02

الشكل (3) يمثل التمثيل البياني لتلك القيم الواردة في الجدول (3) والمستنتجة بطريقة

$VMA$  ومثيلاتها المرجعية:



الشكل (3): التابعية الطاقية للعزوم الحقيقية للتفاعل  $\alpha + {}^{56}_{26}\text{Fe}$  وفي مجال الطاقة

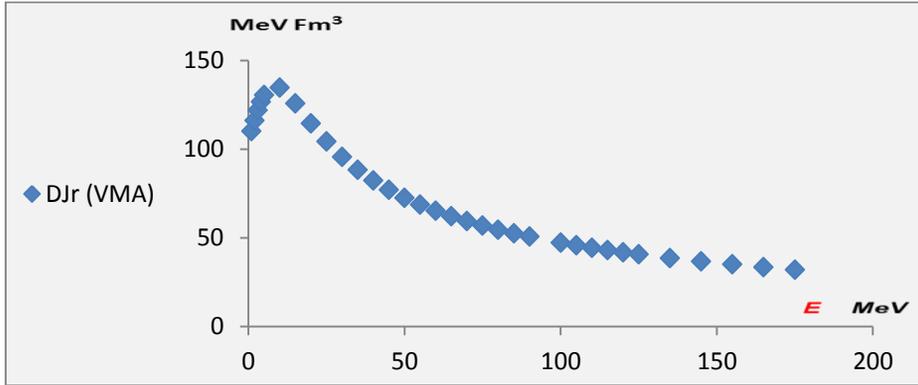
المدروس.

دراسة التباينات الطاقية للعزوم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخليوي للكمون الضوئي  
للتفاعل  $(\alpha + Fe^{56})$  باستخدام طريقة (VMA)

كما هو مبين في الشكل (3): أنه من أجل الطاقات المنخفضة تزداد قيم العزوم الحقيقية (التكامل الحجمي)  $J_r$  الى أن تصل إلى قيمة عظمى ومن ثم تبدأ بالتناقص مع ازدياد الطاقة ويُعزى ذلك وكما هو مبين أن القيمة العظمى للعزم الحقيقي بالنسبة للطاقة، تعكس ظاهرة تدعى بظاهرة الشذوذ العتبي أو بالمفعول العتبي للجزء الحقيقي للكمون الضوئي حيث تظهر القيمة العظيمة تعاوناً تشاركياً لجميع قنوات التفاعل وتلي القيمة العظمى تناقص شيئاً فشيئاً مع ازدياد الطاقة ونلاحظ أيضاً توافقاً جيداً لقيم العزوم الحقيقية للكمون الضوئي المحسوبة وفق VMA مع التمثيلات الوسطية العالمية .

ثالثاً: الدالة الطاقية للعزوم التبددية  $[r^2]_V(E)$  للتفاعل  $\alpha + {}^{56}_{26}Fe$  في المجال الطاقى المدروس:

تبعاً لطريقة VMA ومما سبق فقد قمنا بحساب قيم العزوم التبددية بدلالة الطاقة وتمّ تمثيلها بيانياً في الشكل (4).

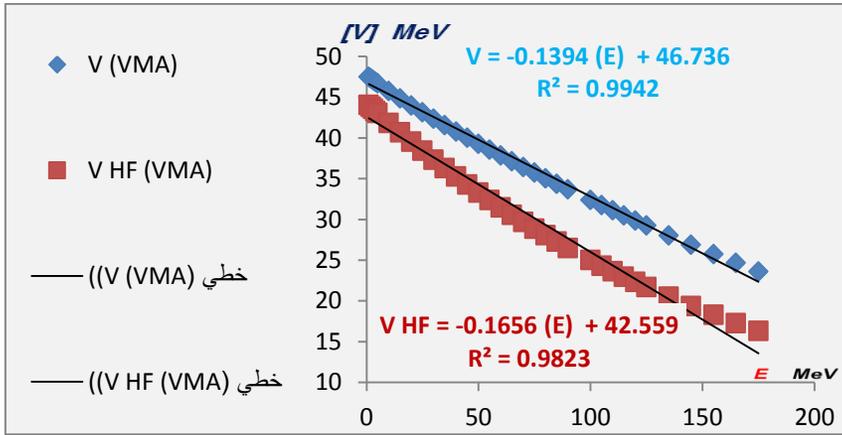


الشكل (4): الدالة الطاقية للعزوم التبددية  $[r^2]_V(E)$  للتفاعل  $\alpha + {}^{56}_{26}Fe$  في المجال الطاقى المدروس.

وكما هو مبين من الشكل (4) إنّ تغيرات العزوم التبددية بالنسبة للطاقة تلاحظ بشكل قوي في المجال الطاقى المنخفض حيث تظهر المساهمة التبددية بفعالية أكبر بكثير مما هو عليه في مجال الطاقى العالى ويعزى ذلك إلى المشاركة الفعالة لجميع قنوات التفاعل [5-6-7].

رابعاً: الدالة الطاقية للكمون الضوئى للتفاعل  $\alpha + {}^{56}_{26}\text{Fe}$  في المجال الطاقى المدروس:

تبعاً لطريقة VMA فقد تمّ التوصل إلى القيم العديدة للكمون الضوئى للتفاعل  $\alpha + {}^{56}_{26}\text{Fe}$  وتمّ تمثيلها بيانياً وفق الشكل (5) التالي:



الشكل (5): تابعة الكمون الحقيقي وكمون هارترى - فوك للطاقة للتفاعل  $\alpha + {}^{56}_{26}\text{Fe}$  في المجال الطاقى المدروس.

دراسة التباينات الطاقية للعزوم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخيلي للكمون الضوئي  
للتفاعل ( $\alpha + Fe^{56}$ ) باستخدام طريقة (VMA)

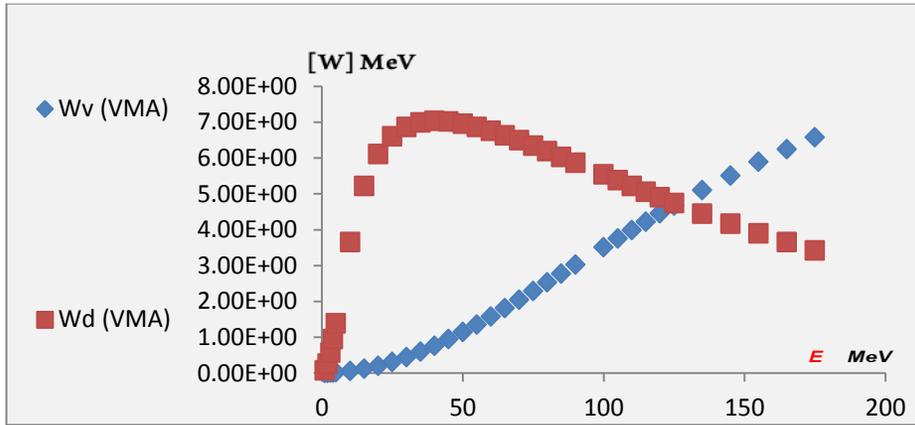
وفقاً للمنحني البياني الذي يمكن تقريبه كسلوك خطي مُميز بالعلاقة الرياضية التالية:

$$V = -0.1394 (E_\alpha) + 46.736$$

حيث يمكن من خلال تلك العلاقة إيجاد قيم الكمون من خلال كل خطوة طاقية وبالتالي يمكن القول أننا بدراستنا هذه يمكننا إغناء المناطق الطاقية، التي تفتقر للبيانات المتعلقة بالكمون الضوئي.

خامساً: الكمونات الضوئية التخيلية (السطحية  $W_d$  ، الحجمية  $W_w$ ) للتفاعل  $\alpha + {}^{56}_{26}Fe$  وفي المجال الطاقى المدروس:

تبعاً للجدول (1) ولطريقة (VMA) فقد تمّ التوصل إلى الكمونات الضوئية التخيلية (السطحية  $W_d$  ، الحجمية  $W_w$ ) التالية باستخدام الكودين (SPI) و (VMA + SPI) وتمّ إدراجه في الشكل (6) الذي يُمثّل التابعة الطاقية للكمونات الضوئية التخيلية الكلية  $W$  (السطحية  $W_d$  ، الحجمية  $W_w$ ) للتفاعل  $\alpha + {}^{56}_{26}Fe$  وفي المجال الطاقى المدروس.

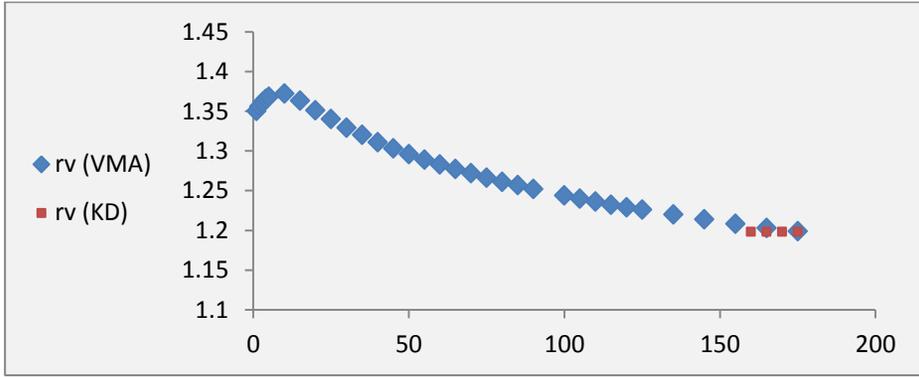


الشكل (6): التابعة الطاقية للكمونات الضوئية التخيلية الكلية  $W$  (السطحية  $W_d$  ، الحجمية  $W_w$ ) للتفاعل  $\alpha + {}^{56}_{26}Fe$  وفي المجال الطاقى المدروس.

كما نلاحظ من الشكل أعلاه إنَّ السلوك الطاقوي للكمونات التخيلية موافق للسلوك الطاقوي للجزوم التخيلية أنظر الشكل (2) وذلك نظراً لوجود علاقة بينهما  $[r^2]_w(E) = g W(E)$  حيث  $g$  ثابت.

سادساً: التابعيات الطاقوية لنصف قطر الكمون الضوئي للتفاعل  $\alpha + {}^{56}_{26}Fe$  في المجال الطاقوي المدروس والقيم المرجعية الموافقة.

كما هو مبين من الشكل أعلاه، إنَّ نصف قطر الكمون الضوئي يأخذ قيمة عظمى تقابل قيمة طاقوية محددة، تعرّف هذه القيمة العظمى بعتبة التفاعل، وهذا السلوك الطاقوي لنصف قطر الكمون الضوئي تمّ توضيحه وتفسيره في الفقرة (2) [21].



الشكل (7): التابعيات الطاقوية لنصف قطر الكمون الضوئي للتفاعل  $\alpha + {}^{56}_{26}Fe$  في المجال الطاقوي المدروس والقيم المرجعية الموافقة.

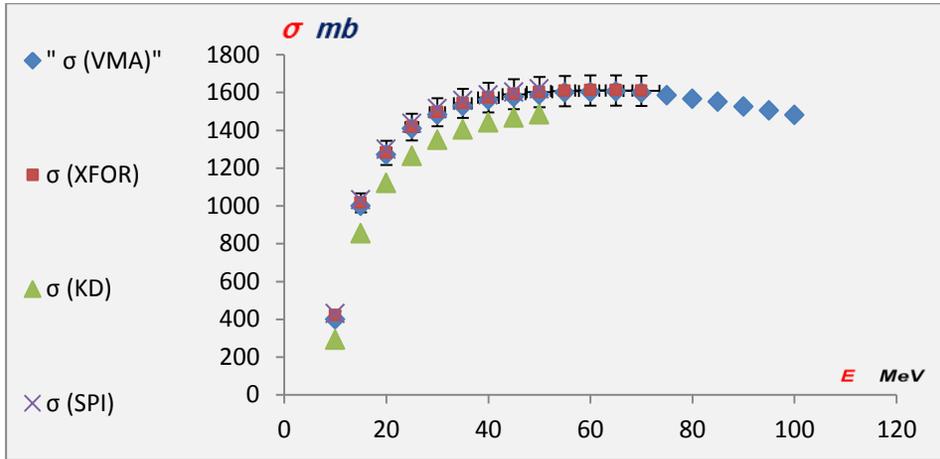
سابعاً: الدالة الطاقوية لمقطع التفاعل الكلي  $\alpha + {}^{56}_{26}Fe$  وفي المجال الطاقوي المدروس:

وفقاً لطريقة (VMA) واستخداماً للكودين (VMA + SPI) و (SPI) وللجدول (1)، فقد تمّ وبعد حل معادلة شرودنغر الموجية التّوصّل إلى القيم العددية لمقاطع التفاعل في المجال الطاقوي المدروس وتمّ ادراجها في الجدول التالي (4) مع القيم المرجعية المقابلة لها.

دراسة التباينات الطاقية للعوام من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخلي للكمون الضوئي  
للتفاعل ( $\alpha + Fe^{56}$ ) باستخدام طريقة (VMA)

$E_{\alpha}$ (MeV)	$\sigma_{exp}$ (mb)	$\sigma_{koning}$ (mb)	$\sigma_{SPI}$ (mb)	$\sigma_{VMA}$ (mb)
10	421.1	290.915	428.67	398.2
15	1016	854.986	1031.61	998.8
20	1280	1120.61	1299.37	1270.16
25	1417	1263.71	1435.93	1408.32
30	1496	1349.73	1513.69	1481.9
35	1543	1404.23	1557.64	1527.76
40	1573	1441.78	1587.02	1560.9
45	1591	1466.97	1602	1575.17
50	1602	1484.28	1618.62	1587.5

أمّا التمثيل البياني لقيم مقاطع التفاعل الكلية والقيم المرجعية [21-22-23] المقابلة لها مبينة في الشكل (8) التالي:



الشكل (8): التابعيات الطاقية لمقاطع التفاعل  $\alpha + {}^{56}Fe$  في المجال الطاقى المدروس والقيم المرجعية الموافقة لها نلاحظ من الشكل أعلاه التوافق الجيد لمقاطع التفاعل المحسوبة وفق طريقة (VMA) مع مثيلاتها التجريبية المرجعية.

هذا التوافق يعكس بحد ذاته المنهجية الصحيحة المتبعة في طريقة (VMA) باستنتاجها للبارمترات الهندسية للكمون الضوئي من جهة ومن جهة ثانية تعكس التصور الصحيح لشكل الكمون المستنتج وفق طريقة VMA.

### الاستنتاجات:

استخداماً لطريقة VMA وللكودين (VMA + SPI) و (SPI)، من ثمّ دراسة التفاعل  $\alpha + {}^{56}\text{Fe}$  وفي المجال الطاقى المدروس، ثمّ تمّ التوصل إلى ما يلي :

1. تمّ إيجاد القيم العددية للعضوم التخيلية من المرتبة الثانية الكلية  $[r^2]_w(E)$  السطحية  $[r^2]_{w_d}(E)$ ، الحجمية  $[r^2]_{w_w}(E)$  وتم جدولتها في جدول (٢) ووجدنا بعد تمثيلها بيانياً ثباتاً في سلوكها الطاقى ويعزى ذلك إلى دور التأثيرات السطحية والحجمية (التركيب البنيوي للهدف) والتي تتسارع بالازدياد والانهيال تارةً (السطحي) وتارةً أخرى تزداد بشكل بطيء جداً إلى ان تصبح بطاقة ذات قيمة معتبرة فاتخذت تزايداً سريعاً (الحجمي).

2. تمّ إيجاد القيم العددية للكمون الضوئي واستنباط شكل الكمون وتمّ أيضاً التّوصل إلى علاقة رياضية بين الكمون والطاقة يمكن من خلالها تحديد قيمة الكمون من أجل كل خطوة طاقية وهذا يقدم إضافة جديدة في

دراسة التباينات الطاقية للعزوم من المرتبة الثانية بالنسبة للجزء التخلي للكمون الضوئي  
للتفاعل ( $\alpha + Fe^{56}_{26}$ ) باستخدام طريقة (VMA)

---

قاعدة البيانات المتعلقة بالكمونات الضوئية والعزوم ومقاطع التفاعل  
وخاصة في المناطق الطاقية التي تفتقد للقيم المرجعية وهذه العلاقة هي

$$V = -0.1394 (E_{\alpha}) + 46.736$$

3. تمَّ تحديد القيم العددية لمقاطع التفاعل الكلية للتفاعل  $\alpha + {}^{56}_{26}Fe$  وفي  
المجال الطاقى المدروس وتم مقارنتها مع مثيلاتها التجريبية ومع  
المكتبات العالمية ووجدنا توافقاً جيداً مع بعض القيم المرجعية وتباعداً  
عن بعضها الآخر وهذا يعود الى أن بعض التصنيفات تعمل في مجال  
محددة واعتمدت في بعض الاحيان في التخمين والتوقع لبارامترات  
الكمون الضوئي .

## المراجع

- [1] -د- أنيس بلال ، ملهم يوسف -2021- دراسة تأثير المساهمة التبددية لتبعثر النيوترونات المقذوفة بطاقة  $(60 \leq E_n \leq 80)MeV$  بوساطة نواة الهدف  $(^{58}_{29}Cu_{29})$  باستخدام طريقة (VMA)، مجلة جامعة البعث،المجلد 43.
- [2]- Molhum Ussef, & Anis Belal. (2020). Study of the dispersive contribution effect for neutrons scattering with energy  $(60 \leq E_n \leq 80)MeV$  , Nuclear Science, Science PG, Vol.5,Issue Number 4,December 2020.
- [3]- Molhum Ussef, & Anis Belal. (2020). THE NEUTRONS SCATTERING ANALYSIS BY Cu60, NUCLEUS USING VARIATIONAL MOMENT APPROACH, International Journal of Science Academic Research, Vol. 01, Issue 09, pp.612-618, December, 2020 Available online at <http://www.scienceijsar.com>
- [4]- MAHAUX . C, BORTINGNON P.F, 1989 -Dynamics of the shell model .Phys. Rep, V.120 , p.p.1- 274.
- [5]- MAHAUX . C, SARTOR . R ,1989 , Nucl . Phys .V. 503,P.525.
- [6]- MAHAUX . C, SARTOR . R , 1991, Nucl . Phys .V. 528.P. 253.
- [7]- MAHAUX . C,SARTOR . R ,1992 -Advance in nuclear, phys. edited , New. York , Vol . 20 , p.1 .
- [8]- ROMANOVSKY E. A , BELAL. A , MORZENA L .R, 1993 , News. RAS ,Phys . Vol . 57, No . 10 , P. 179.
- [9]-ROMANOVSKY E. A, BOTROS. S,BECPALOVA,B.O,1995, News. RAS ,Phys . Vol . 59, No . 1 , P . 145.
- [10] - ROMANOVSKY E. A , BOTROS . S ,SBASKIA T. E,1995,News . RAS, Phys .Vol .59 , No . 5 , P . 117 .
- [11]-BELAL. A ,2006-Investigating the resultant characteristics of proton scattering on nuclei  $50 \leq A \leq 70$  with energy near the columbic barrier  $(E = E_b)$  using(VMA)model ,Journal of Al Baath Syria- Homs,Vol.28,No.2, p.279-297-University
- [12]- BELAL. A , 2009-Using the Dispersion Optical Model for Analysis of Proton Scattering by Nuclei  $Zr^{92,94,96}$  Energy Range

close to columbic barrier Journal of AL Baath University –Syria-  
Homs , No.31.

[13]- ROMANOVSKY .E .A,BECPALOVA . O.B , 2001-  
Measurements and Analysis elastic scattering protons with energies  
< 10 MeV for (Sn)-Moscow.

[14] - ROMANOVSKY . E. A , BECPALOVA . B .O ,2004-  
Analyzed within the dispersive optical model for the proton and  
 $Zr^{90}$  with in energies 5MeV <E<65MeV,Nucl. Phys..

[15]- HODGSON . P. E , 1991- The Dispersive Optical  
Model,OUNP,91-11, p.p.1-7.

[16]- MAHAUX . C, BORTINGNON P.F, 1985 -Dynamics of  
the shell model .Phys. Rep, V.120 , p.p.1- 274.

[17]-Brown . G. E , Rho, M . 1981,Nucl . Phys , A . 372,397.

[18]- PEREY F.G. code SPI-GENOA (unpublished)1976.

[19]- MAHAUX . C, SARTOR . R(1991).Dispersion Relation  
Approch To The Mean Field And Spectral Functions Of Nucleons  
In 40 Ca,Nuclear Physics A528,253-297.

[20]- B EER K.,HODGSON P.E, 1994-The Systematic of Nuclear  
Bound States.J.phys.G.Nuclphys.,V.4.N.12, 128791-12p.

[21]-KONING A.J. AND D. ROCHMAN,2011- Nuclear Research  
and Consultancy Group (NRG) Petten, The Netherlands. Release  
date: December 29.

[22]- Jeukenne J.P, Mahaux C, Jaminon M.

Dependence upon mass number and neutron excess of the real part  
of the proton optical potential for mass numbers ( $44 \leq A \leq 72$ ).  
Phys . Rev . 1986, V.C34M P.P.468-479.

[23]- Agrawal, H.M, Garg, J. B., & Harvey, J. A, (1984). Parity  
dependence of

the level denisties of Cr53 and Cr55 at high excitation, Physical  
Review, Part

C, Nuclear Physics, volume 30, Page 1880. (JANIS 4.0- Local-  
Incident

neutron data /EXFOR / Cr54/ (, TOT) / 12830.009).

## متباينة هاردي على زمرة هايزنبرغ

د. سهى علي سلامة

عضو هيئة فنية، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة طرطوس، سوريا

### الملخص

نقدّم في هذا البحث زمرة هايزنبرغ التي تعد بمثابة الزمرة الأكثر شهرة في زمرة لي عديمة القوى، ولها دور مهم في العديد من فروع الرياضيات، مثل نظرية التمثيل، المعادلات التفاضلية الجزئية، ونظرية الأعداد... إضافةً إلى أنها تُقدّم توسعاً ملحوظاً في الحصول على نتائج مهمة في التحليل التوافقي الإقليدي، كما سنقدم متباينة هاردي التي لها دور مهم في دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية، و سنقدم إثبات هذه المتباينة لأجل زمرة هايزنبرغ الأولى  $III$ .

### الكلمات المفتاحية:

زمرة هايزنبرغ، مؤثر لابلاس هايزنبرغ، مسافة كارنوت\_ كاراثيودوري، مسافة كابلان، متباينة هاردي.

## Hardy inequality on Heisenberg group

### Abstract

In this work we introduce the Heisenberg group which is the most well known example from the realm of nilpotent Lie groups, and plays an important role in several branches of mathematics, such as representation theory, partial differential equations and number theory... It also offers the greatest opportunity for generalizing the remarkable results of Euclidean harmonic analysis. We also introduce the Hardy inequality which has an important role in the study of partial differential equations. And we present proof for this inequality for the first Heisenberg group  $\mathbb{H}$ .

### Key Words:

Heisenberg group, Heisenberg Laplacian, , Carnot\_Carathéodary metric, Kaplan metric, Hardy inequality.

مقدمة:

لقد كان للدوال الخاصة تاريخٌ طويلٌ في الجانب الرياضي لمجال الفيزياء الرياضية، حيث ظهر الجانب الفيزيائي لهذه الدوال في صيغة حلول المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الثانية.

كانت بداية ظهور بنية زمرة لي عندما لاحظ عالم الرياضيات Sophus Lie عام 1870 العلاقة الوثيقة بين هذا النوع من الزمر، وحلول بعض المعادلات التفاضلية.

تعد زمرة هايزنبرغ الزمرة الأكثر شهرة في زمرة لي عديمة القوى، وهي زمرة كارنوت غير تبديلية، ولها دور مهم في العديد من فروع الرياضيات مثل نظرية التمثيل و المعادلات التفاضلية الجزئية و ميكانيكا الكم، و إن سبب مساهمتها في مجموعة متنوعة من المجالات هو إمكانية إنشاء هذه الزمرة بطريقتين مختلفتين.

سميت زمرة هايزنبرغ بهذا الاسم نسبة إلى العالم الألماني Werner Heisenberg الذي وضع أساسيات ميكانيكا الكم في بداية القرن العشرين.

تعرف زمرة هايزنبرغ على أنها زمرة لي المرتبطة بجبر لي المولد من علاقة التبادل لمؤثر الموضع و مؤثر كمية الحركة. حيث إن جبر لي هو جداء ثنائي الخطية معرف على فضاء متجهي و يحقق شروطاً خاصة. لقد أخذ كل من زمرة هايزنبرغ و جبر لي الموافق تسميتهما الأولى عام 1970، على الرغم من أنهم درسوا لفترة طويلة قبل ذلك.

في العام ١٩٩٨ وضع العالم Thangavelu بناء زمرة هايزنبرغ بشكل موضح مبيناً أن ما يظهر الارتباط بين هذه الزمرة ونظرية تمثيلاتها في ميكانيكا الكم هو فكرة أن فضاء الحالة لجسيم الكم سيكون تمثيلاً واحدياً لهذه الزمرة مع مجموعة من الانسحابات، حيث عرف تمثيلات شرودنغر على هذه الزمرة. [12]

عقب ذلك وضع صيغ لعدة مفاهيم و تحويلات مهمة على زمرة هايزنبرغ.

## هدف البحث:

إن هدفنا في هذا البحث هو إثبات متباينة هاردي على زمرة هايزنبرغ، أي اعتماداً على الحقول المتجهة اللامتغيرة يسارياً لزمرة هايزنبرغ.

## أهمية البحث:

نقدم في هذا البحث متباينة هاردي التي عرفت أول مرة عام 1920 من قبل العالم هاردي، ثم سنقوم بتوسيع الدراسة إلى زمرة هايزنبرغ. هذا وقد تقدمت الدراسات على هذه المتباينة لكونها من الأدوات المهمة في التحليل التوافقي و المعادلات التفاضلية الجزئية و الفيزياء الرياضية إضافة إلى نظرية الطيف.

## المناقشة:

### 1.1. مفاهيم أساسية:

**تعريف 1.1.1:** مؤثر لابلاس\_ ديريكليه (the Dirichlet\_Laplacian): [8]

يُعد مؤثر لابلاس\_ ديريكليه من المفاهيم الأساسية في الفيزياء الرياضية، و يستخدم في عدة مجالات كالمعادلات التفاضلية و وصف الظواهر الفيزيائية المختلفة مثل انتشار الأمواج و حركة المواد السائلة، و الظواهر المتعلقة بميكانيكا الكم.

يُعرّف مؤثر لابلاس في الإحداثيات الديكارتية لأجل  $n \in \mathbb{N}$  بأنه مجموع مؤثرات تفاضلية من المرتبة الثانية مُعطى بالشكل:

$$-\Delta := -\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad (1.1)$$

و لأجل نطاق مفتوح محدود  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  فإن  $-\Delta_\Omega$  هو مؤثر مترافق ذاتياً يرتبط مع الصيغة التربيعية نصف المحدودة ( semi\_ bounded quadratic form ) :

$$a[u] := \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right|^2 dx \quad (1.2)$$

حيث مجموعة تعريفها هي فضاء جزئي من فضاء سوبوليف  $H_0^1(\Omega)$ ، ويسمى المؤثر  $-\Delta_\Omega$  بمؤثر لابلاس\_ دير يخليه ( Dirichlet\_ Laplacian ) في  $L^2(\Omega)$ .

**ملاحظة 1.1.1:** لأجل  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  يكون:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

و

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ in } \partial\Omega \}$$

**تعريف 1.1.2:** متباينة هاردي (the Hardy inequality) [12] :

أثبت العالم هاردي أنه لأجل أي دالة موجبة  $f \in L^p(0, \infty)$  تتحقق العلاقة:

$$\int_0^\infty \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty (f(x))^p dx \quad (1.3)$$

و قد سميت هذه المتباينة متباينة هاردي.

## 2.1. المنطويات: [2]

### تعريف 2.1.1: الخارطة:

ليكن  $M$  فضاءً تبولوجياً قابلاً للفصل. نُسمي خارطةً مفتوحةً (اختصاراً خارطة) على  $M$ ، الزوج المرتب  $(U, X)$  حيث  $U$  مجموعة مفتوحة جزئية من  $M$ ، و  $X$  تطبيق مُعرّف بالشكل:

$$X: U \rightarrow X(U)$$

$$p \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p))$$

و هو تقابل مستمر.

### تعريف 2.1.2: المنطوي التبولوجي:

ليكن  $M$  فضاءً تبولوجياً قابلاً للفصل، و  $I$  مجموعة أدلة منتهية أو قابلة للعدّ.

نُسمي الفضاء التبولوجي  $M$  منطوياً تبولوجياً ذا  $n$  بعداً، و نرسم له بالرمز  $M^n$ ، إذا

$$\{(U_\alpha, X_\alpha) ; \alpha \in I\}$$

وُجدت مجموعة من الخرائط المحليّة :

بحيث يتحقق الآتي:

• من أجل كل  $\alpha \in I$  فإنّ المجموعة  $X_\alpha(U_\alpha)$  هي مجموعة مفتوحة من  $\mathbb{R}^n$ .

$$M^n = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

### تعريف 2.1.3: أطلس المنطوي التبولجي $M^n$ :

هو مجموعة الخرائط المحليّة على  $M^n$ ، ونرمز له بالرمز  $A(M^n)$ .

### تعريف 2.1.4: التطبيق الأملس:

بفرض أنّ  $M^n$  منطوي تبولجيّ ذو بُعداً  $n$ ، و  $A(M^n)$  أطلس على  $M^n$ ، و لتكن  $(U, X)$  و  $(V, Y)$  خارطتين من الأطلس  $A$ . نُسمّي التطبيق:

$$Y \circ X^{-1}: X(U \cap V) \rightarrow Y(U \cap V)$$

$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n))$$

تطبيقاً أملساً إذا كانت دوال الانتقال من الاحداثيات  $(x^1, \dots, x^n)$  إلى  $(y^1, \dots, y^n)$

$$y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n)$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$y^n = y^n(x^1, \dots, x^n)$$

تمتلك في النطاق  $X(U \cap V)$  مشتقاتٍ جزئيةٍ مستمرةً من جميع المراتب، و محدّد المصفوفة اليعقوبية لا ينعدم:

$$\det \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right) \neq 0, i, k = 1, 2, \dots, n$$

### تعريف 2.1.5: الأطلس الأعظمي:

بفرض  $A = \{(U_\alpha, X_\alpha)\}$  أطلس على المنطوي التبولجيّ  $M^n$ ، يقال عن الأطلس  $A$  إنّه أعظميّ على  $M^n$ ، إذا كانت أيّة خارطةٍ  $(W, Z)$  منسجمةً مع الأطلس  $A$  بالضرورة يجب أن تنتمي إليه، حيث تكون الخارطة  $(W, Z)$  منسجمةً مع الأطلس  $A$ ، إذا كان من أجل أي خارطةٍ  $(U, X)$  من  $A$  بحيث  $(U \cap W) \neq \phi$  فإنّ التطبيق:

$$Z \circ X^{-1}: X(U \cap W) \rightarrow Z(U \cap W)$$

يكون أملاًساً.

**تعريف 2.1.6:** المنطوي التبولوجي الأملس:

يقال عن المنطوي التبولوجي  $M^n$  إنه أملس، إذا وُجد أطلس  $A$  على  $M^n$ ، يحقق الآتي:

• من أجل أي خارطتين  $(X_\alpha, U_\alpha), (X_\beta, U_\beta)$  من  $A$  بحيث  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  فإن التطبيق  $X_\beta \circ X_\alpha^{-1}$  تطبيق أملس.

• الأطلس  $A$  أعظمي على  $M^n$ .

**تعريف 2.1.7:** المنطوي التفاضلي:

يقال عن المنطوي التبولوجي  $M^n$  إنه منطوي تفاضلي ذو  $n$  بعداً، إذا كان أملاًساً.

## 2.2. زمرة هايزنبرغ:

**تعريف 2.2.1:** جبر لي (Lie Algebra): [1]

ليكن  $V$  فضاءً متجهياً فوق حقل  $\mathbb{K}$ ، وليكن  $V \times V \rightarrow V$ :  $[ , ]$  جداء ثنائي الخطية يحقق

لأجل كل  $X, Y, Z \in V$  الخواص الآتية:

$$1. \quad [X, Y] = -[Y, X]$$

$$2. \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (\text{متطابقة جاكوبي})$$

ندعو الثنائية  $(V, [ , ])$  جبر لي، والجداء  $[ , ]$  ندعوه جداء لي للجبر  $g$  (مبادل لي).

من الأمثلة عن جبر لي نذكر:

•  $\mathbb{R}^n$  مع جداء لي  $[.,.] = 0$ .

• فضاء المتجهات على منطوق  $M$  ( $\text{Vec}(M)$ ) مع جداء لي:

$$[X, Y] = XY - YX$$

حيث  $X, Y$  هي حقول متجهة.

### تعريف 2.2.2: زمرة لي (Lie Group): [1]

زمرة لي عبارة عن منطوق أملس  $G$  مُزود بالتطبيقات الأملسين الآتيين:

$$G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$$

$$G \times G \ni (x, y) \mapsto xy \in G \quad \text{و}$$

ويحقق لأجل كل  $x, y, z \in G$  الخواص الآتية:

$$x(yz) = (xy)z \quad .i$$

$$\exists e \in G: ex = xe = x \quad .ii$$

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e \quad .iii$$

تعريف 2.2.3: [1]

يقال عن الحقل المتجهي  $X$  إنه حقل متجهي لا متغير يسارياً على زمرة لي  $G$  إذا تحققت العلاقة:

$$(dL_g)X(p) = X(L_g(p))$$

حيث:

$$L_g: G \rightarrow G$$

$$h \mapsto gh$$

تعريف 2.2.4: جبر لي الموافق لزمرة لي : [1]

ليكن  $T_1G$  فضاءً مماسياً عند عنصر الوحدة لزمرة لي  $G$ ، يعرف جبر لي الموافق لزمرة لي  $G$ ، و الذب نرسم له بالرمز  $\text{Lie}(G)$  من خلال جداء لي الآتي:

$$[v_1, v_2] = [X_{v_1}, X_{v_2}]_1$$

$$\text{حيث: } X_v(g) = (dL_g)_1(v)$$

تعريف 2.2.5: جبر هايزنبرغ (Heisenberg Algebra): [12]

ليكن الفضاء المتجهي  $\mathbb{R}^{2n+1}$  و ليكن تمثيل كل عنصر من هذا الفضاء بالشكل:

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) := (x, y, t)$$

عندئذ نجد أنّ  $\mathbb{R}^{2n+1}$  هو جبر لي بالنسبة لجداء لي المعرف على النحو الآتي:

$$[(x, y, t), (u, v, s)] = (0, 0, xv - yu)$$

$$\text{حيث } u, v, x, y \in \mathbb{R}^n, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

يُدعى هذا الجبر بجبر هايزنبرغ، ويُرمز له بالرمز  $\mathfrak{h}_n$ .

تعريف 2.2.6: تمثيل جبر هايزنبرغ: [12]

بأخذ التطبيق  $M: \mathfrak{h}_n \rightarrow M_{n+2}(\mathbb{R})$  المُعطى بالصيغة:

$$M(x, y, t) = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & \cdots & y_n & t \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نجد أن هذا التطبيق يأخذ عنصراً من جبر هايزنبرغ المُعطى بالصيغة:

$$(x, y, t) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)$$

ويعطي مصفوفة من القياس  $(n+2)^2$ .

يتم الحصول على زمرة هايزنبرغ بأخذ الأس لجبر هايزنبرغ  $\mathfrak{h}_n$ ، ونرمز لهذه الزمرة بالرمز  $\mathbb{H}^n$ .

تعريف 2.2.7: زمرة هايزنبرغ الأولى ( $n = 1$ ): [12]

إن جبر هايزنبرغ الموافق عندما  $n = 1$  هو:

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

بأخذ الأس لهذا الجبر  $\exp: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{H}$  نحصل على:

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{xy}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & y & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

و هي عناصر الزمرة  $\mathbb{H}$  ، وبالتالي يمكننا أن نكتب:

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

و يعطى قانون التشكيل لهذه الزمرة بالشكل:

$$(x, y, z) \cdot (\acute{x}, \acute{y}, \acute{z}) = (x + \acute{x}, y + \acute{y}, z + \acute{z} - 2(x\acute{y} - \acute{x}y)) \quad (1.4)$$

**تعريف 2.2.8:** الحقول المتجهة المولدة لجبر هايزنبرغ  $\mathfrak{h}$  : [12]

إن جبر هايزنبرغ  $\mathfrak{h}$  يُؤَلد بثلاثة حقول متجهة  $X, Y, Z$  لا متغيرة يسارياً تشكل قاعدة لهذا الجبر، و تُعطى بالشكل:

$$\begin{aligned} X &= \partial_x + 2y \partial_z \\ Y &= \partial_y - 2x \partial_z \\ Z &= \partial_z \end{aligned} \quad (1.5)$$

و تكون علاقة التبادل الوحيدة غير التافهة هي:

$$[X, Y] = -4Z$$

حيث:

$$[X, Y] = XY - YX = -2 \partial_z - 2 \partial_z = -4\partial_z = -4Z$$

بينما:

$$[X, Z] = [Y, Z] = 0$$

هذا و كما ذكرنا يُدعى الحقل المُتجهي  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$   $X$  بأنه لا متغير يسارياً

(left invariant) إذا حقق لأجل كل  $p, g \in \mathbb{H}$  العلاقة: [36]

$$(dL_g) X(p) = X(L_g(p)) \quad (1.6)$$

حيث التطبيق  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$   $L_g(p)$  يُعطى بالشكل:  $L_g(p) = g \cdot p$ .

تعريف 2.2.9: زمرة هايزنبرغ  $\mathbb{H}^n$ : [12]

بشكل عام يكون:

$$\mathbb{H}^n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2n+1}\}$$

بحيث:

$$(x, y, z) \cdot (\acute{x}, \acute{y}, \acute{z}) = (x + \acute{x}, y + \acute{y}, z + \acute{z} + 2 \sum_{i=1}^n x_i \acute{y}_i - \acute{x}_i y_i)$$

وتكون الحقول المُتجهة اللامتغيرة يسارياً و المؤلدة لجبر هايزنبرغ  $\mathfrak{h}_n$  بالشكل:

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2 y_j \frac{\partial}{\partial z} ; j = 1, \dots, n$$

$$Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2 x_j \frac{\partial}{\partial z} ; j = 1, \dots, n$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z}$$

**تعريف 2.2.10:** مؤثر لابلاس هايزنبرغ (The Heisenberg Laplacian): [4]

إن مؤثر لابلاس هايزنبرغ مشابه لمؤثر لابلاس في الحالة الإقليدية ويُعرّف على زمرة هايزنبرغ  $\mathbb{H}$  بالشكل:

$$-\Delta_{\mathbb{H}} := -X^2 - Y^2 \quad (1.7)$$

و على زمرة هايزنبرغ بشكل عام:

$$-\Delta_{\mathbb{H}^n} := -\sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)$$

وهو مؤثر لا متغير تحت الانسحابات، و متجانس من الدرجة 2، و يُدعى أيضاً مؤثر Kohn\_ Laplacian.

**تعريف 2.2.11:** فضاءات سوبوليف على زمرة هايزنبرغ: [5]

تُعرّف فضاءات سوبوليف (Sobolev spaces) على زمرة هايزنبرغ (في هذا السياق تُعرف أيضاً بفضاءات Folland\_Stein) على النحو الآتي:

نرمز بـ  $W^{1,2}(\Omega)$  (أو  $H^1(\Omega)$ ) للفضاء المُكوّن من الدوال  $u \in L_2(\Omega)$  بحيث إن مشتقاتها الجزئية  $Xu$  و  $Yu$  تنتمي إلى  $L_2(\Omega)$ ، و يكون هذا الفضاء مُزوّد بالنظيم:

$$\|u\|_{W^{1,2}} = (\|Xu\|^2 + \|Yu\|^2 + \|u\|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.8)$$

و يُعرف الفضاء  $W_0^{1,2}(\Omega)$  على أنه غلاقة (لصاقة)  $C_0^\infty(\Omega)$  في  $W^{1,2}(\Omega)$ .

### 2.3. مسألة ديريكليه لمؤثر لابلاس هايزنبرغ: [7]

بأخذ مسألة ديريكليه لمؤثر لابلاس هايزنبرغ على نطاق محدود  $\Omega$  من زمرة هايزنبرغ  $\mathbb{H}$  مع حدود ملساء:

$$-\Delta_{\mathbb{H}} u = \lambda u \quad \text{in } \Omega ; \lambda > 0$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

فإنه يكون لهذه المسألة طيف مُتقطع (discrete spectrum) في فضاء هيلبرت  $L_2(\Omega)$  مع جداء داخلي  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ، و القيم الذاتية لهذا الطيف تحقق:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \dots$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty \quad \text{و}$$

و تكون الدوال الذاتية الموافقة  $W_0^{1,2}(\Omega)$  متعامدة  $u_1, u_2, \dots \in W_0^{1,2}(\Omega)$  منظمة (orthonormalized) و لذلك يتحقق:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \int_{\Omega} u_i u_j dx dy dz = \delta_{ij} ; \forall i, j \geq 1$$

$$\text{حيث: } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases} \text{ هو رمز كرونكر.}$$

و تُعرّف الصيغة التربيعية لمؤثر لابلاس هايزنبرغ على دوال  $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$  بالشكل:

$$a[u] = \|Xu\|^2 + \|Yu\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} (|Xu|^2 + |Yu|^2) dx dy dz \quad (1.9)$$

## 2.4. المسافة على زمرة هايزنبرغ:

تعريف 2.4.1: المنحني الأفقي على زمرة هايزنبرغ (Carnot curve)  $\mathbb{H}$

(Horizontal curve): [9], [3], [10]

ليكن لدينا منحني ليبشترز (Lipschitz curve)  $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$

$$\gamma(t) := (x(t), y(t), z(t))$$

نقول عن هذا المنحني إنه منحني أفقي إذا كان يحقق لأجل أي  $t \in (a, b)$  المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{2}(x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)) \quad (1.10)$$

تعريف 2.4.2: مسافة Carnot\_Carathéodory على زمرة هايزنبرغ

$\mathbb{H}$ : [6], [10], [11]

لتكن  $p_1, p_2 \in \mathbb{H}$  نقطتين من زمرة هايزنبرغ الأولى، عندئذ تُعرّف المسافة تحت الريمانية أو مسافة كارنوت\_كاراثيودوري بين هاتين النقطتين بالشكل:

$$d_{CC}(p_1, p_2) := \inf \{l(\gamma) : \gamma \text{ منحني أفقي يصل بين } p_1 \text{ و } p_2\} \quad (1.11)$$

و سنرمز اختصاراً لهذه المسافة باسم مسافة  $C_C$

تعريف 2.4.3: مسافة كابلان Kaplan Metric: [12]

و هي مسافة أخرى على زمرة هايزنبرغ مكافئة حسب ليبشترز الثنائي للمسافة  $C_C$  و تعرف بالشكل:

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) := \frac{1}{4}((x^2 + y^2)^2 + z^2)$$

مبرهنة 2.4.1: [12]

لأجل مسافة كابلان يتحقق أن:

$$d_{\mathbb{H}}(x, y)^{-1} X d_{\mathbb{H}}(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2) + yz}{d_{\mathbb{H}}^4}$$

$$d_{\mathbb{H}}(x, y)^{-1} Y d_{\mathbb{H}}(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xz}{d_{\mathbb{H}}^4}$$

2.5. متباينة هاردي على زمرة هايزنبرغ  $\mathbb{H}$  :

مبرهنة 2.5.1:

لأجل أي دالة  $u$  بحيث  $a[u] < \infty$  فإنه يتحقق:

$$\int_{\mathbb{R}^3} (|Xu|^2 + |Yu|^2) dx dy dz \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x^2 + y^2}{d_{\mathbb{H}}^4} |u|^2 dx dy dz \quad (1.12)$$

الإثبات:

لنفرض:

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \left| \left( X + \alpha \frac{X d_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) u \right|^2 dx dy dz \\ + \int_{\mathbb{R}^3} \left| \left( Y + \alpha \frac{Y d_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) u \right|^2 dx dy dz$$

حيث  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

فيكون:

$$\begin{aligned}
 0 \leq I &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( \left( X + \alpha \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) u \left( X + \alpha \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) \bar{u} \right. \\
 &\quad \left. + \left( Y + \alpha \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) u \left( Y + \alpha \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) \bar{u} \right) dx dy dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} (|Xu|^2 + |Yu|^2) dx dy dz + \int_{\mathbb{R}^3} Xu \alpha \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \bar{u} dx dy dz \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \alpha \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} u X \bar{u} dx dy dz + \int_{\mathbb{R}^3} Yu \alpha \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \bar{u} dx dy dz \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \alpha \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} u Y \bar{u} dx dy dz + \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} u \right|^2 dx dy dz \\
 &\quad + \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} u \right|^2 dx dy dz \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

بما أن:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{R}^3} Xu \alpha \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \bar{u} dx dy dz + \int_{\mathbb{R}^3} \alpha \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} u X \bar{u} dx dy dz \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} Yu \alpha \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \bar{u} dx dy dz + \int_{\mathbb{R}^3} \alpha \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} u Y \bar{u} dx dy dz \\
 &= -\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \left[ u \left( X \left( \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) \right) \bar{u} + u \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} X \bar{u} \right] dx dy dz \\
 &\quad + \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} u X \bar{u} dx dy dz \\
 &\quad + \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \left[ u \left( Y \left( \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) \right) \bar{u} + u \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} Y \bar{u} \right] dx dy dz \\
 &\quad + \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} u Y \bar{u} dx dy dz
 \end{aligned}$$

$$= -\alpha \int_{\mathbb{R}^3} X \left( \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) |u|^2 dx dy dz - \alpha \int_{\mathbb{R}^3} Y \left( \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) |u|^2 dx dy dz$$

و بالتالي فإن (1.13) تصبح:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^3} (|Xu|^2 + |Yu|^2) dx dy dz \\ &\quad - \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \left( X \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} + Y \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) |u|^2 dx dy dz \\ &\quad + \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \left( \left( \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right)^2 + \left( \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right)^2 \right) |u|^2 dx dy dz \end{aligned}$$

بتقسيم الحسابات إلى ثلاثة أجزاء:

أولاً:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \left( \left( \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right)^2 + \left( \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right)^2 \right) |u|^2 dx dy dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{((x^2 + y^2)x + yz)^2 + ((x^2 + y^2)y - xz)^2}{((x^2 + y^2)^2 + z^2)^2} \right) |u|^2 dx dy dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{((x^2 + y^2)^2(x^2 + y^2) + z^2(x^2 + y^2))}{((x^2 + y^2)^2 + z^2)^2} \right) |u|^2 dx dy dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{(x^2 + y^2)((x^2 + y^2)^2 + z^2)}{((x^2 + y^2)^2 + z^2)^2} |u|^2 \right) dx dy dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left( \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2 + z^2} |u|^2 \right) dx dy dz \end{aligned}$$

ثانياً:

$$\begin{aligned}
 & -\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \left( X \frac{X d_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} + Y \frac{Y d_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) |u|^2 dx dy dz \\
 & = -\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \left( (\partial_x + 2y \partial_z) \left( \frac{(x^2 + y^2)x + yz}{(x^2 + y^2)^2 + z^2} \right) |u|^2 \right) dx dy dz \\
 & -\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \left( (\partial_y - 2x \partial_z) \left( \frac{(x^2 + y^2)y - xz}{(x^2 + y^2)^2 + z^2} \right) |u|^2 \right) dx dy dz
 \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{aligned}
 & -\partial_x \left( \frac{(x^2 + y^2)x + yz}{(x^2 + y^2)^2 + z^2} \right) - \partial_y \left( \frac{(x^2 + y^2)y - xz}{(x^2 + y^2)^2 + z^2} \right) \\
 & = -\frac{z^2(4x^2 + 4y^2)}{((x^2 + y^2)^2 + z^2)^2}
 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 & -2y \partial_z \left( \frac{(x^2 + y^2)x + yz}{(x^2 + y^2)^2 + z^2} \right) + 2x \partial_z \left( \frac{(x^2 + y^2)y - xz}{(x^2 + y^2)^2 + z^2} \right) \\
 & = \frac{-2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^2 + 2z^2(x^2 + y^2)}{((x^2 + y^2)^2 + z^2)^2}
 \end{aligned}$$

و بالتالي يكون:

$$\begin{aligned}
 & -\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \left( (\partial_x + 2y \partial_z) \left( \frac{(x^2 + y^2)x + yz}{(x^2 + y^2)^2 + z^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. + (\partial_y - 2x \partial_z) \left( \frac{(x^2 + y^2)y - xz}{(x^2 + y^2)^2 + z^2} \right) \right) |u|^2 dx dy dz
 \end{aligned}$$

$$= \alpha \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^2 + 2z^2(x^2 + y^2) - 4z^2(x^2 + y^2)}{((x^2 + y^2)^2 + z^2)^2} |u|^2 dx dy dz$$

$$= -2\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2 + z^2} |u|^2 dx dy dz$$

ختاماً:

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \left( X + \alpha \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) u \left( X + \alpha \frac{Xd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) \bar{u} \right. \\ \left. + \left( Y + \alpha \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) u \left( Y + \alpha \frac{Yd_{\mathbb{H}}}{d_{\mathbb{H}}} \right) \bar{u} \right] dx dy dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \left( |Xu|^2 + |Yu|^2 + \alpha^2 \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2 + z^2} |u|^2 \right. \\ \left. - 2\alpha \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2 + z^2} |u|^2 \right) dx dy dz$$

بأخذ  $\alpha = 1$  نحصل على:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left( |Xu|^2 + |Yu|^2 - \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2 + z^2} |u|^2 \right) dx dy dz$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \left( |Xu|^2 + |Yu|^2 - \frac{x^2 + y^2}{d_{\mathbb{H}}^4} |u|^2 \right) dx dy dz \geq 0$$

و بالتالي لأجل العلاقة (1.2) فإن متباينة هاردي هي:

$$a[u] = \int_{\mathbb{R}^3} (|Xu|^2 + |Yu|^2) dx dy dz \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x^2 + y^2}{d_{\mathbb{H}}^4} |u|^2 dx dy dz$$

## المراجع

1. سهى سلامة(2019). حل بعض مسائل التحليل الرياضى باستخدام أنواع من الزمر. رسالة ماجستير في التحليل الرياضى بإشراف الأستاذ الدكتور إبراهيم إبراهيم والمشرف المشارك الأستاذ الدكتور ياسين خروف، جامعة البعث.
2. أ. د. طالب غريبة، أ. د. عصام ديبان، أ. د. محسن شيحة(2010). الهندسة التفاضلية . جامعة البعث، سوريا.
3. Calin, O., Chang, D., & Greiner, P. (2005). Geometric mechanics on the Heisenberg group. *Bulletin-Institute of Mathematics Academia Sinica*, 33(3), 185.
4. Egwe, M. E. (2012). On Some Properties of the Heisenberg Laplacian. *Advances in Pure Mathematics*, 2(5), 354-357.
5. Frank, R. L., & Laptev, A. (2010). Inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues on the Heisenberg group. *International mathematics research notices*, 2010(15), 2889-2902.
6. Hajtasz, P., & Zimmerman, S. (2015). Geodesics in the Heisenberg group. *Analysis and Geometry in Metric Spaces*, 3(1).
7. Jia, G., Wang, J., & Xiong, Y. (2011). On Riesz mean inequalities for subelliptic Laplacian. *Applied Mathematics*, 2(6), 694.
8. Kovařík, H., & Weidl, T. (2015). Improved Berezin—Li—Yau inequalities with magnetic field. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 145(1), 145-160.
9. Monti, R. (2000). Some properties of Carnot-Carathéodory balls in the Heisenberg group. *Proceedings of the Accademia Nazionale dei Lincei. Class of Physical, Mathematical and Natural Sciences. Lincei reports. Mathematics and Applications*, 11 (3), 155-167.
10. Monti, R., & Rickly, M. (2005). Geodetically convex sets in the Heisenberg group. *J. Convex Anal*, 12(1), 187-196.
11. Nasehi, M. (2020). On the geometrical properties of Heisenberg groups. *Archivum Mathematicum*, 56(1), 11-19.
12. Thangavelu, S.: Harmonic analysis on the Heisenberg group. Progress in Mathematics 159, Birkhäuser, Boston, MA, (1998).

# استخدام نتائج محسنة للمعامل الثالث لتقدير محدد هانكل الثاني في بعض صفوف التوابع ثنائية التباين

مجد عبد الرحمن عياش<sup>1</sup>

أ. د. حسن بدور<sup>2</sup>

أ. د. محمد علي<sup>3</sup>

## المخلص

تقدم في هذا البحث دراسة لصفوف التوابع التحليلية ثنائية التباين حيث نستكمل دراسات للصفوف المعرفة من قبل الباحث فراسين، تم ايجاد تقدير لمحدد هانكل الثاني في بعض صفوف التوابع ثنائية التباين المعرفة من قبله وبعض الصفوف المتفرعه عنهما وذلك باستخدام النتائج المحسنة في دراسات سابقة للمعامل الثالث والرابع في هذه الصفوف .

## الكلمات المفتاحية:

تابع تحليلي، تابع متباين، تابع ثنائي التباين ، محددات هانكل ، حدود المعاملات،  
مراجعة فكييت شيغو .

<sup>1</sup>طالب دكتوراه -جامعة تشرين-كلية العلوم-قسم الرياضيات

<sup>2</sup>عضو هيئة تدريسية-جامعة تشرين-كلية العلوم-قسم الرياضيات

<sup>3</sup>عضو هيئة تدريسية-جامعة تشرين-كلية العلوم-قسم الرياضيات

# Using Improved results for the third Coefficient to estimate the second Hankel Determinant in Subclasses of Bi-Univalent Functions

Majd Abdulrahman Ayash<sup>4</sup>

Dr. Hassan Baddour<sup>5</sup>

Dr. Mohammad Ali<sup>6</sup>

## Abstract

The present research presents a study of the subclasses of Bi-univalent analytical functions, where studies of the subclasses defined by Frasin have been continued. An estimate for the second Hankel determinant in some of these subclasses and in some of the subclasses branching from them has been identified using improved results of the third and fourth coefficients in these subclasses from previous studies.

**Keywords:** analytic functions, univalent functions, bi-univalent functions, Hankel determinants, coefficients bounds, Fekete-Szegő inequalities.

---

<sup>4</sup>PhD student, Tishreen University, Faculty of science, Department of mathematics

<sup>5</sup>Professor, Tishreen University, Faculty of science, Department of mathematics

<sup>6</sup>Professor, Tishreen University, Faculty of science, department of mathematics

## 1. مقدمة

نقدم في هذا البحث دراسة لتحسين تقديرات المعاملات في بعض صفوف التوابع ثنائية التباين فيما يخص تقدير لمتراجحة فكيث شيغو "Fekete–Szegö inequality" أو محدد هانكل الثاني حيث تم استخدام دراسات سابقة في كل من المراجع [13,12,11,10] والتي نتج عنها تحسين لتقدير المعامل الثالث  $|a_3|$  في كل من الصفيين  $\mathcal{H}_\sigma(\alpha, \beta)$  و  $\mathcal{H}_\sigma(\gamma, \beta)$  بالإضافة إلى تقدير للمعامل الرابع  $|a_4|$  في هذه الصفوف، من أجل إيجاد تقدير لمحدد هانكل الثاني  $H_2(2)$  لمعاملات التوابع في هذه الصفوف وبعض الصفوف المنفرعة عنها.

## 2. هدف البحث

تكمن أهمية البحث من كونه يُعنى في دراسة التوابع المختلفة للأسرة  $\sigma$  والمعروفة بأنها أسرة التوابع ثنائية التباين من خلال دراسة خواص معاملات هذه التوابع عندما تنتمي لصفوف جزئية معينة من الأسرة  $\sigma$ . ويتجلى هدف هذا البحث في محاولة الحصول على أفضل تقديرات ممكنة لبعض المعاملات أو لمتراجحات فيكث شيغو أو لمحدد هانكل الثاني للتوابع في بعض الصفوف الجزئية من  $\sigma$ .

## 3. مواد و طرائق البحث

يقع هذا البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية، وبشكل خاص ضمن التحليل العقدي والتوابع التحليلية والمتباينة، لذلك فالطرائق المتبعة تعتمد بشكل أساسي على

استخدام نتائج محسنة للمعامل الثالث لتقدير محدد هانكل الثاني في بعض صفوف التوابع ثنائية التباين

مفاهيم التحليل العقدي مثل قابلية نشر التابع التحليلي في سلسلة تايلور في جوار نقطة ما، وأيضاً على منشور ثنائي حد نيوتن أويلر للأسس الحقيقية بمتغيرات عقدية، وبشكل عام على أدبيات نظرية التوابع المتباينة.

### 1.3. تعريف ومفاهيم أساسية

يرمز بالرمز  $\mathcal{A}$  إلى مجموعة التوابع  $f(z)$  التحليلية على قرص الوحدة

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

والتي تحقق الشرط  $f(z) = f'(0) - 1 = 0$  والمعروف بأنها تمثل بسلسلة تايلور

ذات الشكل

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

ويرمز بالرمز  $\mathcal{S}$  لصف التوابع الجزئية من  $\mathcal{A}$  والمتباينة على قرص الوحدة، ومن المعروف أنه وفقاً لمبرهنة الربع للباحث "Koebe"، انظر [1]، والتي تنص على أن كل تابع من الصف  $\mathcal{S}$  مداه يحوي القرص

$$\{w : |w| < 1/4\}$$

لذلك كل تابع  $f$  متباين من الصف  $\mathcal{S}$  يملك معكوساً  $f^{-1}$  يحقق أن

$$f(f^{-1}(w)) = w \text{ و } f^{-1}(f(z)) = z, (z \in \mathbb{D})$$

$$; (|w| < r_0(f); r_0(f) \geq 1/4)$$

وبسبب التباين يمكن لهذا المعكوس أن يعبر عنه بسلسلة قوى (تايلور) كمايلي

$$g(w) = f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 + (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + \dots \quad (2)$$

يقال عن التابع  $f \in \mathcal{A}$  أنه ثنائي التباين على قرص الوحدة  $\mathbb{D}$  إذا كان كل من  $f$  ومعكوسه  $g = f^{-1}$  متبايناً على قرص الوحدة. ويرمز بالرمز  $\sigma$  إلى صف التتابع ثنائية التباين على  $\mathbb{D}$  ومن الأمثلة على توابع من الصف  $\sigma$

$$\frac{z}{1-z}, \quad -\log(1-z), \quad \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

تعريف 1: (انظر [2])

من أجل كل  $f \in \mathcal{A}$  لة النشر (1) يرمز لمحددات هانكل للتابع  $f$  من الدرجة  $q$  و المرتبة  $n$  بالرمز  $H_q(n)$  و الذي يعطى بالشكل التالي:

$$H_q(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \dots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \dots & a_{n+2q-2} \end{vmatrix}$$

حيث  $n = 1, 2, \dots, q = 1, 2, \dots$

من أجل  $q = 2$  و  $n = 1$  نحصل على محدد هانكل من الدرجة الثانية والمرتبة الأولى

$$H_2(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_3 - a_2^2$$

حيث يتوافق هذا المحدد مع متراجحة فكيت شيغو بوجود ثابت حقيقي بالشكل التالي

$$a_1 a_3 - \mu a_2^2, \mu \in \mathbb{R}$$

من أجل  $q = 2$  و  $n = 2$  نحصل على محدد هانكل من الدرجة الثانية والمرتبة الثانية

وهو ما يقصد به محدد هانكل الثاني:

$$H_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2 a_4 - a_3^2.$$

في عام 1967 الباحث [3] Lewin بين أن كل تابع  $f \in \sigma$  معاملة الثاني يحقق

المتراجحة  $|a_2| < 1.51$ ، أيضاً في نفس العام وضع الباحثان Brannan and

[4] Clunie تخمناً أنه من أجل  $f \in \sigma$  فإن  $|a_2| \leq \sqrt{2}$ . في عام 1985 أثبت

الباحث [5] Kedzierawski تخمين الباحثين [4] Brannan and Clunie وذلك من

أجل التوابع ثنائية النجمية  $f \in S_\sigma^*$ .

**تعريف 2:** (انظر [6])

يعرف صف التوابع النجمية من المرتبة  $\beta$  ويرمز له بالرمز  $S^*(\beta)$  بأنه مجموعة

التوابع  $f \in S$  والمحقة للشرط :

$$\Re \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \beta \quad ; \quad z \in \Delta$$

ويعرف صف التوابع ثنائية النجمية من المرتبة  $\beta$  ويرمز له بالرمز  $S_{\sigma}^*(\beta)$  بأنه مجموعة التوابع  $f \in \sigma$  والمحققة للشرط :

$$f, f^{-1} \in S^*(\beta)$$

في حالة  $\beta = 0$  نحصل على صف التوابع ثنائية النجمية  $S_{\sigma}^*(0) = S_{\sigma}^*$ .

تعريف 3: (انظر [6])

يعرف صف التوابع المحدبة من المرتبة  $\beta$  ويرمز له بالرمز  $K(\beta)$  بأنه مجموعة التوابع  $f \in S$  والمحققة للشرط :

$$1 + \Re \left( \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \beta \quad ; z \in \Delta$$

ويعرف صف التوابع ثنائية التحذب من المرتبة  $\beta$  ويرمز له بالرمز  $K_{\sigma}(\beta)$  بأنه مجموعة التوابع  $f \in \sigma$  والمحققة للشرط :

$$f, f^{-1} \in K(\beta)$$

في حالة  $\beta = 0$  نحصل على صف التوابع ثنائية التحذب  $K_{\sigma}(0) = K_{\sigma}$ .

في عام 1988 حصل الباحثين [6] Brannan and Taha على تقدير لكل من المعاملين  $|a_2|$  و  $|a_3|$  في كل من صف التوابع ثنائية النجمية  $S_{\sigma}^*(\beta)$  وصف التوابع ثنائية التحذب  $K_{\sigma}(\beta)$ .

وفي عام 2013 حصل الباحث [7] Murugusundaramoorthy et al. على تقدير لكل من المعاملات  $|a_2|$  و  $|a_3|$  في كل من الصنفين  $\mathcal{S}_\sigma(\alpha, \lambda)$  و  $\mu_\sigma(\beta, \lambda)$  الجزئيين من  $\sigma$  ، وفي عام 2014 تمكن الباحث [8] Zaprawa من إيجاد تقدير لمسألة Fekete-Szegö في كل من الصنفين  $\mathcal{S}_\sigma(\alpha, \lambda)$  و  $\mu_\sigma(\beta, \lambda)$  الأمر الذي أدى إلى تحسين تقدير المعامل  $|a_3|$  في كل من الصنفين المعرفين في المرجع [7] ، وفي نفس العام قام الباحث [9] Frasin بتعريف الصنفين  $\mathcal{H}_\sigma(\alpha, \beta)$  و  $\mathcal{H}_\sigma(\gamma, \beta)$  الجزئيين من  $\sigma$  بالشكل التالي:

#### تعريف 4:

يكون التابع  $f \in \sigma$  من الصف  $\mathcal{H}_\sigma(\alpha, \beta)$  إذا حقق مايلي:

$$\left| \arg \left( f(z) + \beta z f'(z) \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}$$

$$\left| \arg \left( g(w) + \beta w g'(w) \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2}$$

$$, (z, w \in \mathbb{D}), g = f^{-1}, \quad \beta > 0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$2(1 - \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\beta m + 1} \leq 1.$$

### تعريف 5:

يكون التابع  $f \in \sigma$  من الصف  $\mathcal{H}_\sigma(\gamma, \beta)$  إذا حقق مايلي:

$$\square \left( \hat{f}(z) + \beta z \hat{f}'(z) \right) > \gamma$$

$$\square \left( \hat{g}(w) + \beta w \hat{g}'(w) \right) > \gamma$$

$$g = f^{-1}, \quad \beta > 0, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad (z, w \in \mathbb{D})$$

$$2(1 - \gamma) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{\beta m + 1} \leq 1.$$

في المرجع [9] تم البرهان على الخواص الآتية:

### خاصة 1:

من أجل  $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha, \beta)$  حيث إن  $\beta > 0$  و  $0 < \alpha < 1$  عندئذ يكون

$$\begin{aligned} |a_2| &\leq \frac{2\alpha}{\sqrt{2(\alpha + 2) + 4\beta(\alpha + \beta - \alpha\beta + 2)}}, \\ |a_3| &\leq \frac{\alpha^2}{(1 + \beta)^2} + \frac{2\alpha}{3(1 + 2\beta)}. \end{aligned} \quad (3)$$

### خاصة 2:

من أجل  $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma, \beta)$  حيث إن  $\beta > 0$  و  $0 \leq \gamma < 1$  عندئذ يكون

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)}} , \quad |a_3| \leq \frac{(1-\gamma)^2}{(1+\beta)^2} + \frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)}. \quad (4)$$

خاصة 3:

من أجل  $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha, 1)$  حيث إن  $0 < \alpha < 1$  عندئذ يكون

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{2\alpha+16}} , \quad |a_3| \leq \frac{9\alpha^2+8\alpha}{36}. \quad (5)$$

خاصة 4:

من أجل  $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma, 1)$  حيث إن  $0 \leq \gamma < 1$  عندئذ يكون

$$|a_2| \leq \frac{1}{3}\sqrt{2(1-\gamma)} , \quad |a_3| \leq \frac{(1-\gamma)(9(1-\gamma)+8)}{36}. \quad (6)$$

في المراجع [11,10] أوجد الباحثون تقديراً لطويلة للمعامل  $|a_4|$  في كل من الصفيين

$\mathcal{H}_\sigma(\alpha, \beta)$  و  $\mathcal{H}_\sigma(\gamma, \beta)$  أوجدوا أيضاً في المراجع [13,12] تحسیناً لتقدير طويلة

المعامل  $|a_3|$  في هذين الصفيين والصفوف المتفرعة عنها والتي كانت على الشكل

التالي:

خاصة 5:

من أجل  $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha, \beta)$  حيث  $0 < \alpha < 1$  و  $\beta > 0$  يكون

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{3(1+2\beta)}. \quad (7)$$

خاصة 6:

من أجل  $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma, \beta)$  حيث  $0 \leq \gamma < 1$  و  $\beta > 0$  يكون

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)}. \quad (8)$$

خاصة 7:

من أجل  $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha, \beta)$  حيث  $0 < \alpha < 1$  و  $\beta > 0$  يكون

$$|a_4| \leq \frac{2\alpha^3 - 12\alpha^2 + 13\alpha}{6(1+3\beta)}. \quad (9)$$

خاصة 8:

من أجل  $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma, \beta)$  و  $0 \leq \gamma < 1$  و  $\beta > 0$  عندئذ يكون

$$|a_4| \leq \frac{1-\gamma}{2(1+3\beta)}. \quad (10)$$

#### 4. النتائج ومناقشتها

نقدم في ما يلي تقديرات جديدة ومحسنة لمحدد هانكل الثاني في كل من الصفين  $\mathcal{H}_\sigma(\alpha, \beta)$  و  $\mathcal{H}_\sigma(\gamma, \beta)$  و الصفوف المتفرعة عنها  $\mathcal{H}_\sigma(\alpha, 1)$  و  $\mathcal{H}_\sigma(\gamma, 1)$  باستخدام تقديرات محسنة للمعامل الثالث والرابع للتوابع في هذه الصفوف والمقدمة في دراسات سابقة.

#### مبرهنة 1:

من أجل  $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha, \beta)$  حيث  $0 < \alpha < 1$  و  $\beta > 0$  يكون

$$|H_2(2)| \leq \frac{3\psi(\alpha^2 - 12\alpha + 13) + 2\psi\sqrt{2(\alpha + 2) + 4\beta(\alpha + \beta - \alpha\beta + 2)}}{3\sqrt{2(\alpha + 2) + 4\beta(\alpha + \beta - \alpha\beta + 2)}} \quad (11)$$

$$\cdot \psi = \frac{2\alpha^2}{3(1+3\beta)} \text{ حيث إن}$$

البرهان:

لدينا

$$H_2(2) = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = a_2a_4 - a_3^2$$

من العلاقة (3) فيما يخص المعامل الثاني والعلاقة (7) المحسنة لتقدير المعامل الثالث والعلاقة (9) نجد أن:

$$\begin{aligned}
 H_2(2) &= \frac{2\alpha^4 - 12\alpha^3 + 13\alpha^2}{3(1 + 3\beta)\sqrt{2(\alpha + 2) + 4\beta(\alpha + \beta - \alpha\beta + 2)}} \\
 &\quad - \frac{4\alpha^2}{9(1 + 2\beta)^2} \\
 &= \frac{2\alpha^2(\alpha^2 - 12\alpha + 13)}{3(1 + 3\beta)\sqrt{2(\alpha + 2) + 4\beta(\alpha + \beta - \alpha\beta + 2)}} \\
 &\quad - \frac{4\alpha^2}{9(1 + 2\beta)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_2(2) &= \frac{3\psi(\alpha^2 - 12\alpha + 13) - 2\psi\sqrt{2(\alpha + 2) + 4\beta(\alpha + \beta - \alpha\beta + 2)}}{3\sqrt{2(\alpha + 2) + 4\beta(\alpha + \beta - \alpha\beta + 2)}}
 \end{aligned}$$

ومنة نجد أن:

$$\begin{aligned}
 |H_2(2)| &\leq \frac{3\psi(\alpha^2 - 12\alpha + 13) + 2\psi\sqrt{2(\alpha + 2) + 4\beta(\alpha + \beta - \alpha\beta + 2)}}{3\sqrt{2(\alpha + 2) + 4\beta(\alpha + \beta - \alpha\beta + 2)}}
 \end{aligned}$$

بذلك يتم الإثبات.

**مبرهنة 2:**

من أجل  $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma, \beta)$  و  $0 \leq \gamma < 1$  و  $\beta > 0$  عندئذٍ يكون

$$H_2(2) \leq \frac{(1 - \gamma)\sqrt{\delta + 2\delta^2(1 + 3\beta)}}{2(1 + 3\beta)} \quad (12)$$

$$\delta = \frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)} \text{ حيث إن}$$

البرهان:

لدينا من العلاقة (4) أن:

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)}}$$

ومن النتيجة المحسنة لتقدير المعامل الثالث في الصف  $\mathcal{H}_\sigma(\gamma, \beta)$  المتمثلة بالعلاقة

(8) أن:

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)}$$

وأيضاً لدينا من العلاقة (10) التي تعطي تقديراً للمعامل الرابع في هذا الصف وهي:

$$|a_4| \leq \frac{1-\gamma}{2(1+3\beta)}$$

نجد أن:

$$H_2(2) = \sqrt{\frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)} \frac{1-\gamma}{2(1+3\beta)} - \frac{4(1-\gamma)^2}{9(1+2\beta)^2}}$$

$$H_2(2) = \frac{(1-\gamma)\sqrt{\delta - 2\delta^2(1+3\beta)}}{2(1+3\beta)}$$

$$H_2(2) \leq \frac{(1 - \gamma) \sqrt{\delta + 2\delta^2(1 + 3\beta)}}{2(1 + 3\beta)}$$

بذلك يتم الإثبات.

### مبرهنة 3:

من أجل  $f \in \mathcal{H}_\sigma(\alpha, 1)$  حيث  $0 < \alpha < 1$  يكون

$$|H_2(2)| \leq \frac{(3\alpha^4 - 36\alpha^3 + 39\alpha^2) + 2\alpha^2\sqrt{2\alpha + 16}}{18\sqrt{2\alpha + 16}} \quad (13)$$

من أجل  $f \in \mathcal{H}_\sigma(\gamma, 1)$  حيث  $0 \leq \gamma < 1$  يكون

$$H_2(2) \leq \frac{27\sqrt{2}(1 - \gamma)^{\frac{3}{2}} + 32(1 - \gamma)^2}{648} \quad (14)$$

البرهان:

لدينا  $\psi = \frac{2\alpha^2}{3(1+3\beta)}$

بوضع  $\beta = 1$  نجد  $\psi = \frac{\alpha^2}{6}$

باستخدام المبرهنة (1) نجد أن:

$$|H_2(2)| \leq \frac{(3\alpha^4 - 36\alpha^3 + 39\alpha^2) + 2\alpha^2\sqrt{2\alpha + 16}}{18\sqrt{2\alpha + 16}}$$

بذلك نحصل على الفرع الأول من المبرهنة

$$\delta = \frac{2(1-\gamma)}{3(1+2\beta)} \quad \text{لدينا}$$

$$\delta = \frac{2(1-\gamma)}{9} \quad \text{بوضع } \beta = 1 \text{ نجد أن}$$

باستخدام المبرهنة (2) نجد أن:

$$H_2(2) \leq \frac{27\sqrt{2}(1-\gamma)^{\frac{3}{2}} + 32(1-\gamma)^2}{648}$$

بذلك نحصل على الفرع الثاني من المبرهنة.

## 6. الاستنتاجات والتوصيات

تم إيجاد تقدير لمحدد هانكل الثاني  $H_2(2)$  في كل من الصفيين  $\mathcal{H}_\sigma(\alpha, \beta)$ ,

$\mathcal{H}_\sigma(\gamma, \beta)$  والصفوف المتفرعة عنها  $\mathcal{H}_\sigma(\alpha, 1)$ ,  $\mathcal{H}_\sigma(\gamma, 1)$  وذلك باستخدام نتائج

محسنة لتقدير المعامل الثالث والرابع في دراسات سابقة مذكوره في المراجع

[13,12,11,10] ونوصي بمحاولة تعريف صفوف جديدة باستخدام مؤثرات اشتقاق

معرفة حديثاً وإيجاد تقديرات لبعض المعاملات الابتدائية بهدف الحصول على تقدير

لمتراجحة فكيت شيغو أو محدد هانكل الثاني لمعاملات التوابع في هذا الصف.

- [1] DUREN P, 1983-**Univalent functions**. Springer, New York, 259.
- [2] NOONAN J, THOMAS D, 1976-**On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions**. Amer. Math. Soc., 223(2), 337-346.
- [3] LEWIN M, 1967- **On a coefficient problem for bi-univalent functions**, Proc. Amer. Math. Soc. 18, 63-68.
- [4] BRANNAN A, CLUNIE J, 1980-**Aspects of contemporary complex analysis Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham**, Academic Press New York, July 120.
- [5] KEDZIERAWSKI A, 1985-**Some remarks on bi-univalent functions**, Ann. Univ. Mariae CurieSk lodowska Sect. A 39, 77-81.
- [6] BRANNAN D, TAHA T, 1986-**On some classes of bi-univalent functions**, Univ. Babes-Bolyai Math. 31(2) (1986),70-77.
- [7] MURUGUSUNDARAMOORTHY G, MAGESH N, PRAMEELA V, 2013-**Coefficient bounds for certain subclasses of bi-univalent function**, Abstract and Applied Analysis, Article ID 573017, 3 pages.
- [8] ZAPRAWA P, 2014-**Estimates of initial coefficients for bi-univalent functions**, Abstr. Appl. Anal., Article ID 357480, 6 pages.

- [9] FRASIN B, 2014-**Coefficient bounds for certain classes of bi-univalent functions**, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics ,Vol 43 (3) , 383 – 389.
- [10] BADDUR H, ALI M, AYASH M, 2018-**Estimates of Initial Coefficients in Some Subclasses of Bi-Univalent Functions**, Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies, Vol. (40) No. (3).
- [11] BADDUR H, ALI M, AYASH M, 2018-**On Estimates of Initial Coefficients in Some Subclasses of Analytic and Bi-Univalent Functions**, International Journal of Novel Research In Physics Chemistry & Mathematics, Vol. (5) Issue 1, pp 61-69.
- [12] BADDUR H, ALI M, AYASH M, 2021-**Estimates of Initial Coefficients in Some Subclasses of Analytic and Bi-Univalent Functions**, Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies, Vol. (43) No. (4).
- [13] BADDUR H, ALI M, AYASH M, 2022-**Coefficient Estimates for the Fekete-Szegö Problem for Some Subclasses of Analytic and Bi-Univalent Functions**, Tartous University Journal for Research and Scientific Studies, Vol. (6) No. (5).

## التغيرات النسيجية المرافقة لتأثير EDTA على

### شحوم الدم في الهامستر (القاد) السوري

قمر العبدالله \* أ. د. سمير حمود \*\* أ. د. محي الدين العلي \*\*\*

#### الملخص

أجريت الدراسة على 40 هامستر (قاد)، بعمر (3-4) أشهر تقريباً ووزن متقلب (89-93) غ، قُسمت إلى ست مجموعات (خمس هامسترات للشاهد وسبع هامسترات في كل مجموعة تجريبية)، حُوت الـ EDTA على الشكل التالي: أعطيت للمجموعة الأولى (A) الشاهد الغذاء الطبيعي فقط، بينما غذيت المجموعة الثانية (B) بحمية عالية الدهون وتوكت نون تجريع بالـ EDTA كشاهد سلبي، أما المجموعتان الثالثة والرابعة (C,D) فقد غذيتا لمدة 15 يوماً بحمية عالية الدهون ثم حُوت بالـ EDTA يوماً لمدة 10 أيام بتركيزين (10 ملغ/مل و40 ملغ/مل) وذلك لؤاسة الدور العلاجي لـ EDTA على شحوم وبعض إنزيمات وكهوليات الدم، في حين غذيت المجموعتان الخامسة والسادسة (E,F) بحمية عالية الدهون جنباً إلى جنب مع تجريعها الـ EDTA من بداية التجربة لنهايتها تحرياً عن الدور الوقائي لـ EDTA.

لقد أظهرت الدراسة أظهرت الؤاسة العيانية والنسجية لعينات الكبد والقلب وجود تغيرات اشتملت على وجود تنكسات بروتينية ودهنية في المجموعة B والمجموعتين E&F الوقائيتين وحالات نزف ونخر خلوي، تؤكد ما وصلنا إليه نتيجة لؤاستنا البيوكيميائية من ارتفاع في الإنزيمات الكبدية ناقلة الأمين آلانين ALT وناقلة الأمين أسبرتات AST،

أما عينات كبد وقلب المجموعتين العلاجيتين (C,D) فكانت أقرب للشاهد، مما يؤكد الدور العلاجي لؤا الوقائي لاستعمال الـ EDTA في الحد من التأثيرات السلبية لترسبات الشحوم في الدم والأحشاء

الكلمات المفتاحية : EDTA - هامستر - شحوم وإنزيمات وكهوليات الدم.

# Histological changes associated with the effect of EDTA on blood lipids in Syrian hamsters

## Summary

The study was conducted on 40 hamsters, about (3-4) months old and similar weight (89-93) g, divided into six groups (five control hamsters and seven hamsters in each experimental group), EDTA was dosed as follows: It was given to the first group (( A is the control natural food only, while the second group ((B) was fed a high-fat diet and was left without EDTA as a negative control, while the third and fourth groups (C, D) were fed for 15 days a high-fat diet, then they were dosed with EDTA daily for 10 days with two concentrations ( 10 mg/ml and 40 mg/ml) in order to study the therapeutic role of EDTA on lipids and some blood enzymes and electrolytes, while the fifth and sixth groups (E, F) were fed a high-fat diet along with EDTA dose from the beginning of the experiment to its end, in order to investigate the preventive .role of EDTA

The study showed that the macroscopic and histological study of the liver and heart samples showed the presence of changes that included the presence of protein and fat degenerations in group B and the two preventive groups E & F, and cases of bleeding and cellular necrosis, confirming what we have reached as a result of our biochemical study of a rise in liver enzymes ALT, AST As for the liver and heart samples of the two treatment groups (C and D), they were closer to the control, which confirms the therapeutic, not the preventive, role of the use of EDTA in reducing the negative effects of lipid deposits in the blood and viscera studied.

**Keywords: EDTA- hamsters- lipids and enzymes electrolytes.**

المقدمة والدراسات السابقة:

يستخدم الحمض إيثيلين ثنائي امين رباعي حمض الخل (Ethylene Diamine Tetra Acetic acid EDTA) في الطب لمنع تخثر عينات الدم وإزالة الكالسيوم والرصاص من الجسم.

هناك أدلة على أن العلاج بـ EDTA فعال في أمراض القلب والأوعية الدموية، ويُعتقد أنه قد يساعد الأشخاص الذين يعانون من ارتفاع شحوم الدم وتصلب الشرايين أو أمراض الأوعية الدموية الطرفية (انخفاض تدفق الدم في الأطراف) عن طريق تنظيف الشرايين من الكوليسترول وتحسين تدفق الدم.

وقد يؤدي الإفراط في تناوله إلى تلف الكلى وانخفاض مستويات الكالسيوم بشكل خطير والموت .

يستخدم (EDTA) على نطاق واسع في المجالات الطبية والهندسية والزراعية والصناعية، وكمادة حافظة في الأغذية والمشروبات، لكن تفاعله مع حمض الأسكوربيك وبيكربونات الصوديوم في المشروبات الغازية مكوناً مادة مسرطنة يستوجب الحذر<sup>[1]</sup> .

وتطرق الدليل الإرشادي لمنظمة الصحة العالمية (1998) بخصوص جودة مياه الشرب الحاوية على حمض الإيديتيك (EDTA) إلى دوره المخفض لوزن الجسم<sup>[2]</sup>.

وزيادة تركيز ( Alanine amino و Aspartate amino transferase (AST) و Alanine amino transferase (ALT) واسعة الإنتشار في الكبد والقلب عند استخدام EDTA وقائياً، وقد

كانت متفقة مع نتائج [3,4,5] التي نوهت للتأثيرات الجانبية لاستخدام EDTA على خلايا الكبد والكلى (سمية كبدية وفشل كلوي).

أفادت دراسة لـ [6] أن تناول EDTA قلل من تراكم الكوليسترول في كبد الأرانب المغذاة بالحمية الغنية بالكوليسترول، مع العلم أن فرط شحميات الدم يعتبرالسبب الرئيسي للذبحة الصدرية ونوبات القلب وداء الشرايين المحيطية.

وفي دراسة لـ [7] لم يكن لـ (EDTA) أي تأثير على نسبة الدهون في دم مرضى تصلب الشرايين، أو أية فروق ذات دلالة في التركيز البلازمي لكولسترول البروتين الدهني منخفض الكثافة (LDL) وكولسترول البروتين الدهني عالي الكثافة (HDL) والكوليسترول والدهون الثلاثية، الذي يستخدم أيضاً كعلاج طارئ لفرط كالسيوم الدم والتحكم في عدم انتظام ضربات القلب.

واعتبر الباحث [8] أمراض القلب والأوعية والفشل الكلوي بتكلس الأوعية VC، عند الشيخوخة هي السبب الرئيسي للوفاة عالمياً. وقد تم اختبار المعالجة بالاستخلاب بـ EDTA النانوي في الفئران المصابة بالفشل الكلوي بالشرايين المتكلسة، ونزع المعادن وتحسين وظيفة الشرايين دون آثار جانبية. وقد شكل هذا خطوة رئيسية نحو تطوير العلاج الاستخلابي بـ EDTA الموجه باعتباره نهجاً علاجياً غير تقليدي لإزالة التكتلات المرضية لدى مرضى الكلى المزمن.

لقد استخدم [9] اختزال رواسب الكالسيوم ونزع المعادن الثقيلة من الشريان التاجي بواسطة EDTA لعلاج الذبحة الصدرية. حيث يلعب الإجهاد التأكسدي دورًا مهمًا في اختلال وظائف البطانة الشريانية وتصلب الشرايين، ويساهم أي تعديل في عوامل الخطر القلبية والاستفادة من مضادات الأكسدة في تحسين وظيفة هذه البطانة.

وإستخدام الباحث بامبلا وآخرون [10] العلاج بالاستخلاب EDTA للحد من أمراض القلب والأوعية الدموية لدى مرضى السكري، التي حدّت من الأحداث القلبية اللاحقة، وأشارت الدراسة إلى أن العلاج بالخلاّب EDTA مع فيتامين مكمل قد أظهر نتيجة مهمة في معالجة المشكلات القلبية الوعائية، وكان لإزالة المعدن أهمية كبيرة عند الأشخاص الذين يعانون من مرض السكري .

وفي دراسة أخرى [11] عن تأثير أنواع مختلفة من مضادات التخثر ، كان لاستخدام EDTA تأثير معنوي في تراكيز بعض المتغيرات المقاسة في البلازما باستثناء الجلوكوز، GGT، الكوليسترول مقارنة بالمصل<sup>[15]</sup>.

أشار الباحثان عباد وخالد [12] إلى أن الكثيرين من المصابين باحتشاء عضلة القلب استفادوا من العلاج بـ EDTA، لكن فعالية العلاج بالخلاّب في الحد من الأحداث القلبية الوعائية المتكررة غير واضحة، وتحتاج إلى تجارب إضافية مصممة بعناية.

تابع الباحث أنتو وآخرون [13] دراسة تأثير مضادات التخثر على الدهون في عينات البلازما، دون ملاحظة تغييرات كبيرة في مستوى TG في الأتابيب الحاوية على EDTA.

### هدف البحث Objectives of the study :

- التعرف على التأثير الوقائي لاستخدام EDTA في حالات ارتفاع كوليسترول الدم وتصلب الشرايين.
- تحري الإمكانية العلاجية لحالات ارتفاع شحوم الدم ومضاعفاتها.
- دراسة التأثير الأمثل لجرعتين مختارتين من EDTA على مستويات دهون وإنزيمات وشوارد الدم.

### مواد وطرائق البحث Materials and Methods :

أجري البحث على 40 حيوان هامستر (قداد) سوري وبعمر تقريبي (3-4) أشهر، ووزن (89-92غ)، وضعت في أقفاص بلاستيكية مفروشة بنشارة الخشب، في ظروف مناسبة من الاضاءة والتهوية ودرجة الحرارة.

قُسمت حيوانات التجربة لسبع مجموعات: (الأولى A) شاهد ايجابي غذيت بنظام غذائي طبيعي، (الثانية B) شاهد سلبي غذيت بحمية غذائية عالية الدهون دون معالجة، والمجموعتان الثالثة والرابعة (C&D) علاجتان غذيتا بحمية عالية الدهون لمدة 15 يوم ثم أعطيت بعدها EDTA لمدة 10 أيام بجرعتين مختلفتين. والخامسة والسادسة (E&F) وقائيتان غذيتا بحمية عالية الدهون بالتزامن مع إعطاء EDTA مدة 20 يوماً بجرعتين مختلفتين.

خُضر النظام الغذائي عالي الدهون على الشكل التالي :

علف محبب ( بيليت) 610غ + زيت فول الصويا 300 مل + كولسترول 5غ + دي  
أوكسي كولسترول 5غ + فركتوز 100غ = 1كغ، على شكل حبيبات بواقع 3غ لكل حبة  
، وغذيت الحيوانات بمعدل 10غ للحيوان الواحد يومياً، وسمح للحيوانات بالوصول الحر  
إلى الماء .

سحبت عينات الدم بداية التجربة وبعد التغذية عالية الدهون وتجريع الـ EDTA ونهاية  
التجربة، حيث تم سحب الدم من القلب بأنابيب تحوي مانع تخثر ثم ثقلت بالطرد المركزي  
1500دورة/د لمدة خمس دقائق عند درجة حرارة 4مئوية وذلك لتقدير نسبة كولسترول  
البلازما والدهون الثلاثية وLDL وHDL، ونسبة الشوارد المعدنية ، إضافة لتحري نشاط  
الأنزيمات ناقلة الأمين SGPT و SGOT.

وضعت الحيوانات تحت المراقبة فور استقبالها وسجلت تغيراتها السلوكية والصحية. قتلت  
الحيوانات نهاية التجربة وحفظت عيناتها النسيجية في الفورمالين 10% ثم تم الادمج  
والتقطيع والتلوين حسب طريقة [14]، وفحصها بواسطة المجهر الضوئي لتحري توضعات  
الشحوم في الكبد والقلب وجدران الأوعية الدموية.

النتائج والمناقشة:

1- التغيرات النسيجية العيانية Macroscopic changes :

- للمجموعة الأولى الشاهد (A): لم تكن هناك تغيرات مرضية في الكبد، الذي تميز بشكله الطبيعي المخروطي، ولونه البني الترابي المعتاد وحوافه الحادة.



الشكل (1) يبين الصورة العيانية لكبد من المجموعة A .

- للمجموعة الثانية (B): المعطاة الحمية عالية الدهون لوحظ الطيف الرمادي - المصفر في الكبد نتيجة التنكس البروتيني - الدهني مقارنة مع الشاهد A. ما يؤكد الدراسات البيوكيميائية و دور التغذية عالية الدهون في رفع مستوى شحوم الدم والتسبب بتكسبات مختلفة ونخر في الكبد والقلب.



الشكل (2) يبين الصورة العيانية لكبد من المجموعة B .

- في المجموعة الثالثة أو العلاجية (C) 10 مغ/مل لم تلاحظ تغيرات عيانية واضحة.

وبالنسبة لعينات المجموعة الرابعة (D) العلاجية بـ EDTA التي تلقت الجرعة 40مغ/مل : وكان الكبد بشكله ولونه الطبيعي. وهذا يتفق مع نتيجة دراستنا البيوكيميائية وخفض EDTA لكوليسترول الدم ووظائف الـ AST,ALT .



الشكل (4) يبين الصورة العيانية لكبد من

المجموعة D



الشكل (3) يبين الصورة العيانية لكبد من

المجموعة C

- لوحظ في المجموعتين الخامسة (E) والسادسة (F) الوقائيتين بتركيزي 10مغ/مل و40مغ/مل على التوالي الطيف المصفر وشحوب مع مناطق بنية داكنة.



الشكل (5) يبين الصورة العيانية لكبد من المجموعة E .

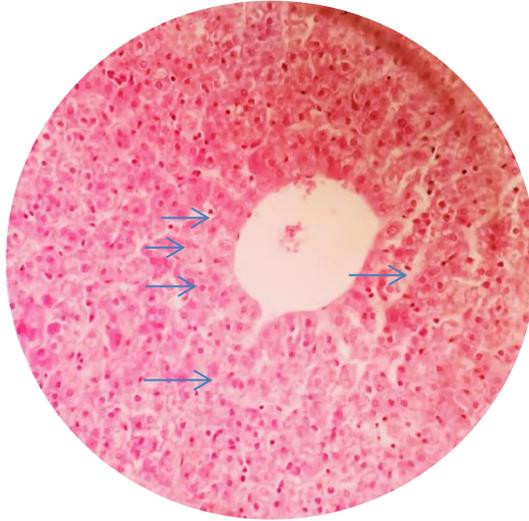


الشكل (6) يبين الصورة العيانية لكبد من المجموعة F .

## 2-التغيرات المجهرية Microscopic changes :

التغيرات التشريحية المرضية لعينات من الكبد:

**المجموعة الشاهد A:** أظهرت المحضرات النسيجية التي تم إعدادها من عينات الكبد في المجموعة الشاهد البنية النسيجية الطبيعية حيث يحتوي كل فص كبدي على وريد مركزي محاطاً بحبال من الخلايا الكبدية المضلعة الشكل منتظمة بشكل شعاعي, ويفصل بين الخلايا جيبانات دموية, تبطن بنوعين من الخلايا بطانية جيبانية وخلايا كوبفر البلعمية Kupffer cell, كما تلاحظ المنطقة البابية Portal area بشكلها الطبيعي تحتوي وريد بابي وقناة صفراوية.



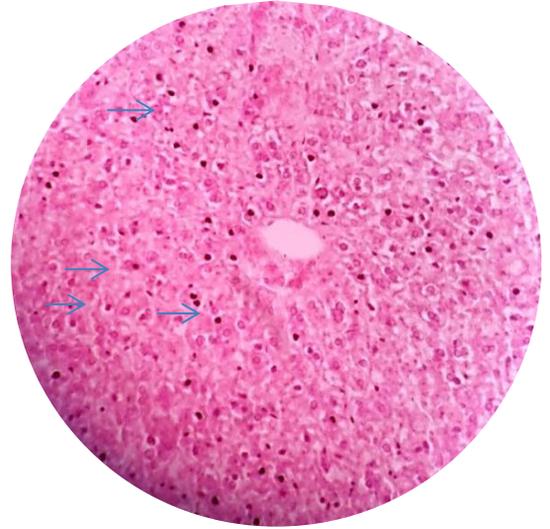
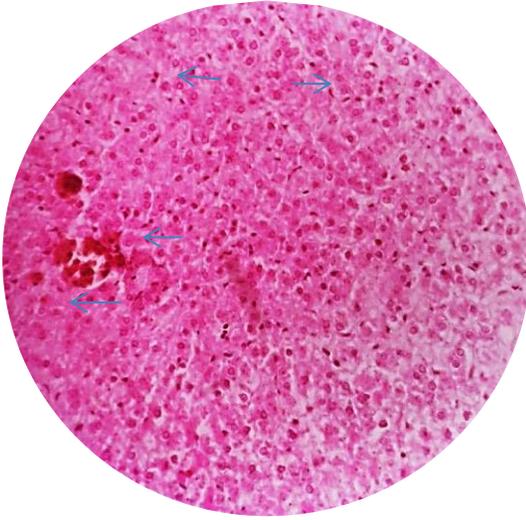
الشكل(7)مقطع عرضي في عينة كبد شاهد توضح  
التوضع الطبيعي لخلايا الكبد حول الوريد  
المركزي. X400 (H&E)



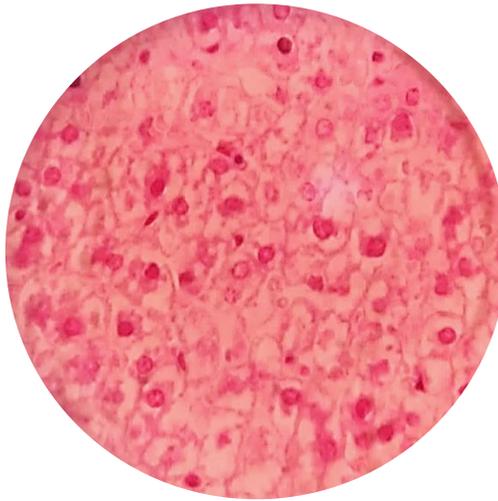
الشكل (8) مقطع عرضي في عينة كبد شاهد  
يوضح المنطقة البابية وفيها الوريد والقناة  
الصفراوية. X400 (H&E)

### المجموعة B:

يلاحظ اضطراب توضع الخلايا الكبدية حول الوريد الكبدي المتسع المحتقن بشدة،  
والجيبانات غير الواضحة، مع علامات تكثف نووي في بعض الخلايا، وتتكس بروتيني  
حبيبي واضح.



الشكل (9) مقطع عرضي في الكبد يوضح حالات البكنوز والنخر الخلوي في الخلايا الكبدية. (H&E) X400  
الشكل (10) مقطع عرضي في الكبد يوضح ارتشاح الصفراء في المنطقة البابية. (H&E) X400

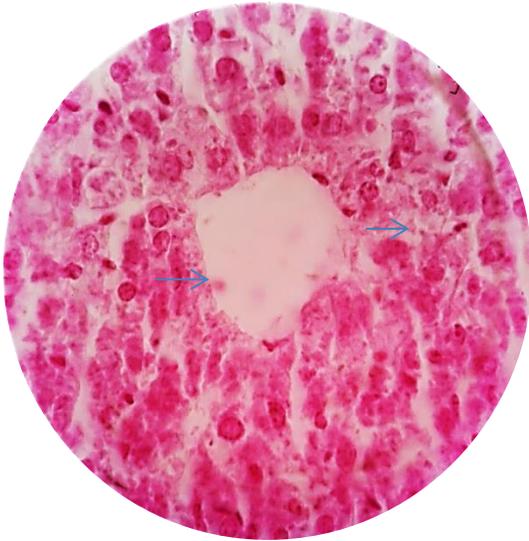


الشكل (11) مقطع عرضي في الكبد توضح التنكس الفجوي المائي في الخلايا . (H&E) X400

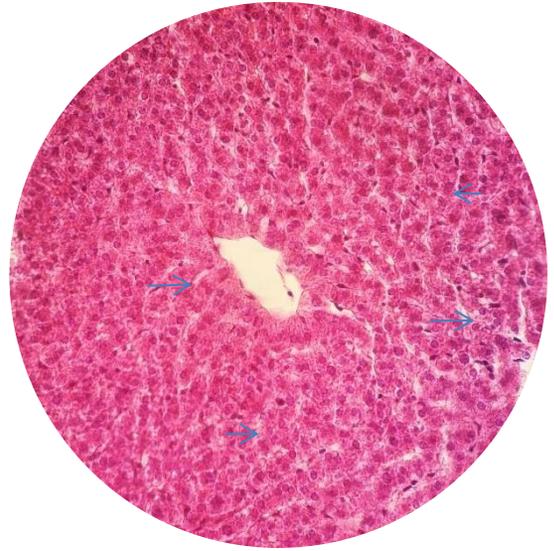


الشكل (12) مقطع عرضي في نسيج الكبد يوضح المنطقة البابية والتنكس الشحمي. X400 (H&E)

**المجموعة C:** يلاحظ النسيج الكبدي القريب من الطبيعي والتوضع شبه الطبيعي لخلايا الفصيصات الكبدية بحجمها المعتاد حول الوريد المركزي المتسع بعض الشيء في العينات المدروسة، التوسع في بعض جيبانات الكبد ، تبدي بعض المقاطع حالات احتقان وريدي وتنكس بروتيني حبيبي، وبعض حالات التضاعف النووي.



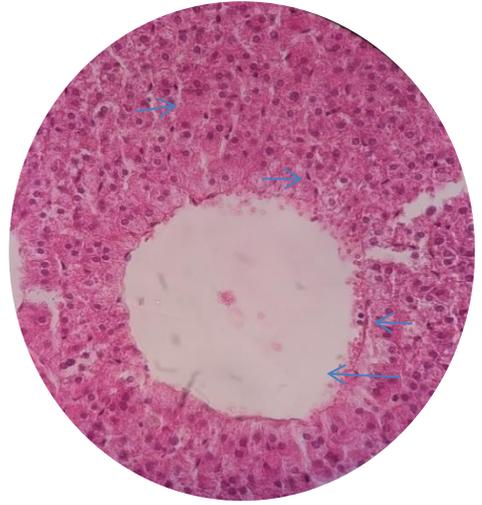
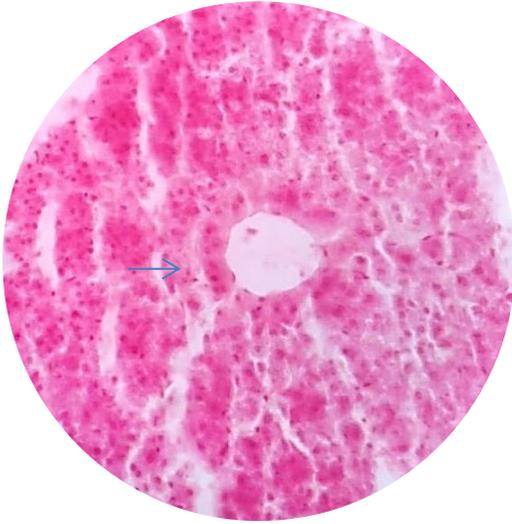
الشكل (14) مقطع عرضي يوضح التوضع شبه الطبيعي للخلايا الكبدية. (H&E) X400



الشكل (13) مقطع عرضي يوضح التوضع شبه الطبيعي للخلايا الكبدية. (H&E) X400

#### المجموعة D:

تبدو المحضرات في معظم المقاطع النسيجية طبيعية، ما خلا بعض بؤر التتكدس الحبيبي وحالات التكدف النووي، وملاحظة خلايا كوبر في بعض جيبانات الكبد.



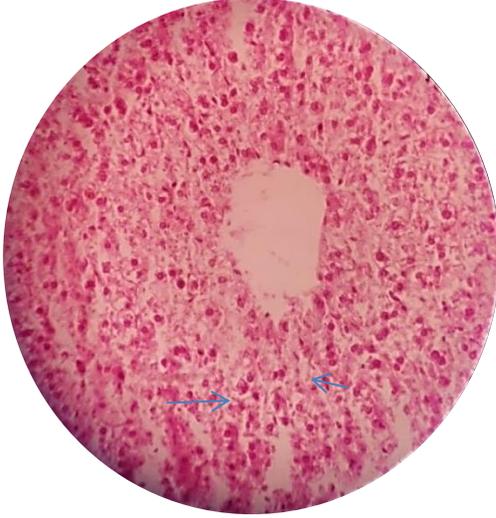
الشكل (16) مقطع عرضي يوضح النسيج الكبدي بشكله الطبيعي. X400 (H&E)

الشكل (15) مقطع عرضي يظهر الوريد المركزي والخلايا حوله مصطفة بشكل طبيعي. X400 (H&E)

### عينات المجموعة E:

لوحظ اضطراب التوضع الطبيعي لخلايا الفصيصات الكبدية وتخریب واضح في خلايا الكبد وصل إلى حد النخر الخلوي توسع جيوانات الكبد وبعض حالات التحوصل الخلوي (قد تكون حالات تتكس دهني).

احتقان الاوردة الكبدية ونزوف في جيوانات الكبد المتسعة، بؤر من التتکس البروتيني الحبيبي والتتکس الفجوي، وتبدي بعض المقاطع تتكسات دهنية واضحة وحالات موات (نخر) في خلايا الكبد، وتكثف النواة (بكنوز) مع توضع لبعض الخلايا الإلتهابية وخلايا كوبر في جيوانات الكبد.

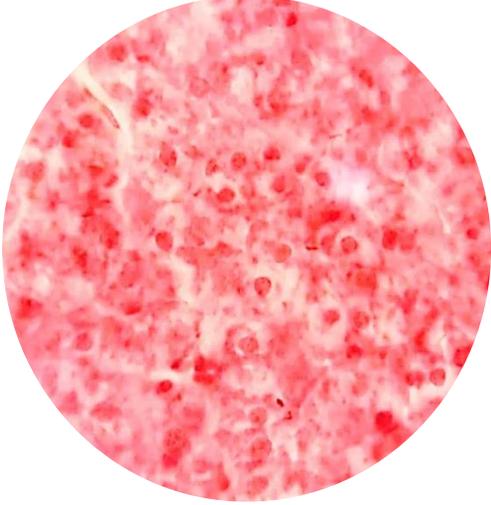
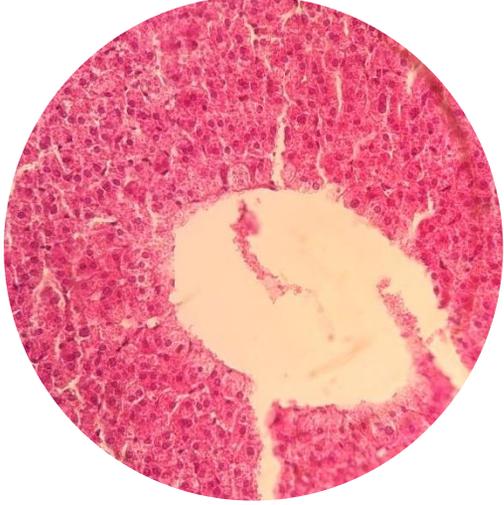


الشكل (18) مقطع عرضي يوضح التتكدس الدهني  
في نسيج الكبد. X1000 (H&E)

الشكل (17) مقطع عرضي بالكبد يوضح  
التضاعف النووي. X400 (H&E)

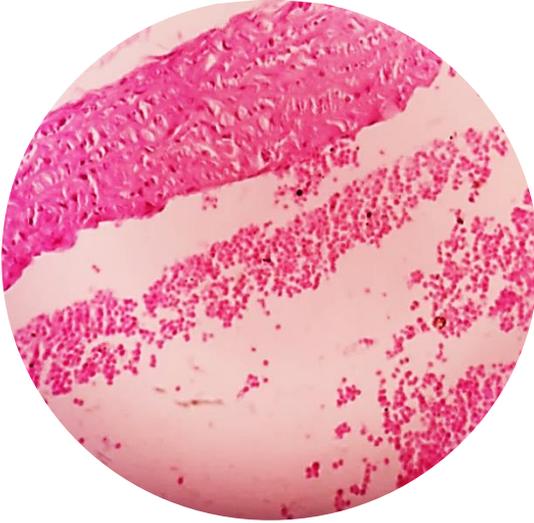
### المجموعة F :

يلاحظ عموماً احتقان شديد وتوسع في الوريد المركزي لفصيصات الكبد، وبعض التتكدسات البروتينية والدهنية في هيولى خلايا الكبد وحالات تحوصل خلوي، وبعض بؤر النخر الخلوي والتضاعف النووي والتكثف النووي والتوضع الزائد أحياناً لخلايا كوففر في جيوانات الكبد المحتقنة والمتسعة. تلاحظ في بعض المقاطع بؤر احتقان ونزف صريح وتوضع الخلايا الإلتهابية.

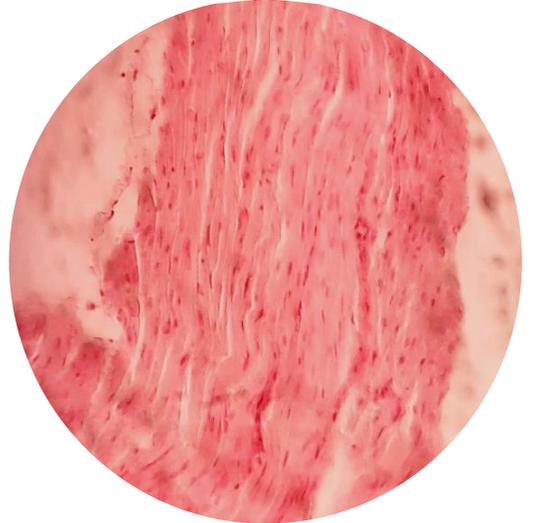
	
الشكل (20) مقطع عرضي يوضح التتكس الفجوي. (H&E) X1000	الشكل (19) مقطع عرضي يوضح حالات النخر الخلوي والتتكس الحبيبي. (H&E) X400
	
الشكل (22) مقطع يوضح وجود حالات نخر (H&E) X400 .	الشكل (21) مقطع عرضي في الكبد يوضح الخلايا الالتهابية وحالات بكنوز. (H&E) X400

التغيرات التشريحية المرضية لعينات من القلب

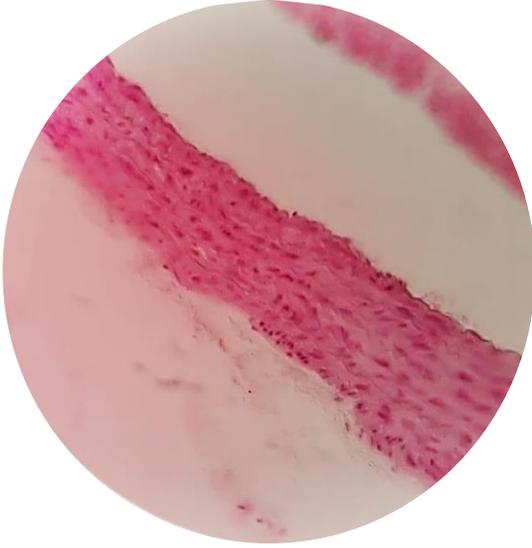
**عينات المجموعة A:** تشاهد العضلة القلبية بأليافها الطبيعية، يبطن أجوافها الشغاف، وحولها التامور، ويلاحظ الشريان المحتقن، بجداره الثخين ذو الألياف المرنة المتراسة الكثيفة، والبطانة الطبيعية، تحيط به طبقة مصلية رقيقة.



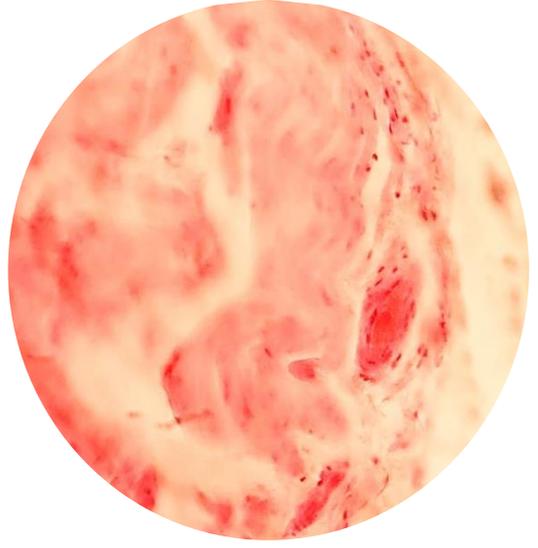
الشكل (24) مقطع عرضي في القلب يوضح نسيج القلب مع الشغاف والتامور. (H&E) X400



الشكل (23) مقطع عرضي قلبي طبيعي مع الشغاف والتامور. (H&E) X400



الشكل (26) مقطع عرضي يوضح جدار شريان نظيف  
(H&E) X400 .



الشكل (25) مقطع عرضي يوضح شريان اكليلي .  
(H&E) X400

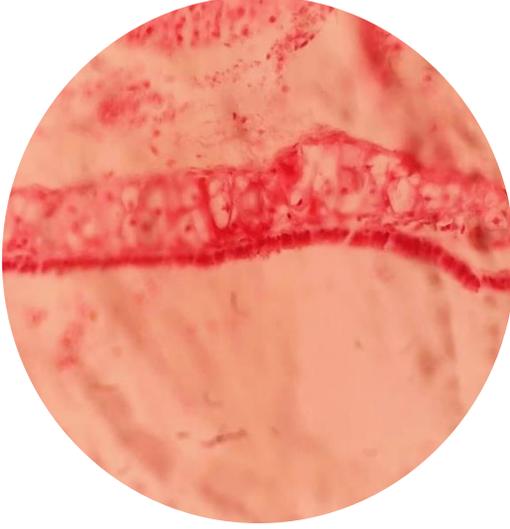
**المجموعة B:** تتميز المحضرات النسيجية القلبية بتوضع كتلة كبيرة من الدهون حول

تامور القلب، وتنكس وضمور وتقطع بعض الالياف العضلية القلبية، وبعض التليفات تحت

التامور مباشرة. ما يفسر حالات النفوق التي حصلت لبعض حيوانات هذه المجموعة.

تلاحظ في بعض المقاطع تنكسات دهنية في الألياف العضلية وتحت الشغاف أيضاً، كما

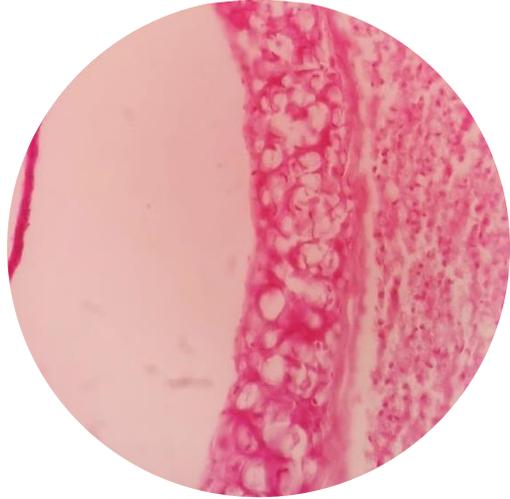
يلاحظ تهتك جدار الشريان المحتقن.



الشكل (28) مقطع عرضي يوضح وتكس دهني في جدار الأذينة. (H&E) X400



الشكل (27) مقطع عرضي يوضح تراكم الدهون فوق التامور وحول القلب. (H&E) X400



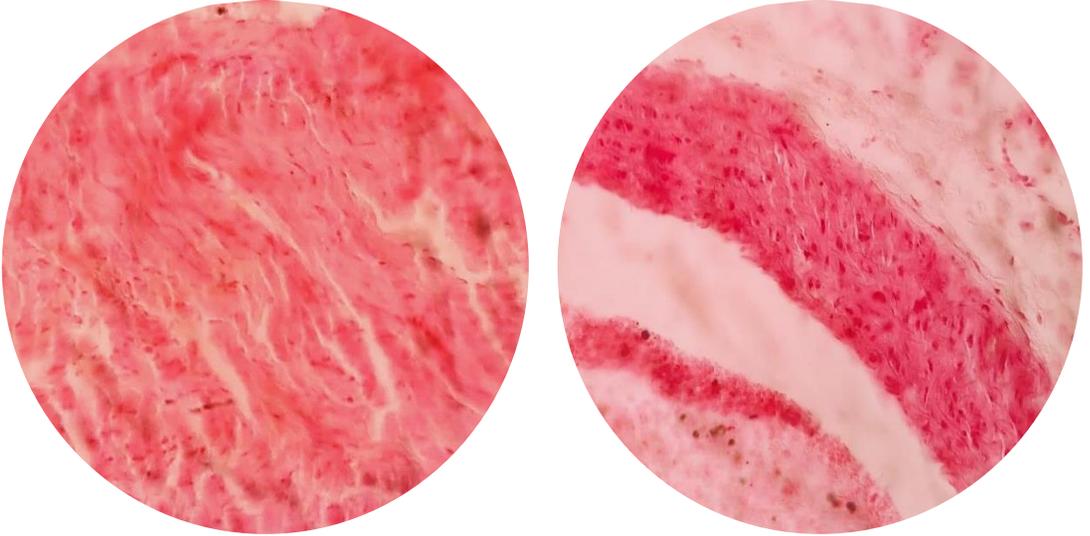
الشكل (30) مقطع عرضي في القلب يوضح التكتس الدهني. (H&E) X400



الشكل (29) مقطع عرضي في القلب يوضح تراكم الشحوم. (H&E) X100

المجموعة C:

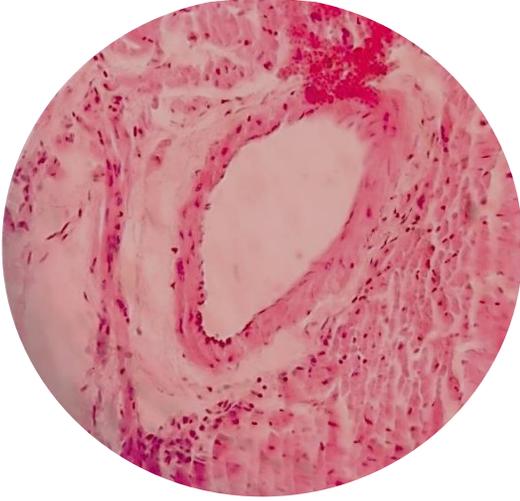
**المجموعة C:** الألياف العضلية قريبة من الطبيعية، لكن ما تزال هناك كمية قليلة من الدهن حول القلب، وبعض الألياف العضلية المتكسدة، إلى جانب المناطق شبه الطبيعية حولها التامور والشغاف السليمين.



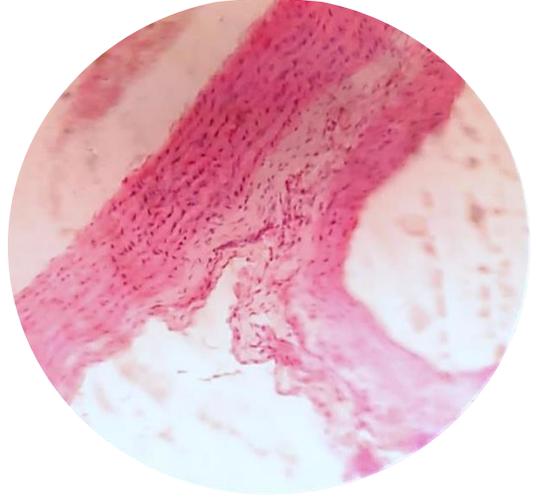
الشكل (31) مقطع عرضي يوضح توضع الألياف القلبية بشكل طبيعي. (H&E) X400

الشكل (32) مقطع عرضي يوضح جدار شريان. (H&E) X400

**المجموعة D:** تبدو ألياف العضلة القلبية شبه طبيعية، دون ترسبات دهنية على الشغاف والتامور، ما خلا بعض الساحات المجهرية. كما تخلو جدران الشرايين من أية ترسبات.



الشكل (34) مقطع يوضح شريان وعضلة القلب.  
(H&E) X400.



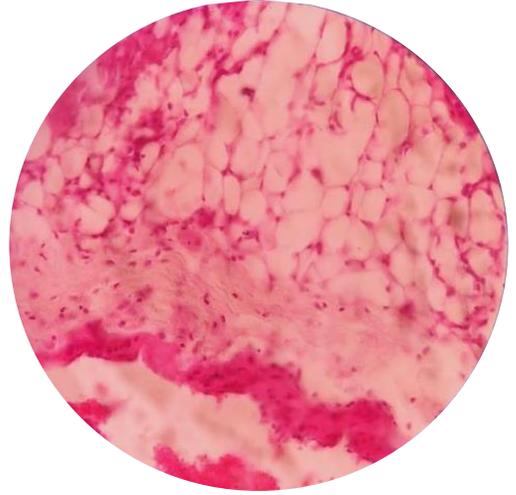
الشكل (33) مقطع عرضي يوضح نسيج القلب  
(H&E) X400.

### المجموعة E:

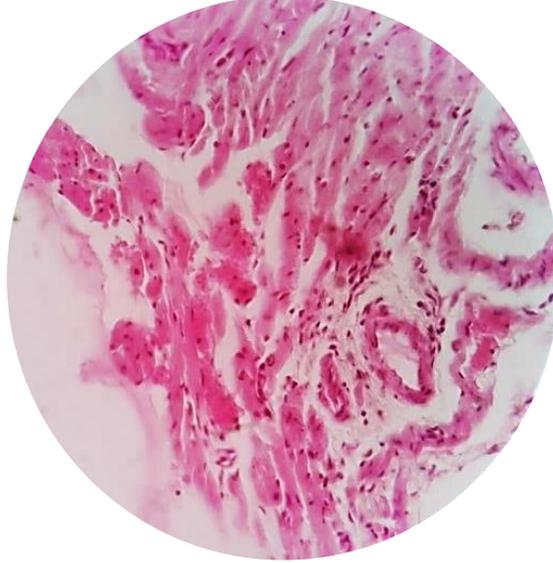
تلاحظ بعض الاحتقان والنزف في العضلة القلبية، مع بؤر تقطع في الألياف العضلية وتوضع للخلايا الإلتهابية وبعض كتل التجمعات الدهنية حول القلب.



الشكل (36) مقطع عرضي في القلب يوضح حالات النزف.. X400 (H&E)



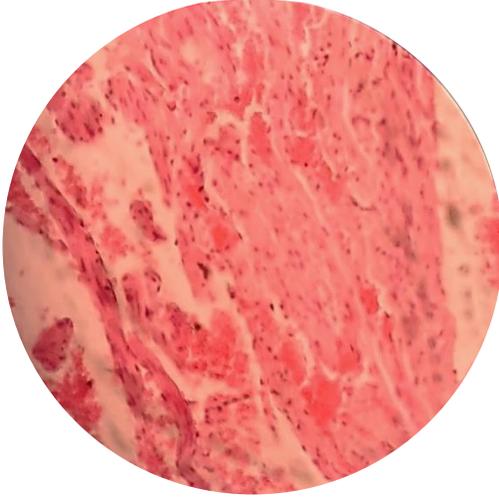
الشكل (35) مقطع عرضي يوضح التشحم حول العضلة القلبية. X400 (H&E)



الشكل (37) مقطع عرضي يوضح الشريان  
وتوضع قطرات الدهن. (H&E) X400.

**المجموعة F:** تلاحظ بعض بؤر تنكس دهني شديد في العضلة القلبية وتراكم الدهون

حولها، ورشح خلوي التهابي مع نزف بين الألياف العضلية المتقطعة.



الشكل (38) مقطع عرضي يوضح التكتس الدهني والنزف. X400 (H&E)  
الشكل (39) مقطع عرضي يوضح النزف وتقطع الألياف. X400 (H&E)  
الاستنتاجات والمقترحات:

- أوضحت نتائج الدراسة العيانية والنسجية لعينات الكبد والقلب وجود تغيرات اشتملت على وجود تنكسات بروتينية ودهنية في المجموعة B والمجموعتين E&F الوقائيتين وحالات نزف ونخر خلوي، تؤكد ما وصلنا إليه نتيجة دراستنا البيوكيميائية من ارتفاع في الإنزيمات الكبدية ALT,AST .
- لم يلاحظ تغييرات في عينات كبد وقلب المجموعتين العلاجيتين (C,D) حيث كانت أقرب للشاهد، مما يؤكد الدور العلاجي لا الوقائي لاستعمال الـ EDTA في الحد من التأثيرات السلبية لترسبات الشحوم في الدم والأحشاء المدروسة.
- لم يلاحظ في محضرات الشرايين أي ترسبات في الجدران .

▪ يوصى باستخدام EDTA بناءً على نتائج بحثنا للأغراض العلاجية وبالجرعات

المناسبة لمرضى ارتفاع الضغط والسكري وارتفاع شحوم الدم.

## :References المراجع

- [1]- DUGALD MR SEELY, Ping Wu, Edward J MiLLs, **EDTA chelation therapy** for cardiovascular disease: a systematic review, BMC Disorders, VoL. 5, No.32, (2005) pp.1-6
- [2]- WHO , Guide lines for Drinking – water Quality Edetic acid (EDTA) in Drinking – water (1998) World Health organization 2nd ed. Vol. (2).
- [3]- Ananya , M .(2014). Chelation therapy side effect comprehensive Health and wellness center Utah university Utah state-USA
- [4] Julian , J .(1990). Evaluation of the potential Role of chelation Therapy in Treatment of Low to Moderate Lead Exposures. Environmental Health Per (89) p : 67-74.
- [5]- Gil, H. W.; E. J.; E. J. kang and H. K. Lee .(2011). Effect of glutathione on the cadmium chelation of EDTA in a patient with cadmium in toxication. Hum Exp. Toxicol . 30 (1) : 79-83.
- [6]- Uhl, H. S., Dysko, R. C., & Clair, R. W. S. (1992). EDTA reduces liver cholesterol content in cholesterol-fed rabbits. *Atherosclerosis*, 96(2-3), 181-188.
- [7]- Guldager, B., Faergeman, O., Jørgensen, S. J., Nexø, E., & Jelnes, R. (1993). Disodium-ethylene diamine tetraacetic acid

(EDTA) has no effect on blood lipids in atherosclerotic patients. A randomized, placebo-controlled study. *Danish Medical Bulletin*, 40(5), 625-627.

[8]- Karamched, S. R. (2019). *Targeted EDTA Chelation Therapy with Albumin Nanoparticles to Reverse Arterial Calcification and Restore Vascular Health in*

[9]- Clarke, C. N., Clarke, N. E., & Mosher, R. E. (1956). Treatment of angina pectoris with disodium ethylene diamine tetraacetic acid. *The American journal of the medical sciences*, 232(6), 654-666.

[10]- Ouyang, P., Gottlieb, S. H., Culotta, V. L., & Navas-Acien, A. (2015). EDTA chelation therapy to reduce cardiovascular events in persons with diabetes. *Current cardiology reports*, 17, 1-9

[11] - Mohri, M., & Rezapoor, H. (2009). Effects of heparin, citrate, and EDTA on plasma biochemistry of sheep: comparison with serum. *Research in Veterinary Science*, 86(1), 111-114

[12]- Ibad, A., Khalid, R., & Thompson, P. D. (2016). Chelation therapy in the treatment of cardiovascular diseases. *Journal of clinical lipidology*, 10(1), 58-62.

[13 ]- Anto, E., Kwame, W., Owiredu, B., Obirikorang, C., Acheampong, E. & Amankwaa, B. (2017). Influence of K2EDTA, sodium citrate and lithium heparin anticoagulants on lipid profile in plasma samples as measured by an automated

[14]- Luna , L.G (1967) : Manual of histological staining methods of the Armed Forces Institute of Pathology . 3rd Edn. McGraw-Hill, New York, U.S.A.

