

# مجلة جامعة البعث

سلسلة العلوم الأساسية



مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 45 . العدد 16

1445 هـ - 2023 م

الأستاذ الدكتور عبد الباسط الخطيب

رئيس جامعة البعث

المدير المسؤول عن المجلة

أ. د. محمود حديد	رئيس هيئة التحرير
أ. د. درغام سلوم	رئيس التحرير

مديرة مكتب مجلة جامعة البعث

بشرى مصطفى

د. محمد هلال	عضو هيئة التحرير
د. فهد شريباتي	عضو هيئة التحرير
د. معن سلامة	عضو هيئة التحرير
د. جمال العلي	عضو هيئة التحرير
د. عباد كاسوحة	عضو هيئة التحرير
د. محمود عامر	عضو هيئة التحرير
د. أحمد الحسن	عضو هيئة التحرير
د. سونيا عطية	عضو هيئة التحرير
د. ريم ديب	عضو هيئة التحرير
د. حسن مشرقي	عضو هيئة التحرير
د. هيثم حسن	عضو هيئة التحرير
د. نزار عبشي	عضو هيئة التحرير

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها

الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة البعث

سورية . حمص . جامعة البعث . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : ++ 963 31 2138071

. موقع الإنترنت : [www.albaath-univ.edu.sy](http://www.albaath-univ.edu.sy)

. البريد الإلكتروني : [magazine@ albaath-univ.edu.sy](mailto:magazine@albaath-univ.edu.sy)

**ISSN: 1022-467X**

## شروط النشر في مجلة جامعة البعث

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
  - طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
  - إذا كان الباحث طالب دراسات عليا:  
يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقة على النشر في المجلة.
  - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:  
يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.
  - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :  
يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.
  - إذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :  
يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.
  - يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):  
عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي ( كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1- مقدمة
  - 2- هدف البحث
  - 3- مواد وطرق البحث
  - 4- النتائج ومناقشتها .
  - 5- الاستنتاجات والتوصيات .
  - 6- المراجع.

- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات ( الآداب - الاقتصاد - التربية - الحقوق - السياحة - التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):
- عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي ( كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1. مقدمة.
- 2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
- 3. أهداف البحث و أسئلته.
- 4. فرضيات البحث و حدوده.
- 5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
- 6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
- 7. منهج البحث و إجراءاته.
- 8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
- 9. نتائج البحث.
- 10. مقترحات البحث إن وجدت.
- 11. قائمة المصادر والمراجع.
- 7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:
  - أ- قياس الورق 25×17.5 B5.
  - ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 - يمين 2.5- يسار 2.5 سم
  - ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8
  - ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20
- . كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي . العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.
- ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.
- 8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.
- 9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.
- 10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:  
آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة . الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة . سنة النشر . وتتبعها معترضة ( - ) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة . دار النشر وتتبعها فاصلة . الطبعة ( ثانية . ثالثة ) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة . وفيما يلي مثال على ذلك:

-MAVRODEANUS, R1986- Flame Spectroscopy. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

. بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة . المجلد والعدد ( كتابة مختزلة ) وبعدها فاصلة . أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة .  
مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases Clinical Psychiatry News ,  
Vol. 4. 20 – 60

ج . إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و  
التقيد

بالبنود ( أ و ب ) ويكتب في نهاية المراجع العربية: ( المراجع In Arabic )

## رسوم النشر في مجلة جامعة البعث

1. دفع رسم نشر (40000) ل.س أربعون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (100000) ل.س مئة الف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (6000) ل.س ستة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

## المحتوى

الصفحة	اسم الباحث	اسم البحث
28-11	د. أحمد الجاعور	تحويل كثيرات حدود ليجندر إلى مصفوفة مربعة مثلثية
52-29	أحمد عوده د. عبد الهادي دله	اصطناع معقدات معدنية جديدة باستخدام النينهيدرين ومشتقات
66-53	د. هديل برباره د. رياض الحميدو مالك الخضير	دراسة لعبة <b>Maker-Breaker</b> التوافقية الموضوعية على بعض البيانات المترابطة
90-67	د. شادي سكرية د. عبد السميع هناتو نور الضللي	دراسة تغير التعبير المورثي والهرموني الناتج عن التعرض لمركب <b>TCDD</b> للمورثات المسؤولة عن مسار الاصطناع الحيوي للإستروجين في خلايا مبيض إناث فئران <b>BALB/c</b>

116-91	وفاء شحادة د. سامح العرجة	دراسة استقرار المعادلة التفاضلية العادية الخطية بعدة تأخيرات زمنية
154-117	أنس خلوف د. إبراهيم إبراهيم	دراسة في انتظام التوابع الكواترنيونية وفقاً لنظام الشرائح



# تحويل كثيرات حدود ليجندر إلى مصفوفة مربعة مثلثية

الدكتور: أحمد الجاعور

أستاذ مساعد في كلية العلوم - جامعة البعث

## المخلص

نعلم أن كثيرات حدود ليجندر المستنتجة من معادلة رودريغ التفاضلية العادية من المرتبة  $n$  وهي:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

تولد كثيرات حدود جبرية من الدرجة  $n$  والتي تستخدم في العديد من التطبيقات الهندسية والتقنية.. الخ

وفي بحثنا هذا نقوم بصياغة كثيرات الحدود على شكل مصفوفات مربعة مثلثية من المرتبة  $n$  لتسهيل التعامل مع كثيرات الحدود من الناحية التطبيقية والحاسوبية ولتوظيفها في المجالات الهندسية.

**الكلمات المفتاحية:** كثيرات حدود ليجندر، مصفوفة كثيرات حدود ليجندر، مصفوفة (ماركوف بالقياس الأولي  $n$ )، المصفوفة المثلثية السفلى، مقلوب مصفوفة. علاقة رودريغ.

## Converting Legendre Polynomials to Square triangle Matrix

### Summary

We know that Legendre polynomials deduced from the ordinary differential equation of nth magnitude are:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

Generates n-degree algebraic polynomials, which are used in many engineering and algebraic applications.etc

In our research, we formulate polynomials in the form of an n-ranked square matrix to facilitate dealing with polynomials from an applied and computational point of view, and to employ them in engineering fields.

### key words:

Legendre polynomial, matrix Legendre polynomial, matrix (Markov with prime n), lower trigonometric matrix, invers matrix, Rodrig relation.

## 1. مقدمة:

مع تقدم تكنولوجيا المعلومات، اكتسبت كثيرات حدود ليجندر أهمية في تحديد الوظائف الموجية للإلكترونات في مدارات الذرة، وهي قابلة للتطبيق في ديناميكا الموائع، وأيضاً في النماذج الطيفية للأرصاء الجوية. وعلى سبيل المثال، نظام التنبؤ العالمي، بالإضافة لاستخدامها في فيزياء المفاعلات النووية، وبالتالي، كان لابد من نقل الأشكال والعلاقات العلمية إلى شكل علمي يعتمد على المصفوفات لسهولة التعامل معها حاسوبياً، كما تعد مصفوفة ماركوف (ومصفوفة ماركوف بالقياس الأولي  $n$ ) من المصفوفات الهامة للاستفادة منها في التطبيقات الهندسية، وكذلك حفظ المعلومات، والتي تعتمد على نظرية الأعداد، وخصوصاً النظرير الضربي بالقياس  $n$ ، معتمدين في ذلك على برنامج حاسوبي ليعطي نتائج سريعة وكبيرة.

## 2. دراسة مرجعية: [1]

إن علاقة (رودريغ) لكثيرات حدود ليجندر التفاضلية الشهيرة:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (1)$$

التي تولد كثيرات حدود جبرية من الدرجة  $n$ ، تتصف بصفات كثيرة، تساعد الباحثين على الاعتماد عليها، وهي حل عام للمعادلة التفاضلية:

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' + n(n - 1)y = 0 \quad (2)$$

وبما أن كل كثيرة حدود جبرية من الدرجة  $K$  ترد إلى مجموع كثيرات حدود ليجندر من المرتبة  $K$  وفق حساب ثابت ليجندر  $a_0, a_1, \dots, a_n$  ، فإن هذا الموضوع يساعدنا في حل العديد من القضايا الرياضية، مثل الاستيفاء الرياضي ، وفي تحديد الوظائف الموجية للإلكترونات في مدارات الذرة .

### 3. هدف البحث:

ايجاد الثوابت المولدة لكل كثيرة حدود من الدرجة  $K$  اعتماداً على مقلوب مصفوفة مربعة (مثلثية سفلى)  $L_k^{-1}$  نسميها مقلوب مصفوفة ليجندر ، لتسهيل التعامل مع كثيرات الحدود تقنيا وحاسوبياً [5-6] ، ومن ثم تشكيل كثيرات حدود من درجة (فردية ، زوجية ، مختلطة) ، اعتماداً على ثابت و مصفوفة ليجندر  $L_k$  .

### كثيرات حدود ليجندر: [2-3-4]

من علاقة ليجندر التفاضلية (1) نستنتج بعضاً من كثيرات الحدود من خلال اشتقاقها عدداً من المرات كما يأتي:  
لدينا، من منشور ثنائي حد نيوتن:

$$(x^2 - 1)^n = C_n^0 x^{2n} - C_n^1 x^{2n-1} + C_n^2 x^{2n-2} - \dots (-1)^{2n-k} C_n^k x^{2n-k} + \dots (-1)^{2n-n} C_n^n x^{2n-n}$$

وبالإصلاح نجد:

$$(x^2 - 1)^n = x^{2n} - nx^{2n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{2n-2} \\ - \dots (-1)^{2n-k} \frac{(n)!}{(k)!(n-k)!} x^{2n-k} + \dots (-1)^n x^n$$

وبإدخال خاصة المشتق النوني نجد:

$$P_n(x) \\ = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \\ = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left[ x^{2n} - nx^{2n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{2n-2} \right. \\ \left. - \dots (-1)^{2n-k} \frac{(n)!}{(k)!(n-k)!} x^{2n-k} + \dots (-1)^n x^n \right]$$

وبالإصلاح نجد:

$$P_n(x) \\ = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \left[ \frac{(2n)!}{n!} x^{2n} - n \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} x^{2n-1} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)(2n-2)!}{2(n-2)!} x^{2n-2} \right. \\ \left. - \dots (-1)^{2n-k} \frac{(n)!}{(k)!(n-k)!} \frac{(2n-k)!}{(n-k)!} x^{2n-k} + \dots (-1)^n \frac{(n)!}{(n)!} x^n \right]$$

وبأخذ المشتقات  $P_n(x)$  على التوالي:

$P_n(x) =$	
$P_0(x) = 1$	عدد مرات الاشتقاق صفر
$P_1(x) = x$	المشتق الأول
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	المشتق الثاني
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	المشتق الثالث
$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$	المشتق الرابع
$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$	المشتق الخامس
$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$	المشتق السادس
$P_7(x) = \frac{429 \cdot x^7}{16} - \frac{693 \cdot x^5}{16} + \frac{315 \cdot x^3}{16} - \frac{35 \cdot x}{16}$	المشتق السابع
$P_8(x) = \frac{6435 \cdot x^8}{128} - \frac{3003 \cdot x^6}{32} + \frac{3465 \cdot x^4}{64} - \frac{315 \cdot x^2}{32} + \frac{35}{128}$	المشتق الثامن
$P_9(x) = \frac{12155 \cdot x^9}{128} - \frac{6435 \cdot x^7}{32} + \frac{9009 \cdot x^5}{64} - \frac{1155 \cdot x^3}{32} + \frac{315 \cdot x}{128}$	المشتق التاسع
$P_{10}(x) = \frac{46189 \cdot x^{10}}{256} - \frac{109395 \cdot x^8}{256} + \frac{45045 \cdot x^6}{128} - \frac{15015 \cdot x^4}{128} + \frac{3465 \cdot x^2}{256} - \frac{63}{256}$	المشتق العاشر

نتيجة : مجموع المعاملات لأية كثيرة حدود  $P_n(1)$  هي الواحد ، أي أن :

$$\begin{aligned}
 P_n(1) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \left[ \frac{(2n)!}{n!} - n \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n(n-1)(2n-2)!}{2(n-2)!} \right. \\
 &\quad \left. - \dots (-1)^{2n-k} \frac{(n)!}{(k)!} \frac{(2n-k)!}{(n-k)!} + \dots (-1)^n \right] \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

خصائص كثيرات حدود ليجندر :

تتصف كثيرات حدود ليجندر بالآتي :

$$P_n(1) = 1 \quad ; \quad \forall n \in N \quad (1)$$

$$P_n(0) = 0 \quad ; \quad \forall n = 2k - 1 \quad , \quad k \in N \quad (2)$$

$$P_n(-1) = -1 \quad ; \quad \forall n = 2k - 1 \quad , \quad k \in N \quad (3)$$

$$P_n(-1) = 1 \quad ; \quad \forall n = 2k \quad , \quad k \in N \quad (4)$$

علاقة الارتباط بين كثيرة حدود ليجندر وأية كثيرة حدود جبرية:

تعريف مصفوفة ليجندر:

مصفوفة ليجندر من المرتبة  $k$  هي مصفوفة مربعة من المرتبة  $k$  تنتج من معاملات كثيرات حدود ليجندر

$$\{P_n(x)\}_{n=0}^k$$

حيث نضع ثوابت  $P_0$  في السطر الأول ، ونضع ثوابت  $P_1$  في السطر الثاني ، ونضع ثوابت  $P_2$  في السطر الثالث وهكذا .....

مثال (1):

لنكتب مصفوفة ليجندر من المرتبة الرابعة  $(L_3)$  ومقلوبها  $L_3^{-1}$  هو مصفوفة مثلثية سفلى أيضاً

$$L_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad (L_3)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن مجموع عناصر أي سطر من المصفوفة  $L_3$  أو المصفوفة  $L_3^{-1}$  هو الواحد

مثال (2):

لنكتب مصفوفة ليجندر من المرتبة السادسة ( $L_5$ ): ومقلوبها ( $L_5^{-1}$ ) هو مصفوفة مثلثية سفلى أيضاً

$$L_5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & -\frac{30}{8} & 0 & \frac{35}{8} & 0 \\ 0 & \frac{15}{8} & 0 & -\frac{70}{8} & 0 & \frac{63}{8} \end{bmatrix} \quad (L_5)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{7} & 0 & \frac{8}{35} & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{8}{63} \end{bmatrix}$$

وهنا نلاحظ أن مجموع عناصر أي سطر من المصفوفة  $L_5$  أو المصفوفة  $L_5^{-1}$  هو الواحد

أهم نتائج البحث:

نقوم بإثبات مبرهنتين أساسيتين الأولى أن كل مصفوفة ليجندر  $L_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, 10$ ، تكتب على شكل مصفوفة مثلثية سفلى ومقلوبها أيضاً مصفوفة مثلثية سفلى، والمبرهنة الثانية كل كثيرة حدود جبرية

من الدرجة  $n$  ترد إلى جداء مقلوب مصفوفة ليجندر ( $L_n^{-1}$ )

مع مصفوفة ثوابت  $B_n$

مبرهنة (1):

تكتب مصفوفة ليجندر  $L_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, 10$  على شكل مصفوفة مثلثية سفلى ومقلوبها أيضاً  $L_n^{-1}$  مصفوفة مثلثية سفلى

الإثبات:

لدينا مصفوفة ليجندر من المرتبة (11) التي تحتوي جميع المصفوفات الجزئية من جميع المراتب من الأولى وحتى المرتبة الحادية عشرة.

$$L_{10} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & -\frac{30}{8} & 0 & \frac{35}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{8} & 0 & -\frac{70}{8} & 0 & \frac{63}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{16} & 0 & \frac{105}{16} & 0 & -\frac{315}{16} & 0 & \frac{231}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{35}{16} & 0 & \frac{315}{16} & 0 & \frac{693}{16} & 0 & \frac{429}{16} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{35}{128} & 0 & \frac{315}{32} & 0 & \frac{3465}{64} & 0 & \frac{3003}{32} & 0 & \frac{6435}{128} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{315}{128} & 0 & -\frac{1155}{32} & 0 & \frac{9009}{64} & 0 & -\frac{6435}{32} & 0 & \frac{12155}{128} & 0 \\ -\frac{63}{256} & 0 & \frac{3465}{256} & 0 & -\frac{15015}{128} & 0 & \frac{45045}{128} & 0 & -\frac{10939563}{256} & 0 & \frac{46189}{256} \end{bmatrix}$$

وبما أنها مثلثية سفلى فإن مقلوبها يحتوي مقلوب جميع المصفوفات الجزئية  $\{L_n^{-1}\}_{n=1}^{10}$  من جميع المراتب من الأولى وحتى المرتبة الحادية عشرة.

$$\left( L_{10} \right)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{7} & 0 & \frac{8}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{8}{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{10}{21} & 0 & \frac{24}{77} & 0 & \frac{16}{231} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{41}{39} & 0 & \frac{434}{429} & 0 & \frac{8}{39} & 0 & \frac{16}{429} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3557}{6435} & 0 & \frac{2104}{1287} & 0 & \frac{592}{715} & 0 & \frac{64}{495} & 0 & \frac{128}{6435} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6465}{2431} & 0 & \frac{6440}{2431} & 0 & \frac{688}{1105} & 0 & \frac{192}{2431} & 0 & \frac{128}{12155} & 0 \\ \frac{4329246939}{33025135} & 0 & \frac{2561437878}{6605027} & 0 & \frac{341652144}{1738165} & 0 & \frac{78135648}{2540395} & 0 & \frac{155584896}{33025135} & 0 & \frac{256}{46189} \end{bmatrix}$$

نتيجة (1):

1. من المثالين السابقين (1) و (2) نجد أن مقلوب أية مصفوفة من النمط

$$L_n^{-1}, n = 1, 2, \dots, 10$$

2. نلاحظ أن مجموع عناصر أي سطر من المصفوفة  $L_n$  أو المصفوفة

$$L_n^{-1} \text{ هو الواحد}$$

مبرهنة (2):

كل كثيرة حدود جبرية  $B_n$  من الدرجة  $n$  معاملاته  $[b_0, b_1, b_2, \dots, b_n]$  ترتبط بمقلوب مصفوفة ليجندر من المرتبة  $L_n^{-1}$  و ثوابت ليجندر  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  بالعلاقة الآتية:

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n] \cdot L_n^{-1}$$

الإثبات:

بما أن كل كثيرة حدود جبرية  $B_n$  تكتب على شكل مجموع لكثيرات حدود ليجندر من المرتبة  $n$  كما يلي

$$B_n = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x)$$

نستنتج أن:

$$[b_0, b_1, b_2, \dots, b_n] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] \cdot L_n$$

وبضرب الطرفين بالمصفوفة  $L_n^{-1}$  نجد أن:

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n] \cdot L_n^{-1}$$

مثال (3):

لنوجد ثوابت ليجندر  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  المكونة لكثيرة الحدود من الدرجة الثالثة

$$B_3 = 1 + 3x - 5x^2 + 7x^3$$

الحل: بتطبيق المبرهنة (2) نجد أن:

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = [b_0, b_1, b_2, \dots, b_n] \cdot L_n^{-1}$$

$$[a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_n] = [1 \ 3 \ -5 \ 7] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

حيث إن مقلوب المصفوفة  $L_3$  هي المصفوفة  $L_3^{-1}$  الآتية :

$$(L_3)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

وبالإصلاح تكون ثوابت ليجندر:

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = \left[ -\frac{2}{3}, \frac{36}{5}, -\frac{10}{3}, \frac{14}{5} \right]$$

وللتحقق من صحة الحل نجد:

$$[1 \ 3 \ -5 \ 7] = \left[ -\frac{2}{3}, \frac{36}{5}, -\frac{10}{3}, \frac{14}{5} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

نتائج هامة:

1. من أجل جميع كثيرات الحدود من الدرجة  $n$  نستنتج أن:

$$\sum_{k=0}^n b_k = \sum_{k=0}^n a_k$$

مثال (4):

لنوجد مجموع ثوابت ليجندر  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  المكونة لكثيرة الحدود من الدرجة الثالثة

$$B_3 = 1 + 3x - 5x^2 + 7x^3$$

الحل: بتطبيق النتيجة (1) نجد أن:

$$\sum_{k=0}^n b_k = 1 + 3 - 5 + 7 = -\frac{2}{3} + \frac{36}{5} - \frac{10}{3} + \frac{14}{5} = 6 = \sum_{k=0}^n a_k$$

2. لتوليد كثيرات حدود من الدرجة  $n$  ذات حدود زوجية نختار الحدود

$$a_k = [a_0 \ 0 \ a_2 \ \dots \ a_{2k}]$$

على كثيرة حدود زوجية .

مثال (5):

لنوجد ذلك من ثوابت ليجندر  $[1, 0, -3, 0, 2, 0]$  المكونة لكثيرة الحدود

من الدرجة الرابعة

فيكون لدينا

$$[b_0, b_1, b_2, \dots, b_n] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] \cdot L_4$$

$$[b_0, b_1, b_2, \dots, b_n] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{-30}{8} & 0 & \frac{35}{8} \end{bmatrix}$$

$$[b_0, b_1, b_2, \dots, b_n] = \left[ \frac{3 \cdot a_4}{8} + \left( a_0 - \frac{a_2}{2} \right) 0 - \frac{15 \cdot a_4}{4} + \frac{3 \cdot a_2}{2} 0 \frac{35 \cdot a_4}{8} \right]$$

حيث إن:

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &= 1 + 0 - 3 + 0 - 2 + 0 = -4 \end{aligned}$$

$$[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{-30}{8} & 0 & \frac{35}{8} \end{bmatrix} \cdot [1 \ 0 \ -3 \ 0 \ 2]$$

الحل:

بتطبيق النتيجة (1) نجد أن:

$$\sum_{k=0}^n b_k = 1 + 3 - 5 + 7 = -\frac{2}{3} + \frac{36}{5} - \frac{10}{3} + \frac{14}{5} = 6 = \sum_{k=0}^n a_k$$

3. لتوليد كثيرات حدود من الدرجة  $n$  ذات حدود فردية نختار الحدود  $a_k = [0 \ a_1 \ 0 \ a_3 \ \dots \ a_{2k+1}]$  فنحصل على كثيرة حدود فردية.

مثال (6):

لنوجد من ثوابت ليجندر  $[0, 3, 0, 5, 0, 7]$  المكونة لكثيرة الحدود من الدرجة

الخامسة

$$B_5 = 3x + 5x^3 + 7x^5$$

الحل:

$$[b_0, b_1, b_2, \dots, b_n] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]. L_5$$

حيث إن:

$L5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{7} & 0 & \frac{8}{35} & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{8}{63} \end{bmatrix}$	$A5 = [0 \ 3 \ 0 \ 5 \ 0 \ 7]$	$A5 \cdot L5 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 & \frac{46}{9} & 0 & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$
---	--------------------------------	--

فحصل على كثيرة الحدود  $An$  وثوابته  $[b_0, b_1, b_2, \dots, b_n]$

كما نلاحظ النتيجة (1) محققة أن مجموع الثوابت محققة :

$$0 + 3 + 0 + 5 + 0 + 7 = 0 + 9 + 0 + \frac{46}{9} + 0 + \frac{8}{9} = 15$$

#### مقترحات: [7-8]

1. بما أن المصفوفة  $L_n$  مصفوفة مثلثية سفلى ونظامية فهي تصلح للتشفير وحفظ

البيانات وكذلك  $L_n^{-1}$  تصلح لفك التشفير .

2. يمكن تمديد المصفوفة المثلثية  $L_n$ . بحيث يصبح  $n$  عدد طبيعي بقدر ما نشاء

، وهذا يتطلب اثباته بالاستقراء الرياضي .

## Reference

1. L. Bos1, A. Narayan, N. Levenberg and F. Piazzon4, An Orthogonality Property of Legendre Polynomials, April 27, USA 2015
2. Yang Xiao-Jun, Theory and Applications of Special Functions for Scientists and Engineers, Book, Springer 2021.DOI: 10.1007/978-981-33-6334-2.
3. Francis J. Narcowich , Notes on Special Functions, Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, TX 77843-3368, Springer 2005
4. Leon M. Hall, Special Functions, Copyright c 1995 by. All rights reserved.
5. Modern Cryptography: Applied Mathematics for Encryption and Information Security, Springer, William Easttom 2020.
6. Cryptology Classical and Modern By Richard E. Klima,Neil, P.Sigmon ,Neil Sigmon Copyright Year 2019
7. Al Khatib and Shamma, An algorithm for determining a relatively prime number and its symmetric product with base n. Journal of Natural Sciences and Mathematics (jnm) Vol.3 No.1 (2009).
8. Al Khatib and Shamma, the encryption using the operator integration applied to the system ASCII encoded messages, Journal of AL Baath University, Volume 38 (2015)

## اصطناع معقدات معدنية جديدة باستخدام النينهيدرين ومشتقاته

طالب الدراسات العليا: أحمد عوده

كلية العلوم - جامعة البعث

اشراف الدكتور: عبد الهادي دله

### ملخص البحث

تم في هذا البحث اصطناع معقدات من مرتبطة النينهيدرين (NI) مع معدني النحاس و الكوبالت بنسبة الارتباط ( 1:1 ) و ( 1:2 )،(مرتبطة: معدن) و أيضا تم اصطناع مرتبطة 4- نثرو فينيل آزو نينهيدرين هيدرات (NANH) من خلال ديازة بارا نثرو الأنيلين ومن ثم تصالبه مع النينهيدرين هيدرات. درست بعض الخصائص الفيزيائية والطيفية للمرتبطة (NANH)، والمعقدات المصطنعة بواسطة مطيافية الأشعة ما تحت الحمراء (FT-IR) ، ومطيافية الرنين النووي المغناطيسي الكربوني والبروتوني ، وبينت نتائج هذه الدراسة أنها كانت متفقة مع الصيغة المقترحة لهذه المركبات.

كلمات مفتاحية: نينهيدرين ، أزو النينهيدرين ، نسبة ارتباط.

(\* طالب ماجستير - قسم الكيمياء - كلية العلوم - جامعة البعث - حمص - سوريا

(\*\* دكتور في الكيمياء اللاعضوية في قسم الكيمياء - كلية العلوم - جامعة البعث - حمص - سوريا

## Synthesis of new complexes using ninhydrin and its derivatives

### Abstract

In this research, complexes of bonded ninhydrin (NH) were synthesized with copper and cobalt metals in a ratio of (1:1) and (2:1), (linked: metal). Also, linked 4-nitrophenyl azo ninhydrine hydrate (NANH) was with ninhydrine hydrate.

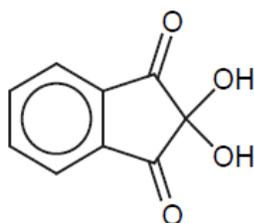
Some physical and spectral properties of NH and synthesized complexes were studied by infrared spectroscopy (FT-IR), carbon and proton nuclear magnetic resonance spectroscopy, and the results of this study showed that they were in agreement with the refined formula of these compounds.

**Keywords:** ninhydrin, Azo ninhydrin, metal complexes, ligand ratio

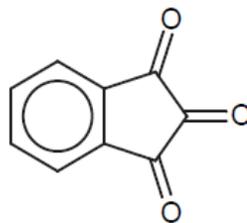
- 
- 1) Master student at Albaath university, faculty of science, department of inorganic chemistry.
  - 2) D. at Albaath university, faculty of science, department of inorganic

### 1-مقدمة:

النينهيدرين (Indane-1,2,3-trione) مركب كيميائي عضوي ثلاثي الكيتون (له شكلين توتوميرين I,II) يستعمل في تحليل البروتينات و السلاسل الببتيدية حيث أن له القدرة على كشف الروابط الببتيدية وبشكل خاص مجموعة الامينو أو الأمينات الأولية أو الثانوية. و له خصائص التحسس الاشعاعي. تم اكتشافه عام 1910 من قبل العالم سيجفريد روهمان، و في عام 1954 اقترح كلا من اودين و فون هوفستن استخدام النينهيدرين ومعقداته مع Zn(II), Cd(II) الملونة في الطب الشرعي ككاشف لبصمات اليد على الاوراق والاسطح المسامي وكواشف فلورة [1] ، وفي الكشف عن السيانيد وتحديده بشكل انتقائي في سوائل الجسم والعينات البيئية وللنينهيدرين نشاط مضاد لأورم السرطانية مشابه لنشاط سيكلوفوسفاميد. ومضاد للقروح [2] .



I

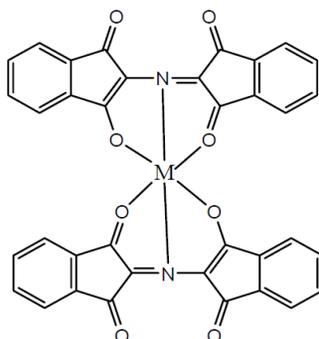


II

### Indane-1,2,3-trione

#### الدراسة المرجعية حول موضوع البحث:

تم تحضير بعض معقدات المعادن الانتقالية مثل . Cd(II), Co(II), Zn(II) مشتقة من النينهيدرين وبعض الأحماض الأمينية والامينات(أسس شيف) مثل الاسبارتيك والتيرونين، فتم الحصول على معقدات ملونة وثابتة، ودرست بنيتها باستخدام التحليل العنصري و طيف الأشعة تحت الحمراء والـ UV.VIS، ومن خلال النتائج تم اقتراح بنية ثماني وجوه لهذه المعقدات[3-5]:



Complexes of Co (II) and Zn (II)

وفي عام 2014 تم من قبل الباحث كومار وفريقه تحضير معقد  $Cu(II)$  ذو الصيغة  $[MLCl] Cl_2 \cdot H_2O$  باستخدام مرتبطة متعددة السن ناتجة عن تفاعل النينهيدرين مع الايتلين دي أمين والتي بينت كمانح محايد  $NNONN$  نحو  $Cu(II)$  من خلال دراسة التحليل الكيميائي العنصري، وطيف

الأشعة تحت الحمراء و الأشعة فوق البنفسجية مقابل التحليل الطيفي ، و الحساسية المغناطيسية، وتم اقتراح بنية الثماني الوجوه للمعقد [6] .

قام الدكتور سينك و ريمبير في عام 2008 بتحضير سلسلة جديدة من معقدات الكوبالت والنيكل والنحاس ثنائية التكافؤ مع مرتبطة متعددة السن ناتجة عن تفاعل النينهيدرين مع فينيلين ميتا ثنائي أمين، وتتميز هذه المعقدات بأنها مشوهة ( ثماني وجوه) من خلال التحليل العنصري ، والأطياف الإلكترونية والمعلومات الطيفية للأشعة تحت الحمراء. و تميزت هذه المعقدات بأنها غير كهروكروماتية [7] .

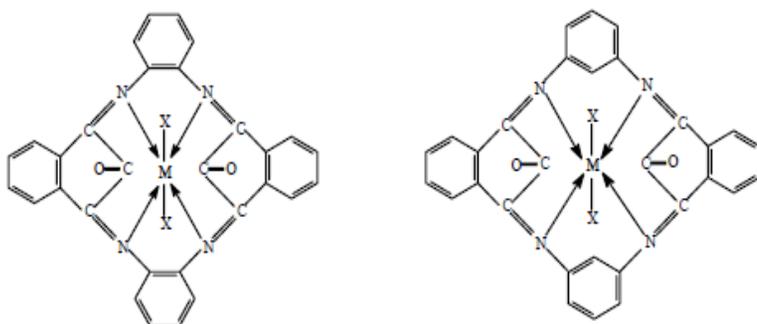


Fig-1: Where M = Co(II) Ni(II), Cu (II), X = Cl

## 2-هدف وأهمية البحث :

إن للنيهيدرين ومعقداته التي تتميز بألوان مميزة أهمية كبيرة في مجالات مختلفة، في الطب الشرعي ككاشف لبصمات اليد على الاوراق والاسطح المسامية وكواشف فلورة [1] ، وفي الكشف عن السيانيد في سوائل الجسم والعينات البيئية و مضاد للأورام السرطانية. ونظراً لهذه الأهمية يهدف البحث إلى:

1- اصطناع معقدات من مرتبطة ( NI ).

2- تحضير المرتبطة (NANH) ثم تحضير معقدات معدنية للمرتبطة (NANH) وذلك بتفاعلها مع كلوريدات النحاس، الكوبالت، النحاس و الحديد اللامائية.

3- التأكد من هوية المرتبطة طيفياً من خلال مطيافية الرنين النووي المغناطيسي الكربوني والبروتوني  $^1\text{H-NMR}$ ,  $^{13}\text{C-NMR}$  والمعقدات المصنعة باستخدام مطيافية الأشعة تحت الأحمر (FT-IR).

3- مواد وطرائق البحث:

3-1- الأجهزة والأدوات المستخدمة:

- جهاز الطنين النووي المغناطيسي بروتوني نموذج 400MHz من شركة Bruker السويسرية.
- جهاز الامتصاص الضوئي ما تحت الأحمر نموذج FT-IR-4100 من شركة Jasco اليابانية.
- صفائح كرماتوغرافيا الطبقة الرقيقة من الألمنيوم مطلية بالسليكاجل 60F<sub>254</sub> قياس 20 X 20 من شركة Merck الألمانية.
- جهاز قياس درجة الانصهار Electrothermal Melting Point Apparatus .
- ميزان حساس من النوع Sartorius BL-210S.
- سخان مزود بمحرك مغناطيسي Agimatic P-Selecta 243 .
- مصباح UV مزود بلمبتين 254nm,366nm من شركة DESAGA الألمانية.

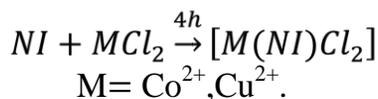
3-2- المواد الكيميائية المستخدمة:

- النينهيدرين ، حمض كلور الماء المركز، إيتانول مطلق، ، نترتيت الصوديوم، هيدروكسيد البوتاسيوم، ، الاسيتون ، ميتانول، كلوريد النحاس والكوبالت والنيكل والحديد اللامائي .
- 4-اصطناع معقدات النينهيدرين:

صُنعت معقدات للنينهيدرين (NI) من خلال تفاعله مع أملاح كلوريدات المعادن (Cu<sup>II</sup>، Co<sup>II</sup>) ودرست شروط اصطناعها المثلى؛ فتبين أنها تتم وفق نسبتي ارتباط (1:1) و (1:2) (مرتبطة: معدن) .

يوضع في حوجة كروية سعة ( 100ml ) مزودة بمحرك مغناطيسي ومبرد عكوس و حمام مائي، (0.178 gr,0.001mol) من النينهيدرين والمنحل بـ (15ml) من

الإيتانول، ثم يضاف بالتقريط (0.001mol) من كلوريد المعدن اللامائي المنحل في (5ml) من الإيتانول مع التحريك والتسخين المستمر عند الدرجة (78°C). يعدل pH الوسط بإضافة نقاط من محلول هيدروكسيد البوتاسيوم في الإيتانول، مع الاستمرار بالتسخين والتحريك عند نفس الدرجة لمدة (4h)، فتم الحصول على رواسب تُرشح و تُنقى بغسلها بالإيتانول وتُجفف.



ويبين الجدول (1) التالي بعض الخصائص الفيزيائية لمعدن النيهدرين المصنعة:

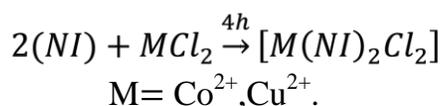
الجدول (1): الخصائص الفيزيائية للمعدن النيهدرين.

المركب	الوزن الجزيئي g.mol <sup>-1</sup>	اللون	درجة الانصهار (°C)	المردود (%)
[Cu ( NI ) Cl <sub>2</sub> ]	312.545	أخضر فاتح	270-273	77.56
[Co ( NI ) Cl <sub>2</sub> ]	307.839	بني محمر	273-275	71.104

- بنسبة (2:1):

يوضع في حوالة كروية سعة ( 100ml ) مزودة بمحرك مغناطيسي ومبرد عكوس و حمام مائي، (0.356 gr,0.001mol) من النيهدرين والمنحل بـ (15ml) من الإيتانول، ثم يضاف بالتقريط (0.001mol) من كلوريد المعدن اللامائي المنحل في (5ml) من الإيتانول مع التحريك والتسخين المستمر عند الدرجة (78°C).

يعدل pH الوسط بإضافة نقاط من محلول هيدروكسيد البوتاسيوم في الإيتانول، مع الاستمرار بالتسخين والتحريك عند نفس الدرجة لمدة (4h)، فتم الحصول على رواسب تُرَشح و تُنقى بغسلها بالإيتانول وتُجفف.



ويبين الجدول (2) التالي بعض الخصائص الفيزيائية للمعقدات النينهيدرين المصنعة:

الجدول (2): الخصائص الفيزيائية للمعقدات النينهيدرين.

المركب	الوزن الجزيئي g.mol <sup>-1</sup>	اللون	درجة الانصهار (°C)	المردود (%)
[Cu( NI ) <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub> ]	490.545	أخضر فاتح	255	64.08
[Co ( NI ) <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub> ]	485.839	بني محمر	197	57.20

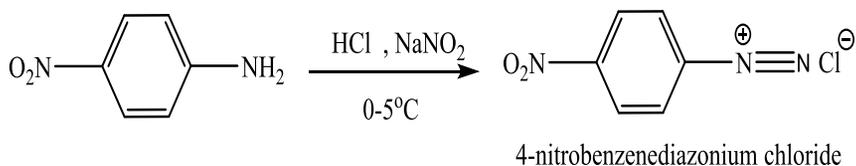
### III- تحضير المرتبطة (NANH):

تم اصطناع المرتبطة 4-Nitrophenyl Azo Ninhydren على مرحلتين:

المرحلة الأولى: تحضير ملح الديازونيوم:

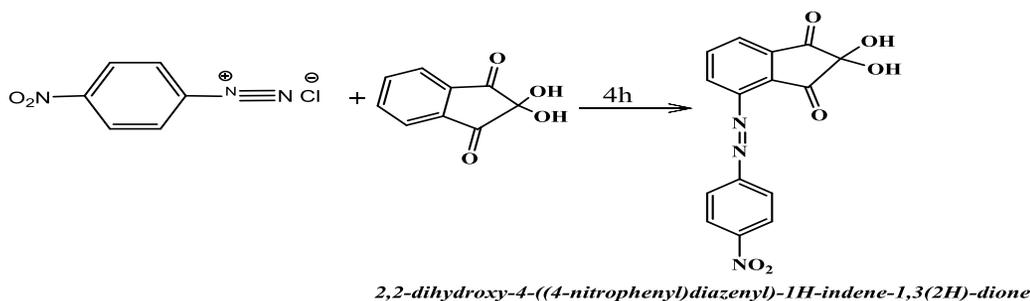
يُوضع في دورق أحادي العنق (1.381gr;0.01mol) بارا نيترو الأنيلين، و 10ml ماء مقطر و 5ml من حمض كلور الماء المركز، ويوضع في حمام ثلجي درجة حرارته (0-5°C)، ويحرك حتى تمام الانحلال ثم يضاف بالتدريج قطرة قطرة 15ml محلول مائي من نترت الصوديوم (0.689gr) عند درجة الحرارة نفسها، حيث يصبح لون

المحلول أصفر فاتح دليل على تشكل ملح الديازونيوم، و يترك المزيج عند درجة حرارة التفاعل نفسها مع التحريك لعدم تخرب الملح.



المرحلة الثانية: ازدواج ملح الديازونيوم مع النينهيدرين:

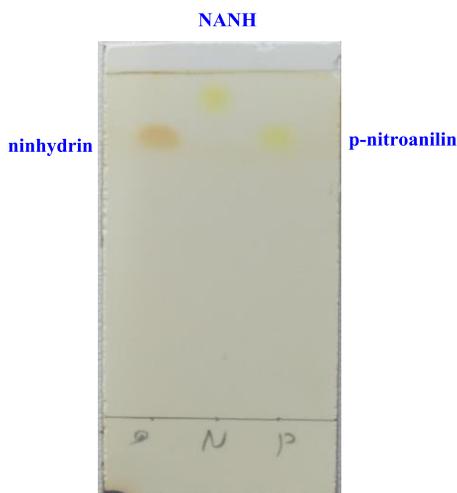
يوضع في دورق آخر (1.78gr;0.0 1ml) نينهيدرين هيدرات بعد إذابته بـ 10ml إيتانول، ومحلول 3gr من كربونات الصوديوم، ومحلول 1gr من هيدروكسيد الصوديوم مع التحريك لمدة ربع ساعة، بعد ذلك يضاف هذا المحلول ببطء قطرة -قطرة إلى ملح الديازونيوم المحضر سابقاً وعند نفس درجة الحرارة المنخفضة حمام ثلجي درجة حرارته (0-5°C) ليبدأ تفاعل الازدواج، حيث لوحظ تغير اللون من الأصفر إلى البرتقالي الغامق، واستمر التحريك لمدة 4 ساعات عند نفس درجة الحرارة.



يُضاف حمض كلور الماء لتحويل الأساس الفائض إلى ملح صوديومي وعندما يصبح (PH=6) يترسب الناتج، ويُفصل بالترشيح، ويغسل الراسب بالماء المقطر ومن ثم

بالإيثانول ، فتم الحصول على راسب برتقالي درجة انصهار أكبر من-187 (189°C بمردود 26% .

تم التأكد من نقاوة المرتبطة (NANH) المحضرة باستخدام تقنية كروماتوغرافيا الطبقة الرقيقة (TLC) وجملة جرف مكونة من دي كلور الإيثان:الميثانول ( 80:20). حيث يبين الشكل (4-III) وجود بقعة وحيدة على الصفيحة مما يؤكد نقاوة المرتبطة.



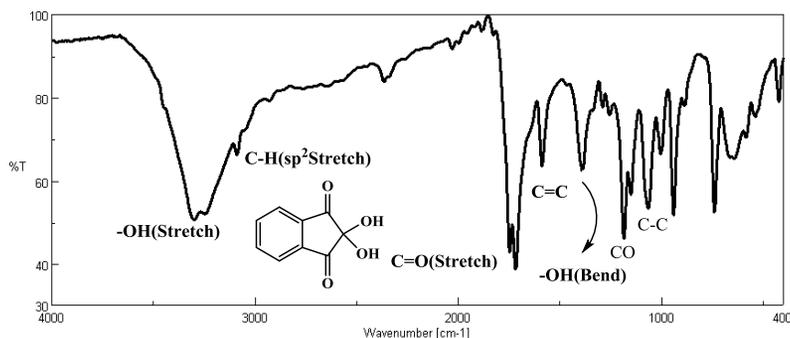
الشكل (4-III): كروماتوغرافيا الطبقة الرقيقة للمرتبطة (NANH)

#### 4- النتائج والمناقشة:

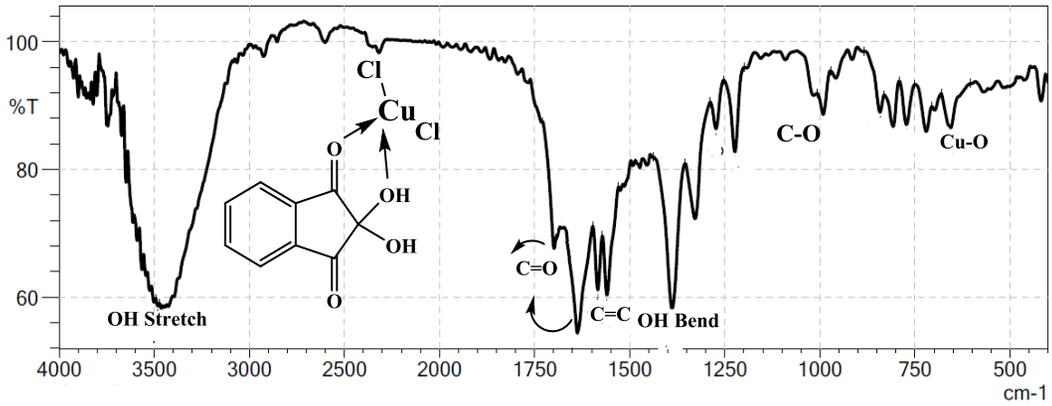
تمت دراسة بنية المرتبطة والمعقدات المحضرة بواسطة مطيافية الاشعة تحت الحمراء (FT-IR) ضمن المجال  $4000-400\text{Cm}^{-1}$ ، وباستخدام بروميد البوتاسيوم KBr حيث تم تسجيل الأطياف للمركبات المدروسة باستخدام خلية من الكوارتز ذات عرض (1cm) والميثانول والايثانول المطلق والأسيتون كمحلات، إضافة إلى مطيافية الطنين النووي البروتوني والكربوني ( $^1\text{H-NMR}$ ) ( $^{13}\text{C-NMR}$ ) للمرتبطة المصنعة باستخدام مذيب الأسيتون المديتر.

#### 1-IV- دراسة بنية معقدات النينهيدرين $[M(NI)Cl_2]$ و $[M(NI)_2Cl_2]$ :

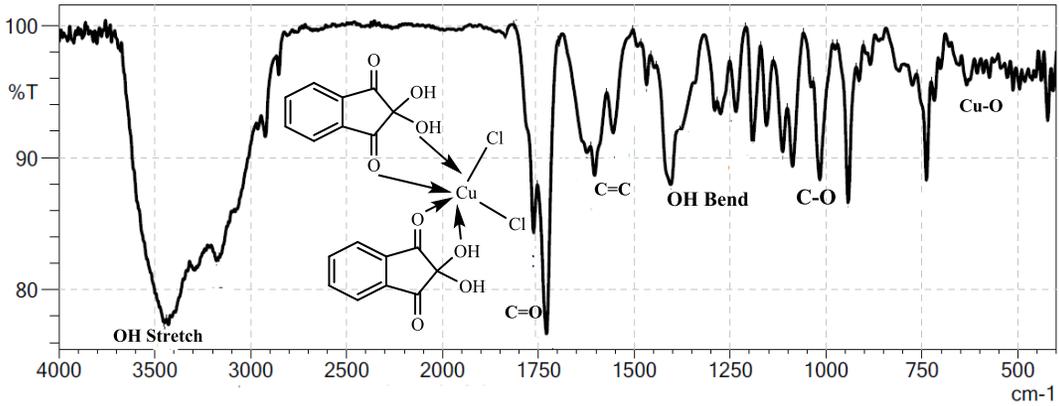
حيث أظهر طيف الأشعة ما تحت الحمراء الشكل (1-1-IV) للنينهيدرين وجود عصابات امتصاص رئيسية عند الأعداد الموجية  $3300-3245\text{Cm}^{-1}$  عائدة إلى امتصاص مجموعة (OH) وعند  $3088\text{Cm}^{-1}$  عائدة إلى امتصاص الرابطة العطرية (C-H) وعند  $1717-1747\text{Cm}^{-1}$  عائدة إلى امتصاص المجموعتين الكربونيليتين (C=O)، بالإضافة لعصابات أخرى موضحة في الجدول (1-IV)، حيث لوحظ انزياح عصابات مجموعة (OH) نحو الأعداد الموجية الأعلى ( $3307-3482\text{Cm}^{-1}$ ) في المعقدين  $[M(NI)Cl_2]$  على التوالي الشكلين (2-1-IV) و (4-1-IV)، ( $3449-3412\text{Cm}^{-1}$ ) في المعقدين  $[M(NI)_2Cl_2]$  على التوالي الشكلين (3-1-IV) و (5-1-IV)، وانزياح عصابتي المجموعتين الكربونيليتين (C=O) نحو الأعداد الموجية الأدنى ( $1634-1716\text{Cm}^{-1}$ ) في المعقدين  $[M(NI)Cl_2]$ ، ونحو نحو الأعداد الموجية الأعلى ( $1730-1770\text{Cm}^{-1}$ ) في المعقدين  $[M(NI)_2Cl_2]$ ، هذا دليل على حدوث التعقيد على ذرة الأوكسجين مجموعة الكربونيل وأوكسجين المجموعة الهيدروكسيلية وظهور عصابات أخرى موضحة في الجدول (1-IV).



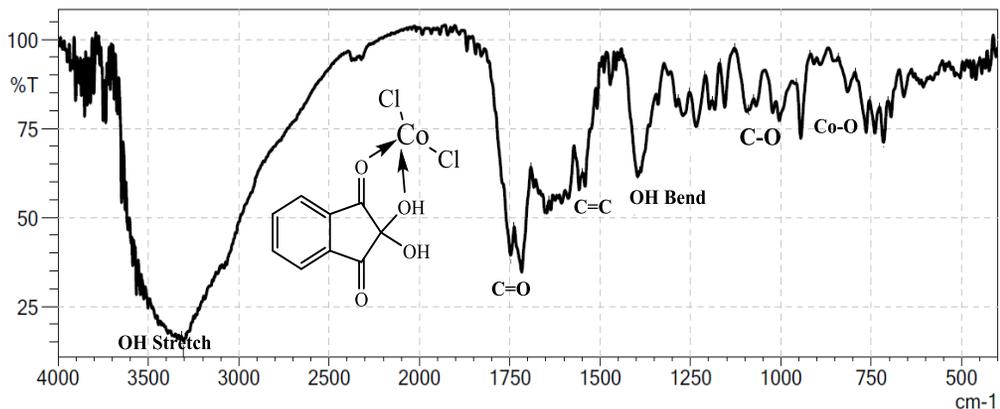
الشكل (1-1-IV): طيف الأشعة ما تحت الحمراء للنينهيدرين.



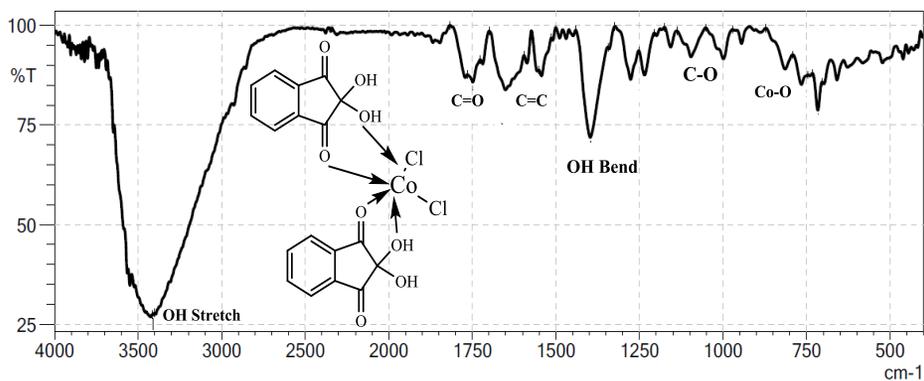
الشكل (2-1-IV): طيف الأشعة ما تحت الحمراء للمعقد  $[Cu(NI) Cl_2]$



الشكل (3-1-IV): طيف الأشعة ما تحت الحمراء للمعقد  $[Cu(NI)_2 Cl_2]$



الشكل (4-1-IV): طيف الأشعة ما تحت الحمراء للمعقد  $[Co(NI)Cl_2]$



الشكل (5-1-IV): طيف الأشعة ما تحت الحمراء للمعقد  $[Co(NI)_2Cl_2]$

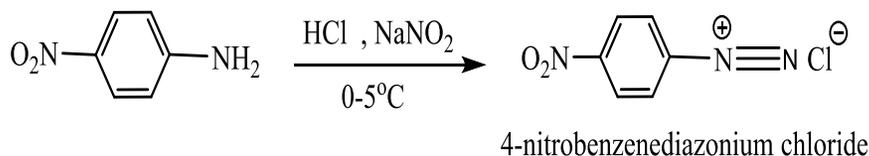
الجدول (1-1-IV): قيم عصابات الامتصاص في طيف (FT-IR) للنينهيدرين ومعقداته المعدنية.

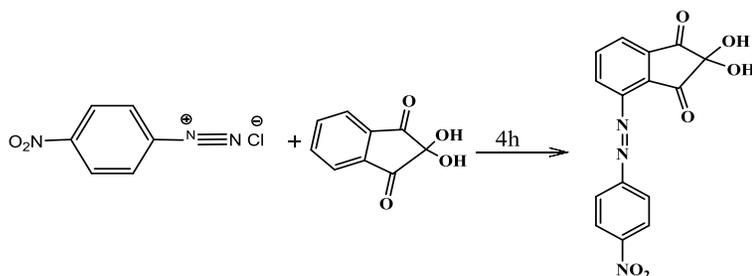
العدد الموجي ( $\bar{\nu}$ (Cm <sup>-1</sup> ))					
[Co(NI) <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub> ]	[Cu(NI) <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub> ]	[Co(NI) Cl <sub>2</sub> ]	[Cu(NI) Cl <sub>2</sub> ]	NI	الزمر الوظيفية
3412	3449	3307	3482	3300-3245	v(OH Stretch)
3088	3089	3087	3086	3088	v(CH-(Sp <sup>2</sup> Stretch))
1770-1749	1765-1730	1716-1647	1700 -1637	1747-1717	v(C=O)
1604-1553	1602-1554	1579-1541	1583-1560	1588	v(C=C) )Ar
1396	1404	1396	1389	1389	v(OH Bend)
1277	1275	1234	1222	1289	v(C-O)
1095	1088	1155	1150	1150	v(C-C)
813	653	815	655	-	M-O

#### 2-IV-دراسة بنية المرتبطة(NANH):

تم اصطناع المرتبطة 4- نيترو فينيل آزو نينهيدرين هيدرات من خلال ديازة بارا نيترو

الأنيلين ومن ثم تصالبه مع النينهيدرين هيدرات وفق المخطط (2-IV) التالي:

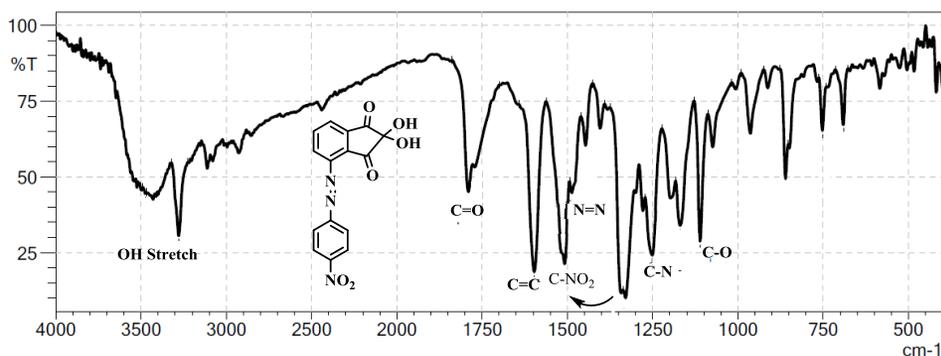




2,2-dihydroxy-4-((4-nitrophenyl)diazenyl)-1H-indene-1,3(2H)-dione

### المخطط (2-IV): اصطناع المرتبطة المرتبطة ((NaNH))

لقد حددت هوية المرتبطة باستخدام الطرائق الطيفية:  $^1\text{H-NMR}$  و  $^{13}\text{C-NMR}$  و FT-(IR و (UV-Vis)، حيث أظهر طيف الأشعة ما تحت الحمراء الشكل (1-2-IV) والجدول (1-2-IV) للمرتبطة وجود عصابات امتصاص رئيسية عند الأعداد الموجية  $3279\text{-}3474\text{Cm}^{-1}$  عائدة إلى امتصاص مجموعة (OH) وعند  $3081\text{Cm}^{-1}$  عائدة إلى امتصاص الرابطة العطرية (C-H) وعند  $1771\text{-}1790\text{Cm}^{-1}$  عائدة إلى امتصاص المجموعتين الكربونيليتين (C=O)،  $1487\text{Cm}^{-1}$  عائدة إلى امتصاص مجموعة الأزو (N=N)، وعند  $1597\text{Cm}^{-1}$  عائدة إلى امتصاص مجموعة (C=C) للحلقة العطرية، كما لوحظ عصابتي امتصاص عند الترددتين ( $1508\text{-}1342\text{Cm}^{-1}$ ) تعودان إلى الامتصاص المتناظر واللامتناظر لمجموعة النترو ( $\text{NO}_2$ ) المرتبطة بالحلقة العطرية.



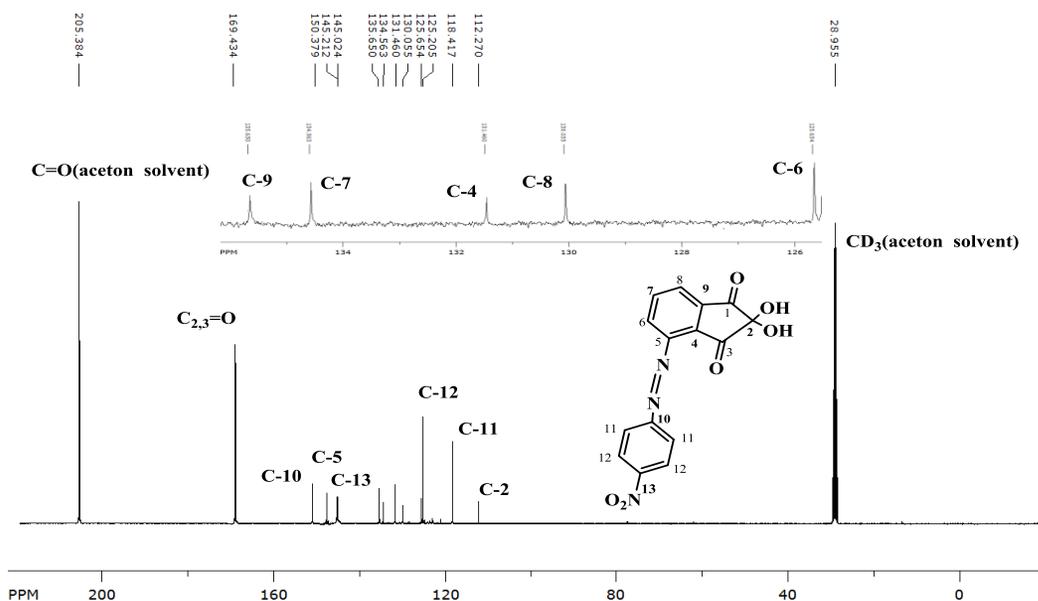
الشكل (1-2-IV): طيف الأشعة تحت الحمراء للمرتبطة ((NaNH))



الجدول (2-2-IV): قيم الانزياحات لطيف الرنين النووي المغناطيسي البروتوني  
 $^1\text{H:NMR}$  للمرتبطة (NANH)

رقم ذرة الكربون	الانزياح الكيميائي ( $\delta$ , ppm)
2 (O-H)	4.29 (s, 2H)
6	7.50 (d, 1H, $j = 8\text{Hz}$ )
7	7.69 ((t, 1H, $j_1 = j_2 = 8\text{Hz}$ ))
8	8.20 (d, 1H, $j = 8\text{Hz}$ )
11	7.76 (d, 2H, $j = 8\text{Hz}$ )
12	8.31 (d, 2H, $j = 8\text{Hz}$ )

في طيف الـ  $^{13}\text{C-NMR}$  الشكل (4-2-IV) للمرتبطة ظهر امتصاصاً عند 28.25 ppm يعود إلى كربون مجموعتي المثيل للمذيب الأسيتون المديتر، ويمتص كربون مجموعة الكربونيل للأسيتون المديتر عند الانزياح ( $\delta_c = 205.38\text{ppm}$ )، بينما تمتص مجموعتي الكربونيل في النينهيدرين هيدرات عند الانزياح ( $\delta_c = 169.43\text{ppm}$ )، كما تظهر امتصاصات أخرى موضحة في الجدول (3-2-IV).



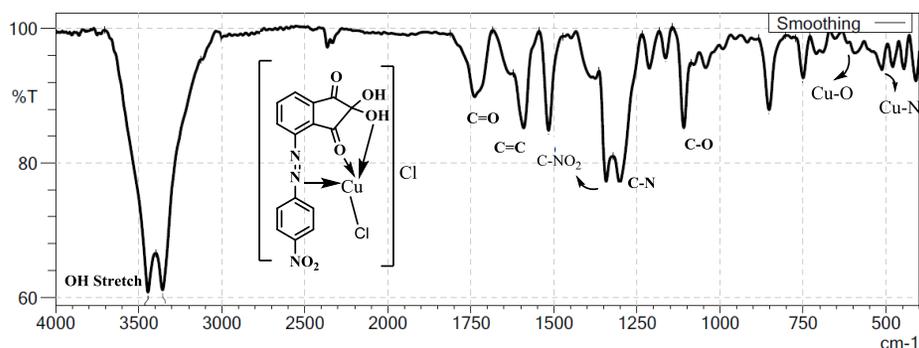
( $^{13}\text{C-NMR}$ ): طيف الرنين النووي المغناطيسي البروتوني 4-2-IV الشكل ( NANH المرتبطة )

الجدول (3-2-IV): قيم الانزياحات لطيف الرنين النووي المغناطيسي البروتوني  $^{13}\text{C:NMR}$  للمرتبطة (NANH)

$^{13}\text{C-NMR}(\delta_c \text{ ppm})$	Number of Carbon
169.43	1,3
112.27	2
131.46	4
145.21	5
125.65	6
134.56	7
130.06	8
135.65	9
1118.42	11
125.22	12
145.02	13

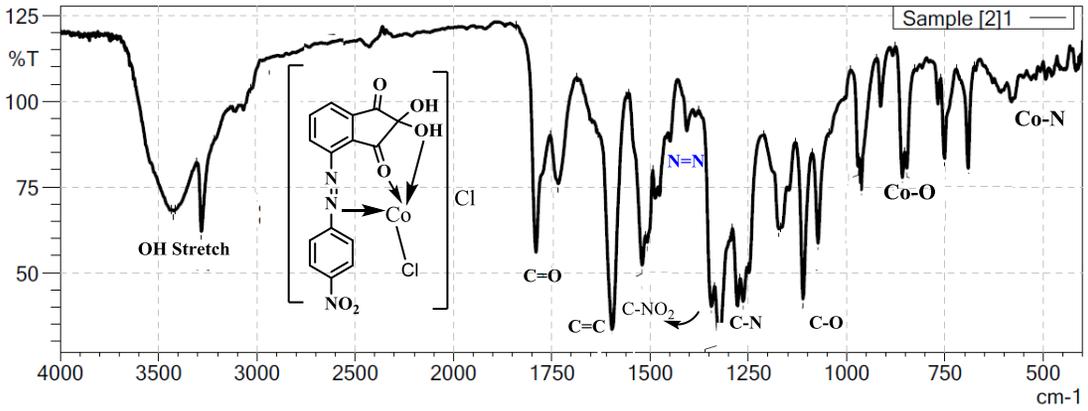
### 3-IV- دراسة بنية معقدات المرتبطة (NANH):

درست بنية المعقدات المحضرة باستخدام مطيافية الأشعة ما تحت الحمراء الاشكال (1-3-IV) ، و (2-3-IV) ، والشكل (3-3-IV) ، (4-3-IV) ؛ حيث تبين الأطياف المسجلة للمعقدات من خلال مقارنتها مع طيف المرتبطة (NANH) انزياح عصابات الامتصاص التابعة لامتطاط الرابطة (OH) انزاحت نحو الأعداد الموجية الأعلى من  $3279-3474\text{Cm}^{-1}$  في المرتبطة إلى  $3340-3445\text{Cm}^{-1}$  في المعقدات، وامتصاص المجموعتين الكربونيليتين (C=O)  $(1771-1790\text{Cm}^{-1})$  نحو الأعداد الموجية الأعلى  $(1720-1740\text{Cm}^{-1})$  في المعقدات، إضافة إلى انزياح عصابة الامتصاص التابعة لامتطاط مجموعة الأز و (N=N) نحو الأعداد الموجية الأعلى من  $1487\text{Cm}^{-1}$  في المرتبطة إلى  $1444-1450\text{Cm}^{-1}$  في المعقدات ، مما يدل على حدوث التساند في هذه المواقع، أي يمكن القول بأنّ تساند الشاردة المعدنية  $(\text{M}^{+2}\cdot\text{Fe}^{+3})$  مع المرتبطة (NANH) يتمّ من خلال ذرتي الأوكسجين للمجموعات الهيدروكسيلية والكيتونية ، (OH) و (C=O) وذرة نتروجين مجموعة الأزو (N=N)، بالإضافة إلى عصابات أخرى موضحة في الجدول (1-2-IV).

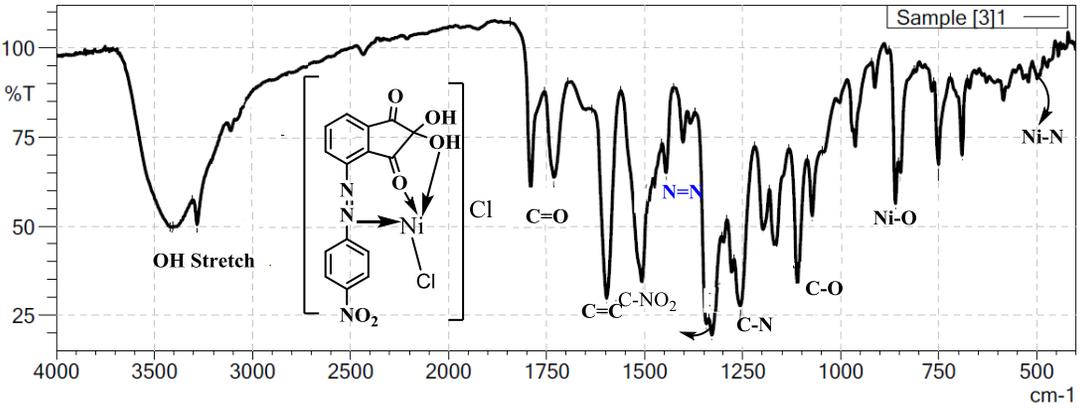


15

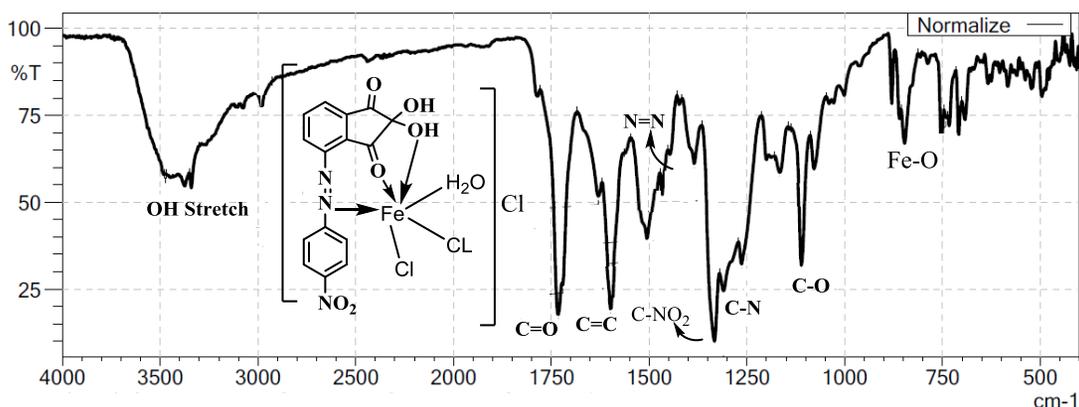
الشكل (1-3-IV): طيف الأشعة تحت الحمراء للمعقد  $[\text{Cu}(\text{NANH})\text{Cl}]\text{Cl}$



الشكل (2-3-IV): طيف الأشعة تحت الحمراء للمعقد  $[Co(NANH)Cl]Cl$



الشكل (3-3-IV): طيف الأشعة تحت الحمراء للمعقد  $[Ni(NANH)Cl]Cl$



الشكل (4-3-IV): طيف الأشعة تحت الحمراء للمعقد  $[Fe(NANH)H_2OCl_2]Cl$

الجدول (1-2-IV): قيم عصابات الامتصاص في طيف (FT-IR) للمربطة (NANH) ومعداتها المعدنية

العدد الموجي ( $\bar{\nu}$ (Cm <sup>-1</sup> ))					
$[Fe(NANH)H_2OCl_2]Cl$	$[Ni(NANH)Cl]Cl$	$[Co(NANH)Cl]Cl$	$[Cu(NANH)Cl]Cl$	NANH	الزمر الوظيفية
3340-3471	3283-3412	3283-3424	3346-3445	3279-3474	OH
3082	3085	3085	3080	3081	C-H sp <sub>2</sub>
1720-1732	1732-1790	1734-1789	1721-1740	1771-1790	C=O
1599	1597	1597	1591	1597	(C=C)Ar
1518	1508	1519	1519	1508	C-NO <sub>2</sub> Symmetric
1332	1342	1344	1342	1342	C-NO <sub>2</sub> Asymmetric
1447	1444	1450	1448	1487	N=N
1263	1256	1277	1302	1252	C-N
1111	1111	1111	1109	1111	C-O
847	846	847	642	—	M-O
-	455	555	480	-	M-N

### 5- الاستنتاجات والتوصيات:

- 1) تم اصطناع معقدات من مرتبطة (NI).
- 2) تحضير المرتبطة (NANH) ثم تحضير معقدات معدنية للمرتبطة (NANH) وذلك بتفاعلها مع كلوريدات النحاس، الكوبالت، النحاس و الحديد اللامائية.
- 3) حددت هوية كل من المرتبطة والمعقدات المحضرة من خلال مطيافية الأشعة ماتحت الحمراء (FT-IR) ومطيافية الطنين النووي المغناطيسي البروتوني والكربوني، حيث أظهرت نتائج الدراسة توافقها مع الصيغ المقترحة للمعقدات المحضرة.
- 5) نقترح دراسة تطبيقات المعقدات المحضرة كالفعالية البيولوجية.

قائمة المراجع:

[1]. Ruhemann, Siegfried (1910). "Cyclic Diand Tri-ketones" .  
Journal of the Chemical Society, Transactions. 97: 1438–1449.

[2]. Gabi D., SANDU I., Robert G., Gheorghita Z., Ionel

M.,2013,Ninhydrin– Based Forensic Investigations:II Cyanide  
Analytical Toxicology, International Journal of Criminal  
Investigation,V.1,N.4,P.213–226.

[3]. Davies, P., Kobus, H., Taylor, M., and Wainwright, K., 1995,  
"Synthesis and Structure of the Zinc(II) and Cadmium(II)  
Complexes Produced in the

Photoluminescent Enhancement of Ninhydrin Developed  
Fingerprints Using Group 12 Metal Salts," Journal of Forensic  
Sciences, V.40,No.4,p.565–569.

[4]. Kumala W., Ph. Thesis, DEPARTMENT OF CHEMISTRY,  
SCIENCE FACULTY, ADDIS ABABA UNIVERSITY,2006.

[5]. Aly. M.A.,Hassan,1997,Some Metal Complexes Of Schiff  
Base Ligands Derived From Ninhydrin and Some Amino Acids, j.  
Synth.React.Inorg.Met.Chem ,V.27,N.6, p.855–861

[6]. Kumara T S., Kuamrb A S., Methuku K R.,2014, Multi  
Dentate Ligands and Metal Complexes Derived from Ninhydrin and  
Ethylen Diamine,International Journal of Modern Chemistry and  
Applied Science

V.1, N.4, P. 39 –43.

[7]. Singh D P Rimpi M N Ch.,2008, DIVALENT METAL COMPLEXES WITH LIGAND DERIVED FROM NINHYDRIN AND AROMATIC DIAMINES AND COMPARISONS OF THEIR REACTIVITIES RASYAN JOURNAL OF CHEMISTRY, V.1, N.1, P.93-98.

[8]Pratibha V, Ankush M, Swati C, Sundaram S, and Vandana S;2019 DABCO Catalyzed Synthesis of  $\beta$ -Hydroxy Ketones Derived from  $\alpha$ -Methyl Ketones and Ninhydrin under Microwave Irradiations Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim P 5394-5397.

## دراسة لعبة Maker-Breaker التوافقية الموضعية على بعض البيانات المترابطة

طالب الماجستير: مالك محمد الخضير

قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين

المشرف الرئيسي: د. هديل سمير برباره<sup>1</sup>

المشرف المشارك: د. رياض خضر الحميدو<sup>2</sup>

### الملخص

نسلط الضوء في هذه الورقة البحثية على لعبة Maker-Breaker (الباني\_الهادم)، وذلك عندما يُفرض شرط معين على أحد اللاعبين بالتحرك ضمن مسلك أو مسار، وتكون بيئة العمل ضمن بيان مترابط معطى، ويحاول كل من اللاعبين حيازة أكبر قدر ممكن من الرؤوس من البيان المترابط الذي تمت عليه عملية اللعب.

وقد تم وضع التعاريف والمفاهيم الأساسية اللازمة لهذه الدراسة.

تم اثبات ثلاث مبرهنات حول كيفية اللعب ضمن شروط معينة على أنواع من البيانات المترابطة التي تحتوي مساراً بين كل رأسين من البيان.

**الكلمات المفتاحية:** ألعاب الباني\_الهادم، ألعاب توافقية، ألعاب موضعية، بيان تام، بيان تكعيبي.

<sup>1</sup> مدرس في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة تشرين، اللاذقية.

<sup>2</sup> مدرس في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة الفرات، ديرالزور.

# Study of the positional combinatorial Maker-Breaker game on some connected graphs

**Master's Student: Malik Muhammad Al-Khodair**

**Main Supervisor: Dr. Hadeel Samir Barbara**

**Co-Supervisor: Dr. Riad Khader Al-Hamido**

## Abstract

In this research paper, we highlight the Maker - Breaker game, when a certain condition is imposed on one of the players to move within a walk or path, and the work environment is within a graph, and each of the players tries to get as many vertices as possible from graph made on it playing process.

Definitions and basic concepts required for this study have been developed.

Three theorems are proven about how to play under certain conditions on types of connected graphs.

**Key words:** Maker-Breaker games, combinatorial games, Positional games, Complete graph, Cube graph.

## المقدمة:

قُدِّمت ألعاب Maker-Breaker من قبل Erdős و Selfridge [1] على أنها تعميم للعبة Tic-tac-toe. ومن ثمَّ توالت العديد من النتائج على أنواع من هذا النمط. وفي نسخة قياسية لهذه اللعبة، لتكن  $X$  مجموعة منتهية و  $\mathcal{F}$  عائلة من المجموعات الجزئية من  $X$ ، ولتكن  $a$  و  $b$  أعداد صحيحة موجبة معطاة، في لعبة Maker-Breaker (الباني\_الهادم)  $(a: b)$  التوافقية الموضعية والتي يرمز لها بالرمز  $(X, \mathcal{F})$ ، يوجد لاعبين، أحدهما يدعى Maker (الباني أو الصانع) والآخر يدعى Breaker (الهادم أو المخرب) يأخذ الباني دوره في استدعاء  $a$  عنصر من المجموعة  $X$  ويأخذ الهادم دوره في استدعاء  $b$  عنصر من المجموعة ذاتها. ومن الطبيعي جداً أن تُلعب ألعاب (الباني\_الهادم) على أضلاع لبيان معطى  $G$ ، أي عندما تكون المجموعة  $X$  ممثلة بأضلاع البيان المعطى، أي أنّ  $X = E(G)$ ، ومجموعات الريح هي بُنى معينة في نظرية البيان، كأن تكون أشجار مولدة أو حلقات هاملتونية أو غير ذلك من البنى حسب مقتضيات الدراسة. وبالتالي إذا أخذنا نسخة قياسية تُلعب على بيان تام  $K_n$ ، فإن كلاً من الباني والهادم يأخذان دورهما في استدعاء أضلاع من الرسم البياني المعطى، حيث يحاول الباني (قد يكون فريق أو مؤسسة أو جيش ...) بناء بنية خاصة من الأضلاع التي استطاع الحصول عليها، بينما ينصب هدف الهادم (أيضاً، قد يكون فريق أو مؤسسة أو جيش ...) على منع الأول من الوصول إلى هدفه.

نعتبر النوع التالي من لعبة Maker-Breaker القياسية، في هذا النوع يقوم Maker، عند حلول دوره في التحرك سواء كان هو من يبدأ اللعبة أم لا، باستدعاء الأضلاع وفقاً لمسلك (Walk) على التوالي، أي أنه عند أي لحظة من اللعبة إذا كان Maker عند رأس  $v$  من البيان  $G$  وحان دوره في التحرك، فإنه يتحرك على امتداد ضلع  $e \in G$

بحيث أنه يحقق شرطين أولهما أن يكون هذا الضلع واقعاً على الرأس  $v$  ، وثانيهما أن هذا الضلع لم يتم الاستيلاء عليه من قبل Breaker.

وفي بعض الأحيان يسمح للاعب Breaker القيام بالاستيلاء على أكثر من ضلع في الحركة الواحدة، نرسم لهذه الحالة المتحيزة بالرمز  $(1: \alpha)$  .

نعتبر في هذا البحث بأن لعبة Maker-Breaker ضمن الشرط الموضح أعلاه، أن هدف Maker هو الحصول على العديد من الرؤوس ما استطاع إلى ذلك سبيلاً، بينما يهدف Breaker إلى تقليل عدد الرؤوس الممكن زيارتها من قبل Maker وذلك من خلال الاستيلاء عليها، وتنتهي اللعبة عندما لا يوجد مسلك (ممر) من موضع Maker الحالي إلى أي رأس غير مزار على طول الأضلاع غير المستعدة من قبل Breaker.

ومن المسلم به عند دراسة تحرك Maker ضمن مسلك فلا بد من دراسة حركته ضمن مسار، وبالتالي سنعتبر ذلك تنوع آخر من هذه اللعبة، حيث أن Maker لا يستطيع إعادة زيارة رؤوس قد زارها مسبقاً على حين كان يستطيع فعل ذلك عندما كان يتحرك وفق مسلك، وهنا تنتهي اللعبة عندما لا يوجد مسار من موضع Maker الحالي إلى أي رأس غير مزار على طول الأضلاع التي لم يستولي عليها Breaker والرؤوس غير المزار مسبقاً من قبل Maker.

ولتجنب الالتباس بين النوعين سنرمز للنوع الأول (الحركة ضمن مسلك) بـ  $WMaker-Breaker$ ، وللنوع الثاني (الحركة ضمن مسار) بـ  $PMaker-Breaker$ .

علماً أنه قد تمت معالجة ألعاب Maker-Breaker في كتاب Beck [2] وكذلك الدراسة الأخيرة لـ Hefetz و Krivelevich وآخرون [6].

### هدف البحث:

ينصب تركيز البحث عموماً في دراسة لعبة Maker-Breaker وذلك عندما تتقيد حركة Maker ضمن مسلك أو مسار على بيان مترابط، بينما حركة Breaker غير مقيدة بشرط، والبيانات المترابطة التي تم العمل عليها هي البيانات التامة  $K_n$  ( $n \geq 6$ )، والنوع الآخر هي البيانات التكعيبية (n-cube)، ونريد معرفة كم عدد الرؤوس التي يستطيع Maker الحصول عليها.

### طرق ومواد البحث:

التعاريف والمفاهيم الأساسية [2],[5],[6]:

[1] اللعبة التوافقية (Combinatorial Game): تتعامل اللعبة التوافقية مع نوع

محدد من الألعاب الثنائية، ويمكن وصفها على النحو التالي:

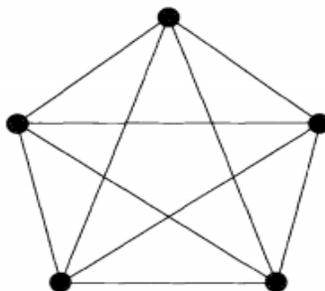
- هناك لاعبان يتبادلان التحرك.
- لا توجد أدوات حظ مثل حجر النرد أو البطاقات العشوائية.
- هناك معلومات كاملة، أي كلا اللاعبين يعرفان جميع الحركات المتاحة لكلا اللاعبين.
- تنتهي اللعبة في النهاية، حتى ولم يتبادل اللاعبان التحركات.
- تنتهي اللعبة عندما يجد أحد اللاعبين نفسه غير قادر على القيام بأي حركة قانونية.

[2] اللعبة الموضعية (Positional Game) : لاعبين يتبادلان بشغل نقاط جديدة.

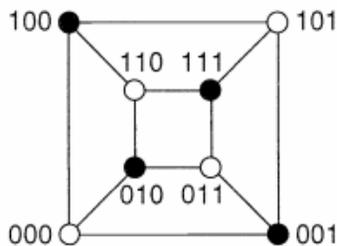
اللاعب الذي يستطيع أولاً شغل مجموعة ربح (winnig set) هو الفائز، أما إذا لم توجد مجموعة ربح فيعلن عن اللعبة أنها تعادل.

[3] لعبة Maker-Breaker: يتبادل اللاعبان Maker و Breaker بشغل نقاط جديدة. يربح Maker في نهاية اللعبة إذا ما استطاع شغل كافة العناصر لأغلب مجموعات الربح، ويربح Breaker إذا ما استطاع شغل عنصر واحد على الأقل من كل مجموعة ربح. (هنا لا يوجد تعادل بين اللاعبين، إما رابح أو خاسر، وبالتالي لعبة Maker-Breaker هي حالة خاصة من الألعاب الموضعية).

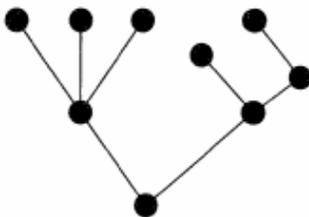
[4] البيان التام  $(K_n)$ : نقول عن البيان  $G(V, E)$ ، حيث  $V$  مجموعة الرؤوس و  $E$  مجموعة الأضلاع، أنه بيان تام (Complete graph) إذا كان كل رأس في البيان يجاور جميع رؤوس البيان الأخرى، وبالتالي لكل رأس الدرجة  $n-1$ .



[5] البيان التكعيبي  $(Q_n)$ : هو بيان منتظم من المرتبة  $2^n$  والدرجة  $n$ ، كما أن رؤوس البيان مرتبة وفق متجه  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  حيث  $(a_i = 0 \text{ or } 1)$  لأجل  $(i = 1, 2, \dots, n)$  ويكون الرأسان متجاورين إذا اختلفا بمركبة واحدة فقط من مركبات متجهي الرأسين. ولهذه البيانات أهمية خاصة وهي تنتج من تعريف الجداء الديكارتي للبيانات ويرمز له بـ  $Q_n \cdot Q_n$  (n-cube) يكون  $K_2$  عندما  $n = 1$ ، أي أن  $Q_1 = K_2$ . إذا كان  $n > 1$  نعرف  $Q_n$  بشكل متتابع، أي أن  $Q_n = Q_{n-1} \times K_2$ . حيث أن البيان التكعيبي هو البيان كما في الشكل التالي:



[6] الشجرة (Tree): هي بيان مترابط خالٍ من الحلقات، والبيان غير المترابط الذي لا يحوي حلقات يسمى غابة (forest) وبناءً على تعريف الغابة فإن الشجرة غابة مؤلفة من مركبة وحيدة.



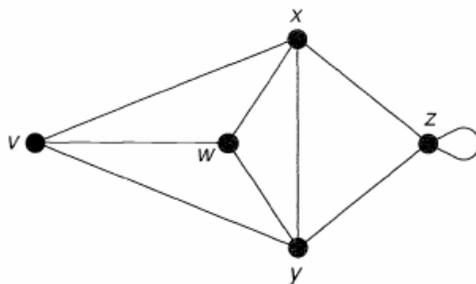
[7] المسلك (Walk): ليكن البيان  $G(V, E)$ ، وليكن  $u$  و  $v$  رأسين من البيان  $G$  (ليس بالضرورة متميزان). نسمي  $W=u-v$  مسلك (walk) من الرأس  $u$  إلى الرأس  $v$ ، إذا كان  $W$  متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع بالشكل التالي:

$$u = v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k = v$$

من الممكن تكرار الرؤوس والأضلاع في المسلك.

[8] المسار (Path): هو مسلك شريطة عدم تكرار الرؤوس أو الأضلاع.

مثال: ليكن لدينا البيان التالي:



لدينا المتتالية  $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow z \rightarrow y \rightarrow w$  عبارة عن مسلك (ممر) أما المتتالية  $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z$  فهي عبارة عن مسار.

### النتائج والمناقشات:

**المبرهنة (1):** ليكن البيان  $G(V, E)$  عبارة عن بيان تام، حيث أن عدد الرؤوس  $n$  يحقق  $n \geq 6$ ، وضمن عملية لعب مثالية في لعبة PMaker-Breaker (1:1)، فإن اللاعب Maker يزور كل الرؤوس باستثناء اثنين منها.

**المبرهنة (2):** ليكن البيان  $G(V, E)$  عبارة عن بيان تام، وضمن عملية لعب مثالية في لعبة WMaker-Breaker  $(1: \alpha)$  على البيان  $G$  بحيث  $(n \geq 2\alpha^2)$ ، فإن Maker يزور  $n - 2\alpha + 1$  رأس، حيث  $(\alpha \geq 1)$ .

**المبرهنة (3):** ليكن البيان  $G(V, E)$  عبارة عن بيان تكعيبي، فإنه ضمن عملية لعب مثالية في لعبة WMaker-Breaker، فإن Maker يزور على الأقل  $2^{n-2}$  رأس وعلى الأكثر  $2^{n-1}$  رأس.

### بعض الرموز:

لتكن  $V_t$  تشير إلى مجموعة الرؤوس التي تمت زيارتها من Maker، ولتكن  $U_t$  تشير إلى خلاف ذلك، وذلك بعد قيام Maker بالحركة  $t$ . حيث أن Maker يكون عند الرأس

$v_t$  وذلك بعد قيامه بالحركة  $t$ . نشير إلى البيان المحدث بأضلاع Breaker  $\Gamma_B$  ،  
وإلى البيان المحدث بأضلاع Maker  $\Gamma_M$ .

**إثبات المبرهنة (1):** من الواضح أنه في اللحظة  $t$  سيكون البيان  $\Gamma_M$  عبارة عن مسار.  
علماً أن المسألة ليست مسألة من يبدأ أولاً بالتحرك، ولإظهار ذلك نفرض أن Maker  
يبدأ أولاً من أجل أي حد أدنى على عدد الرؤوس التي تمت زيارتها، ويبدأ Breaker من  
أجل أي حد أدنى على عدد الرؤوس التي تمت زيارتها.

**الحد الأدنى:** يتبع Maker الاستراتيجية التالية: إذا كان  $|U_t| > 2$  وقام Breaker  
باختيار  $f_t$  حيث  $f_t \cap V_{t-1} = \emptyset$ ، فإن Maker يتحرك إلى  $f_t \in v_t$ . بخلاف ذلك،  
فإن Maker يتحرك إلى رأس كفي. وطالما أن Maker قادر على اتباع هذه  
الاستراتيجية، سيكون لدينا بعد كل تحرك ل Maker ما يلي:

كل ضلع ل Breaker يحتوي على عنصر من  $V_t$ . (1)

نتحقق الآن فيما إذا كانت هذه الاستراتيجية مجدية ل  $|U_t| > 2$ . نبدأ مع النوع الأول  
من أضلاع Breaker، والتي تكون منفصلة عن  $V_t$ . في الحركة  $t$ ، ليكن  $v_{t-1} = x$   
و  $v_t = y$ . بفرض أن Breaker اختار الضلع  $(b_1, b_2)$  حيث  $b_1, b_2 \notin V_t$ ، ومن  
أجل  $i = 1, 2$  فإن  $(y, b_i)$  هو ضلع ل Breaker. ونعتبر هذه هي المرة الأولى التي  
يحدث فيها هذا الوضع. ثم نفرض أن  $(y, b_i)$  هو الضلع  $s_i$  المختار من Breaker  
(حيث  $s_1 < s_2$ ). فإننا نحصل على تعارض مع العلاقة (1) بعد اختيار الرأس  $x$ . وإذا  
ما تم اختيار الرأس  $x$ ، فإن  $(y, b_i)$  هو ضلع ل Breaker والذي لا يحتوي على  
عناصر من  $V_{t-1}$ .

نعتبر الآن الحالة التي يكون فيها ضلع  $l$  Breaker واقع على عنصر في  $V_t$ . العلاقة (1) تشير إلى أن اختيار Breaker هو في الغالب الضلع الثاني بين الرأس  $v_t$  والمجموعة  $U_t$ . وعلى وجه الخصوص،  $|U_t| > 2$  تشير إلى أن Maker بإمكانه التحرك إلى رأس لم تتم زيارته. وبالتالي سينجح Maker بزيارة كل الرؤوس باستثناء اثنين منها.

**الحد الأعلى:** يلعب Breaker بشكلٍ كيفي لغاية حركته عند الدور  $n - 4$ ، عندما  $|U_{n-4}| > 4$ . يختار في حركته التاليتين ضلعين من تجزئة مستقلة من  $U_{n-4}$ . وبعد هاتين الحركتين (مع حركة  $l$  Maker بينهما)، يحين دور Maker، ويتبقى ثلاثة رؤوس غير مُزارة. وأياً يكن الرأس من  $U_{n-3}$  فإن Maker ربما يختار التحرك إلى الرأس التالي، وهذا الرأس سيكون متجاوزاً مع رأس في  $U_{n-2}$  على طول أحد ضلعي التجزئة المستقلة  $l$  Breaker؛ وبالتالي مع وجود حركة إضافية، فإن Breaker سيضمن أن كلاً من الضلعين من الرأس  $v_{n-2}$  إلى المجموعة  $U_{n-2}$  تكون مشغولة من قبله.  $\square$

## إثبات المبرهنة (2):

هنا اللاعب Maker غير مقيد بمسار، وإنما تتم حركته وفقاً لمسلك إذ بمقدوره تكرار الرؤوس والأضلاع.

**الحد الأدنى:** يقوم Maker ببناء شجرة  $T$  في جولته الأولى (وهذا طبيعي؛ لأن البيان مترابط)، وليكن الجذر هو الرأس  $v_1$  عند المستوى  $0$ . ومن المعلوم إن التعابير (مستوى/أب/ابن) تتعلق بالجذر. ليكن  $v \in T$  وليكن  $w = \pi(v)$  (أي أن الرأس  $w$  هو أب للرأس  $v$ ). إذا كان Maker عند رأس، وليكن  $x$ ، ووُجدَ رأس  $y \in U_t$  بحيث أن Breaker لم يستدعي بعد الضلع  $(x, y)$  فإن Maker سيتحرك إلى الضلع  $(x, y)$ . وليكن  $x = \pi(y)$ . وبخلاف ذلك، إذا لم توجد حركة ممكنة مثل هذه فإن

Maker سيتحرك إلى  $\pi(x)$  ويُعيد البحث من جديد عن  $y \in U_t$  في حركته التالية. اللعبة تنتهي عندما يجد Maker نفسه عند  $v_1$  وكل الأضلاع بين  $v_1$  و  $U_t$  تم أخذها من قبل Breaker.

بفرض أن اللعبة تنتهي عندما  $|U_t| = k$ . وبالتالي فإن اللاعب Maker يكون قد صنع  $2(n - k - 1)$  حركة. وذلك لأن كل ضلع من الشجرة  $T$  قد تم عبوره مرتين، الأولى من الجهة الأمامية، أما الثانية فمن الجهة الخلفية. كما أن Breaker يكون قد كَسِبَ على الأقل  $k(n - k)$  ضلع وذلك بين  $T$  و  $U_t$ . وبالتالي لدينا:

$$k(n - k) \leq 2\alpha(n - k - 1)$$

وينتج من هذا أن  $k < 2\alpha$ . وهذا يبين أن Maker يزور على الأقل  $n - 2\alpha + 1$  رأس.

**الحد الأعلى:** معطيات استراتيجية Breaker على النحو التالي: بفرض أن Maker يستهل التحرك أولاً ويستدعي ضلع  $\{v_1, v_2\}$ ، أما اللاعب Breaker فيختار رأس  $w_1$  بحيث  $w_1 \notin \{v_1, v_2\}$ . سيستهلك Breaker،  $\frac{n-1}{\alpha}$  حركة مما يجعلنا نتأكد بأن Maker ليس بمقدوره زيارة  $w_1$ . وفي حركة ما، سيقوم Breaker باستدعاء الضلع من الرأس  $w_1$  إلى الرأس  $v_t$ ، وهذا عند الضرورة، بالإضافة إلى  $\alpha - 1$  ضلع آخر تقع على  $w_1$ . وهذا يأخذ ما يقارب  $\frac{n-1}{\alpha}$  حركة. بعد ذلك يقوم Breaker باختيار الرأس، غير المزار، ويعمل على حمايته لئلا تتم زيارته مرة ثانية بنفس الطريقة. وهو يفعل هذا لأجل  $w_1, w_2, \dots, w_{\alpha-1}$ . وبالإجمال، هذا يصنع على الأقل  $(\alpha - 1) \frac{n-1}{\alpha} + 1$  رأس غير مزار. بعدها يقوم Breaker باختيار  $\alpha$  رأس غير مزار  $y_1, y_2, \dots, y_{\alpha}$  ( $n > 2\alpha^2$ )، وكل حركة له تتألف من

□

اكتساب ضلع من الأضلاع  $(v_t, y_i)$ ،  $i = 1, 2, \dots, \alpha$ . وهذا يحمي الرؤوس  $y_\alpha, \dots, y_2, y_1$  وبالتالي فإن **Maker** يزور على الأكثر  $n - 2\alpha + 1$  رأس.

**إثبات المبرهنة (3):**

**الحد الأدنى:** نستهل المناقشة هنا بأسلوب مشابه لما رأيناه في القسم الأول من المبرهنة السابقة. يبني **Maker** شجرة  $T$  على مدار جولته الأولى. وللمرة الثانية فإن الأضلاع بين  $T$  و  $U_t$  ستكون لـ **Breaker**. والآن لنفرض أن  $T$  لديه  $k$  رأس، وبالتالي:

$$2(k - 1) \geq e(T, U_t) \geq k(n - \log_2 k)$$

الحد الأدنى ينتج من مبرهنة Harber [7]، وعليه فإن:

$$\log_2 k \geq n - 2 + \frac{2}{k}$$

وبالتالي  $2^{n-2}$  رأس على الأقل تكون مأخوذة من قبل **Maker**.

**الحد الأعلى:** بفرض أن **Maker** يبدأ أولاً، ويفرض أنه يبدأ من الرأس  $(0, 0, \dots, 0)$  وبعجها يتحرك إلى الرأس  $(0, 1, \dots, 0)$ . حيث ان **Breaker** لن يسمح لخصمه من أخذ أي رأس تكون مركبته الأولى هي 1. عندما يتحرك **Maker** إلى  $(0, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ، فإن **Breaker** يستولي على الضلع  $(0, x_2, x_3, \dots, x_n)(1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ . ويستطيع **Maker** اكتساب الضلع  $(0, 0, \dots, 0)(1, 0, \dots, 0)$  في حركته الأخيرة، أو ما قبل الأخيرة. وهذا يوضح بأن  $2^{n-1}$  رأس على الأكثر تمت زيارتها من قبل **Maker**.  $\square$

المراجع:

- [1]. P. Erdős AND J. Selfridge, On a combinatorial game, J. Combinatorial Theory Ser. A, 14(1973), pp. 298-301.
- [2]. J. Beck, Combinatorial Games: Tic- Tac- Toe Theory, Cambridge Press, Cambridge, UK, 2008.
- [3]. D. Clemens, T. Tran, Creating in Walker-Breaker games, Discrete Mathematics 339 (8) (2016), 2113-2126.
- [4]. D. Hefetz, M. Krivelevich, M. Stojakovič and and T.Szabó, Fast winning strategies in Maker-Breaker games, Journal of Combinatorial Theory Series B 99 (2009), 39-47.
- [5]. D. Hefetz, M. Krivelevich, M. Stojakovič and and T.Szabó, Positional Games, Oberwalfach Seminars 44, Birkhäuser/Springer Basel, 2014.
- [6]. D. B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, 2001.



## الناجم المورثي والهرموني التعبير دراسة تغير عن المسؤولة للمورثات TCDD عن التعرض لمركب مسار الاصطناع الحيوي للإستروجين في خلايا مبيض BALB/c إناث فئران

نور الضللي<sup>(1)</sup> و شادي سكرية<sup>(2)</sup> و عبد السميع هنانو<sup>(3)</sup>

### المخلص

تعدُّ الديوكسينات سموم عضوية هالوجينية مستمرة، يَظهر أثرها السُمي من خلال التفعيل المثابر للمستقبل Aryl-hydrocarbon Receptor (AhR) وهو بروتين مستقبل داخل خلوي، وبالتالي منعه من القيام بدوره في حفظ الاستتباب الداخلي. والذي يؤدي عند الفقاريات إلى تغيرات في التعبير المورثي للعديد من المورثات مما قد ينجم عنه تغيرات في نمو الخلايا وتمايزها وتغيرات في السبل الاستقلابية والإشارية وبالتالي خلل في التوازن الهرموني، وينتج عن كل ذلك أضراراً متعددة تختلف باختلاف نوع الكائن الذي يتعرض لها. فنظراً لعدم توفر معطيات معمّقة حول الآليات الجزيئية التي قد تحدث ضمن خلايا المناسل الأنثوية بعدَ عملية التجريع التجريبي لهذه المركبات وما يرافقها من أثر على عملية تكوين الستيروئيد والتي تؤثر على خصوبة الإناث المعرضة. فقد هدف هذا البحث إلى تحري الأثر السمي لمركب TCDD (2,3,7,8-tetrachlorodibenzo-p-dioxin) التابع لعائلة الديوكسينات الأعلى سمية، من خلال دراسة التغير النسبي في التعبير المورثي عن العديد من المورثات ضمن مسار الاصطناع الحيوي للإستروجين والمسؤولة عن نقل واستقلاب الكولسترول الضروري لتركيب

عن المسؤولة للمورثات TCDD الناتج عن التعرض لمركب المورثي والهرموني التعبير دراسة تغير  
BALB/c مسار الاصطناع الحيوي للإستروجين في خلايا مبيض إناث فئران

الهرمونات الجنسية الموجودة في الخلايا الغمدية للمبيض وهي (*AhR, CYP1A1*,  
(*LHR, CYP11A1, 3βHSD 2, HSD17B1, CYP19A1*) وذلك باستعمال تقانة  
التفاعل السلسلي للبوليميراز الكمي في الزمن الحقيقي RT-qPCR. بالإضافة إلى  
التحري عن التغيرات الهرمونية لهرمون الإسترايول ومعايرته بالطرق المناعية، إذ قمنا  
بتجريب إناث فئران بالغة من السلالة BALB/c بجرعة واحدة فموياً وهي بعمر 10  
أسابيع بالتركيزين (25, 50) مكغ/كغ من مركب TCDD، مقارنةً بمجموعة الشاهد.  
توصلت نتائجنا إلى أن لمركب TCDD قدرة على تغيير التعبير المورثي عن أهم  
المورثات المسؤولة عن نزع السمية و المورثات الأساسية ضمن مسار الاصطناع الحيوي  
للإستروجين في المبيض لدى الإناث المعرضة وبشكل معتمد على تركيز الجرعة  
المعطاة، مصحوباً بالاضطراب الهرموني لهرمون الإسترايول، وبالتالي إمكانية تغير  
مستويات الأنزيمات الصانعة للستيروئيدات، وما لذلك من أثر على اصطناع الهرمونات  
الستيروئيدية الضرورية في تنظيم وظيفة المبيض، الأمر الذي يمكن أن يؤدي إلى حدوث  
اضطرابات في الخصوبة.

الكلمات المفتاحية: TCDD، AhR، المبيض، التعبير المورثي، هرمون الإسترايول،  
RT-qPCR.

(1) طالبة دراسات عليا (دكتوراه)، قسم علم الحياة الحيوانية، كلية العلوم، جامعة دمشق، دمشق،

الجمهورية العربية السورية، [nour.aldelli@damascusuniversity.edu.sy](mailto:nour.aldelli@damascusuniversity.edu.sy).

(2) الأستاذ المشرف، قسم علم الحياة الحيوانية، كلية العلوم، جامعة دمشق، دمشق، الجمهورية

العربية السورية، [chadi.soukkarieh@damascusuniversity.edu.sy](mailto:chadi.soukkarieh@damascusuniversity.edu.sy).

(3) الأستاذ المشرف المشارك، مدير بحوث، هيئة الطاقة الذرية السورية، الجمهورية العربية

السورية، [ashanano@oec.org.sy](mailto:ashanano@oec.org.sy).

## Investigation of Altered Gene Expression and Hormonal change Resulting from Exposure to TCDD of Genes Involved in the Estrogen Biosynthesis Pathway in Ovarian Cells of Female BALB/c Mice

N. Aldelli<sup>(1)</sup>, Ch. Soukkarieh<sup>(2)</sup>, A. Hanano<sup>(3)</sup>

### Abstract

Dioxins are persistent organic halogenated toxins. Their toxic effect appears through continuous activation of the Aryl-hydrocarbon Receptor (AhR), a receptor protein within cells, which prevents it from performing its role in maintaining homeostasis, which in vertebrates leads to changes in the gene expression of many genes, which may result in changes in cell growth and differentiation, changes in metabolic and signaling pathways, and thus an imbalance in hormonal balance. Thus, multiple damages appear that vary according to the type of organism that is exposed to it. Due to lack of data on molecular mechanisms that occur within the cells of the female gonads after experimental doses of these compounds and associated effect on the steroidogenesis, which affects fertility of exposed females.

the aim of this research is to investigate the toxicological effects of TCDD (2,3,7,8-tetrachlorodibenzo-p-dioxin), which belongs to family of the most toxic dioxins, by studying the relative change in gene expression of several genes within estrogen biosynthesis pathway which responsible for transport and metabolism of necessary cholesterol for synthesis of sex hormones were present in the ovarian theca cells, the genes are (*AhR*, *CYP1A1*, *LHR*,

عن المسؤولة للمورثات TCDD الناتج عن التعرض لمركب المورثي والهرموني التعبير دراسة تغير  
BALB/c مسار الاصطناع الحيوي للإستروجين في خلايا مبيض إناث فئران

*CYP11A1, 3βHSD 2, HSD17B1, CYP19A1*) by using real-time quantitative polymerase chain reaction (RT-qPCR). In addition, the hormonal changes of estradiol were performed by immunological essay. Where we dosed adult female mice of the BALB/c strain with a single oral dose at the age of 10 weeks, with two concentrations (25, 50) µg/kg of TCDD and compared them with the control group.

The results of our study concluded that TCDD has the ability to alter the gene expression of the most important genes responsible of dioxin detoxification and gens within the biosynthetic pathway of estrogen in the ovaries of exposed females, by depending on the concentration of the dose given, accompanied by the hormonal disruption of estradiol hormone, thus the possibility of changing levels of steroidogenesis enzymes, and the impact of this on the synthesis of steroid hormones, that necessary in regulating of ovarian function, which could ultimately lead to disorders in fertility

**Keywords:** TCDD, AhR, Ovarian, Gene Expression, Estradiol hormone, RT-qPCR.

- 
- (1) Ph.D. Student, Department of Animal Biology, Faculty of Sciences, Damascus University, Damascus, Syrian Arab Republic. [nour.aldelli@damascusuniversity.edu.sy](mailto:nour.aldelli@damascusuniversity.edu.sy).
  - (2) Supervisor, Department of Animal Biology, Faculty of Sciences, Damascus University, Damascus, Syrian Arab Republic. [chadi.soukkarieh@damascusuniversity.edu.sy](mailto:chadi.soukkarieh@damascusuniversity.edu.sy).
  - (3) Share Supervisor, Research Director, Syrian Atomic Energy Commission, Syrian Arab Republic, [ashanano@oec.org.sy](mailto:ashanano@oec.org.sy).

## المقدمة:

"الديوكسينات" هو الاسم الشائع لعدد كبير من الملوثات البيئية القوية والثابتة، تتشكل كمادة ثانوية غير مرغوب بها، نتيجة العمليات الصناعية المتعددة كصناعة مركبات الكلورين والمبيدات الحشرية والصناعات المعدنية وصناعة البلاستيك من متعدد كلوريد الفينيل (Poly-Vinyl-Chloride (PVC [1]، تتضمن الديوكسينات الكثير من المركبات لكن يعدُّ مركب رباعي كلورو ثنائي بنزو بارا ديوكسين (2,3,7,8-tetrachlorodibenzo-p-dioxin) الذي يعرف اختصاراً بالـ (TCDD) المركب الأكثر أهمية من عائلة الهيدروكربونات الكلورة (polychlorinated-p- (PCDDs) و dioxins و polychlorinated dibenzofurans (PCDFs) وذو معامل مكافئ سُمي (TEF) Toxic Equivalency Factor يساوي 1.0 [2]، ويعد أحد المواد الكيميائية التي تسبب اختلالاً بعمل الغدد الصماء endocrine-disrupting chemicals (EDCs) [3] وذلك نتيجة قدرته على أحداث اضطرابات في مسارات الإشارات للغدد الصماء والتي يمكن أن تسبب عيوباً خطيرة في النمو والتكاثر [4].

كما يغير TCDD من المظهر الهرموني للكائن الحي عن طريق ارتباطه بمستقبلات الهيدروكربونات العطرية (Aryl hydrocarbon Receptor (AhR)، وهو بروتين مستقبل داخل خلوي لمركب TCDD ينشط بواسطة الترابط مع عوامل الانتساخ، يرتبط بالحمض النووي في مواقع محددة تسمى عناصر الاستجابة للديوكسين Dioxin Response Elements (DREs) وهي تسلسلات خاصة من الحمض الريبي النووي منقوص الأوكسجين (Deoxyribonucleic acid (DNA)، والتي توجد في المنطقة المنظمة لانتساخ بعض المورثات الهدف. ولعلَّ أهمها المورثة (CYP1A1)، وهي من

عن المسؤولة للمورثات TCDD الناتج عن التعرض لمركب المورثي والهرموني التعبير دراسة تغير  
BALB/c مسار الاصطناع الحيوي للإستروجين في خلايا مبيض إناث فئران

السيتوكرومات المؤكسدة للمركبات الكيميائية المحبة للدهن Lipophilic كالدوكسينات،  
ومن أهم المورثات المرمزة لأنزيم الاستقلاب الدوائي drug-metabolizing enzyme  
في طور الأول Phase 1 (CYP1A1) والذي يرمز له بالرمز P4501A1، حيث  
يعمل مركب TCDD على تحريضها، يتبع ارتباط AhR مع DRE بتغيرات في شكل  
الكروماتين، والاضطراب النووي في المنطقة المُنسخة من المورثة وتحرير mRNA  
transcription [5] حيث يؤدي تنشيط AhR بواسطة TCDD غالباً إلى تغير تنظيم  
التعبير المورثي [6]، ومجرد وجود AhR وظيفي يقوم بشكل أساسي بكبح النشاط  
المورثي في الفئران، لكن تبقى الآليات الجزيئية لكبح الانتساخ المورثي من قبل AhR  
مُفَقَّرَةً إلى التعريف [7]. حيث أشارت الدراسات الوراثية في الفئران أن AhR يتحكم في  
تكوين الجريبات عن طريق تحفيز موت الخلايا المبرمج apoptosis، مما يؤدي إلى  
انهيار الخط الخلوي وتكوين الجريبات الابتدائية [8] إذ يلعب AhR دوراً في تنظيم نمو  
الجريبات المبيضية وقدرتها على تنظيم وإنتاج هرمونات الستيروئيد الجنسية وفي عملية  
الإباضة وتكوين الجسم الأصفر في المبيض. وبالتالي يتوسط AhR سمية المبيض  
للمواد الكيميائية الغريبة [2].

ركزت الدراسات السابقة على النشاط الأنزيمي في مسار الاصطناع الحيوي للإستروجين  
باستخدام الخلايا المعاملة بال TCDD ضمن أوساط صناعية *invitro* مع وجود  
اختلافات في النتائج، لكن تعتبر دراستنا هي الأولى من نوعها في تحديد الآلية التي  
يعمل من خلالها ال TCDD على منع تكوين الستيروئيد وذلك ضمن وسط حي  
*invivo*، إذ أن المعرفة الأساسية لمسار الاصطناع الحيوي للإستروجين في المبيض  
ضرورية لفهم كيف يمكن أن تؤثر المواد السامة وبالتحديد الديوكسين رباعي الكلور  
(TCDD) على خصوبة الإناث وهو محور هذا البحث. والأثر الذي يحدثه هذا المركب  
على النشاط الأنزيمي في مسار الاصطناع الحيوي للإستروجين من خلال تأثيره المباشر

على الجريبات الغارية (الجريبات المبيضية الحويصلية) antral follicles ومنع اصطناع الهرمونات الستيروئيدية، حيث تُصنَّع الهرمونات الستيروئيدية بشكل رئيسي في المبيض ضمن الخلايا الحبيبية Granulosa cells والخلايا الغمدية Theca cells المحيطة ببويضة الجريب الناضج وتعد الأنزيمات المسؤولة عن اصطناع الستيروئيدات Steroidogenesis enzymes رئيسة من أجل القيام بالوظائف الفيزيولوجية الأساسية مثل التكاثر [9]. حيث يعتمد التكاثر في الثدييات على عملية الإفراز الهرموني من الغدد التناسلية كالهرمون الملوتن (LH) Luteinizing Hormone والهرمون المنبه للجريب Follicle-Stimulating Hormone (FSH) اللذان يعملان معاً لتنظيم وظيفة المبيض [10]، اذ يعمل كلاً من FSH مع الإستروجين بالتآزر مع عوامل النمو في الجريبات ما قبل الإباضة في تحريض المستقبلات الموجودة على الخلايا الحبيبية للهرمون LH والذي يدعى مستقبل الهرمون الملوتن (LHR) Luteinizing Hormone Receptor وهو بروتين سكري مقترن ببروتين G يقع على غشاء البلازما لخلايا الغدد التناسلية، يؤدي ارتباط المستقبل بـ LH إلى تنشيط مسارات تحويل الإشارة التي تنظم تمايز الخلايا ونتاج الستيروئيد وذلك نتيجة تحريض انتساخ المورثات المرمرزة للأنزيمات الهامة في الاصطناع الهرموني [11]. اذ تعمل الأنزيمات المفتاحية (3-beta CYP11A1 (Cytochrome P45011A1), 3βHSD2 (3-beta hydroxysteroid dehydrogenase 2), HSD17B1 (hydroxysteroid dehydrogenase 17B1), CYP19A1 (CytochromP450 19) الموجودة في الخلايا الغمدية على اصطناع الهرمونات الستيروئيدية [1].

فمنظراً لأهمية المورثات المرمرزة لتلك الأنزيمات في خلايا المبيض والضرورية لتحويل الكولسترول بواسطة بروتين ناقل ينظم انتقاله ضمن المنقدرات الحيوية بكميات محددة

عن المسؤولة للمورثات TCDD الناتج عن التعرض لمركب المورثي والهرموني التعبير دراسة تغير  
BALB/c مسار الاصطناع الحيوي للإستروجين في خلايا مبيض إناث فئران

يدعى بروتين Steroidogenic acute regulatory protein (StAR) إلى هرمون  
البريغنينولون، ومن ثم البروجستيرون وتحويله في النهاية إلى هرمون بيتا الإستراديول  
Estradiol وهو الإستروجين الأساسي المفرز من المبيض [12]، والضروري في  
خصوبة الثدييات، لأنه يساعد على تطور الجريبات المبيضية [13]. فقد هدفت دراستنا  
إلى تتبع الأثر السمي لمركب TCDD باستكشاف التأثيرات المعتمدة على كمية الجرعة  
المُعطاة، من خلال التغير النسبي في التعبير المورثي لأهم المورثات المسؤولة عن نزع  
السّمية (*AhR, CYP1A1*) والمورثات الرئيسية في مسار الاصطناع الحيوي للإستروجين  
(*LHR, CYP11A1, 3βHSD 2, HSD17B1, CYP19A1*) والمرمزة للأنزيمات  
المذكورة أعلاه، بالإضافة إلى التحري عن التغيرات الهرمونية لهرمون الإستراديول  
وبالتالي تأثيرها في خصوبة الإناث المعرضة للديوكسين رباعي الكلور.

مواد وطرق البحث:

المواد الكيميائية:

مركب TCDD من شركة (SUPLECO, USA, 10µg/ml in toluene)، تم حله  
في ثنائي ميثيل سلفوكسيد (Dimethyl sulfoxide (DMSO) ثم خُفّفَ بزيت الذرة.  
محلول Trizol من شركة Sigma. كاشف عمل إليزا خاص لمعايرة هرمون الإستراديول  
في دم الفئران Enzyme-Linked Immunosorbent Assay (ELISA) Kit For  
Estradiol (E2) من شركة (MYBioSource, USA).

### حيوانات التجربة:

شملت الدراسة (40) فأر مختبري من نوع Albino mouse سلالة BALB/c، وجميعها من الإناث بعمر 10 أسابيع، ومتوسط وزن يُعادل (24-23 غرام). تمّ العمل على إكثار الفئران ومن ثم معاملتها بالمادة المدروسة في وحدة انتاج الحيوانات المخبرية في هيئة الطاقة الذرية السورية، وضعت الفئران في أقفاص بلاستيكية ذات أغطية معدنية مفروشة بنشارة خشب ناعمة. وزودت بالماء بواسطة زجاجات، كما زودت بالغذاء حسب قواعد العليقة القياسية في البيت الحيواني. والحفاظ عليها ضمن شروط رعاية نموذجية بنظام إضاءة 12 ساعة ضوء/ ظلام، ودرجة رطوبة نسبية (50-60%)، ودرجة حرارة (22) درجة مئوية.

### طريقة العمل:

قسمت حيوانات الدراسة إلى أربع مجموعات، تضمنت كل مجموعة عشرة فئران وجُرت فموياً لمرة واحدة كالتالي

- 1- مجموعة تجريبية مُجرعة بجرعة قدرها 50 مكغ/كغ من TCDD.
- 2- مجموعة شاهدة مُجرعة بجرعة قدرها 50 مكغ/كغ من زيت الذرة.
- 3- مجموعة تجريبية مُجرعة بجرعة قدرها 25 مكغ/كغ من TCDD.
- 4- مجموعة شاهدة مُجرعة بجرعة قدرها 25 مكغ/كغ من زيت الذرة.

. جمع أمصال الدم وعضو المبيض:

تمت التضحية بالحيوانات بعد أسبوع واحد من التجريع، حيث سُحبت عينات الدم من القلب مباشرة، ووضعت في أنابيب، ثم أُدخلت في جهاز الطرد المركزي (3000 دورة في الدقيقة، 15 دقيقة عند 4 درجات مئوية)، وتم جمع الأمصال لقياس تركيز الهرمون. ومن ثم سُرحت الفئران، وأُستخرج عضو المبيض (الأيمن والأيسر) منها، ثم وزنت بميزان الكتروني وحُفظت عينات المبيض بالآزوت السائل لغرض الدراسة الجزيئية عليها.

. تقدير هرمون الإستراديول (E2) في المصل:

حُدثت مستويات هرمون الإستراديول في المصل (عدد الأمصال الكلي 24، n = 6/مجموعة). عن طريق كاشف عمل تجاري إليزا خاص لمعايرة هرمون الإستراديول E2 الخاصة بالفئران من شركة (MYBioSource, USA). باستخدام المقايسة المناعية الأنزيمية التثبيطية التنافسية The Competitive Inhibition Enzyme Immunoassay technique، وحُلل طبقاً لتعليمات الشركة الصانعة.

. استخلاص الرنا الكلي RNA total من المبيض وتحويله إلى دنا متمم cDNA

واجراء تجارب التفاعل السلسلي للبوليميراز الكمي في الزمن الحقيقي (RT-PCR):

استُخلص الرنا الكلي (RNA total) Ribonucleic acid total من نسيج المبيض باستخدام محلول Trizol، من ثم قيس تركيزه بواسطة جهاز قياس تراكيز الحموض النووية Nano Drop (Nano Drop technologies, Qiagen, Germany). وصُممت البادئات النوعية للمورثات الهدف (*AhR*, *CYP1A1*, *LHR*, *CYP11A1*, *3βHSD 2*, *HSD17B1*, *CYP19A1*) والمورثة المرجعية *β-actin* بالعودة إلى قاعدة البيانات NCBI، والتسلسلات موضحة في الجدول 1. ومن ثم حُضِر الدنا المتمم

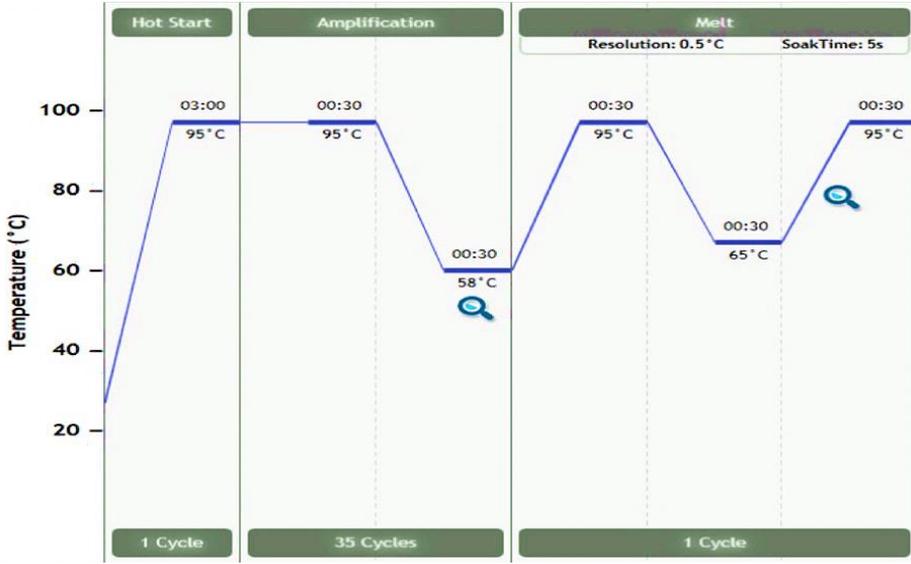
cDNA بدءاً من الرنا النقي بواسطة كاشف عمل (M-MLV Reverse Transcriptase, SIGMA, USA). وُدس التعبير المورثي للمورثات الهدف، باستعمال كاشف عمل خاص (SYBR Green-PCR Kit, QIAGEN, Germany). وحُضّر مزيج التفاعل بحجم نهائي قدره 20 ميكرو لتر، وبإدئات نوعية بما يعادل 1-0,5 ميكرومولر، وكمية cDNA بحدود 200 نانوغرام/التفاعل. وأجري التفاعل بواسطة جهاز

### Real Time-quantitative Polymerase chain reaction (RT-qPCR)

من نوع (Real-Time qPCR System. Agilent technologies USA) لمدة 35 دورة، ودرجة حرارة تهجين 58 درجة مئوية، أتبع التفاعل بإنجاز منحني الانصهار لضمان تجانسية منتج PCR كما في الشكل 1

الجدول 1: التسلسل النكليوتيدي للإدئات المستخدمة في هذه الدراسة.

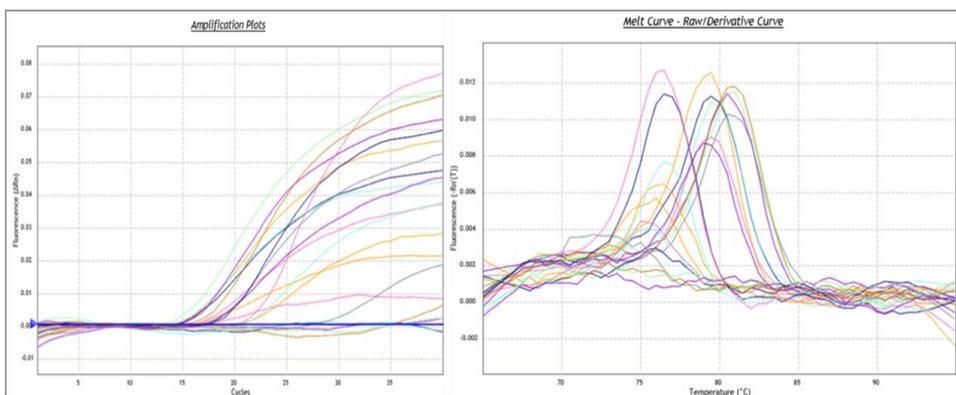
المورثات Genes	المرنسة المباشرة Forward primer	المرنسة العكسية Reverse primer
<i>AhR</i>	5'-TCCACCGCTGCTGGTGAGGT-3'	5'-CTGCTGCTGGCAAGCCGAGT-3'
<i>CYP1A1</i>	5'-CCTGTGGTGGTGTGAGCGG-3'	5'-CAGGGCATTCTGGGCCAGGC-3'
<i>CYP11A1</i>	5'-CACTTCTGGAGGGAGAGTGGC-3'	5'-AGTATCGACGCATCCTTGGGG-3'
<i>LHR</i>	5'-TGGAGTGCACAGTGAGACAGC-3'	5'-GGTTTGTCCCGAGCCATCCT-3'
<i>3βHSD 2</i>	5'-TGCCAGGGCATCTCTGTTGT-3'	5'-AGAGTTGGGCCCTGCAACAT-3'
<i>Hsd17B1</i>	5'-TCTGCCAGACATGAAGAGGCG-3'	5'-CACTGCCCCACACTCGATGA-3'
<i>CYP19A1</i>	5'-ATGCTGATTGCAGCCCTGA-3'	5'-GGCTGGTACCGCATGCTTTC-3'
<i>β-Actin</i>	5'-TCCAGGCTGTGCTGTCCCTGT-3'	5'-ACGCAGGATGGCGTGAGGGA-3'



الشكل 1 برنامج تشغيل جهاز RT-qPCR

الدراسة الإحصائية: دُرس التغير النسبي في التعبير المورثي للمورثات الهدف بالنسبة للمورثة المرجعية  $\beta$ -actin في المجموعات الأربعة، من خلال التفاعل السلسلي للبوليميراز الكمي في الزمن الحقيقي RT-qPCR. وتم تحليل منحنيات الانصهار بواسطة برمجية خاصة بالجهاز. كما يبين الشكل 2 نواتج التضخيم في هذا التفاعل، حيث وزعت حيوانات التجربة على 4 مجموعات، تضمنت كل مجموعة 10 فئران وتم اختبار التعبير المورثي للمورثات الهدف لجميع الفئران في المجموعات الأربعة، إذ أنجزت 3 مكررات لكل فأر وحسب المتوسط الحسابي لقيم Cycle threshold (Ct) للمكررات الثلاثة وللحيوانات العشرة، وحُسب التغير النسبي في التعبير الكمي (RQ) Relative Quantification للعينات المعاملة بالتركيزين (25, 50) مكغ/كغ من TCDD والعينات الشاهدة كلٌ على حدة وذلك من خلال العلاقة التالية:  $RQ = 2^{-\Delta\Delta Ct}$ .

تم تحليل العينات باستخدام البرنامج الإحصائي GraphPad prism9، وحساب القيمة الاحتمالية (p-value) بإتباع النمط One-way ANOVA-Ordinary، تُبين جميع النتائج أن ( $p < 0.05$ )، وبالتالي يكون الفرق معنوي كما يوضح الجدول 2.



الشكل 2. شكل تمثيلي لنواتج تفاعل RT-qPCR لعدد من العينات المدروسة لمجموعة التجربة والمجموعة الشاهدة، يبين الشكل ناتج التضخيم (إلى اليسار) ومنحنيات الانصهار (إلى اليمين).

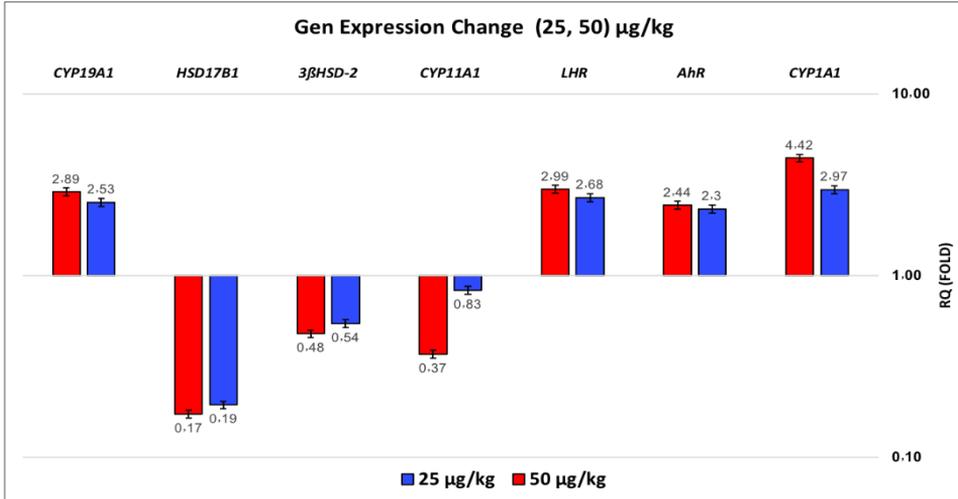
الجدول 2: يوضح قيم p-value في المجموعات المدروسة من تعبير مورثي للمورثات المدروسة، ومعايرة هرمون E2.

E2	CYP19A1	HSD17B1	3βHSD 2	CYP11A1	LHR	CYP11A1	AhR	p-value
ELISA	RT-PCR							
<0.0001	0.0002	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001	25 مكغ/كغ
<0.0001	0.0009	<0.0001	<0.0001	0.0001	<0.0001	<0.0001	<0.0001	50 مكغ/كغ

### النتائج:

. نتائج تغيّر التعبير المورثي للمورثات (*AhR*, *CYP1A1*, *LHR*, *CYP11A1*, *3βHSD 2*, *HSD17B1*, *CYP19A1*) في مبيض الاناث المجرعة بالتركيزين (25, 50) مكغ/كغ من TCDD:

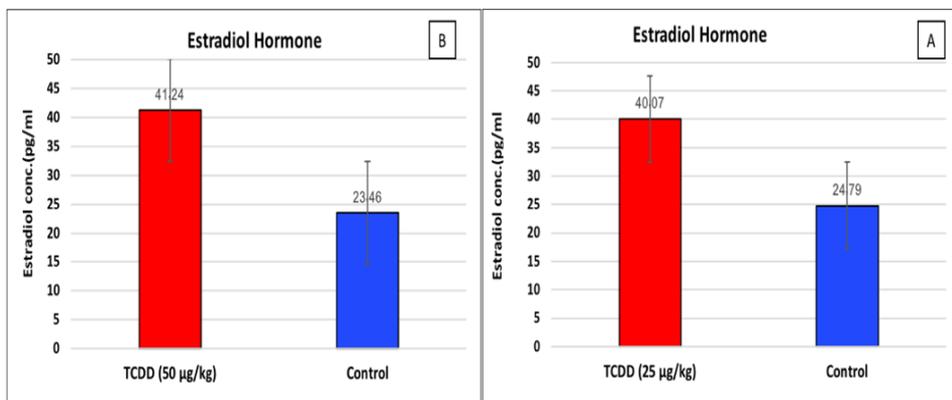
بيّنت النتائج ارتفاعاً معنوياً في التعبير عن المورثات (*AhR*, *CYP1A1*, *LHR*, *CYP11A1*) وذلك عند اناث المجموعات المجرعة بالتركيزين (25, 50) مكغ/كغ من TCDD (p<0.05) حيث لوحظ الإرتفاع عند مجموعة التركيز المرتفع 50 مكغ/كغ بشكل أكبر من مجموعة التركيز المنخفض 25 مكغ/كغ. بينما أظهرت نتائجنا انخفاضاً معنوياً في التعبير عن المورثات (*CYP11A1*, *3βHSD 2*, *HSD17B1*) لدى المجموعات المجرعة بالتركيزين (25, 50) مكغ/كغ من TCDD (p<0.05). حيث لوحظ الإنخفاض عند مجموعة التركيز المرتفع 50 مكغ/كغ بشكل أكبر من مجموعة التركيز المنخفض 25 مكغ/كغ كما هو موضح في الشكل 3.



الشكل 3. مخطط يوضح الفروقات النسبية RQ في تغير التعبير عن المورثات (*AhR*, *CYP1A1*, *LHR*, *CYP11A1*, *3βHSD 2*, *HSD17B1*, *CYP19A1*) للمورثات المدروسة بحسب اختلاف التراكيز المعطاة، يمثل المحور Y لوغاريتم قيم RQ للمورثات الهدف في عينات المبيض عند التركيزين 25 و 50 مكغ/كغ، والذي يُظهر ارتفاعاً في التعبير عن المورثات (*AhR*, *CYP1A1*, *LHR*, *CYP19A1*) وذلك عند اناث المجموعات المجرعة بالتركيزين (25, 50) مكغ/كغ من TCDD (p<0.05) وانخفاضاً في التعبير عن المورثات (*CYP11A1*, *3βHSD 2*, *HSD17B1*) لدى المجموعات المجرعة بالتركيزين (25, 50) مكغ/كغ (p<0.05).

### . نتائج اختبار هرمون الإستراديول.

بينت النتائج بعد اجراء اختبار الإليزا الخاص بهرمون الإستراديول في عينات مصل دم الفئران للمجموعات التجريبية والشاهدة، ارتفاعاً معنوياً في هرمون الإستراديول في المجموعات التجريبية لدى الاناث المجرعة بالتركيزين (25, 50) مكغ/كغ مقارنةً مع المجموعات الشاهدة ( $p < 0.05$ ). كما هو موضح في الشكل 4.



الشكل 4. مخطط بياني يوضح الفروقات النسبية في عينات مصل دم الفئران للمجموعات التجريبية والشاهدة، A يظهر ارتفاعاً في هرمون الإستراديول في المجموعة التجريبية لدى الاناث المجرعة بالتركيز 25 مكغ/كغ مقارنةً مع المجموعة الشاهدة. B يظهر ارتفاعاً في هرمون الإستراديول لدى الاناث المجرعة بالتركيز 50 مكغ/كغ مقارنةً مع المجموعة الشاهدة.

## المناقشة:

يُعد تفعيل مسار AhR الخطوة الأولى في السُمية الناجمة عن الديوكسين اذ يتميز مركب TCDD بألفته الكبيرة للمستقبل AhR، والتي ينتج عنها العديد من الاستجابات الكيميائية الحيوية، فعند ارتباط مركب TCDD بالمعقد AhR-ARnt يرتبط الكل إلى انتساح المورثة *CYP1A1*، مما يؤدي إلى زيادة انتساح أو التعبير عن هذه المورثة [6]، حيث يقوم الإنزيم *CYP1A1* بأكسدة الديوكسينات بهدف إزالة سُميتها وجعلها أكثر قطبية وتسهيل تفككها بالإضافة إلى طرحها في المنظومة الحية [14]، حيث أظهرت الدراسات السابقة أن الاستجابة للديوكسينات تتمثل في زيادة التعبير المورثي عن المورثة *CYP1A1* [15]، وبالفعل توافقت نتائج دراستنا مع هذه الدراسات، إذ تُبين وجود زيادة في التعبير عن المورثات المسؤولة عن نزع السُمية (*AhR, CYP1A1*) وذلك عند المجموعات المجرعة بالتركيزين (25, 50) مكغ/كغ. حيث لوحظ الإرتفاع عند مجموعة التركيز المرتفع 50 مكغ/كغ بشكل أكبر من مجموعة التركيز المنخفض 25 مكغ/كغ، الأمر الذي قد يعود إلى الأثر السمي الكبير عند التركيز المرتفع.

كما ركزت دراستنا على تتبع الأثر السمي لمركب TCDD في تغير التعبير المورثي لمورثات (*CYP11A1, 3βHSD2, HSD17B1*)، وذلك نظراً لأهمية تلك المورثات المرزمة للأنزيمات المفتاحية في مسار الاصطناع الحيوي للهرمونات الستيروئيدية في خلايا المبيض. حيث تعمل الأنزيمات المصنعة للستيروئيدات، كما هي حال عائلة السيتوكروم P450CYP، على تحفيز عملية التمثيل الغذائي للكولسترول لتشكيل هرمونات الستيروئيد [16] إذ أن الخطوة الأولى المحددة لمعدل تحفيز تكوين الستيروئيد تتم من خلال أنزيم P450scc المُرْمَز بواسطة المورثة *CYP11A1*. يتم التعبير عن هذه المورثة بمستوى عالي في الخلايا الغمدية مما يحفز من تطور الجريبات النامية في المبيض، كما أنها ضرورية في تحويل الكولسترول إلى هرمون البريغنينولون [12]، فقد

أثبتت الدراسات في خلايا حبيبية بشرية المزروعة *invitro* خلال عدة نقاط الزمنية، تناقص في مستوى التعبير عن *CYP11A1* في المبيض بفعل سمية مركب TCDD [4].

تُرمز المورثة *3βHSD 2* أنزيم *3βHSD* المشارك في إنتاج العديد من الهرمونات، حيث يتوسط عملية تحويل هرمون البريغنينولون إلى هرمون البروجستيرون في كلا النمطين من الخلايا الغمدية والحبيبية في المبيض، كما يتوسط عملية تحويل هرمون De Hydro (DHEA) Epi Androsterone إلى الأندروستيديون Androstenedione، طبيعياً تعمل العديد من عوامل النمو على تحفيز الفعالية الأنزيمية لـ *3βHSD* حيث يعمل FSH على تحفيز انتساخ *3βHSD mRNA* في الخلايا الحبيبية البشرية وعند القوارض، أما في الخلايا الغمدية يعمل IGF1 على تحفيز انتساخ *3βHSD mRNA* [9]، بينما في بعض الحالات المرضية تعاني الإناث المصابات بنقص *3βHSD 2* من تشوهات بسيطة في الأعضاء التناسلية الخارجية عند الولادة، وعدم انتظام الحيض، وضعف الخصوبة [17] كما تسبب متلازمة تضخم الغدة الكظرية الخلقى التي تضعف إنتاج الهرمونات وتعطل النمو والنضج الجنسي [9].

بالنسبة للمورثة *HSD17B1* فهي تُرمز الأنزيم *HSD17B1*، الذي يعمل على تحويل هرمون الأندروستيديون A4 إلى هرمون التستوستيرون T وتحويل هرمون الإسترون E1 إلى الإستراديول E2 17-بيتا (17β-Estradiol) ضمن الخلايا الحبيبية للجريب. وانخفاض هذا الأنزيم يعني انخفاض القدرة على إفراز تلك الهرمونات الستيروئيدية وتغيير مسار الموت الخلوي المبرمج في الجريبات المبيضية [1]. فقد أظهرت نتائجنا انخفاضاً في التعبير عن المورثات (*CYP11A1*, *3βHSD 2*, *HSD17B1*) وبشكل معتمد على

عن المسؤولة للمورثات TCDD الناتج عن التعرض لمركب المورثي والهرموني التعبير دراسة تغير  
BALB/c مسار الاصطناع الحيوي للإستروجين في خلايا مبيض إناث فئران

الجرعة في المجموعات التجريبية المُعاملة بالتركيزين (25, 50) مكغ/كغ من TCDD وبالتالي انخفاض في قدرة تحويل الكولسترول إلى البريغنينولون نتيجة انخفاض التعبير عن *CYP11A1* والذي ترافق مع انخفاض التعبير عن *HSD17B1* و *3βHSD 2* مما يؤدي إلى اضطراب هرمونات الستيروئيد الجنسية.

طبيعياً يتم التعبير عن المورثة *LHR* وبشكل أساسي في أنسجة الغدد التناسلية وعلى نطاق واسع في خلايا المبيض [11]. إذ يلعب الهرمون الملوتن دور هام في العملية التناسلية عند الإناث، حيث يرتبط بالمستقبل الخاص به من نمط المقترن ببروتين *G* ليشكل مستقبل *LHR* وبالتالي يتم تفعيل مسار إشاري بواسطة المرسل الثانوي ينتهي بتحفيز انتساح الجينات المرمزة للأنزيمات الهامة في الاصطناع الهرموني [10]

ففي دراسة تم فيها التعرض المزمن في جرذان Sprague Dawley بمركب ال TCDD لجرع متزايدة (1, 5, 50, 200) نانوغرام/كغ/أسبوع، إلى أن تم التضحية بها في عمر 11 شهر، فقد تبين انخفاض التعبير المورثي ل *17 α-hydroxylase* وانخفاض التعبير عن *LHR* والذي أدى إلى انخفاض الاصطناع الحيوي لهرمون الإسترايول. [18].

لكن على العكس أظهرت نتائجنا ارتفاعاً في التعبير المورثي عن (*LHR, CYP19A1*) والذي ترافق مع ارتفاع هرمون الإسترايول في كلا المجموعتين التجريبية لكن لوحظ الإرتفاع عند مجموعة التركيز 50 مكغ/كغ بشكل أكبر من مجموعة التركيز 25 مكغ/كغ.

حيث أشارت دراسة بأن ارتفاع التعبير عن *LHR* مرتبط بحدوث سرطان المبيض Ovarian Cancer (OC) حيث تم تحديد كمية تركيز *LHRmRNA* في الأنسجة المأخوذة من عدد كبير من المرضى الذين يعانون من سرطان المبيض، وتوصلت

الدراسة إلى أنه لا يتم التعبير عن LHR (LHR-I, LHR-P) بدرجة عالية فحسب بل أيضاً يرتبط بدرجة الورم والمراحل المرضية المتقدمة، كما يؤدي التحفيز المفرط ل hCG/LH إلى تعزيز قابلية الإصابة بسرطان المبيض [19].

أما المورثة *CYP19A1* فهي مُرمزة لإنزيم الأروماتاز *aromatase* الموجود في الشبكة الإندوبلازمية، يقوم هذا الإنزيم بتحويل هرمون الأندروجين إلى الإستروجين وبالتحديد هرمون الإستراديول 17 بيتا E2 (الذي قمنا بالكشف عنه ومعايرته في المجموعات التجريبية والشاهدة). يختلف نشاط الأروماتاز باختلاف أنواع الخلايا وذلك اعتماداً على حاجة الخلايا للإستروجين، لذا يكون أكثر نشاطاً في المبيض لدى الإناث، حيث يوجه التطور الجنسي في كل من الذكور والإناث [20]. لكن في بعض الحالات تؤدي زيادة تحويل هرمون الأندروجين إلى الإستروجين إلى حدوث متلازمة فرط الأروماتاز [21]، أي زيادة إنتاج هرمون الإستروجين [22]، وحدثت أمراض كسرطان المبيض والثدي [23]، [24]، [23]. فقد أظهرت دراسة سابقة على خطوط خلوية معزولة من خلايا سرطان المبيض، إلى ارتفاع التعبير المورثي لـ *CYP19A1* في الخطوط (HOSE, PEO14, PEO4, BG1) الخلوية الظهارية لسرطان المبيض والذي ترافق مع ارتفاع التعبير عن هرمون الإستراديول [24]. وهذا ما أظهرته نتائجنا أيضاً بارتفاع التعبير عن *CYP19A1* والذي ترافق مع ارتفاع هرمون الإستراديول لدى كلا المجموعتين التجريبية الأمر الذي قد يعتبر مؤشر خطورة كبير في حدوث سرطان المبيض.

كما توصلت دراسة حديثة حول التأثير على تنظيم التعبير المورثي عن *CYP19A1* من خلال (زيادة التعبير عنه أو إسكاته) في الخلايا الحبيبية عند الماعز (GCs) Granulosa Cells. حيث أدت عملية إسكات التعبير عن *CYP19A1* لانخفاض

عن المسؤولة للمورثات TCDD الناتج عن التعرض لمركب المورثي والهرموني التعبير دراسة تغير  
BALB/c مسار الاصطناع الحيوي للإستروجين في خلايا مبيض إناث فئران

مستوى mRNA ل *CYP19A1* ولكنه زاد من مستويات mRNA لكل من *StAR* و *CYP11A1* و *3βSHD*، لكن أدى التعبير الزائد عن *CYP19A1* إلى زيادة مستويات *CYP19A1* mRNA ل بينما أدى إلى تثبيط مستويات mRNA لكل من *StAR* و *CYP11A1* و *3βSHD* [25]. وهذا ما يتفق مع نتائجنا فقد أدى ازدياد التعبير عن *CYP19A1* لانخفاض التعبير عن *CYP11A1* و *3βSHD* و *HSD17B1*، حيث يعزى السبب إلى أن *CYP19A1* يمنع التعبير عن *STAR* و *CYP11A1* و *3βSHD*، بعد الإفراط في إفراز هرمون الاستروجين والبروجسترون في الجسم من خلال تنظيم التلقيح الراجع السلبي، وبالتالي استقرار تخليق الهرمونات في الجسم. وبالمثل، يتم تحسين مستويات mRNA لمورثات *STAR* و *CYP11A1* و *3βSHD* من خلال تنظيم التلقيح الراجع السلبي عندما يكون هناك إفراز غير كافٍ للإستروجين والبروجسترون في الجسم، مما يزيد من استقرار إفراز الهرمون [25].

أخيراً نتوصل إلى أن التعبير غير الطبيعي عن *CYP19A1*، من المحتمل أن يكون له تأثير على إفراز هرمون الاستراديول والتعبير عن المورثات المرتبطة مثل (*CYP11A1*, *HSD17B1*, *3βSHD*) مما قد يؤثر على تكاثر الخلايا الحبيبية. كما أن هذه الدراسات والنتائج ستساعدنا على دعم فكرة الأثر السمي المختلف لمركب TCDD على التعبير المورثي في أنسجة المبيض ولكن بطريقة معتمدة على الجرعة من خلال تأثير المورثات كال *CYP19A1* وغيرها من المورثات الأخرى في المسار المهم والضروري في الاصطناع الهرموني ضمن الخلايا الحبيبية والغمدية للمبيض. كما أن الآليات الكامنة وراء قدرة تأثير هذه المواد السامة على أحداث تأثيرات متباينة على مستوى التعبير المورثي والهرموني يُمكن أن تعود إلى اختلاف آليات استقلاب TCDD، وعليه يختلف الأثر السمي لمركب TCDD باختلاف تراكيز الجرعة المُعطاة، واختلاف الأساليب التجريبية *invitro* أو *invivo*، والنموذج الحيواني المستخدم.

### الاستنتاجات:

تقدم نتائج دراستنا دليلاً على أهمية التركيز على سميّة مركب TCDD على المبيض من خلال تحديد الآلية الجزيئية التي يعمل من خلالها ال TCDD على منع تكوين الستيروئيد عن طريق تعديل منظومة التعبير المورثي والتي يمكن أن تؤدي في النهاية إلى اضطرابات في الخصوبة. إذ بيّنت النتائج ما يلي:

- 1 - تغيّر التعبير المورثي عن أهم المورثات المسؤولة عن نزع السمية والمورثات الأساسية ضمن مسار الاصطناع الحيوي للإستروجين.
- 2 - اضطراباً هرمونياً لهرمون الإستراديول في خلايا المبيض لدى اناث فئران BALB/c، وبشكل معتمد على تركيز الجرعة.

### التوصيات:

- 1 - التحري عن تأثيرات سميّة مركب TCDD في تغيّر التعبير المورثي على فترات زمنية مختلفة من عمر الإناث.
  - 2 - التحري عن التغيرات الهرمونية لهرمون البروجسترون، لكونه يعمل سوية مع هرمون الإستروجين لحدوث عملية الإباضة ونجاحها.
- مما يزيد من معرفتنا بشكل أكبر للآثار الناجمة عن السموم البيئية على الصحة الإنجابية وخصوبة الإناث.

قائمة المراجع:

1. KARMAN B.N., MALLIKARJUNA S., BASAVARAJAPP A., PATRICK H., and JODI A., FLAW S., 2012. Dioxin exposure reduces the steroidogenic capacity of mouse antral follicles mainly at the level of HSD17B1 without altering atresia, Toxicology and applied pharmacology, 264(1): p. 1-12.
2. VILUKSELA M., and POHJANVIRTA R., 2019. Multigenerational and transgenerational effects of dioxins, International journal of molecular sciences, 20(12): p. 2947.
3. KARMAN B.N., MALLIKARJUNA S., BASAVARAJAPP A., ZELIEANN R., CRAI G., JODI A., FLAW S., 2012. 2, 3, 7, 8-Tetrachlorodibenzo-p-dioxin activates the aryl hydrocarbon receptor and alters sex steroid hormone secretion without affecting growth of mouse antral follicles in vitro, Toxicology and applied pharmacology, 261(1): p. 88-96.
4. BALADRIGE M., MARKS GT., RAWLINS RG., HUTZ RJ., 2015. Very low-dose (femtomolar) 2, 3, 7, 8-tetrachlorodibenzo-p-dioxin (TCDD) disrupts steroidogenic enzyme mRNAs and steroid secretion by human luteinizing granulosa cells, Reproductive Toxicology, 52: p. 57-61.
5. HANKINSON O., 2005. Role of coactivators in transcriptional activation by the aryl hydrocarbon receptor, Archives of biochemistry and biophysics, 433(2): p. 379-386.
6. TIJET N., PAUL C., BOUTROS D., MOFFA T., ALLAN B., OKEY J T., and POHJANVIRTA R., 2006. Aryl hydrocarbon receptor regulates distinct dioxin-dependent and dioxin-independent gene batteries, Molecular pharmacology, 69(1): p. 140-153.
7. RIDDICK D.S., LEE C., BHATHENA A., YOAV E., TIMSI T., CHENG P-Y., EDWARD T M., RUSSELL A P., SHARON L., KRISTY K R., MILLER M., JAHAN A., AND JOHN Y L C., 2004. Transcriptional suppression of cytochrome P450 genes by endogenous and exogenous chemicals, Drug Metabolism and Disposition, 32(4): p. 367-375.
8. BENEDICT J C., TIEN-MIN L., LOEFFLER I K., RICHARD E., PETERSON R., JODI A. FLAWS., 2000. Physiological role of the

- aryl hydrocarbon receptor in mouse ovary development, Toxicological Sciences, 56(2): p. 382-388.
- 9.LAVOIE H A., and KING S R., 2009. Transcriptional regulation of steroidogenic genes: STARD1, CYP11A1 and HSD3B, Experimental biology and medicine, 234(8): p. 880-907.
- 10.DUFAU M L., TSAI-MORRIS C H., ZHI HU Z., AND BUCZKO E., 1995. Structure and regulation of the luteinizing hormone receptor gene, The Journal of steroid biochemistry and molecular biology, 53(1-6): p. 283-291.
- 11.DUFAU M L., 1998. The luteinizing hormone receptor, Annual review of physiology, 60(1): p. 461-496.
12. GUO C., SHIH M., LAN H., HSU N., HU M., 2007. Transcriptional regulation of human CYP11A1 in gonads and adrenals, Journal of biomedical science, 14(4): p. 509-515.
- 13.SINCHAK K., and. WAGNER E., 2012. Estradiol signaling in the regulation of reproduction and energy balance, Frontiers in neuroendocrinology, 33(4): p. 342-363.
- 14.POELLINGER L., 2000. Mechanistic aspects the dioxin (aryl hydrocarbon) receptor, Food Additives & Contaminants, 17(4): p. 261-266.
- 15.NEBERT D W., AMY L R., MATTHEW Z., WILLY A., YI Y., TIMOTHY P., DALTON P., 2000. Role of the aromatic hydrocarbon receptor and [Ah] gene battery in the oxidative stress response, cell cycle control, and apoptosis, Biochemical pharmacology, 59(1): p. 65-85.
- 16.LAN H C., LIN I., YANG Z., LIN J., 2015. Low-dose bisphenol A activates Cyp11a1 gene expression and corticosterone secretion in adrenal gland via the JNK signaling pathway, Toxicological Sciences, 148(1): p. 26-34.
- 17.PAN Y., ZHONG S., HU R., GONG W., 2012. Mutation of 3 $\beta$ -hydroxysteroid dehydrogenase (3 $\beta$ -HSD) at the 3'-untranslated region is associated with adrenocortical insufficiency, Molecular Medicine Reports, 6(6): p. 1305-1308.

18. VALDEZ K E., SHI Z., ALISON Y., TING T., BRIAN K., PETROF F., 2009. Effect of chronic exposure to the aryl hydrocarbon receptor agonist 2, 3, 7, 8-tetrachlorodibenzo-p-dioxin in female rats on ovarian gene expression, Reproductive Toxicology, 28(1): p. 32-37.
19. XIONG S., MHAWECH-FAUCEGLIA P., TSAO-WEI D., ROMAN L., 2019. Expression of the luteinizing hormone receptor (LHR) in ovarian cancer, BMC cancer, 19(1): p. 1-8.
20. MENDELSON C R., 2009. Minireview: fetal-maternal hormonal signaling in pregnancy and labor, Molecular Endocrinology, 23(7): p. 947-954.
21. CZAJKA-ORANIEC I., and SIMPSON E R., 2010. Aromatase research and its clinical significance, Endokrynologia Polska, 61(1): p. 126-134.
22. FUKAMI M., TSUCHIYA T., VOLLBACH H., KRISTY A., SHUJI B A., OHTSU S., WABITSCH M., BURGER H., EVAN R., SIMPSON A., UMEZAWA A., 2013. Genomic basis of aromatase excess syndrome: recombination-and replication-mediated rearrangements leading to CYP19A1 overexpression, The Journal of Clinical Endocrinology & Metabolism, 98(12): p. E2013-E2021.
23. BARROS-OLIVEIRA M., COSTA-SILVA D., SANTOS A., 2021. Influence of CYP19A1 gene expression levels in women with breast cancer: a systematic review of the literature, Clinics, 76.
24. CUNAT S., RABENOELINA F., DAURÈS J P., KATSAROS D., SASANO H., MILLER W R., MAUDELONDE T., PUJOL P., 2005. Aromatase expression in ovarian epithelial cancers. The Journal of steroid, biochemistry and molecular biology, 93(1): p. 15-24.
25. ZHANG Y., CHEN X, ZHOU Z., TIAN X., YANG P., FU K., 2022. CYP19A1 May Influence Lambing Traits in Goats by Regulating the Biological Function of Granulosa Cells, Animals, 12(15): p. 1911.

## دراسة استقرار المعادلة التفاضلية العادية الخطية بعدة تأخيرات زمنية

طالبة الدراسات العليا: وفاء خضر شحادة كلية العلوم - جامعة البعث

الدكتور المشرف: د. سامح العرجة

### ملخص البحث:

في هذا البحث سيتم دراسة استقرار معادلات تفاضلية ذات تأخير زمني لامحدود باستخدام نظرية النقطة الثابتة من الشكل:

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + b(t)x(t - g(t)) + c(t)\dot{x}(t - g(t))$$

ثم نعمم الدراسة إلى دراسة استقرار معادلات تفاضلية بعدة تأخيرات زمنية باستخدام نظرية النقطة الثابتة من الشكل:

$$\dot{x}(t) = -\sum_{j=1}^N b_j(t)x(t - \tau_j(t)) + \sum_{j=1}^N c_j(t)\dot{x}(t - \tau_j(t))$$

كلمات مفتاحية: معادلات تفاضلية ، استقرار تقاربي، نقطة ثابتة ، تأخير زمني

## Study of the stability of a linear ordinary differential equation with several delays

### Abstract

First, we consider the linear neutral differential equation with unbounded delay by using the fixed point theory:

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + b(t)x(t - g(t)) + c(t)\dot{x}(t - g(t))$$

In addition, we consider the asymptotic stability of a generalized linear neutral differential equation with variable delays by using the fixed-point theory:

$$\dot{x}(t) = - \sum_{j=1}^N b_j(t)x(t - \tau_j(t)) + \sum_{j=1}^N c_j(t)\dot{x}(t - \tau_j(t))$$

**Key words:** asymptotic stability, variable delay, fixed-point theory, differential equation.

### المشكلة وأهمية البحث:

وجدنا صعوبة بدراسة الاستقرار باستخدام تابع ليبيا نوف للمعادلات التفاضلية من الشكل:

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + b(t)x(t - g(t)) + c(t)\dot{x}(t - g(t))$$

$$\dot{x}(t) = -\sum_{J=1}^N b_J(t)x(t - \tau_J(t)) + \sum_{J=1}^N c_J(t)\dot{x}_J(t - \tau(t))$$

لذلك وجدنا أن استخدام مبرهنة النقطة الثابتة أسهل لدراسة الاستقرار لهذا النوع من المعادلات.

## دراسة استقرار المعادلة التفاضلية العادية الخطية بعدة تأخيرات زمنية

### المقدمة:

منذ أكثر من مائة عام قام العالم ليبانوف بإيجاد الطريقة المباشرة وكان الطريقة الوحيدة لدراسة الاستقرار لفترة طويلة لكن هذه الطريقة تكمن صعوبتها في تشكيل تابع ليبانوف المناسب لكل معادلة تفاضلية وهذا يعتمد على التجريب وليست قابلة للاستخدام بشكل عام لذلك تم مؤخراً دراسة الاستقرار باستخدام النقطة الثابتة وهي أداة قوية لدراسة الاستقرار ومن أوائل الذين درسوا الاستقرار باستخدام مبرهنة النقطة الثابتة بورتين. وللمعادلات التفاضلية الكثير من الدراسات في ديناميكية علم الأحياء كما لها تطبيقاتها في النماذج الفيزيولوجية وعلم البيئة و تعتبر نموذج لدراسة حركة خلايا الدم الحمراء وتعطى معادلتها بالشكل:

$$\dot{x}(t) = -\gamma(t) \left( \beta(t) + \frac{1}{\beta(t) + x^2(t - \tau(t))} \right) x(t) + \gamma(t) \beta(t) x(t - \tau(t))$$

حيث  $\tau(t), \beta(t), \gamma(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$  [15]

1- دراسة استقرار المعادلة التفاضلية العادية الخطية مع التأخير اللامحدود

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -a(t)x(t) + b(t)x(t - g(t)) \\ & + c(t)\dot{x}(t - g(t)) \dots \dots (1,1) \end{aligned}$$

حيث  $a(t), b(t)$  توابع مستمرة و  $c(t)$  تابع مستمر وقابل للاشتقاق و  $g(t) \geq 0$  تابع مستمر وقابل للاشتقاق مرتين. بسبب وجود المشتق في الطرف الأيمن للمعادلة ذات التأخير الزمني أصبح من الصعب إيجاد تابع ليبانوف المناسب، لذلك سنقوم بدراسة الاستقرار باستخدام نظرية النقطة الثابتة.

مبرهنة 1:

بفرض (1.2)  $\dot{g}(t) \neq 1 \dots \dots$  عندئذ حل للمعادلة  $(I, I)$  يعطى بالعلاقة:

$$x(t) = \left( x(0) - \frac{c(0)}{1 - \dot{g}(0)} x(-g(0)) e^{-\int_0^t a(s) ds} \right) + \frac{c(t)}{1 - \dot{g}(t)} x(t - g(t)) - \int_0^t \left( r(u) - b(u) x(u - g(u)) e^{-\int_u^t a(s) ds} \right) du \dots \dots (1,3)$$

$$r(u) = \frac{(\dot{c}(u) + c(u)a(u))(1 - \dot{g}(u)) + \dot{g}(u)c(u)}{(1 - \dot{g}(u))^2} \dots \dots (1,4)$$

البرهان:

بضرب طرفي المعادلة  $(I, I)$  بالحد  $e^{\int_0^t a(s) ds}$  والمكاملة من 0 الى  $t$  نحصل على:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[ x(u) e^{\int_0^u a(s) ds} \right]' du \\ &= \int_0^t [b(u)x(u - g(u)) + c(u)\dot{x}(u - g(u))] e^{\int_0^u a(s) ds} du \\ &= \int_0^t [b(u)x(u - g(u)) + c(u)\dot{x}(u - g(u))] e^{\int_0^u a(s) ds} du \\ &= \int_0^t [b(u)x(u - g(u)) + c(u)\dot{x}(u - g(u))] e^{\int_0^u a(s) ds} du \end{aligned}$$

بالتقسيم على  $e^{\int_0^t a(s) ds}$ :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x(0)e^{-\int_0^t a(s)ds} \\
 &+ \int_0^t [b(u)x(u-g(u)) \\
 &+ c(u)\dot{x}(u-g(u))]e^{-\int_u^t a(s)ds} du, \dots (1,5)
 \end{aligned}$$

نضرب ونقسم على  $(1 - \dot{g}(u))$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^t c(u)\dot{x}(u-g(u))e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\
 &= \int_0^t \frac{c(u)\dot{x}(u-g(u))(1-\dot{g}(u))}{(1-\dot{g}(u))} e^{-\int_u^t a(s)ds} du
 \end{aligned}$$

نكامل بالتجزئة حيث:

$$\begin{aligned}
 U(u) &= \frac{c(u)}{1-\dot{g}(u)} e^{-\int_u^t a(s)ds} \quad , dV \\
 &= \dot{x}(u-g(u))(1-\dot{g}(u))du
 \end{aligned}$$

نحصل على:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^t c(u)\dot{x}(u-g(u))e^{-\int_u^t a(s)ds} du \\
 &= \frac{c(u)}{1-\dot{g}(u)} x(t-g(t)) \\
 &- \frac{c(0)}{1-\dot{g}(0)} x(-g(0))e^{-\int_0^t a(s)ds} \\
 &- \int_0^t r(u)e^{-\int_u^t a(s)ds} x(u-g(u))du \dots (1,6)
 \end{aligned}$$

حيث  $r(u)$  معطى بالعلاقة (1.4) وأخيرا باستبدال (1.6) بـ (1.5) يتم الاثبات.

ليكن  $\psi(t): ]-\infty, 0] \rightarrow R$  تابع محدود ومستمر ، لنعرف  $x(t) := x(t, 0, \psi)$

حل للمعادلة (1,1) ونكتب  $t \leq 0$  ;  $x(t) = \psi(t)$

من أجل  $t \geq 0$  نقول إن الحل الصفري لـ  $(I, I)$  مستقر عند  $t_0$  من أجل  $\varepsilon > 0$  يوجد  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  و  $\psi: ]-\infty, t_0] \rightarrow R$  بحيث يكون  $|\psi(t)| < \delta$  على المجال  $]-\infty, t_0]$  و  $t \geq t_0$  يؤدي الى أن  $|x(t, t_0, \psi)| < \varepsilon$ .

ليكن  $C$  فضاء التتابع المستمرة  $R \rightarrow R$  نعرف المجموعة:

$$S := \{ \varphi: R \rightarrow R; \varphi(t) = \psi(t) \text{ if } t \leq 0, \varphi(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \varphi \in C; \|\varphi\| < K < 1 \}$$

عندئذ  $(S, \|\cdot\|)$  فضاء متري تام مع  $\|\cdot\|$  التنظيم الاعظمي.

**ميرنة 2:** بفرض أن:

$$e^{-\int_0^t a(s)ds} \rightarrow 0 ; t \rightarrow \infty \dots (1.7)$$

ومن أجل  $\alpha > 0$  فإن:

$$\left| \frac{c(t)}{1 - g(t)} \right| + \int_0^t |r(u) - b(u)| e^{-\int_u^t a(s)ds} du \leq \alpha < 1 \dots (1.8)$$

$$t - g(t) \rightarrow \infty; t \rightarrow \infty \dots (1.9)$$

إذا كان  $(1.2), (1.7), (1.8), (1.9)$  محققة، عندئذ كل حل للمعادلة  $x(t, 0, \psi)$  محدود ويسعى نحو الصفر عندما  $t \rightarrow \infty$  وبالتالي الحل الصفري مستقر عند  $t_0 = 0$ .

**البرهان:** نعرف التطبيق  $p: s \rightarrow s$  وليكن  $(p\varphi)(t) = \psi(t); t \leq 0$

$$(p\varphi)(t) = \left( \psi(0) - \frac{c(0)}{1 - \dot{g}(0)} \psi(-g(0)) \right) e^{-\int_0^t a(s) ds} \\ + \frac{c(t)}{1 - \dot{g}(t)} \varphi(t - g(t)) \\ - \int_0^t |r(u) - b(u)| \varphi(u - g(u)) e^{-\int_u^t a(s) ds} du; t \geq 0$$

من أجل  $\varphi \in S$  و  $p\varphi$  مستمر و  $\|\varphi\| \leq K$  حيث  $K$  ثابت موجب وليكن  $\psi(t)$  تابع ابتدائي مستمر صغير معطى بحيث  $|\psi| < \delta$  عندئذ باستخدام (1.8) في علاقة  $(p\varphi)(t)$  نحصل على:

$$|p\varphi| \leq \left( \left| \frac{c(0)}{1 - \dot{g}(0)} \right| K \right) + \frac{c(t)}{1 - \dot{g}(t)} K \\ - \int_0^t |r(u) - b(u)| e^{-\int_u^t a(s) ds} du \\ \leq \left| \frac{c(0)}{1 - \dot{g}(0)} \right| \delta + \alpha K \dots (1.10)$$

باختيار صحيح لـ  $\delta$  يصبح  $\|p\varphi\| \leq K$  وبالتالي  $p\varphi(t)$  محدود.

لنثبت أن  $(p\varphi)(t) \rightarrow 0$  ;  $t \rightarrow \infty$

الحد الأول في الطرف الأيمن من  $(p\varphi)(t)$  يسعى نحو الصفر، والحد الثاني يسعى نحو الصفر باستخدام (1,7) و (1,9) و  $\varphi \in S$ . بقي أن نثبت أن التكامل يسعى نحو الصفر عندما  $t \rightarrow \infty$

ليكن  $\epsilon > 0$  معطاة و  $\varphi \in S$  عندئذ يوجد  $t_1 > 0$  بحيث إن

$$|\varphi(t - g(t))| < \epsilon \quad ; \quad t > t_1$$

ويفرض أن  $t > t_2$  و  $e^{-\int_{t_1}^t a(s) ds} < \frac{\epsilon}{\alpha K}$  من أجل  $t > t_1$  يكون:

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^t |r(u) - b(u)| \varphi(u - g(u)) e^{-\int_u^t a(s) ds} du \right| \\
 & < K \int_0^{t_1} |r(u) - b(u)| e^{-\int_u^t a(s) ds} du \\
 & + \epsilon \int_{t_1}^t |r(u) - b(u)| e^{-\int_u^t a(s) ds} du \\
 & \leq K e^{-\int_{t_1}^t a(s) ds} \int_0^{t_1} |r(u) - b(u)| e^{-\int_u^{t_1} a(s) ds} du + \alpha \epsilon \\
 & \leq K \alpha e^{-\int_{t_1}^t a(s) ds} + \alpha \epsilon \leq \epsilon + \alpha \epsilon
 \end{aligned}$$

عندئذ  $(p\varphi)(t) \rightarrow 0; t \rightarrow \infty$  بقي أن نثبت أن تطبيق ضاغط مع  
النظيم الأعظمي.

ليكن  $\eta, \xi \in S$  بحيث:

$$\begin{aligned}
 & |(p\xi)(t) - (p\eta)(t)| \\
 & \leq \left\{ \left| \frac{c(t)}{1 - \dot{g}(t)} \right| + \int_0^t |r(u) - b(u)| e^{-\int_u^t a(s) ds} du \right\} \cdot \|\xi - \eta\| \\
 & \leq \alpha \|\xi - \eta\|
 \end{aligned}$$

باستخدام مبدأ التطبيق الضاغط فإن  $p$  يملك نقطة ثابتة وحيدة من  $S$  والتي تحقق  
(1.1) محدودة وتسعى نحو الصفر عندما  $t \rightarrow \infty$ . ينتج الاستقرار للحل الصفري  
عندما  $t_0 = 0$  باستبدال  $K$  بـ  $\epsilon$  سابقاً يتم الإثبات.

### مثال 1

لتكن المعادلة التفاضلية العادية الخطية

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + C_0 \dot{x} \left( t - \frac{t}{2} \right) \dots (1.11)$$

حيث  $C_0$  ثابت، عندئذ  $r(u) = -4C_0$  الشرط (1.8) محقق من أجل

$$|C_0| \leq \frac{\alpha}{4} ; \alpha \in (0,1)$$

ليكن  $\psi(t)$  تابع ابتدائي مستمر حيث  $|\psi(t)| \leq \delta$  وليكن

$$S = \{ \varphi: R \rightarrow R, \varphi(t) = \psi(t); t \leq 0; \varphi(t) \rightarrow 0; t \rightarrow \infty, \|\varphi\| \leq K, \varphi \in C \}$$

نعرف  $(p\varphi)(t) = \psi(t) ; t \leq 0$

$$(p\varphi)(t) = (1 - 2C_0)(\psi(0)e^{-2t} + 2C_0\varphi\left(\frac{t}{2}\right) + \int_0^t 4C_0\varphi\left(\frac{u}{2}\right)e^{-2(t-u)}du ; t > 0$$

من أجل  $\varphi \in S$  يكون  $\|\varphi\| \leq K$  حيث  $K \geq \frac{1-\alpha}{|1-2C_0|\delta}$  نحصل على  $\|(\varphi)(t)\| \leq K$  من الواضح أن (1,9), (1,7) محققة لاثبات أن  $p$  يعرف تطبيق متراس ليكن  $\xi, \eta$  عندئذ

$$\begin{aligned} |(p\xi)(t) - (p\eta)(t)| &\leq 2|C_0| \cdot \|\xi - \eta\| + 2|C_0|(1 - e^{-2t})\|\xi - \eta\| \\ &\leq 4|C_0| \cdot \|\xi - \eta\| \leq \alpha \cdot \|\xi - \eta\| \end{aligned}$$

بالاعتماد على المبرهنة I كل حل  $x(t, 0, \psi)$  لـ (1.11) حيث التابع الابتدائي المستمر الصغير  $R \rightarrow ]-\infty, 0] : \psi(t)$  محدود ويسعى نحو الصفر عندما  $t \rightarrow \infty$ .

2- دراسة استقرار معادلة تفاضلية خطية بعدة تأخيرات زمنية من الشكل:

$$\dot{x}(t) = - \sum_{j=1}^N b_j(t)x(t - \tau_j(t)) + \sum_{j=1}^N c_j(t)\dot{x}_j(t - \tau(t)) \dots \dots (2,1)$$

مع الشرط الابتدائي:

$$\Psi(t) \in \text{حيث } t \in [m(t_0), t_0] \text{ من أجل } x(t) = \Psi(t) \dots \dots (2,2)$$

$$. t_0 \geq 0 \text{ من أجل } C([m(t_0), t_0], R)$$

$$m_J(t_0) = \inf\{t - \tau_J(t), t \geq t_0\}, m(t_0) = \min\{m_J(t_0), 1 \leq J \leq N\} \dots \dots (2,3)$$

هدفنا هو دراسة الاستقرار التقاربي للمعادلة (2,1) باستخدام مبدأ التطبيق الضاغط ومقارنة النتائج مع ما سبق.

### النتائج الرئيسية:

من أجل كل  $(t_0, \Psi) \in R^+ \times C([m(t_0), t_0], R)$

ليكن التابع المستمر  $\alpha > 0$  ;  $x: [m(t_0), t_0 + \alpha[ \rightarrow R^n$  إن  $x(t)$  حل للمعادلة (2,1) على المجال  $[t_0, t_0 + \alpha[$  و  $x = \Psi$  على المجال  $[m(t_0), t_0]$ . نعرف  $x(t) = x(t, t_0, \Psi)$ .

من أجل كل  $(t_0, \Psi)$  يوجد حل وحيد  $x(t) = x(t, t_0, \Psi)$  للمعادلة (2,1) معرف على  $[t_0, \infty[$  من أجل  $t_0$  مثبتة نعرف

$$\|\Psi\| = \max\{|\Psi(t)|: m(t_0) \leq t \leq t_0\}$$

### مبرهنة 3:

بفرض  $\tau_J$  قابل للاشتقاق مرتين و  $\dot{\tau}(t) \neq 1$  و بفرض  $\alpha \in ]0, 1[$  من أجل

$t \geq 0$  توجد توابع مستمرة  $h_J: [m_J(t_0), \infty[ \rightarrow R, J = 1, 2, \dots, N$  من أجل  $t \geq 0$

$$\left| \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t H(s) ds \right| < \infty \dots (2,4)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left| \frac{c_j(t)}{1 - \tau_j(t)} \right| + \sum_{j=1}^N \int_{t-\tau_j(t)}^t |h_j(s)| ds \\ & + \sum_{j=1}^N \int_0^t e^{-\int_s^t H(u) du} \left| -b_j(s) + [h_j(s - \tau_j(s))] (1 - \tau_j(s)) - r(s) \right| ds \\ & + \sum_{j=1}^N \int_0^t e^{-\int_s^t H(u) du} |H(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) ds \\ & \leq \alpha \dots \dots (2,5) \end{aligned}$$

حيث

$$H(t) = \sum_{j=1}^N h_j(t)$$

$$r_j(t) = \frac{[c_j(t)H(t) + \dot{c}_j(t)](1 - \tau_j(t)) + c_j(t)\dot{\tau}_j(t)}{(1 - \tau_j(t))^2}$$

عندئذ الحل الصفري للمعادلة (2,1) مستقر تقاربياً، إذا وفقط إذا تحقق:

$$\int_0^t H(s) ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty, \dots (2,6)$$

الاثبات:

بفرض أن (2,6) محققة من أجل  $t_0 > 0$  وبجعل

$$K = \sup_{t \geq 0} e^{-\int_0^t H(s) ds}, \dots (2,7)$$

ليكن  $\Psi \in C([m(t_0), t_0], R)$  نعرف  $S$  فضاء متري متراس حيث

$\rho(x, y) = \sup_{t \geq t_0} \{|x(t) - y(t)|\}$  بالشكل:

$$S = \left\{ \varphi \in C([m(t_0), \infty[, R) : \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \varphi(t) = \Psi(t); t \in [m(t_0), t_0] \right\}$$

نضرب طرفي المعادلة (2,1) بـ  $e^{\int_{t_0}^t H(u) du}$  ثم نكامل من  $t_0$  الى  $t$  نحصل على :

$$\begin{aligned} x(t) &= \Psi(t_0) e^{-\int_{t_0}^t H(u) du} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} \sum_{j=1}^N h_j(s) x(s) ds \\ &\quad - \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} \sum_{j=1}^N b_j(s) x(s - \tau_j(s)) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} \sum_{j=1}^N c_j(s) \dot{x}(s - \tau_j(s)) ds \\ &= \Psi(t_0) e^{-\int_{t_0}^t H(u) du} + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} h_j(s) x(s) ds \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} b_j(s) x(s - \tau_j(s)) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} c_j(s) \dot{x}(s - \tau_j(s)) ds \end{aligned}$$

نكامل بالتجزئة :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \Psi(t_0) e^{-\int_{t_0}^t H(u) du} \\
 &+ \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} d \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s h_j(u) x(u) du \right) \\
 &+ \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} \left\{ -b_j(s) \right. \\
 &+ h_j \left( s - \tau_j(s) \right) \left( 1 - \dot{\tau}_j(s) \right) \left. \right\} x \left( s - \tau_j(s) \right) ds \\
 &+ \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t \frac{c_j(s)}{1 - \dot{\tau}_j(s)} e^{-\int_s^t H(u) du} dx \left( s - \tau_j(s) \right) \\
 &= \left\{ \Psi(t_0) - \sum_{j=1}^N \frac{c_j(t_0)}{1 - \dot{\tau}_j(t_0)} \Psi \left( t_0 - \tau_j(t_0) \right) \right. \\
 &- \left. \sum_{j=1}^N \int_{t_0 - \tau_j(s)}^{t_0} h_j(s) \Psi(s) ds \right\} e^{-\int_{t_0}^t H(u) du} \\
 &+ \sum_{j=1}^N \frac{c_j(t)}{1 - \dot{\tau}_j(t)} x \left( t - \tau_j(t) \right) + \sum_{j=1}^N \int_{t - \tau_j(t)}^t h_j(s) x(s) ds \\
 &+ \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} \left\{ -b_j(s) + h_j \left( s - \tau_j(s) \right) \left( 1 - \dot{\tau}_j(s) \right) \right. \\
 &- \left. r_j(s) \right\} x \left( s - \tau_j(s) \right) ds \\
 &- \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} H(s) \left( \int_{s - \tau_j(s)}^s h_j(u) x(u) du \right) \dots (2,8)
 \end{aligned}$$

باستخدام (2,8) نعرف المؤثر  $p: S \rightarrow S$  بالشكل:

$$(p\varphi)(t) = \Psi(t) \quad ; \quad t \in [m(t_0), t_0]$$

$$\begin{aligned}
& (p\varphi)(t) \\
&= \left\{ \Psi(t_0) - \sum_{j=1}^N \frac{c_j(t_0)}{1 - \dot{\tau}_j(t_0)} \Psi(t_0 - \tau_j(t_0)) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^N \int_{t_0 - \tau_j(s)}^{t_0} h_j(s) \Psi(s) ds \right\} e^{-\int_{t_0}^t H(u) du} \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \frac{c_j(t)}{1 - \dot{\tau}_j(t)} \varphi(t - \tau_j(t)) + \sum_{j=1}^N \int_{t - \tau_j(t)}^t h_j(s) \varphi(s) ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} \left\{ -b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s)) (1 - \dot{\tau}_j(s)) \right. \\
&\quad \left. - r_j(s) \right\} \varphi(s - \tau_j(s)) ds \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} H(s) \left( \int_{s - \tau_j(s)}^s h_j(u) \varphi(u) du \right) ds \dots (2,9)
\end{aligned}$$

من الواضح أن  $(p\varphi)(t) \in C([m(t_0), \infty[, R)$ . لقد رأينا أن:  $(p\varphi)(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

$\varphi(t) \rightarrow 0$  و  $t - \tau_j(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ ، من أجل كل  $\varepsilon > 0$  يوجد  $T_1 > t_0$  بحيث أن  $s \geq T_1$  يؤدي  $|x(s - \tau_j(s))| < \varepsilon$  ;  $j = 1, 2, \dots, N$  من أجل  $t \geq T_1$  الحد الأخير من (2,9) يحقق:

$$|I_5| = \left| \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t H(u) du} H(s) \left( \int_{s - \tau_j(s)}^s h_j(u) \varphi(u) du \right) ds \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{T_1} e^{-\int_s^t H(u)du} H(s) \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s h_j(u) \varphi(u) du \right) ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \int_{T_1}^t e^{-\int_s^t H(u)du} H(s) \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s h_j(u) \varphi(u) du \right) ds \\ &\leq \sup_{\sigma \geq m(t_0)} |\varphi(\sigma)| \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{T_1} e^{-\int_s^t H(u)du} H(s) \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s h_j(u) du \right) ds \\ &\quad + \varepsilon \sum_{j=1}^N \int_{T_1}^t e^{-\int_s^t H(u)du} H(s) \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s h_j(u) du \right) ds \end{aligned}$$

باستخدام (2,6) يوجد  $T_2 \geq T_1$  بحيث أن  $t \geq T_2$  يؤدي:

$$\sup_{\sigma \geq m(t_0)} |\varphi(\sigma)| \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{T_1} e^{-\int_s^t H(u)du} H(s) \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s h_j(u) du \right) ds < \varepsilon$$

بتطبيق (2,5) نحصل على:

$$|I_5| < \varepsilon + \alpha \varepsilon < 2\varepsilon$$

وبالتالي  $I_5 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  نرى بأن بقية الحدود في (2,9) تسعى نحو الصفر عندما  $t \rightarrow \infty$

وبالتالي  $(p\varphi)(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  هذا يعني أن

$p\varphi \in S$  باستخدام (2,5) وبما أن  $p$  تطبيق متراس مع الثابت  $\alpha$  وباستخدام مبدأ

التطبيق الضاغط، فإن  $p$  يملك نقطة ثابتة وحيدة  $x \in S$  وهو حل للمعادلة (3,1)

حيث:

$$.x(t) = x(t, t_0, \Psi) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \text{ و } x(t) = \Psi(t) ; t \in [m(t_0), t_0]$$

للحصول على الاستقرار التقاربي علينا إثبات أن الحل الصفري لـ (2,1) مستقر. ليكن  $\varepsilon > 0$  نختار  $\delta > 0$  ومن أجل  $\delta < \varepsilon$  يكون  $\alpha\varepsilon < \varepsilon$   $2\delta K e^{\int_0^t H(u)du} + \alpha\varepsilon < \varepsilon$ .

إذا كان  $x(t) = x(t, t_0, \Psi)$  حل للمعادلة (2,1) حيث  $\|\Psi\| < \delta$  عندئذ  $x(t) = (px)(t)$  وبالتالي  $|x(t)| < \varepsilon$  عندما  $t \geq t_0$ . نلاحظ أن  $|x(s)| < \varepsilon ; s \in [m(t_0), t_0]$

إذا وجد  $t^* > t_0$  بحيث إن  $x(t^*) = \varepsilon$  و  $|x(s)| < \varepsilon$  من أجل  $s \in [m(t_0), t^*]$  عندئذ :

$$\begin{aligned} x(t^*) &\leq \|\Psi\| \left( 1 + \sum_{j=1}^N \frac{c_j(t_0)}{1 - \dot{\tau}_j(t_0)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^N \int_{t_0 - \tau_j(s)}^{t_0} |h_j(s)| ds \right) e^{-\int_{t_0}^{t^*} H(u)du} \\ &\quad + \varepsilon \sum_{j=1}^N \frac{c_j(t^*)}{1 - \dot{\tau}_j(t^*)} + \varepsilon \sum_{j=1}^N \int_{t^* - \tau_j(t^*)}^{t^*} |h_j(s)| ds \\ &\quad + \varepsilon \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{t^*} e^{-\int_s^{t^*} H(u)du} \{-b_j(s) \\ &\quad + h_j(s - \tau_j(s))(1 - \dot{\tau}_j(s)) - r_j(s)\} ds \\ &\quad - \varepsilon \sum_{j=1}^N \int_{t_0}^{t^*} e^{-\int_s^{t^*} H(u)du} |H(s)| \left( \int_{s - \tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) ds \\ &\leq 2\delta K e^{-\int_0^{t_0} H(u)du} + \alpha\varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

وهذا يناقض التعريف على  $t^*$  وبالتالي فإن  $|x(t)| < \varepsilon$  من أجل  $t \geq t_0$  والحل الصفري لـ (2,1) مستقر وبالتالي مستقر تقاربياً إذا تحققت (2,6).

وبالعكس: بفرض (2,6) غير محققة. باستخدام (2,4) يوجد متتالية  $\{t_n\}$  حيث  $t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$  بحيث أن:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_n} H(s) ds = l, l \in R^+$$

$$-J \leq \int_0^{t_n} H(s) ds \leq J, n \geq 1$$

للتبسيط ومن أجل كل  $s \geq 0$  نكتب:

$$w(s) = \sum_{j=1}^N \left[ \left| -b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s)) (1 - \dot{\tau}_j(s)) - r_j(s) \right| + |H(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) \right]$$

باستخدام (2,5) لدينا:  $\int_0^{t_n} e^{-\int_s^{t_n} H(u) du} w(s) ds \leq \alpha$  ومنه ينتج:

$$\int_0^{t_n} e^{\int_0^s H(u) du} w(s) ds \leq \alpha e^{\int_0^{t_n} H(u) du} \leq J$$

المتتالية  $\left\{ \int_0^{t_n} e^{\int_0^s H(u) du} w(s) ds \right\}$  محدودة، لذلك يوجد متتالية جزئية مقاربة بحيث:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_n} e^{\int_0^s H(u) du} w(s) ds = \gamma \quad ; \gamma \in R^+$$

باختيار عدد صحيح موجب  $m$  كبير جداً:

$$\int_{t_m}^{t_n} e^{\int_0^s H(u) du} w(s) ds < \frac{\delta_0}{4K}$$

من أجل  $n \geq m$  حيث  $\delta_0 \geq 0$  يحقق  $2\delta_0 K e^J + \alpha \leq 1$

نفرض أن الحل  $x(t) = x(t, t_m, \Psi)$  حل للمعادلة (3,1) حيث  $\Psi(t_m) = \delta_0$  و  
 $|\Psi(s)| \leq \delta_0$  من أجل  $s \leq t_m$  نختار  $\Psi$  بحيث أن  $|x(t)| \leq 1$  من أجل

:  $t \geq t_m$

$$\Psi(t_m) - \sum_{j=1}^N \left[ \frac{c_j(t_m)}{1 - \tau_j(t_m)} \Psi(t_m - \tau_j(t_m)) + \int_{t_m - \tau_j(t_m)}^{t_m} h_j(s) \varphi(s) ds \right] \geq \frac{1}{2} \delta_0$$

ينتج من (2,9) حيث  $x(t) = (px)(t)$  ومن أجل  $n \geq m$  أن:

$$\begin{aligned} & \left| x(t_n) - \sum_{j=1}^N \left[ \frac{c_j(t_n)}{1 - \tau_j(t_n)} \Psi(t_n - \tau_j(t_n)) + \int_{t_n - \tau_j(t_n)}^{t_n} h_j(s) \varphi(s) ds \right] \right| \\ & \geq \frac{1}{2} \delta_0 e^{-\int_{t_m}^{t_n} H(u) du} - \int_{t_m}^{t_n} e^{\int_s^{t_n} H(u) du} w(s) ds \\ & = e^{-\int_{t_m}^{t_n} H(u) du} \left( \frac{1}{2} \delta_0 - e^{-\int_0^{t_m} H(u) du} \int_{t_m}^{t_n} e^{\int_0^s H(u) du} w(s) ds \right) \\ & \geq e^{-\int_{t_m}^{t_n} H(u) du} \left( \frac{1}{2} \delta_0 - K \int_{t_m}^{t_n} e^{\int_0^s H(u) du} w(s) ds \right) \\ & \geq \frac{1}{4} \delta_0 e^{-\int_{t_m}^{t_n} H(u) du} \geq \frac{1}{4} \delta_0 e^{-2J} > 0 \dots (3,10) \end{aligned}$$

من ناحية أخرى، إذا كان الحل الصفري للمعادلة (2,1) مستقر تقاربياً فإن  $x(t) = x(t, t_m, \Psi) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

بحيث  $t_n - \tau_j(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$  وتحققت (2,5) فإن:

$$x(t_n) - \sum_{j=1}^N \left[ \frac{c_j(t_n)}{1 - \dot{\tau}_j(t_n)} x(t_n - \tau_j(t_n)) + \int_{t_n - \tau_j(t_n)}^{t_n} h_j(s)x(s)ds \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

وهذا يناقض (2,10) وبذلك يكون الشرط (2,6) شرط لازم من أجل الاستقرار التقاربي للحل الصفري للمعادلة (2,1).

### البيهيبة 2:

من أجل  $N = 2, \tau_1 = 0, \tau_2 = \tau, b_1 = a, c_1 = 0, c_2 = c$  بفرض أن  $\tau$  قابل للاشتقاق مرتين  $\dot{\tau}(t) \neq 1$  من أجل كل  $t \geq 0$  و بفرض  $\alpha \in (0,1)$ ، من أجل  $t \geq 0$  توجد توابع مستمرة:

$$t \geq 0 \text{ بحيث إنه من أجل } h_j: [m_j(t_0), \infty[ \rightarrow R \quad ; \quad J = 1,2$$

$$\left| \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t H(s)ds \right| < \infty$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left| \frac{c(t)}{1 - \dot{\tau}(t)} \right| + \int_{t-\tau(t)}^t |h_2(s)|ds \\ & + \int_0^t e^{-\int_s^t H(u)du} (|-a(s) + h_1(s)| \\ & + |-b(s) + h_2(s - \tau(s))(1 - \dot{\tau}(s)) - r(s)|)ds \\ & + \int_0^t e^{-\int_s^t H(u)du} |H(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_2(u)|du \right) ds \\ & \leq \alpha \dots \dots (2,11) \end{aligned}$$

حيث

$$H(t) = \sum_{j=1}^2 h_j(t)$$

$$r(t) = \frac{[c(t)H(t) + \dot{c}(t)](1 - \dot{\tau}(t)) + c_j(t)\dot{\tau}(t)}{(1 - \dot{\tau}(t))^2}$$

الحل الصفري لـ (2,1) مستقر تقاربياً إذا فقط إذا كان

$$\int_0^t H(s) ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

**ملاحظة:** عندما  $h_1(s) = a(s)$ ,  $h_2(s) = h(s) - a(s)$  البديهية 2 تنتج من المبرهنة 1.

من أجل الحالة الخاصة:  $c_j(t) = 0$  نحصل على:

**البديهية 3:** بفرض  $\tau_j$  قابل للاشتقاق مرتين توجد توابع مستمرة:

$$h_j: [m_j(t_0), \infty[ \rightarrow R, j = 1, 2, \dots, N$$

$$\left| \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t H(s) ds \right| < \infty$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \int_{t-\tau(t)}^t |h_j(s)| ds \\ & + \sum_{j=1}^N \int_0^t e^{-\int_s^t H(u) du} | -b_j(s) \\ & + h_j(s - \tau_j(s)) (1 - \dot{\tau}(s)) | \\ & + \int_0^t e^{-\int_s^t H(u) du} |H(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) ds \leq \alpha \end{aligned}$$

حيث  $H(t) = \sum_{j=1}^2 h_j(t)$  ، عندئذ الحل الصفري لـ (1,1) مستقر تقاربياً إذا فقط إذا:

$$\int_0^t H(s) ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$$

ملاحظة: عندما  $h_j(s) = b_j(g_j(s))$  ;  $j = 1, 2, \dots, N$  البديهية 3 تعميم للمبرهنة 1.

مثال

ليكن: (2,12)  $\dot{x}(t) = -b_1(t)x(t - \tau_1(t)) - b_2(t)x(t - \tau_2(t)) \dots$

حيث  $\tau_1(t) = 0.273t$   $\tau_2(t) = 0.289t$   $b_1(t) = \frac{1}{1.454t+2}$   $b_2(t) = \frac{1}{1.422t+2}$

عندئذ الحل الصفري للمعادلة (2,12) مستقر تقاربياً.

البرهان: باختيار  $h_1(t) = h_2(t) = \frac{0.62}{t+1}$  وبذلك يكون  $H(t) = \frac{1.24}{t+1}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \int_{t-\tau_j(t)}^t |h_j(s)| ds &= \int_{0.727t}^t \frac{0.62}{s+1} ds + \int_{0.711t}^t \frac{0.62}{s+1} ds \\ &= 0.62 \ln \left( \frac{t+1}{0.727t+1} \right) + 0.62 \ln \left( \frac{t+1}{0.711t+1} \right) \\ &< 0.4092 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{-\int_s^t H(u) du} |H(s)| \left( \int_{s-\tau_j(s)}^s |h_j(u)| du \right) ds \\ < \int_0^t e^{-\int_s^t 1.24/(u+1) du} \frac{1.24}{1+s} \cdot 0.4092 ds < 0.4092 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^t e^{-\int_s^t H(u) du} \left| -b_j(s) + h_j(s - \tau_j(s)) (1 - \dot{\tau}(s)) - r_j(s) \right| ds$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\int_s^t \frac{1.24}{u+1} du} \frac{1 - 1.24 \times 0.727}{1 + 0.727} ds \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\int_s^t \frac{1.24}{(u+1)} du} \frac{1 - 1.24 \times 0.711}{1 + 0.711s} ds \\ & \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1 - 1.24 \times 0.727}{1.24 \times 0.727} + \frac{1 - 1.24 \times 0.711}{1.24 \times 0.711} \right) \\ & \quad \int_0^t e^{-\int_s^t \frac{1.24}{(u+1)} du} \frac{1.24}{s+1} ds < 0.1218 \end{aligned}$$

نرى أن شروط البديهية 3 محققة حيث:

$$\alpha = 0.4092 + 0.4092 + 0.1218 = 0.9402 < 1$$

وهذا يؤدي أن الحل الصفري لـ (2.12) مستقر تقاربياً.

المقترحات: دراسة استقرار المعادلات التفاضلية اللاخطية باستخدام النقطة الثابتة.

## المراجع

- [1] T.A. Burton, Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations, Dover Publications, New York, 2006.
- [2] T.A. Burton, Liapunov functionals, fixed points, and stability by Krasnoselskii's theorem, Nonlinear Studies 9 (2001) .
- [3] T.A. Burton, Stability by fixed point theory or Liapunov's theory: a comparison, Fixed Point Theory 4 (2003) .
- [4] T.A. Burton, Fixed points and stability of a nonconvolution equation, Proceedings of the American Mathematical Society 132 (2004).
- [5] T.A. Burton, T. Furumochi, A note on stability by Schauder's theorem, Funkcialaj Ekvacioj 44 (2001) .
- [6] T.A. Burton, T. Furumochi, Fixed points and problems in stability theory, Dynamical Systems and Applications 10 (2001) .
- [7] T.A. Burton, T. Furumochi, Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by fixed point theorems, Dynamic Systems and Applications 11 (2002).
- [8] T.A. Burton, T. Furumochi, Krasnoselskii's fixed point theorem and stability, Nonlinear Analysis 49 (2002).

- [9] Y.M. Dib, M.R. Maroun, Y.N. Raffoul, Periodicity and stability in neutral nonlinear differential equations with functional delay, *Electronic Journal of Differential Equations* 2005 (142) (2005) .
- [10] A. Djoudi, R. Khemis, Fixed point techniques and stability for neutral nonlinear differential equations with unbounded delays, *Georgian Mathematical Journal* 13 (1) (2006).
- [11] C.H. Jin, J.W. Luo, Stability in functional differential equations established using fixed point theory, *Nonlinear Analysis* 68 (2008).
- [12] C.H. Jin, J.W. Luo, Fixed points and stability in neutral differential equations with variable delays, *Proceedings of the American Mathematical Society* 136 (3) (2008).
- [13] Y.N. Raffoul, Stability in neutral nonlinear differential equations with functional delays using fixed–point theory, *Mathematical and Computer Modelling* 40 (2004).
- [14] B. Zhang, Fixed points and stability in differential equations with variable delays, *Nonlinear Analysis* 63 (2005).
- [15] MENG FAN, ZHINAN XIA AND HUAIPING ZHU, ASYMPTOTIC STABILITY OF DELAYDIFFERENTIAL

EQUATIONS VIA FIXEDPOINT THEORY AND APPLICATIONS

Volume 18, Number 4 (2010).

[16] T.A. Burton Stability by fixed point theory for functional differential equations (2013).

[17] Mouataz Billah Mesmouli, Abdlouaheb Ardjouni, Ahcene Djoudi Stability In Neutral Nonlinear Differential Equations (2017).

[18] M. B. Mesmouli, A. Ardjouni, A. Djoudi Study of Stability in Nonlinear Neutral Differential Equations with Variable Delay Using Krasnoselskii–Burton’s Fixed– Point (2016).

## دراسة في انتظام التوابع الكواترنيونية

### وفقاً لنظام الشرائح

طالب الدكتوراه : أنس فوزي خلوف

المشرف: أ.د. إبراهيم إبراهيم

جامعة البعث - كلية العلوم - قسم الرياضيات

#### الملخص

يقدم هذا البحث تعميماً لمفهوم الهولومورفية والتوابع النظامية بمتغير كواترنيوني، عن طريق عدة مؤثرات تفاضلية. لنصل إلى أفضل تعميم للتوابع النظامية للاستفادة منها في دراسة بعض النظائر لاسيما ميرهنه كوشي من التحليل العقدي إلى التحليل الكواترنيوني ، بالإضافة إلى معاملات الحدود القصوى والدنيا. كما يعرض البحث أيضاً أهم العمليات الجبرية على هذه التوابع .

#### كلمات مفتاحية:

الكواترنيون - التابع بمتغير كواترنيوني - مؤثرات فويتير وكولن - التابع النظامي بمتغير كواترنيوني - العمليات على التوابع النظامية .

# A Study in the Regularity of Quaternion Functions According to the Slice System

**PhD student: Anas Fawzi Khallouf**

**Supervisor: Prof. Dr. Ibrahim Ibrahim**

**Al-Baath University - College of Science - Department of Mathematics**

## Summary

This investigate presents a generalization of the concept of holomorphic and regular functions with a quaternion variable, through several differential operators. In order to reach the best generalization of the systematic functions to benefit from it in the study of some analogs, especially Cauchy's theory, from the complex analysis to the quaternion analysis, in addition to the coefficients of the maximum and minimum terms. The investigate also presents the most important algebraic operations on these functions.

## Keywords:

Quaternion - Function with a quaternion variable - Regular function with a quaternion variable - Operations on regular functions.

## 1- مقدمة:

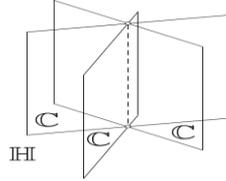
إنّ البحث عن تعريف الانتظام للتوابع ذات القيم الكواترنيونية لمتغير كواترنيوني كان محط اهتمامٍ للكثير من الرياضيين من حوالي قرنٍ من الزمن وحتى الآن. كانت هناك مناهج مختلفة ولدت نظريات مختلفة، أشهرها بالتأكيد نظرية فويتير للانتظام. والذي قدمها فويتير في ثلاثينيات القرن الماضي [10]. إن صف التوابع النظامية وفق فويتير عُرِّفت عن طريق معادلة كوشي ريمان ، والذي يشمل بالفعل على العديد من الخصائص الرئيسية للتوابع الهولومورفية من متغير عقدي واحد. وعلى سبيل المثال نذكر نظرية كوشي وصيغ كوشي التكاملية ، وقد عُمِّمت هذه الدراسة من قبل (رمضانوف- Ramadanoff) و (لافيل- Laville) [11]. ومع ذلك لا تزال نظرية فويتير للتوابع النظامية غير مكتملة وتواجه العديد من العوائق لتعميمها على الكواترنيون.

ولكون  $H$  (مجموعة الأعداد الكواترنيونية) مُتماثلة جبرياً مع الفضاء الإقليدي رباعي البُعد  $R^4$  ، بالتالي أي تحليل على هذه التوابع يجب أن يتم بلغة حساب التفاضل والتكامل على المُنطويات (manifolds). من هنا تأتي أهمية الهندسة التفاضلية والتفاضل والتكامل الخارجي في فهم الخصائص التحليلية لمثل هذه التوابع والمرجع [15] يُقدِّم لنا معلومات في هذا المجال. بالإضافة إلى أهمية جبر كليفورد (Clifford Algebra) لتطوير مفهوم التوابع على الفضاءات مُتعددة الأبعاد [5]. ويُعد (سادبيري- Sudbery) من أهم العلماء الذين قاموا ببناء التحليل الكواترنيوني مُعتمداً على الفهم الهندسي والجبري للمشتق وتطبيقاته لتوفير أهم النظائر من التحليل العقدي إلى التحليل الكواترنيوني [8].

وفي عام 2006 ، قدم كل من (جنتيلي- Gentili) و (ستروبا - Struppa) مفهوماً جديداً للانتظام في الأعداد الكواترنيونية ، مُستوحاً من العمل الذي قام به (كولن- Cullen) [9]. والذي أسماه بـ انتظام الشرائح (Slice regularity) ، وذلك عن طريق

إعادة صياغة تعريف كولن للانتظام من خلال الخصائص الجبرية لـ  $H$  [12]. إنهم يعتبرون الجبر الحقيقي رباعي الأبعاد  $H$  على أنه اجتماع للمستويات العقدية

$$H = \bigcup_{I \in S} (R + RI) = \bigcup_{I \in S} L_I \quad \text{والتى تُدعى أيضاً بالشرائح، أي: } L_I = R + RI \approx C$$



حيث تتقاطع جميع هذه الشرائح بالمحور الحقيقي . وكل واحدة منها يتم تحديدها بواسطة وحدة تخيلية  $I$  . إن مجموعة جميع الوحدات التخيلية عبارة عن كرة ثنائية البعد يرمز لها بـ  $S$  ، حيث  $S = \{q \in H; q^2 = -1\}$  وتقع ضمن فضاء ثلاثي الأبعاد من العناصر الكواترنيونية التخيلية البحتة. وتلعب هذه المجموعة دوراً رئيسياً في نظرية التوابع النظامية.

إن نظرية التوابع النظامية وفقاً للشرائح والغنية بالفعل، هي في تطور مستمر. وعلى الرغم من خصائصها المتنوعة ، أثبتت التوابع النظامية وفقاً للشرائح أنها جيدة ومرشحة أن تلعب دوراً في الأعداد الكواترنيونية مشابه لدور التوابع الهولومورفية في الأعداد العقدية. يمكننا أن نذكر على سبيل المثال ، نظائرها في نظرية كوشي.

## 1- هدف البحث:

يهدف البحث إلى تقديم تعميم لمفهوم انتظام التوابع من الساحة العقدية إلى الساحة الكواترنيونية والاعتماد على أفضل تعميم لمفهوم الانتظام في إيجاد بعض النظائر المتعلقة بالتوابع العقدية إلى التوابع الكواترنيونية.

## 2- مشكلة البحث:

تكمن مشكلة البحث الرئيسة في عدم تحقق الخاصة التبديلية في عملية الضرب بين عنصرين من الكواترنيون ، وبالتالي صعوبة دراسة التوابع الكواترنيونية دراسة تحليلية، لاسيما قابلية الإشتقاق . وهذا يتطلب منا إيجاد آلية مختلفة للتعامل معها، وهو ما سيتطرق له البحث.

## 3- طرائق البحث (تعريف ومفاهيم أساسية):

### (1) الكواترنيون:

تعني كلمة (كواترنيون - Quaternion) المجموعة المكونة من أربعة عناصر. وهو المصطلح المعتمد للأعداد التي تلي العقديّة مباشرةً . كما يُقدّم الكواترنيون بأكثر من صيغة وهيئة وهو الأمر الذي جعلنا نعتمد على مصطلح الكواترنيون بدلاً عن الرباعيات في بحثنا، كما سنرمز لمجموعة الأعداد الكواترنيونية بالرمز  $H$  نسبة إلى مكتشفها هاملتون. ويُعرّف الكواترنيون بالشكل:

$$H = \left\{ q = a + bi + cj + dk ; a, b, c, d \in R \right\}$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j \quad \text{و} \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad \text{حيث}$$

$$ij = -ji = k$$

ويمكننا أيضاً أن نقدم الكواترنيون كزوج من الأعداد العقديّة، كالتالي:

$$H = \{ \gamma_1 + \gamma_2 j ; \gamma_1, \gamma_2 \in C \}$$

حيث من أجل  $\gamma_1 = a + bi$  ,  $\gamma_2 = c + di$  ;  $a, b, c, d \in R$  يكون:

$$q = \gamma_1 + \gamma_2 j$$

$$q = (a + bi) + (c + di) j$$

$$q = a + bi + cj + dk ; ij = k$$

كما نعرف مرافق الكواترنيون  $q = a + bi + cj + dk$  بالشكل:  $\bar{q} = a - bi - cj - dk$  ونظيمه بالعلاقة:  $|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$ . أما مقلوبه فهو  $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$ . وللاطلاع على

المزيد من بنية الكواترنيون وصيغته المختلفة وخواصه، يُمكن العودة للمراجع [1-2-3-4-14-18].

## (2) التابع الكواترنيوني

نقول عن تابع ما  $f$  إنه تابع كواترنيوني إذا كان معرف على  $H$  أو أي مجموعة جزئية منها ويأخذ قيمه من  $H$ .

## (3) الشرائح - Slices

ليكن  $\Omega$  نطاق في  $H$  بحيث يتقاطع مع المحور الحقيقي. ندعو  $\Omega$  بنطاق شريحة إذا كان من أجل أي  $I \in S$ ، مقصورها  $\Omega_I$  مع المستوي العقدي  $L_I$  هو نطاق في  $L_I$ .

## 4- النتائج ومناقشتها:

### قابلية الاشتقاق في $H$ :

تكمّن إحدى نقاط البداية الأكثر منطقية فيما يتعلق بنظرية التتابع النظامية هو الاشتقاق. وتقوم دراسة قابلية الاشتقاق لتابع إلى دراسة نهاية نسبة. فمن أجل تابع

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} [f(x+h) - f(x)] ; h \in C$$

موجودة، ومن كون عملية الضرب تبديلية في  $C$ ، فالنهاية السابقة تكافئ النهاية

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)] h^{-1} ; h \in C$$

ولكن ماذا لو كان  $h \in H$  والتابع  $f : H \rightarrow H$  ؟

كما نعلم إن عملية الضرب في  $H$  غير تبديلية، فكيف لنا أن نعرف قابلية اشتقاق تابع بمتغير من  $H$ ؟ هذا يقودنا بشكلٍ منطقي إلى أن نعرف قابلية الاشتقاق بالاتجاهين (من اليمين ومن اليسار).

**تعريف (1):** ليكن لدينا التابع  $f: H \rightarrow H$  بمتغير كواترنيوني عندئذٍ نقول إن التابع

(اشتقائي من اليسار) إذا كانت النهاية التالية  $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}[f(q+h) - f(q)] ; h \in H$  موجودة

ونرمز لهذه النهاية عندئذٍ بـ  $\frac{\partial f_l}{\partial q}$  أو  $f'_l$ . وبشكلٍ مشابه نعرف التابع على أنه (اشتقائي

من اليمين) إذا كانت النهاية التالية  $\lim_{h \rightarrow 0} [f(q+h) - f(q)]h^{-1} ; h \in H$  موجودة. ونرمز

لهذه النهاية عندئذٍ بـ  $\frac{\partial f_r}{\partial q}$  أو  $f'_r$ .

يبدو أن التعريف السابق حل مشكلة عدم التبادلية في  $H$  بأن نقدم تعريف التابع الاشتقائي دوماً إلى تابع اشتقائي من اليمين وتابع اشتقائي من اليسار، وبالتالي سيكون علينا دوماً أن نكرر الدراسة لتطوير أي مفهوم من مفاهيم التحليل العقدي إلى التحليل الكواترنيوني مرتين، وهذا لا يبدو مشجعاً. لذلك بقي الكواترنيون مهماً لفترة طويلة منذ اكتشافه، وانحصرت دراسته على البنى الجبرية له دون الخوض في دراسته تحليلياً.

فمن أجل التابع  $f(q) = q^2$  وبافتراض أن الضرب من اليسار نجد إن :

$$f(q+h) = (q+h)^2 = (q+h)(q+h) = q(q+h) + h(q+h) = q^2 + qh + hq + h^2$$

ومنه يكون:

$$h^{-1}[f(q+h) - f(q)] = h^{-1}(q^2 + qh + hq + h^2 - q^2) = h^{-1}(qh + hq + h^2) = h^{-1}qh + q + h$$

وبسبب الخاصة غير التبديلية في الضرب لا يمكن تبسيط الناتج أكثر من ذلك، مما

يجعل النهاية  $\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}[f(q+h) - f(q)] ; h \in H$  غير موجودة. وبشكلٍ مشابه أيضاً

نتوصل إلى أن النهاية  $\lim_{h \rightarrow 0} [f(q+h) - f(q)]h^{-1}; h \in H$  غير موجودة في حال افتراضنا أن الضرب من اليمين . وبذلك نجد أن مفهوم الاشتقاق لتابع كواترنيوني لا يمكن أن نعامله كتابع بمتغير عقدي أمام اعتمادنا على مفهوم اشتقاقية التابع على وجود نهاية النسبة . فالمبرهنة التالية تعطينا صيغة التوابع الكواترنيونية الاشتقاقية وفقاً لتعريف نهاية النسبة.

**مبرهنة (1) [13]:** بفرض لدينا التابع الكواترنيوني  $f$  المعروف والاشتقائي من اليسار ضمن المجموعة  $U \subset H$  المفتوحة والمتراصة، عندئذٍ يكون للتابع الكواترنيوني  $f$  في  $U$  الشكل التالي:  $f(q) = a + qb$  وذلك من أجل بعض  $a, b \in H$ .

وبذلك نجد أن التابع الكواترنيوني لكي يكون اشتقائياً يجب أن يكون تابع تآلفياً ، وهذا ما يُفيد الدراسة التحليلية للكواترنيون . وبتغيير أسلوب دراسة قابلية الاشتقاق إلى الاعتماد على قابلية نشر التابع وفق سلسلة تايلور في جوار نقطة ما ربما يساعد في دراسة تحليلية التابع الكواترنيوني. فكما نعلم ، نقول عن التابع  $f: C \rightarrow C$  إنه تحليلي على منطقة  $U \subset C$  إذا كان بالإمكان أن نكتب التابع  $f$  من أجل أي  $z_0 \in U$  على شكل سلسلة قوى  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  ، وهذه السلسلة متقاربة . باتباع نهج مشابه فيما يتعلق بالتوابع

الكواترنيونية ، فمن أجل  $q = t + ix + jy + kz$  متغير كواترنيوني عشوائي، يمكننا

أن نعبر عن المركبات  $t, x, y, z$  بدلالة  $q$  كالتالي [16]:

$$t = \frac{1}{4}(q - iqj - jqj - kqk) \quad x = \frac{1}{4i}(q - iqj + jqj + kqk)$$

$$y = \frac{1}{4j}(q + iqj - jqj + kqk) \quad z = \frac{1}{4k}(q + iqj + jqj - kqk)$$

المعادلات السابقة تعني أن كل كثير حدود حقيقي  $R^4 \rightarrow R^4$   $p(t, x, y, z)$  يمثل كثير حدود كواترنيوني بدلالة المتغير  $q$ . مما يعني أنه لا يمكن الحصول على بُنية إضافية فيما يتعلق بتحليل التوابع ذات القيمة الكواترنيونية عن طريق التحقق في سلسلة قوى كواترنيونية ، وهذا يختلف في حالة التوابع ذات القيمة العقدية بمتغير عقدي ، على وجه الخصوص كثير الحدود  $P(x, y): C \rightarrow C$  والذي يتطلب وجود كل من  $\bar{z}, z$  ، كون  $\bar{z}, z$  تُعتبر توابع خطية مستقلة بدلالة  $y, x$  [16] . ومنه نستنتج أن تقديم مفهوم قابلية الاشتقاق عن طريق نهاية النسبة أو سلسلة القوى لا يمكن تطبيقها على التوابع بمتغيرات كواترنيونية للحصول على تعميم ناجح للتحليل العقدي . وهذا ما يتطلب اتباع مستوى جديد في التعامل مع  $H$  يختلف عما هو  $R$  في أو في  $C$  .

### الانتظام في $H$ :

المحاولة الأولى الناجحة للحصول على أسلوب تحليلي يختلف عن الذي تم تقديمه سابقاً جاءت في عام 1935 على يد العالم الرياضي السويسري (رودولف فويتزر Rudolph Fueter - ) . حيث قَدّم ما أسماه بالتوابع (النظامية) عن طريق تعميم معادلات كوشي

ريمان ، وهذا ما جعل تعريف فويتز للانتظام مرغوباً به، ونتيجةً لذلك تم تحديد العديد من التعريفات البديلة الأخرى للانتظام المقترحة في العقود التي تلت ذلك، أشهرها كان لـ (كولن - Cullen).

وقبل البدء بتعريف الانتظام لا بد من تقديم عدة رموز . من أجل  $q = t + ix + jy + kz$

متغير كواترنيوني عشوائي نُعرف المؤثرات التالية:

$$\bar{\partial}_\ell = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ مؤثر كوشي ريمان فويتز الأيسر المرافق:}$$

$$\bar{\partial}_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \text{ مؤثر كوشي ريمان فويتز الأيمن المرافق:}$$

كما نعرف أيضاً مؤثرين آخرين مشابهين وهما:

$$\partial_\ell = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} - k \frac{\partial}{\partial z} \right) \text{ مؤثر كوشي ريمان فويتز الأيسر:}$$

$$\partial_r = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} i - \frac{\partial}{\partial y} j - \frac{\partial}{\partial z} k \right) \text{ مؤثر كوشي ريمان فويتز الأيمن:}$$

والهدف من ذلك هو إيجاد تعميم لمؤثرات كوشي ريمان:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ و } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ والمعرفين في التحليل العقدي.}$$

وبالاعتماد على المؤثرات  $\partial_r, \bar{\partial}_r, \partial_\ell, \bar{\partial}_\ell$  يمكننا استنتاج المؤثر التقليدي  $\Delta$  (مؤثر لابلاس) والمعرف بالشكل [8]:

$$\Delta f = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{4} \partial_r \bar{\partial}_r f = \frac{1}{4} \partial_\ell \bar{\partial}_\ell f$$

سعى كولن إلى تبسيط تعريفات انتظام فويتز حيث تجاوز التمييز بين المؤثر اليساري واليميني لتبسيط تحليل انتظام فويتز وقد نجح في ذلك، فقدم كولن مؤثر اشتقاقي عزفه

$$\partial_c = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\text{Im}(q)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad \text{بالعلاقة:}$$

والذي سندعوه بمؤثر كولن التفاضلي، حيث  $\text{Im}(q) = ix + jy + kz$  و  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

من خلال المؤثرات السابقة  $\Delta, \partial_c, \bar{\partial}_c, \partial_r, \bar{\partial}_r, \partial_\ell, \bar{\partial}_\ell$  مع ملاحظة إمكانية الاستغناء

عن الأمثال  $\frac{1}{2}$  أو  $\frac{1}{4}$  من تعريفاتها لعدم تأثيرها على دراسة الانتظام سنقدم التعريفات

التالية.

**تعريف(2):** نقول عن التابع  $f : H \rightarrow H$  إنه **توافقي** إذا حقق الشرط :  $\Delta f = 0$

**تعريف(3):** نقول عن التابع  $f : H \rightarrow H$  إنه **نظامي من اليسار** وفق فويتز عند  $q \in H$

إذا تحقق  $\bar{\partial}_\ell f(q) = 0$  . ونقول أنه **نظامي من اليمين** وفق فويتز عند  $q \in H$  إذا

تحقق  $f(q) \bar{\partial}_r = 0$  .

**تعريف(4):** نقول عن التابع  $f : H \rightarrow H$  إنه **نظامي وفق كولن** عند  $q \in H$  إذا تحقق الشرط  $\partial_c f(q) = 0$ .

**تعريف(5):** من أجل  $U$  مجموعة مفتوحة ومحتواة في  $H$  وتابع  $f : H \rightarrow H$ . نقول إن  $f$  **تابع هولومورفي وفق فويتز** إذا تحقق الشرط:  $\partial_c \Delta f(q) = 0, \forall q \in U$ . ونقول إنه **هولومورفي وفق كولن** إذا تحقق الشرط:  $\partial_c \Delta f(q) = 0, \forall q \in U$ .

إن التعاريف السابقة المتعلقة بانتظام التوابع والتي تأتي تعميماً لما هو في التحليل العقدي لا تتطابق فيما بينها [7]، والمبرهنة التالية توضح العلاقة بين صف التوابع النظامية وفق فويتز والتي نرمز لها بـ  $R_F(H)$  وصف التوابع النظامية وفق كولن والتي نرمز لها بـ  $R_C(H)$  وصف التوابع الهولومورفية والتي نرمز له بـ  $Hol(H)$ .

**مبرهنة(2):** ليكن لدينا التابع  $f : H \rightarrow H$  ومجموعة صفوف التوابع  $R_F(H)$  و  $R_C(H)$  و  $Hol(H)$ ، عندئذٍ العلاقة بينهما كالتالي:

$$1 - R_F(H) \subset Hol(H)$$

$$2 - R_C(H) \subset Hol(H)$$

$$3 - R_F(H) \neq R_C(H)$$

الإثبات: لنثبت كلاً على حدا.

1- ليكن  $f$  تابع نظامي وفق فويتز فيكون  $\partial_c f = 0$  وبالتالي:

$$\bar{\partial}_\ell \Delta(f) = \bar{\partial}_\ell \bar{\partial}_\ell \bar{\partial}_\ell f = \bar{\partial}_\ell \bar{\partial}_\ell (0) = 0$$

وهذا يعني أن  $f$  هولومورفي . ومنه  $R_F(H) \subset Hol(H)$

2- ليكن  $f$  تابعاً نظامياً وفق كولن فيكون  $\partial_c f = 0$  وبالتالي:

$$\partial_c \Delta f(q) = \partial_c [\partial_c^2(f)] = \partial_c^2 [\partial_c f] = \partial_c^2 (0) = 0$$

وهذا يعني أن  $f$  هولومورفي ، ومنه  $R_C(H) \subset Hol(H)$

3- ولإثبات عدم المساواة بين  $R_C(H)$  و  $R_F(H)$  ، يكفي أن يكون هناك تابع كواترنيوني

ينتمي إلى أحدهما دون الآخر، وهذا نجده في التابع المطابق  $f(q) = q$  . فهو

نظامي وفق كولن لكنه ليس نظامي وفق فويتز ، ولنبين ذلك.

من أجل  $q = t + ix + jy + kz \in H$  لدينا:

$$\bar{\partial}_\ell(q) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right)(q) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right)(t + ix + jy + kz)$$

$$= 1 + i(i) + j(j) + k(k) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$$

أما من أجل حساب  $\partial_c(q) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\text{Im}(q)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)(q)$  ، فسنتب التابع  $f(q) = q$

بالصيغة القطبية [16]، بالشكل:  $f(q) = g(t, r) + h(t, r) \left( \frac{\text{Im}(q)}{r} \right)$  حيث:

$h(t, r) = r$  و  $g(t, r) = t$  و  $\frac{\text{Im}(q)}{r}$  هو متجه وحدة يقع في الكرة التخيلية البحتة

(2-Sphere) التي نصف قطرها  $r$  ويحقق:  $\left( \frac{\text{Im}(q)}{r} \right)^2 = -1$  ومنه:

$$\begin{aligned}\partial_c(q) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\text{Im}(q)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( g(t,r) + h(t,r) \frac{\text{Im}(q)}{r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} g(t) + \left( \frac{\text{Im}(q)}{r} \right)^2 \frac{\partial}{\partial r} g(r) \right) = \frac{1}{2} (1 + (-1)(1)) = 0\end{aligned}$$

وهذا يعني أن التابع المطابق هو تابع نظامي وفق كولن ، لكنه ليس بتابع نظامي وفق

فويتز . وهذا يثبت صحة عدم المساواة بين  $R_F(H)$  و  $R_C(H)$  ومنه يتم الإثبات. □

### الانتظام وفقاً للشرائح:

**تمهيدية(1):** من أجل أي  $q \in H \setminus R$ ، توجد قيم حقيقية محددة ووحيدة التعيين  $x, y \in R ; y > 0$

و  $I \in S$ ، عندها يكتب  $q$  بالشكل:  $q = x + yI$  .

**تعريف(6):** ليكن  $\Omega$  نطاقاً في  $H$  . نقول عن التابع الاشتقاقي الحقيقي  $f : \Omega \rightarrow H$

أنه **نظامي وفق كولن** (للاقتضاب نكتفي بالنظامي) إذا كان من أجل كل  $I \in S$  ،

مقصوره  $f_I$  على الخط العقدي  $L_I = R + RI$  المار بنقطة الأصل والحاوي على 1 و

$I$  هولومورفي على  $\Omega \cap L_I$  .

**تعريف(7):** ليكن  $\Omega$  نطاقاً في  $H$  ، وليكن  $f : \Omega \rightarrow H$  تابعاً اشتقاقياً حقيقياً . من

أجل كل  $I \in S$  و أي نقطة  $q = x + yI$  في  $\Omega$  وحيث  $x, y \in R$ ، نُعرف **المشتق  $I$ -**

$$\text{للتابع } f \text{ عند } q \text{ بالعلاقة: } \partial_I f(x + yI) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - I \frac{\partial}{\partial y} \right) f_I(x + yI) .$$

من خلال دراستنا لكثيرات الحدود وسلاسل القوى في  $q$  ، نجد أن الحد  $q^n a : a \in H$

نظامي وفقاً للتعريف السابق للانتظام، من هنا يكون مجموع توابع نظامية هو تابع نظامي

وبالتالي نستنتج أن سلاسل القوى من الشكل  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$  هي توابع نظامية .

سنمنح فضاء التوابع النظامية مع التقارب المنتظم على المجموعات المتراسة نفس الحجج الموجودة في سلاسل القوى العقدية، والمبرهنة التالية تعطينا نظيرة (مبرهنة هايبيل) من أجل السلاسل العقدية إلى السلاسل الكواترنيونية.

**مبرهنة(3)[12]:**(مبرهنة هايبيل)

من أجل كل سلاسل القوى  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n$  يوجد عدد  $R ; 0 \leq R \leq \infty$  ، يدعى بنصف قطر تقاربها ، من أجله تتقارب السلاسل مطلقاً من أجل كل  $q$  يحقق  $|q| < R$  وبانتظام من أجل كل  $q$  يحقق  $|q| \leq \rho < R$  . علاوةً على ذلك، من أجل  $|q| > R$  السلسلة تكون متباعدة. النتيجة الأولى المهمة لتعريفنا الانتظام هي من أجل التوابع النظامية ، يمكننا تقديم مفهوم المشتق من خلال التعريف التالي.

**تعريف(8):** ليكن  $\Omega$  نطاق في  $H$  ، وليكن  $f : \Omega \rightarrow H$  تابع نظامي. إن مشتق كولن

$$\partial_c f(q) = \begin{cases} \partial_I f(q) ; q = x + yI, y \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x) ; q = x \in R \end{cases} \quad \text{لـ } f, \partial_c f, \text{ يعرف كما يلي:}$$

**ملاحظة(1) [12]:** ليكن  $f$  تابعاً نظامياً، بما أنه من أجل كل  $I \in \mathcal{S}$  يكون  $\partial_I(\partial_c(f)) = \partial_c(\partial_I(f)) = 0$  وبالتالي نتوصل إلى أن مشتق كولن لتابع نظامي هو أيضاً تابع نظامي. ونلاحظ أيضاً أن سلسلة القوى تقبل الاشتقاق حداً حداً وذلك بسبب التقارب المنتظم ، ومنه نجد العلاقة التالية:

$$\partial_c f(q) \left( \sum_{n=0}^{\infty} q^n a_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} n a_n$$

وهذه السلسلة الجديدة تمتلك نصف قطر تقارب مساوٍ لنصف قطر التقارب للسلسلة الأصلية.

لدراسة التوابع النظامية، سنحتاج إلى تمثيل بسيط لمقصور التابع النظامي كزوج من التوابع الهولومورفية. للقيام بذلك سنحتاج إلى التمهيدات التالية:

**تمهيدية(2):** ليكن  $I = iI_1 + jI_2 + kI_3$  و  $J = iJ_1 + jJ_2 + kJ_3$  عنصرين من  $S$ ، وليكن:

$$\langle I, J \rangle = I_1J_2 + I_2J_2 + I_3J_3 \in R$$

الجداء الداخلي الإقليدي لإحداثياتها. وليكن:

$$I \times J = i(I_2J_3 - I_3J_2) + j(I_3J_1 - I_1J_3) + k(I_1J_2 - I_2J_1) \in R.S$$

يمثل الجداء المتجهي . عندئذٍ الجداء الكواترنيوني  $IJ$  يُحدّد من خلال الصيغة التالية :

$$IJ = -\langle I, J \rangle + I \times J$$

الإثبات:

نحصل عليه مباشرةً من خلال نشر  $I = iI_1 + jI_2 + kI_3$  مع  $J = iJ_1 + jJ_2 + kJ_3$

نلاحظ من التمهيدية السابقة ، أن حاصل جداء عنصرين متعامدين من  $S$  هو عنصر ثالث يعامدهما ويقع في  $S$ . سنستخدم هذه الحقيقة البسيطة لبناء قواعد متعامدة في  $S$  والتي سنقدمها بالتمهيدية التالية.

**تمهيدية(3)[7]:** ليكن  $I$  و  $J$  عنصرين متعامدين من  $S$ ، وليكن  $K = IJ$ . عندئذٍ:

$$K = IJ = -JI - 1$$

2-  $K$  يُعامد كل من  $I$  و  $J$

$$-3 \quad JK = I = -KJ \quad \text{و} \quad KI = J = -IK$$

بالرغم من بساطة التمهيدية (3) وسهولة إثباتها. إلا أنها هامة كونها تُظهر لنا إمكانية استخدام  $I$  و  $J$  و  $K$  كقاعدة لـ  $S$  ، علاوة على ذلك ، من أجل أي عنصر  $I$  من  $S$  ، يمكننا دائماً بناء مثل هذه القاعدة.

التمهيدية التالية لها أهمية كبيرة في بحثنا وهي التي تفتح لنا أبواب التعميم وإيجاد الكثير من النظائر من التحليل العقدي إلى التحليل الكواترنيوني.

**تمهيدية (4):** (تمهيدية التقسيم)

ليكن  $f$  تابعاً نظامياً على  $B = B(0, R)$  ، عندئذٍ من أجل كل  $I \in S$  وكل  $J \in S$  ويعامد  $I$  ، يوجد عندئذٍ تابعان هولومورفيان  $F, G: B \cap L_I \rightarrow L_I$  يحققان من أجل أي  $z = x + yI$  أن:

$$f_I(z) = F(z) + G(z)J$$

الإثبات: ليكن لدينا زوج من المتجهات المتعامدة  $I, J \in S$  ، وليكن العنصر الثالث هو  $K$  والذي يُشكل مع  $I, J$  القاعدة المتعامدة في  $S$  ، ولنكتب التابع  $f_I(x + yI)$  بالشكل:

$$f = f_0 + If_1 + Jf_2 + Kf_3$$

ومن كون  $f$  نظامي، فيكون  $(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y})f_I(x + yI) = 0$  ، وبالتالي:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} + I\frac{\partial f_1}{\partial x} + J\frac{\partial f_2}{\partial x} + K\frac{\partial f_3}{\partial x} + I\left(\frac{\partial f_0}{\partial y} + I\frac{\partial f_1}{\partial y} + J\frac{\partial f_2}{\partial y} + K\frac{\partial f_3}{\partial y}\right) = 0$$

وبالإستفادة من خصائص الوحدات التخيلية العلاقة السابقة تُكتب بالشكل:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} + I \left( \frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) + J \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) + K \left( \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) = 0$$

وهذا يؤدي إلى أن التابعين  $f_0 + If_1$  و  $f_2 + If_3$  يحققان شرطي كوشي ريمان ، لذلك فهما تابعين هولومورفيين. وبوضع  $F = f_0 + If_1$  و  $G = f_2 + If_3$  . فننتصل إلى أن:

$$f_I(x + yI) = F(x + yI) + G(x + yI)$$

□ وبذلك يتم إثبات صحة التمهيدية بوضع  $z = x + yI$

باعتبار  $F$  و  $G$  تابعان هولومورفيان على المستوي  $R + RI$  ، فمن المعروف أنه يمكن تمثيلهما وفق سلسلة قوى موسعة (غير منتهية) بدلالة المتغير العقدي  $z$  ، ولكن ماذا عن التابع  $f$  الكواترنيوني، هل من الممكن تمثيله وفق سلسلة قوى بالمتغير الكواترنيوني  $q$  ؟

المبرهنتين التاليتين تجيبان على السؤال.

**مبرهنة(4):** ليكن  $f : B \rightarrow H$  تابعاً نظامياً . عندئذٍ من أجل أي  $n \in \mathbb{N}$  يكون مشتق كولن له  $\partial_c^n f : B \rightarrow H$  نظامي ، ويحقق :

$$\partial_c^n f(x + yI) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x + yI)$$

الإثبات: من تعريف التابع النظامي ، يتضح مباشرة أن  $\partial_c^n f$  يكون نظامي ، ولنتثبت من

المبرهنة صحة العلاقة  $\partial_c^n f(x + yI) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x + yI)$  وذلك عن طريق الاستقراء الرياضي

لثبت صحة العلاقة من أجل  $n = 1$  ، لدينا :

$$\begin{aligned}\partial_c f(x+yI) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - I \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x+yI) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - I \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x+yI) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x+yI) - (I) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x+yI) \right) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x+yI) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x+yI) \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} (x+yI)\end{aligned}$$

ولنفرض صحة العلاقة من أجل  $n$  ولنثبت صحتها من أجل  $n+1$  ، لدينا :

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right) = \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} + I \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + I \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$$

وهذا يعني  $\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} = -I \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y}$  وبالتالي:

$$\begin{aligned}\partial_c^{n+1} f &= \partial_c (\partial_c^n f) = \partial_c \left( \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - I \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} - I \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y} \right) = \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}\end{aligned}$$

□ ومنه العلاقة صحيحة من أجل  $n+1$  فهي صحيحة من أجل كل  $n \in N$

**مبرهنة (5):** التابع  $f : B(0, R) \rightarrow H$  نظامي إذا وفقط إذا كان له تمثيل على هيئة

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} (0) \quad \text{سلسلة موسعة بالشكل:}$$

وكانت تلك السلسلة متقاربة في  $B$  . وعلى وجه التحديد من أجل  $f$  النظامي يكون عندئذٍ

قابلاً للاشتقاق عدداً غير منتهٍ من المرات في  $B$  .

الإثبات: من أجل المستوي العقدي  $L_I$  و القرص الدائري  $\Delta_I$  الذي مركزه المبدأ ونصف قطره  $r$  حيث  $0 < r < R$ ، وبالاعتماد على تمهيدية التقسيم، نجد التمثيل التكاملي لـ  $f_I$  ضمن  $\Delta_I$ . ومن كون كل من  $F$  و  $G$  تابع هولومورفية ضمن النطاق  $B \cap L_I$  من المستوي العقدي  $L_I$  مع قيم في نفس المستوي العقدي  $L_I$ ، فنحصل من أجل أي  $(\lambda \neq z) \in B \cap L_I$  على أن:

$$(\lambda - z)^{-1} G(z) = G(z)(\lambda - z)^{-1} \quad \text{و} \quad (\lambda - z)^{-1} F(z) = F(z)(\lambda - z)^{-1}$$

لذلك من أجل أي  $z$  من  $\Delta_I$  لدينا :

$$f_I(z) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial\Delta_I} \frac{F(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda + \left( \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial\Delta_I} \frac{G(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda \right) J$$

يمكن الآن تحويل كل من هذين التكاملين إلى سلسلة قوى كما هو معروف في التحليل العقدي التقليدي. فمن أجل التكامل الأول من العلاقة السابقة (بشكل مشابه للتكامل الثاني) ومن أجل  $z \in \Delta_I$ ، لدينا:

$$\int_{\partial\Delta_I} \frac{F(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda = \int_{\partial\Delta_I} \frac{1}{1 - \frac{z}{\lambda}} \frac{F(\lambda)}{\lambda} d\lambda = \int_{\partial\Delta_I} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^n \frac{F(\lambda)}{\lambda} d\lambda = \sum_{n \geq 0} z^n \left( \int_{\partial\Delta_I} \frac{F(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda \right)$$

$$f_I(z) = \sum_{n \geq 0} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(0) + \sum_{n \geq 0} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n G}{\partial z^n}(0) J \quad \text{وبالتالي نستنتج أن:}$$

$$= \sum_{n \geq 0} z^n \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial^n (F + GJ)}{\partial z^n}(0) \right) = \sum_{n \geq 0} z^n \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(0) \right)$$

و بالاستفادة من المبرهنة السابقة، تصبح المعادلة السابقة بالشكل:

$$f_I(z) = \sum_{n \geq 0} z^n \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial^n f}{\partial z^n} (0) \right) = \sum_{n \geq 0} z^n \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - I \frac{\partial}{\partial y} \right) \right)^n f(0) = \sum_{n \geq 0} z^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} (0)$$

وهذا يبين على أن  $f_I(z)$  له تمثيل وفق سلسلة قوى بدلالة  $z^n$  مع الأمثال  $a_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} (0)$

والتي لا تتعلق باختيار  $I$ ، وبالتالي يكون التمثيل صحيحاً من أجل أي  $I \in S$ .

**نتيجة (1):** ليكن  $f: B(0, R) \rightarrow H$  تابع نظامي، إذا وجد  $I \in S$  يحقق  $f(L_I) \subseteq L_I$ ،

عندئذٍ سلسلة القوى لـ  $f$ :  $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} (0)$ ، جميع معاملاتهما تقع في  $L_I$ .

الإثبات: من أجل  $I \in S$  وفرضاً  $f(L_I) \subseteq L_I$ ، عندئذٍ من أجل أي عدد حقيقي  $x$  لدينا:

□ لذلك  $f(x) = f_I(x) \in L_I$ ،  $\frac{\partial^n f}{\partial x^n} (x) \in L_I$  من أجل أي  $n \in \mathbb{N}$  و  $x \in R$ .

### مبرهنة (6): (مبدأ المطابقة)

ليكن  $f, g$  تابعين نظاميين على نطاق شريحة  $\Omega$ . إذا كان من أجل بعض  $I \in S$ ، كل من  $f$  و  $g$  متطابقين على مجموعة جزئية من  $\Omega_I$ ، ويمتلكان نقطة تراكم في  $\Omega_I$ ، عندئذٍ  $f = g$  في  $\Omega$ .

الإثبات: المقصودات  $f_I, g_I$  هي توابع هولومورفية. وحسب الفرض فإن كل من  $f_I$  و  $g_I$  يجب أن يتطابقا في  $\Omega_I$ . على وجه التحديد، يجب أن يتطابق  $f$  مع  $g$  في  $\Omega \cap R$ . من أجل جميع  $K \in S$ ، التقاطع  $\Omega \cap R$  هو مجموعة جزئية من  $\Omega_K$  والذي يمتلك نقطة تراكم في  $\Omega_K$ . لهذا  $f_K = g_K$  في  $\Omega_K$  من أجل جميع  $K \in S$ ، ومن نستنتج أن  $f = g$  في  $\bigcup_{K \in S} \Omega_K$ .

نقدم الآن إحدى خواص التوابع النظامية والتي تسمح بتحديد النظائر الكواترنيونية على

نطاقات الهولومورفية. فخاصية القوى الكواترنيونية هي نتيجة مباشرة لنظرية ذات الحدين للحالة العقدية.

**ملاحظة(2):** لكل  $x, y \in R$ ، توجد متتاليات  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset R$  تُحقق من أجل جميع  $I \in S$  أن:

$$(x + yI)^n = \alpha_n + \beta_n I$$

نتيجة لذلك، من أجل التابع النظامي  $f(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n a_n$  يصبح لدينا:

$$f(x + yI) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n a_n + I \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n a_n$$

ولتلك الصيغة معنى هندسي. فمقصود التابع  $f$  على الكرة  $\{x + yI ; I \in S\}$  هو تابع تآلفي بالنسبة للوحدة التخيلية  $I$ ، من هنا يوجد  $b, c \in H$  بحيث:

$$f(x + yI) = b + Ic ; \forall I \in S$$

لكن هذا لا ينطبق فقط على سلاسل القوى، بل على جميع التوابع النظامية على نطاقات الشرائح التي لها الخاصية التالية والتي سنقدمها في التعريف التالي.

**تعريف(9):** نقول عن المجموعة  $T \subseteq H$  أنها متماثلة محورياً إذا كان من أجل جميع النقاط  $x + yI \in T$  حيث  $x, y \in R$  و  $I \in S$ ، المجموعة  $T$  تحوي كامل الكرة  $x + yS$ .

في حال عدم الالتباس نكتفي بأن ندعوها بالمُتماثلة. والحالة الأكثر عمومية للتمثيل التآلفي نقدمها من خلال المبرهنة التالية:

**مبرهنة(7)(التمثيل التآلفي):**

ليكن  $f$  تابعاً نظامياً على نطاق الشريحة المتماثلة  $\Omega$  وليكن  $x + yS \subset \Omega$ . من أجل جميع  $I, J, K \in S$  بحيث  $J \neq K$  لدينا:

$$f(x+yI) = (J-K)^{-1}[Jf(x+yJ) - Kf(x+yK)] + I(J-K)^{-1}[f(x+yJ) - f(x+yK)]$$

$$b = (J-K)^{-1}[Jf(x+yJ) - Kf(x+yK)] \quad \text{حيث الكواترنيون}$$

$$c = (J-K)^{-1}[f(x+yJ) - f(x+yK)] \quad \text{و}$$

لا يتعلقان بـ  $J$  و  $K$  بل فقط بـ  $x$  و  $y$ .

الإثبات: ليكن لدينا  $J, K \in S$  بحيث  $J \neq K$ ، والمجموعة :

$$\varphi(x+yI) = (J-K)^{-1}[Jf(x+yJ) - Kf(x+yK)] + I(J-K)^{-1}[f(x+yJ) - f(x+yK)]$$
  

$$= [(J-K)^{-1}J + I(J-K)^{-1}]f(x+yJ) - [(J-K)^{-1}K + I(J-K)^{-1}]f(x+yK)$$
  
 من أجل جميع  $I \in S$  و  $x, y \in R$  بحيث  $x+yS \subset \Omega$ . وبإعادة حساب الصياغة السابقة بوضع  $y=0$  يتبين لنا من أجل جميع  $x \in \Omega \cap R$  أن  $\varphi(x) = f(x)$ . إذا أثبتنا أن  $\varphi$  نظامي في  $\Omega$ ، نستنتج عندئذٍ من مبدأ المطابقة أن  $\varphi \equiv f$ . ولنثبت الآن أن  $\varphi$  تابع نظامي.

$$\frac{\partial \varphi(x+yI)}{\partial x} = [(J-K)^{-1}J + I(J-K)^{-1}] \frac{\partial f(x+yJ)}{\partial x} - [(J-K)^{-1}K + I(J-K)^{-1}] \frac{\partial f(x+yK)}{\partial x}$$

و

$$I \frac{\partial \varphi(x+yI)}{\partial y} = [I(J-K)^{-1}J - (J-K)^{-1}] \frac{\partial f(x+yJ)}{\partial y} - [I(J-K)^{-1}K - (J-K)^{-1}] \frac{\partial f(x+yK)}{\partial y}$$

$$= -[I(J-K)^{-1} + (J-K)^{-1}J] \frac{\partial f(x+yJ)}{\partial x} + [I(J-K)^{-1} + (J-K)^{-1}K] \frac{\partial f(x+yK)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \varphi(x+yI)}{\partial x} + I \frac{\partial \varphi(x+yI)}{\partial y} = 0 \quad \text{ومنه:}$$

وبالتالي التابع  $\varphi$  نظامي. وبسبب عشوائية اختيار كل من  $J, K \in S$  فالتمثيل التآلفي

□

مستقل عن  $J$  و  $K$  ولا يتعلق بهما. وبذلك يتم الإثبات.

ونتيجة للمبرهنة السابقة نتوصل إلى علاقات ذات أهمية في المواضيع القادمة نقدمها في  
النتيجتين التاليتين:

**نتيجة (2) [12]:** ليكن  $f$  تابع نظامي على نطاق الشريحة المتماثلة  $\Omega$  و ليكن  
 $x + yS \subset \Omega$  . من أجل جميع  $I, J \in S$  لدينا:

$$\begin{aligned} f(x + yJ) &= \frac{1 - JI}{2} f(x + yI) + \frac{1 + JI}{2} f(x - yI) \\ &= \frac{1}{2} [f(x + yI) + f(x - yI)] + \frac{JI}{2} [f(x - yI) - f(x + yI)] \end{aligned}$$

النتيجة التالية تعطينا صيغة بديلة ، تثبت لنا إن مقصور  $f$  على الكرة  $x + yS \subset \Omega$  هو  
بالفعل تابع تآلفي بالمتغير  $q$ .

**نتيجة (3):** ليكن  $f$  تابعاً نظامياً على نطاق الشريحة المتماثلة  $\Omega$  ولتكن  $W = x + yS \subset \Omega$   
من أجل أي  $q, q_1, q_2 \in S$  بحيث  $q_1 \neq q_2$  ، لدينا:

$$\begin{aligned} f(q) &= (q_1 - q_2)^{-1} [\bar{q}_2 f(q_2) - \bar{q}_1 f(q_1)] + q(q_1 - q_2)^{-1} [f(q_1) - f(q_2)] \\ \text{حيث: } & B = (q_1 - q_2)^{-1} [\bar{q}_2 f(q_2) - \bar{q}_1 f(q_1)] \quad \text{و} \quad A = (q_1 - q_2)^{-1} [f(q_1) - f(q_2)] \\ & \text{لا يتعلقان بـ } q_1, q_2 \text{ بل فقط على } W. \end{aligned}$$

الإثبات: إذا كان  $q = x + yI$  و  $q_1 = x + yJ$  و  $q_2 = x + yK$  ، عندئذٍ  
بالاعتماد على مبرهنة التمثيل التآلفي نجد:

$$f(x + yI) = (J - K)^{-1} [Jf(x + yJ) - Kf(x + yK)] + I(J - K)^{-1} [f(x + yJ) - f(x + yK)]$$

$$\begin{aligned}
 &= (q_1 - q_2)^{-1} [yJf(q_1) - yKf(q_2)] + yI(q_1 - q_2)^{-1} [f(q_1) - f(q_2)] \\
 &= (q_1 - q_2)^{-1} [yJf(q_1) - yKf(q_2)] + (x + yI)(q_1 - q_2)^{-1} [f(q_1) - f(q_2)] \\
 &\quad - x(q_1 - q_2)^{-1} [f(q_1) - f(q_2)] \\
 &= (q_1 - q_2)^{-1} [(-x + yJ)f(q_1) + (x - yK)f(q_2)] + q(q_1 - q_2)^{-1} [f(q_1) - f(q_2)] \\
 &= (q_1 - q_2)^{-1} [\bar{q}_2 f(q_2) - \bar{q}_1 f(q_1)] + q(q_1 - q_2)^{-1} [f(q_1) - f(q_2)]
 \end{aligned}$$

### العمليات الجبرية على التوابع النظامية:

من أجل  $f, g$  تابعان نظاميان على  $\Omega$  نجد بالاعتماد على تعريف التابع النظامي أن  $f + g$  هو أيضاً تابع نظامي على  $\Omega$ . لكن جداولهما  $f, g$  ليس بالضرورة أن يكون نظامي [12]، ومثال على ذلك:

من أجل  $f(q) = qa, a \in H \setminus R$  و  $g(q) = q$  يكون  $f(q).g(q) = qa^2$  تابعاً غير نظامي. لذلك سنستخدم عملية الجداء في كثيرات الحدود المتبعة في الجبر غير التبديلي [17]، والتعريف التالي يوضح لنا هذا الجداء.

**تعريف (10):** ليكن  $f, g : B(0, R) \rightarrow H$  تابعان نظاميان معرفان كما يلي:

$$f(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n a_n \quad \text{و} \quad g(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n b_n$$

عندئذٍ نعرّف الجداء النظامي بين  $f$  و  $g$  بأنه تابع نظامي يكتب بالشكل :

$$f * g(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

وذلك على نفس الكرة  $B(0, R)$ .

**ملاحظة (3)[12]:** من أجل  $a_n \in R, \forall n \in N$  تتحقق المساواة  $f * g(q) = f(q).g(q)$ ، وتُصبح بذلك مجموعة التوابع النظامية على الكرة  $B(0, R)$  تُشكّل حلقة مع العمليتان  $(+), (*)$ ، وعملية الضرب هذه يمكن أن تمتد لتشمل جميع التوابع النظامية على نطاقات الشرائح المتماثلة. والمبرهنة التالية توضح لنا إمكانية تمديد مجموعة التعريف إلى أي نطاق شريحة متماثلة.

**مبرهنة (8)[12]:** ليكن  $\Omega$  نطاق شريحة متماثلة، عندئذٍ يتحقق تعريف الجداء النظامي فيها. كما تُشكل مجموعة التوابع النظامية على  $\Omega$  حلقة غير تبديلية مع العمليتان  $(+), (*)$ . التعريف التالي يُقدم تعريفاً آخر للجداء النظامي بالاعتماد على التوابع الهولومورفية.

**تعريف (11):** ليكن  $f, g$  تابعين نظاميين على نطاق شريحة متماثلة  $\Omega$ ، ولنختر  $I, J \in S$  بحيث  $I \perp J$ ، ولتكن  $F, G, H, K$  توابع هولومورفية من  $\Omega_I$  إلى  $L_I$ ، حيث  $f_I = F + GJ$  و  $g_I = H + KJ$  نعتبر التابع الهولومورفي المعرف على  $\Omega_I$  بالشكل:

$$f_I * g_I(z) = \left[ F(z)H(z) - G(z)\overline{K(z)} \right] + \left[ F(z)K(z) + G(z)\overline{H(z)} \right] J$$

إنه نظامي موسّع  $ext(f_I * g_I)$  ندعوه بالجداء النظامي أو بـ **الجداء-\***  $f$  و  $g$  ونرمز لذلك بـ  $f * g$ .

**تعريف (12):** التابع النظامي  $f: \Omega \rightarrow H$  الذي يحقق  $f(\Omega_I) \subseteq L_I \quad \forall I \in S$  يدعى بالتابع النظامي **المحافظ للشريحة**.

بالاعتماد على التعريف السابق نقدم المبرهنتين التاليتين.

**مبرهنة (9):** ليكن  $f, g$  تابعين نظاميين على نطاق الشريحة المتماثلة  $\Omega$ ، إذا كان  $f$  محافظاً للشريحة، عندئذٍ  $f.g$  هو تابع نظامي على  $\Omega$  و  $f * g = f.g$ .

**الإثبات:** من أجل أي  $I, J \in S$  بحيث  $I \perp J$  ولتكن  $F, G, H, K$  تابع هولومورفية من  $\Omega_I$  إلى  $L_I$ ، حيث  $f_I = F + GJ$  و  $g_I = H + KJ$ ، إذا كان  $f(\Omega_I) \subseteq L_I$  عندئذٍ يجب أن ينعدم  $G$ ، لذلك نكتب:

$$f_I(z)g_I(z) = F(z)H(z) + F(z)k(z)J$$

ومن كون  $FH$  و  $FK$  تابعان هولومورفيان من  $\Omega_I$  إلى  $L_I$  و  $f_I g_I = (fg)_I$  هولومورفي. ولكون  $I$  متغير عشوائي من  $S$ ، نجد بالاعتماد على تمهيدية التقسيم أن  $f.g : \Omega \rightarrow H$  نظامي. ومن خلال المعادلة السابقة وبتحديد  $I \in S$  لدينا:

$$(fg)_I = FH + FKJ = f_I * g_I$$

من هنا  $fg$  و  $f * g = ext(f_I.g_I)$  تابعان نظاميان على  $\Omega$  ويتطابقان في  $\Omega_I$ .  
□ واعتماداً على مبدأ المطابقة يجب إن يتطابقا أيضاً في  $\Omega$

لدينا بشكلٍ عام تركيب تابعين نظاميين ليس بالضرورة نظامي، والمبرهنة التالية تعطينا شرط أن يكون تركيب تابعين نظاميين هو تابع نظامي.

**مبرهنة (10) [12]:** ليكن  $f : \Omega \rightarrow \Omega' \subseteq H$  و  $g : \Omega' \rightarrow H$  تابعان نظاميان. إذا كان  $f$  تابع محافظ للشريحة، عندئذٍ تركيبهما، أي  $f \circ g$  هو تابع نظامي.

التعريف التالي يُقدم لنا عمليتين إضافيتين على التوابع النظامية.

**تعريف(13):** ليكن  $f : B(0, R) \rightarrow H$  تابعاً نظامياً ، ولتكن  $f(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n a_n$  سلسلة

قوة موسّعة. المرافق النظامي لـ  $f$  هو تابع نظامي معرف بالشكل :  $f^c(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n \overline{a_n}$

وعلى نفس الكرة  $B(0, R)$  نُعرف تابع التناظر لـ  $f$  بالشكل :  $f^s = f * f^c = f^c * f$  بالشكل :  $f^s = f * f^c = f^c * f$  كذلك يُعرف تابع التناظر  $f^s$  بشكل مشابه تماماً بنفس العلاقة إذا كان مُعرف على نطاق شريحة متماثلة  $\Omega$ .

مما سبق نتوصل إلى مجموعة من الخواص والتي تتعلق بالتعريفات السابقة، نوجزها بالمبرهنة التالية:

**مبرهنة(11)[12]:** ليكن  $f, g$  تابعين نظاميين على نطاق الشريحة المتماثلة  $\Omega$ ، عندئذٍ يتحقق ما يلي:

$$(f * g)^c = g^c * f^c \quad -1$$

$$(f * g)^s = f^s . g^s = g^s . f^s \quad -2$$

$$(f * g)' = f' * g + f * g' \quad -3$$

-4 إذا كان  $f$  محافظ للشريحة عندئذٍ:

$$f^s(q) = f(q)^2 \quad \forall q \in \Omega \quad \text{و} \quad f^c(q) = f(q)$$

وهنا لا بد أن نقدم أحد التعريفات الهامة للتوابع النظامية وهو النظامي المعاكس

**تعريف(14):** ليكن  $\Omega$  نطاق شريحة متماثلة و  $f : \Omega \rightarrow H$  تابع نظامي لا يطابق الصفر، عندئذٍ نُعرف التابع المقلوب النظامي له  $f^{-*} : \Omega \setminus Z_{f^s} \rightarrow H$  بالشكل :

$$f^{-*} = \frac{1}{f^s} f^c$$

يتمتع النظامي المعاكس بعدة خواص، نقدم أهمها في المبرهنة التالية:

**مبرهنة(11)[12]:** لتكن  $\Omega$  نطاق شريحة متماثلة و ليكن لدينا التابعين النظاميين  $f, g: \Omega \rightarrow H$ ، والمحافظةين للشريحة. إذا لم يكن لـ  $f$  أصفار في  $\Omega$ ، يتحقق عندئذٍ ما يلي:

$$1- f^{-*} \text{ تابع نظامي على نطاقه}$$

$$2- f^{-*} * f = f * f^{-*} = 1$$

$$3- \text{ من أجل جميع } q \in B \setminus Z_f \text{ يتحقق } (f * g)(q) = f(q)g(f(q)^{-1}qf(q))$$

$$\text{و : } f^{-*}(q) = f(f^c(q)^{-1}qf^c(q))^{-1}$$

**بعض نظائر نظرية كوشي للتوابع النظامية وفقاً لنظام الشرائح:**

تُعمَّم على التوابع الكواترنيونية النظامية مبرهنة كوشي من خلال التوابع الهولومورفية .  
مُعتمدين في ذلك على تمهيدية التقسيم بشكلٍ كبير في إيجاد نظائر مبرهنة كوشي من التحليل العقدي إلى التحليل الكواترنيوني. وللبدئ في ذلك ننطلق من الملاحظة التالية:

**ملاحظة(4)[12]:** ليكن  $\gamma_I: [0,1] \rightarrow L_I$  منحنى قابل للقياس دُعامة تقع في المستوى  $L_I$  من أجل بعض  $I \in S$ ، وليكن  $\Gamma_I$  جواراً لـ  $\gamma_I$  في  $L_I$ ، ولتكن  $f, g: \Gamma_I \rightarrow H$  توابع مستمرة . إذا كان  $J \perp I$  ;  $J \in S$ ، عندئذٍ  $L_I + L_I J = H = L_I + J L_I$  و توجد توابع مستمرة  $F, G, V, W: \Gamma_I \rightarrow L_I$  تُحقق:  $f = F + GJ$  و  $g = V + JW$  في  $\Gamma_I$ . ونكتب:

$$\int_{\gamma_I} g(s) ds f(s) = \int_{\gamma_I} H(s) ds F(s) + \int_{\gamma_I} V(s) ds G(s) J + J \int_{\gamma_I} W(s) ds F(s) + J \int_{\gamma_I} W(s) ds G(s) J$$

**مبرهنة(12):** ليكن  $f$  تابعاً نظامياً على النطاق  $\Omega$ . وليكن من أجل  $I \in S$  النطاق

$$\int_{\gamma_I} ds f(s) = 0 \text{ عندئذٍ : } \Omega_I \text{ بسيط الاتصال و } \gamma_I \text{ منحنى مغلق قابل للتقويم في } \Omega_I$$

الإثبات: لنختار  $J \in S$  بحيث  $J \perp I$ . وبالاعتماد على تمهيدية التقسيم ، فإنه توجد توابع هولومورفية  $f_I = F + GJ$  ،  $F, G, : \Omega_I \rightarrow L_I$  ، لأجلها يكون وبالتالي:

$$\int_{\gamma_I} dsf(s) = \int_{\gamma_I} dsF(s) + \int_{\gamma_I} dsG(s)J$$

وبالاعتماد على مبرهنة كوشي في التحليل العقدي لدينا:  $\int_{\gamma_I} dsF(s) = 0$  و  $\int_{\gamma_I} dsG(s) = 0$

وبالتالي يتحقق أن  $\int_{\gamma_I} dsf(s) = 0$  □

المبرهنة التالية تُقدم لنا رؤيتها في مبرهنة موريرا.

**مبرهنة (13):** ليكن  $\Omega$  نطاقاً في  $H$  وليكن  $f: \Omega \rightarrow H$ . إذا كان من أجل  $I \in S$

$$\int_{\gamma_I} dsf(s) = 0 \quad \text{مقصود } f \text{ على } \Omega_I \text{ مُستمرّاً ويُحقق :}$$

من أجل جميع المنحنيات المغلقة القابلة للتقويم  $\gamma_I: [0,1] \rightarrow L_I$  ، فيكون عندئذٍ  $f$  تابعاً نظامياً في  $\Omega$ .

الإثبات: ليكن  $I, J \in S$  بحيث  $J \perp I$  ، وليكن  $F, G$  تابعين على  $\Omega_I$  يحققان  $f_I = F + GJ$  في  $\Omega_I$ . ومن استمرارية  $f_I$  نجد أيضاً أن كل من  $F$  و  $G$  توابع مستمرة. علاوةً على ذلك، من أجل جميع المنحنيات المغلقة القابلة للقياس  $\gamma_I: [0,1] \rightarrow L_I$  تتحقق علاقة التكافؤ:

$$\int_{\gamma_I} dsf(s) = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_I} dsF(s) + \int_{\gamma_I} dsG(s)J = 0$$

$$\int_{\gamma_I} dsG(s) = 0 \quad \text{و} \quad \int_{\gamma_I} dsF(s) = 0 \quad \text{لذلك يكون:}$$

وبالاعتماد على مبرهنة موريرا في التحليل العقدي ، تكون كل من  $F$  و  $G$  توابع هولومورفية. من هنا يكون  $f_I$  تابعاً هولومورفياً في  $\Omega_I$ . وبما أن  $I$  كان عشوائياً ، نستنتج أن  $f_I$  تابع نظامي في  $\Omega$ . □

قبل البدء بصيغة كوشي التكاملية نقدم التمهيديّة التالية:

**تمهيديّة(5):** ليكن  $f$  تابعاً نظامياً على نطاق الشريحة المتماثلة  $\Omega$ ، لتكن  $I \in S$  ، وليكن  $U_I$  نطاق جوردن محدود في  $L_I$ ، بحيث  $\bar{U}_I \subset \Omega_I$ . إذا كان  $\partial U_I$  قابلاً

للتقويم، عندئذٍ:  $f(z) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{s-z} f(s)$  ، وذلك من أجل جميع  $z \in U_I$ .

الإثبات: لنختار  $J \in S$  بحيث  $J \perp I$  . وحسب تمهيديّة التقسيم ، فإنه توجد توابع هولومورفية  $F, G: \Omega_I \rightarrow L_I$  تُحقق  $f_I = F + GJ$  .

وبالاعتماد على صيغة كوشي التكاملية العقدية لدينا:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{s-z} F(s) \quad \text{و} \quad G(z) = \frac{1}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{s-z} G(s)$$

وذلك من أجل جميع  $z \in U_I$  ، وهذا يؤدي إلى صحة التمهيديّة انطلاقاً من كون

$$f(z) = F(z) + G(z)J$$

□

والآن نُقدم صيغة كوشي التكاملية من خلال المبرهنة التالية.

**مبرهنة(14):** ليكن  $f$  تابعاً نظامياً على نطاق الشريحة المتماثلة  $\Omega$ . إذا كانت  $U$  مجموعة مفتوحة متماثلة ومحدودة وتحقق  $\bar{U} \subset \Omega$ ، وإذا كانت  $I \in S$  و  $\partial U_I$  هو اجتماع منتهٍ لمنحنيات جوردان القابلة للتقويم، عندئذٍ، من أجل  $q \in U$  لدينا :

$$f(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U_1} (s - q)^{-*} ds_1 f(s)$$

حيث  $ds_1 = -Ids$  و  $(s - q)^{-*}$  يُرمز للمقلوب النظامي لـ  $f(q) = s - q$  ويعطى

$$(s - q)^{-*} = (|s|^2 - q2\text{Re}(s) + q^2)^{-1}(\bar{s} - q) \quad \text{بالعلاقة :}$$

الاثبات: بالاعتماد على ( )، إذا كان  $q = x + yJ$  و  $z = x + yI$ ، عندئذٍ :

$$f(q) = \frac{1}{2} [f(z) + f(\bar{z})] + \frac{JI}{2} [f(\bar{z}) - f(z)]$$

ومن كون  $U$  مجموعة متماثلة تحوي  $q$ ، فإن شريحتها  $U_1$  تحوي على كل من  $z$  و  $\bar{z}$ .  
وبتطبيق مبرهنة كوشي على كل مُركب متصل من  $U_1$  لا يحوي  $z$  وبالاعتماد على

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U_1} \frac{1}{s - z} ds_1 f(s) \quad \text{التمهيدية(5)، نجد أن :}$$

$$f(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U_1} \frac{1}{s - \bar{z}} ds_1 f(s) \quad \text{وبشكل مشابه أيضاً لدينا:}$$

ومن ثمَّ نجد:

$$\begin{aligned} f(q) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U_1} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s - z} + \frac{1}{s - \bar{z}} \right] + \frac{JI}{2} \left[ \frac{1}{s - \bar{z}} - \frac{1}{s - z} \right] \right\} ds_1 f(s) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U_1} (s - q)^{-*} ds_1 f(s) \end{aligned}$$

أخذين بعين الاعتبار أن:

$$(s - q)^{-*} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s - z} + \frac{1}{s - \bar{z}} \right] + \frac{JI}{2} \left[ \frac{1}{s - \bar{z}} - \frac{1}{s - z} \right]$$

□ وذلك بالاستفادة من النتيجة (2).

كما في التحليل العقدي ، فإن صيغ كوشي تسمح بحساب شريحة المشتقات للتتابع النظامية في التحليل الكوانترينيوني. وهذا نجد في التمهيدية والمبرهنة التاليتين:

**تمهيدية(6):** ليكن  $f$  تابعاً نظامياً على نطاق الشريحة المتماثلة  $\Omega$ ، لتكن  $I \in S$  ، وليكن  $U_I$  نطاق جوردن محدود في  $L_I$  ، بحيث  $\overline{U_I} \subset \Omega_I$  . إذا كان  $\partial U_I$  قابلاً للتقويم،

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} f(s) \quad \text{عندئذ:}$$

وذلك من أجل جميع  $z \in U_I$  و كل  $n \in N$ .

الإثبات : لنختار  $J \in S$  بحيث  $J \perp I$  ، وليكن  $F, G$  تابعان هولومورفيان يحققان  $f_I = F + GJ$  . ومن حقيقة أن:

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(z) + \frac{\partial^n G}{\partial z^n}(z)J$$

$$\frac{\partial^n F}{\partial z^n}(z) = \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} F(s) \quad \text{حيث:}$$

$$\frac{\partial^n G}{\partial z^n}(z) = \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} G(s) \quad \text{و}$$

نجد أن:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} F(s) + \left( \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} G(s) \right) J \\ &= \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} (F(s) + G(s))J \end{aligned}$$

$$\square = \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} f(s)$$

**مبرهنة (15):** ليكن  $f$  تابعاً نظامياً على نطاق شريحة متماثلة  $\Omega$ . إذا كانت  $U$  مجموعة مفتوحة متماثلة ومحدودة تُحقق  $\bar{U} \subset \Omega$ ، وإذا كان  $I \in S$ ، و  $\partial U_I$  اجتماع منتهٍ لمنحنيات جوردن المنفصلة القابلة للتقويم، عندئذٍ، من أجل  $q \in U$  لدينا :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} (s-q)^{*(-n-1)} ds_I f(s)$$

حيث  $ds_I = -Ids$  و  $(s-q)^{*(-n-1)}$  يدل على المقلوب النظامي لـ  $(s-q)^{*(n+1)}$ ، والذي هو:  $(s-q)^{*(-n-1)} = (|s|^2 - q2\text{Re}(s) + q^2)^{-n-1} (\bar{s}-q)^{*(n+1)}$

الإثبات: ليكن  $q = x + yI$  و  $z = x + yI$ ، عندئذٍ بالاعتماد على النتيجة (2)، لدينا:

$$f^{(n)}(q) = \frac{1-JI}{2} f^{(n)}(z) + \frac{1+JI}{2} f^{(n)}(\bar{z})$$

$$(s-q)^{*(-n-1)} = \frac{1-JI}{2} \frac{1}{(s-z)^{n+1}} + \frac{1+JI}{2} \frac{1}{(s-\bar{z})^{n+1}} \quad \text{و}$$

وبالتالي نجد:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(q) &= \frac{1-JI}{2} \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-z)^{n+1}} f(s) + \frac{1+JI}{2} \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial U_I} \frac{ds}{(s-\bar{z})^{n+1}} f(s) \\ &= \frac{1-JI}{2} \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial U_I} \frac{-Ids}{(s-z)^{n+1}} f(s) + \frac{1+JI}{2} \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial U_I} \frac{-Ids}{(s-\bar{z})^{n+1}} f(s) \\ &= \frac{n!}{2\pi} \left[ \int_{\partial U_I} \frac{1-JI}{2} \frac{ds_I}{(s-z)^{n+1}} f(s) + \frac{1+JI}{2} \int_{\partial U_I} \frac{1+JI}{2} \frac{ds_i}{(s-\bar{z})^{n+1}} f(s) \right] \\ &= \frac{n!}{2\pi} \left[ \int_{\partial U_I} \left( \frac{1-JI}{2} \frac{1}{(s-z)^{n+1}} + \frac{1+JI}{2} \frac{1}{(s-\bar{z})^{n+1}} \right) ds_I f(s) \right] \end{aligned}$$

$$\square = \frac{n!}{2\pi} \left[ \int_{\partial U_I} (s-q)^{*(-n-1)} ds_I f(s) \right]$$

تسمح لنا النتائج السابقة في تقدير شريحة المشتقات للتابع النظامي ، وذلك من خلال المبرهنتين التاليتين :

**مبرهنة (16) (تقديرات كوشي):**

ليكن  $f: \Omega \rightarrow H$  تابعاً نظامياً و ليكن  $p \in \Omega$  . إذا كان  $p \in L_I$  ، عندئذٍ من أجل جميع الأقرص  $\Delta_I = \Delta_I(p, R)$  ، التي نصف قطرها  $R > 0$  و  $\overline{\Delta_I} \subset \Omega_I$  تتحقق

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{\partial \Delta_I} |f| \quad \text{العلاقة التالية:}$$

الإثبات: لدينا:

$$|f^{(n)}(p)| = \left| \frac{n!}{2\pi I} \int_{\partial \Delta_I} \frac{f(s)}{(s-p)^{n+1}} ds \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial \Delta_I} \frac{|f(s)|}{|s-p|^{n+1}} ds$$

ولكن في  $\partial \Delta_I(p, R)$   $\frac{1}{|s-p|^{n+1}} \leq \frac{1}{R^{n+1}}$  و  $|f(s)| \leq \max |f|$  وبالتالي:

$$\frac{n!}{2\pi} \int_{\partial \Delta_I} \frac{|f(s)|}{|s-p|^{n+1}} ds \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial \Delta_I} \frac{\max |f|}{R^{n+1}} ds = \frac{n!}{2\pi} \frac{\max |f|}{R^{n+1}} (2\pi R) = \frac{n!}{R^n} \max |f|$$

$$\square \cdot |f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{\partial \Delta_I} |f| \quad \text{ومنه}$$

كحالة خاصة من تقديرات كوشي نتوصل إلى صحة المبرهنة التالية.

### مبرهنة (17) (ليوفيل):

ليكن  $f: H \rightarrow H$  تابعاً نظامياً على كامل  $H$  ومحدود، أي  $(\exists M > 0; |f(q)| \leq M \forall q \in H)$  عندئذٍ يكون  $f$  تابعاً ثابتاً.

الإثبات: منطلقين من المتراجحة  $|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{R^n} \max_{\partial \Delta_r} |f|$  بجعل  $R \rightarrow \infty$  و بوضع

$p=0$  نتوصل إلى انعدام شريحة المشتقات  $f^{(n)}(0)$  من أجل جميع  $n \in N$ ، ومنه نجد

$$\square \quad \text{لكل } q \in H \text{ أن : } f(q) = \sum_{n \in N} q^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = f(0)$$

### 5- الاستنتاجات والتوصيات:

استنتجنا من البحث صعوبة تعميم مفهوم قابلية الإشتقاق وفق فويتز على التوابع. كما استنتجنا وجود اختلاف لمفهوم نظامية التوابع الكواترنيونية والهولومورفية، وقمنا بتجاوز هذا الأمر بالاعتماد على نظام الشرائح وعلى تجزئة التابع الكواترنيوني إلى تابعين عقديين هولومورفيين، وهذا ما ساعد في إيجاد آلية تعميم جيدة وواعدة في دراسة التوابع الكواترنيونية النظامية. كما نوصي بالاعتماد على هذه الآلية في تعميم نظائر أخرى من التحليل العقدي إلى التحليل الكواترنيوني، بالإضافة إلى دراسة وتعميم بعض التحويلات الشهيرة.

6- المراجع:

- [1] Andrew J.Hanson (2006).Visualizing Quaternions. by Elsevier Inc.
- [2]J.Pedromorais, S.Georgiev, W.Sprobig (2014).Real quaternionic calculus handbook. By Springer Basel.
- [3] J.Voight (2014).The arithmetic of quaternion algebras.
- [4] D.Messenger (2014). Quaternion algebras: History, Construction and Application.
- [5] Porteous,Ianr (1995). Clifford Algebras and the Classical Group. Cambridge University press.
- [6] Dominic Widdows (2006). Quaternion Algebraic Geometry. Doctoral dissertation ,Oxford University.
- [7]C. Gentili and D. Struppa (2007). A new theory of regular functions of a quaternionic variable, Advances in Mathematics, Vol. 216," pp 279-301, Elseiver Inc.
- [8] T. Sudbury (1979). Quaternionic Analysis. Mathematical . Proceedings of the Cambridge Philosophical Society Vol. 85 Cambridge University Press.
- [9] C.G. Cullen (1965). An integral theorem for analytic intrinsic functions on quaternions. Duke Mathematical Journal Vol. 32, pp 139-148.
- [10] R. Fueter (1939). Über vier fachperiodische Funktionen. Montsh. Math. Phys., Vol.48 pp 161-169.

- [11] G. Laville, I. Ramadonoff(2005).Holomorphic cliffordian functions. Preprint submitted to the arXiv. Accessed online via : <http://arxiv.org/pdf/1203.5619>.
- [12] C. Gentilli ,C. Stoppato and D. Struppa(2013).Regular Functions of a Quaternionic Variable. Springer Monographs in Mathematics, Berlin-Heidelberg.
- [13] Ch. Stover(2014).A Survey of Quaternionic Analysis.
- [14] D .Eberly (2010) .Quaternion Algebra and Calculus Accessed online via :<http://www.lce.hut.fi/ssarkka/pub/quat.pdf>.
- [15] R. Sjamaar (2006).Manifolds and Differential Forms. Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, New York.
- [16] S. Bedding, ,K. Briggs(1996).Iteration of Quaternion Functions .The American Mathematical Monthly, Vol. 103, No. 8,pp 654 - 664.
- [17] T.Y. Lam (1991).A first course in noncommutative rings. Graduate Texts in Mathematics,Vol.131,Springer ,New York.
- [18] J. Voight (2021). Quaternion Algebras.Hanover,NH,USA.