

مجلة جامعة البعث

سلسلة العلوم الأساسية



مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 45 . العدد 15

1444 هـ - 2023 م

الأستاذ الدكتور عبد الباسط الخطيب

رئيس جامعة البعث

المدير المسؤول عن المجلة

رئيس هيئة التحرير	أ. د. محمود حديد
رئيس التحرير	أ. د. درغام سلوم

مديرة مكتب مجلة جامعة البعث

بشرى مصطفى

عضو هيئة التحرير	د. محمد هلال
عضو هيئة التحرير	د. فهد شريباتي
عضو هيئة التحرير	د. معن سلامة
عضو هيئة التحرير	د. جمال العلي
عضو هيئة التحرير	د. عباد كاسوحة
عضو هيئة التحرير	د. محمود عامر
عضو هيئة التحرير	د. أحمد الحسن
عضو هيئة التحرير	د. سونيا عطية
عضو هيئة التحرير	د. ريم ديب
عضو هيئة التحرير	د. حسن مشرقي
عضو هيئة التحرير	د. هيثم حسن
عضو هيئة التحرير	د. نزار عبشي

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها

الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة البعث

سورية . حمص . جامعة البعث . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : ++ 963 31 2138071

. موقع الإنترنت : www.albaath-univ.edu.sy

. البريد الإلكتروني : [magazine@ albaath-univ.edu.sy](mailto:magazine@albaath-univ.edu.sy)

ISSN: 1022-467X

شروط النشر في مجلة جامعة البعث

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
 - طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
 - إذا كان الباحث طالب دراسات عليا:
يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقة على النشر في المجلة.
 - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:
يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.
 - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :
يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.
 - إذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :
يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.
 - يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):
عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1- مقدمة
 - 2- هدف البحث
 - 3- مواد وطرق البحث
 - 4- النتائج ومناقشتها .
 - 5- الاستنتاجات والتوصيات .
 - 6- المراجع.

- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (الآداب - الاقتصاد - التربية - الحقوق - السياحة - التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):
- عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1. مقدمة.
 2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
 3. أهداف البحث و أسئلته.
 4. فرضيات البحث و حدوده.
 5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
 6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
 7. منهج البحث و إجراءاته.
 8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
 9. نتائج البحث.
 10. مقترحات البحث إن وجدت.
 11. قائمة المصادر والمراجع.
- 7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:
- أ- قياس الورق 25×17.5 B5.
 - ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 - يمين 2.5- يسار 2.5 سم
 - ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8
 - ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20
- . كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي . العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.
- ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.
- 8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.
- 9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.
- 10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة . الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة . سنة النشر . وتتبعها معترضة (-) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة . دار النشر وتتبعها فاصلة . الطبعة (ثانية . ثالثة) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة . وفيما يلي مثال على ذلك:

-MAVRODEANUS, R1986- Flame Spectroscopy. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

. بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة . المجلد والعدد (كتابة مختزلة) وبعدها فاصلة . أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة . مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases Clinical Psychiatry News , Vol. 4. 20 – 60

ج . إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد

بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: (المراجع In Arabic)

رسوم النشر في مجلة جامعة البعث

1. دفع رسم نشر (40000) ل.س أربعون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (100000) ل.س مئة الف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (6000) ل.س ستة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

المحتوى

الصفحة	اسم الباحث	اسم البحث
30-11	د. فادي خضر د. إيمن لبكري صفاء العامر	استخلاص بعض المركبات الفعالة حيويًا من الملفوف الأحمر بطريقتي الأمواج فوق الصوتية والحاضنة الهزازة، ودراسة كفاءة المستخلصات في تثبيط جذور الـ DPPH
50-31	د. عبير سلطان	الخصائص النباتية للفراسيون الأسود (Lamiaceae) <i>Ballota nigra</i> L.
72-51	د. محمد شراباتي	معامل استمرار حل مسألة ديرخليه من أجل معادلة مونج - أمبير العقدية
94-73	محمد عباس د. إبراهيم أسعد إسماعيل	اصطناع مركب فانادات النحاس -CuO V ₂ O ₅ بطريقة الاصطناع الصلب ودراسة بنيته البلورية

116-95	يمان الكردي د. منير مخلوف	قابلية جمع متسلسلات جاكوبي بطريقة نيورلاند المعممة (N, p, q)
116-117	رامح ديب د. منتجب الحسن	تركيب سلوكيات إغناشاك الديناميكية للحالة المستوية الثانية لانفعالات الجسم المرن دقيق الاستقطاب

استخلاص بعض المركبات الفعالة حيويًا من الملفوف الأحمر بطريقتي الأمواج فوق الصوتية والحاضنة الهزازة، ودراسة كفاءة المستخلصات في تثبيط جذور الـ DPPH

صفاء محمد العامر* فادي خضر** إيمان مصطفى البكري***

المخلص

عُينت الفينولات الكلية والفلافونويدات الكلية والأنثوسيانينات الكلية والبروأنتوسيانيدات في مستخلصات الملفوف الأحمر المجفد الناتجة بطريقتي الأمواج فوق الصوتية والحاضنة الهزازة عند درجة الحرارة 40 س° خلال 15 دقيقة باستخدام ستة مذيبات (الماء المقطر - الماء المقطر المحمض بحمض الليمون 2% - الماء المقطر المحمض بحمض الليمون 4% - الإيتانول 70% - الإيتانول 70% المحمض بحمض الليمون 2% - الإيتانول 70% المحمض بحمض الليمون 4%). دُرست الفعالية المضادة للتأكسد لهذه المستخلصات بتطبيق اختبار الـ DPPH. أظهرت مقارنة طريقتي الاستخلاص عدم وجود فروق معنوية كبيرة بين قيم تراكيز المركبات المستخلصة. سُجلت أفضل النتائج عند استخدام الماء أو الإيتانول 70% كمذيب. تناقصت قيم تراكيز معظم المركبات المستخلصة عند إضافة الحمض للمذيب. أبدت جميع المستخلصات المدروسة قيمةً مقاربةً لتثبيط جذور الـ DPPH حيث تراوحت نسبة التثبيط من 60% إلى 70%.

الكلمات المفتاحية: الملفوف الأحمر - الفينولات الكلية - البروأنتوسيانيدات - الفلافونويدات الكلية - الأنثوسيانينات الكلية - DPPH.

* طالبة ماجستير قسم الكيمياء، كلية العلوم، جامعة دمشق، سورية.

** الأستاذ المشرف قسم الكيمياء، كلية العلوم، جامعة دمشق، سورية.

*** الأستاذ المشرف المشارك قسم الكيمياء، كلية العلوم، جامعة دمشق، سورية.

Extraction of some bioactive compounds from red cabbage using ultrasound and orbital shaker incubator methods, and study the extracts efficiency for inhibiting DPPH radicals

Safaa Muhammad Al-Amer* Fadi Kheder** Iman Mostafa Al-Bakri***

Abstract

Total phenols, total flavonoids, total anthocyanins and proanthocyanidins were determined in lyophilized red cabbage extracts, produced by ultrasound and orbital shaker incubator methods at 40 °C during 15 minutes using six solvents (distilled water - distilled water acidified with citric acid 2% - distilled water acidified with citric acid 4% - ethanol 70% - ethanol 70% acidified with citric acid 2% - ethanol 70% acidified with citric acid 4%). The antioxidant activity of these extracts was studied by DPPH assay. The comparison between the two extraction methods did not show significant differences for the concentrations of the extracted compounds. The best results were recorded using water or ethanol 70% as solvent. The concentrations of most extracted compounds decreased upon solvent acidification. All studied extracts showed similar inhibition values of DPPH radicals ranged from 60% to 70%.

Keywords: Red cabbage - Total phenols – Proanthocyanides - Total flavonoids - Total anthocyanins - DPPH.

* MSC., Student, Department of Chemistry, Faculty of sciences, Damascus

** Supervisor, Student, Department of Chemistry, Faculty of sciences, Damascus

*** Associated supervisor, Student, Department of Chemistry, Faculty of sciences, Damascus

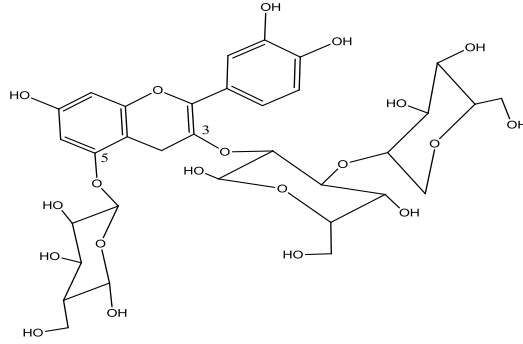
1. المقدمة:

تنتمي الأنثوسيانينات (وهي غليكوزيدات لبولي هيدروكسي، بولي ميتوكسي 2- فينيل بنزوبيريليوم) إلى فئة الفلافونويدات. تعني كلمة الأنثوسيانينات في اللغة اليونانية الزهرة ذات اللون الأزرق الداكن [1]. توجد الأنثوسيانينات في جميع أنسجة النباتات بما في ذلك الأوراق والسيقان والجذور [2]، ويُعد العنب البري والكرز والتوت والفرولة والكرديه والملفوف الأحمر من أهم مصادرها الحيوية [1]. ازداد الاهتمام العلمي بأصبغة الأنثوسيانينات في السنوات القليلة الماضية، وتؤكد الكثير من الدراسات على استخدامها سواء من مصادرها الطبيعية أو كمستحضرات دوائية، لتحسين الصحة والوقاية من بعض الأمراض كأمراض القلب والسرطان والسكري [1,3]، فضلاً عن خصائصها المضادة للتأكسد [4]، ولها تأثير مضاد للالتهابات، كما تستخدم لتحسين حدة البصر [5]. تستخدم الأنثوسيانينات باعتبارها ملونات طبيعية على نطاق واسع في الصناعات الغذائية والدوائية كبديل عن الملونات الصناعية مثل صبغة الأزو الحمراء (Allure red:E129)، تتميز الأنثوسيانينات بمجموعة واسعة من درجات اللون بدءاً من البرتقالي حتى الأحمر إلى الأرجواني والأزرق. يؤثر وجود حمض الأسكوربيك وبعض السكريات والشوارد وإنزيمات معينة في تلون الأنثوسيانينات في النبات، كما تختلف ألوان مستخلصات الأنثوسيانينات باختلاف قيمة pH الوسط ودرجة الحرارة وتعرضها للأكسجين والضوء وأيضاً باختلاف المستبدلات في الحلقات العطرية لهيكل الأنثوسيانينات [4,6]. تُستخلص الأنثوسيانينات من أنسجة نباتية مختلفة، والطريقة المعتادة للحصول عليها هي استخلاص سائل - صلب [3]. تتميز هذه المركبات بانحلاليتها الكبيرة في الماء ما يسهل استخدامها في النظم الغذائية المائية [7].

ينتمي الملفوف الأحمر (*Brassica oleracea L. var. capitata f. rubra*) إلى عائلة Brassicaceae، وهو من خضروات منطقة البحر الأبيض المتوسط [7]. عُرف الملفوف الأحمر من قبل الرومان في القرن الرابع عشر كغذاء للإنسان والحيوان، واستعمل لأغراض طبية لعلاج الصداع والنقرس والإسهال [2]. طبقت العديد من طرائق الاستخلاص، بشروط تجريبية مختلفة من درجات الحرارة والمذيبات والزمن، لتحسين

استخلاص بعض المركبات الفعالة حيويًا من الملفوف الأحمر بطريقتي الأمواج فوق الصوتية والحاضنة الهزازة، ودراسة كفاءة المستخلصات في تثبيط جذور الـ DPPH

كفاءة استخلاص الأنتوسيانينات وغيرها من المركبات الفعالة حيويًا من الملفوف الأحمر [9,8]. يتميز لون مستخلص الملفوف الأحمر بثباته تجاه الضوء ودرجات الحرارة وذلك لاحتوائه على مركب السيانيدين-3-ثنائي غلوكوزيد، 5-غلوكوزيد (الشكل (1)) والذي يعتبر من أهم أنتوسيانينات الملفوف الأحمر [10].



الشكل (1): صيغة السيانيدين-3-ثنائي غلوكوزيد، 5-غلوكوزيد.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى استخلاص الأنتوسيانينات الكلية (الفينولات الكلية - الفلافونويدات الكلية - البروانثوسيانيدات) الفعالة حيويًا من الملفوف الأحمر بإجراء مقارنة بين طريقتي الأمواج فوق الصوتية والحاضنة الهزازة، ودراسة الفعالية المضادة للتأكسد للمستخلصات الناتجة.

3. مواد البحث وطرائقه:

1.3.1. المواد والأدوات والأجهزة المستعملة:

تم شراء الملفوف الأحمر من السوق المحلي في مدينة دمشق. قُطع إلى أجزاء صغيرة. جُفدت هذه الأجزاء وطُحنت في مطحنة كهربائية وحفظت في عبوات عاتمة عند درجة حرارة الغرفة.

1.1.3. المواد الكيميائية:

كربونات الصوديوم اللامائية (99%) وكبريتات الحديد الثنائي والأمونيوم وخلات الصوديوم (99%) ونترات الصوديوم (99%) من شركة Panreac. حمض الغاليك

(99%) و2،2- ثنائي فينيل بيكريل هيدرازيل (DPPH) والكيرستين (98%) وكاشف الفولين سيوكالتو من شركة Sigma - Aldrich. حمض الليمون أحادي الماء (99.5%) من شركة Shamlab. هيدروكسيد الصوديوم من شركة Surechem. Productd Ltd الإيتانول 99% من شركة Chem-lab. كلوريد الألمنيوم (99%) من شركة Riedel -de-Haen.

2.1.3. الأجهزة:

حاضنة هزازة (JSR-JSSI-200CI). جهاز الطيف الضوئي المرئي وفوق البنفسجي UV-VIS (Optizen3320). جهاز الأمواج فوق الصوتية (Soner 203H, Vortex Frequency:53KHZ, Ultrasound power:100W). مازج رجاج (Velp scientifica:code F202A0173,V:12v,W:15). مجفدة (Laboratory (Christ ، Alpha 1-2 LD plus).

2.3. تحضير المحاليل:

1.2.3. تحضير المحاليل الموقية المستخدمة في طريقة تعيين الأنتوسيانينات الكلية:

- محلول موقى pH =1: حُضِرَ بمزج 125 مل من محلول كلوريد البوتاسيوم (0.2 مول/ل) مع 375 مل من حمض كلور الماء (0.2 مول/ل).
- محلول موقى pH =4.5: حُضِرَ بمزج 250 مل من محلول خلات الصوديوم (0.1 مول/ل) و200 مل من حمض الخل (0.1 مول/ل) و50 مل من حمض كلور الماء (0.1 مول/ل).

2.2.3. تحضير الكواشف والمحاليل المستخدمة:

- كربونات الصوديوم اللامائية: حُضِرَ بإذابة 7.5 غ من كربونات الصوديوم اللامائية في 100 مل من الماء المقطر.
- نترتيت الصوديوم: حُضِرَ ب إذابة 5 غ من نترتيت الصوديوم في 100 مل من الماء المقطر.
- البوتانول المحمض ب حمض كلور الماء: حُضِرَ بمزج 5 مل من حمض كلور الماء المركز مع 95 مل من البوتانول.

استخلاص بعض المركبات الفعالة حيويًا من الملفوف الأحمر بطريقتي الأمواج فوق الصوتية والحاضنة الهزازة، ودراسة كفاءة المستخلصات في تثبيط جذور الـDPPH

- كبريتات الحديد الثنائي والأمونيوم: حُضِر بإذابة 2 غ منه في 100 مل من حمض كلور الماء تركيزه 2 مول/ل.
- كاشف فولين: حُضِر بمزج 10 مل من محلول كاشف فولين المركز ومدد إلى 100 مل باستعمال الماء المقطر.
- كاشف الـDPPH: حُضِر بإذابة 0.0025 غ في 50 مل من الإيثانول 99%.
- تحضير المحلول الشاهد في تجربة الـDPPH: حُضِر بمزج 50 ميكرو لتر من الإيثانول 99% مع 1950 ميكرو لتر من محلول الـDPPH.

3.3. طرائق العمل:

1.3.3. الاستخلاص:

وضع 2 غ من مطحون الملفوف الأحمر المجفد في عبوات زجاجية عاتمة وأضيف إليها 50 مل من المذيبات المستخدمة في هذه الدراسة والتي هي الماء المقطر أو الماء المقطر المحمض بحمض الليمون 2% أو الماء المقطر المحمض بحمض الليمون 4% أو الإيثانول 70% أو الإيثانول 70% المحمض بحمض الليمون 2% أو الإيثانول 70% المحمض بحمض الليمون 4% [11]. أُستخلصت المركبات الفعالة حيويًا من العينات السابقة عند درجة الحرارة 40 س° خلال 15 دقيقة باستعمال جهاز الأمواج فوق الصوتية من جهة، والحاضنة الهزازة (200 دورة / دقيقة) من جهة أخرى.

2.3.3. تعيين الفينولات الكلية:

مُزج 250 ميكرو لتر من كلِّ مستخلص، ومدد بالماء المقطر 10 مرات، مع 250 ميكرو لتر من الماء المقطر و1250 ميكرو لتر من كاشف الفولين سيوكالتو 10% (حجم/حجم). أضيف بعد 8 دقائق 1000 ميكرو لتر من محلول كربونات الصوديوم اللامائية (7.5%). مُرِجت العينات بالمزج الرجّاج ثمَّ تُرُكت 90 دقيقة عند درجة حرارة الغرفة [12]. قُيسَت امتصاصية العينات باستعمال جهاز الطيف الضوئي (UV-VIS) عند طول الموجة 765 نانومتر. أُستقرت قيم التراكيز بالاستفادة من سلسلة معيارية ($y=0.0093x$ و $R^2=0.9995$) محضرة بالطريقة نفسها من حمض الغاليك في

الإيتانول 70% (10-100 مغ/ل). تم التعبير عن تراكيز الفينولات الكلية كمكافئات لحمض الغاليك (مغ/100 غ نبات جاف).

3.3.3. تعيين الفلافونويدات الكلية:

مزج 125 ميكرو لتر من كل مستخلص⁽¹⁾ مع 500 ميكرو لتر من الماء المقطر و37.5 ميكرو لتر من محلول نترت الصوديوم (5%)، ثم وضعت العينات في الظلام مدة 5 دقائق. أضيف إلى كل عينة 37.5 ميكرو لتر من محلول كلوريد الألمنيوم (10%)، ثم أضيف بعد 6 دقائق 500 ميكرو لتر من محلول هيدروكسيد الصوديوم (1 مول/ل) و600 ميكرو لتر من الماء المقطر. قيست امتصاصية العينات عند 510 نانومتر [13]. أُستقرت قيم التراكيز بالاستفادة من سلسلة معيارية ($y=0.0007x$ و $R^2=0.9991$) محضرة بالطريقة نفسها من الكيرستين في الإيتانول 70% (0.2-1.3 غ/ل). تم التعبير عن تراكيز الفلافونويدات كمكافئات للكيرستين (مغ/100 غ نبات جاف).

4.3.3. تعيين الأنثوسيانينات الكلية:

عُينت الأنثوسيانينات وفق طريقة تغير الـ pH [14]، مع بعض التعديلات، باستعمال محلولين موقيين. مُزج 100 ميكرو لتر من كل مستخلص مع 1900 ميكرو لتر من أحد المحلولين الموقيين وقيست الامتصاصية عند طول الموجة 510 نانومتر. أُعيدت التجربة باستخدام المحلول الموقى الآخر، ثم حسب الامتصاصية (A) وفق العلاقة (1).

$$A = (A_{510})_{PH (1)} - (A_{510})_{PH (4.5)} \quad (1)$$

حُسب تركيز الأنثوسيانينات الكلية (مغ/ل) من العلاقة (2) كمكافئات للسيانيدين-3-غلوكوزيد.

$$\text{Total Anthocyanins} = (A \times M_w \times Df \times 1000) / \epsilon_0 \quad (2)$$

(1) استخدمت المستخلصات المائية مباشرة دون تمديد، في حين مُدّدت المستخلصات الإيتانولية 5 مرات بالماء المقطر.

استخلاص بعض المركبات الفعالة حيويًا من الملفوف الأحمر بطريقتي الأمواج فوق الصوتية والحاضنة الهزازة، ودراسة كفاءة المستخلصات في تثبيط جذور الـ DPPH

حيث A: الامتصاصية (العلاقة (1))، Df: معامل التمديد (20 مرة)، M_w : الكتلة المولية للسيانيدين-3-غلوكوزيد وقدرها 449.2 غ/مول، ϵ_0 : معامل الامتصاص المولي للسيانيدين-3-غلوكوزيد وقدره 26900 ل/سم. مول.

5.3.3. تعيين البروانثوسيانيدات:

مُزج 500 ميكرو لتر من كل مستخلص، ممدد 5 مرات بالإيثانول 70%، مع 3 مل من محلول البوتانول المحمض بحمض كلور الماء المركز. أُضيف إلى كل مزيج 100 ميكرو لتر من كبريتات الحديد الثنائي والأمونيوم. تركت العينات في حمام مائي درجة حرارته 85 س° لمدة 60 دقيقة، ثم بُردت وقيست امتصاصيتها عند طول الموجة 550 نانومتر [15]. حُسب تركيز البروانثوسيانيدات (مغ/ل) من العلاقة (3) كمكافئات لكلور السيانيدين.

$$\text{TotalProanthocyanidin} = (A \times M_w \times Df \times 1000) / \epsilon_0 \quad (3)$$

حيث A: الامتصاصية، Df: معامل التمديد (5 مرات)، M_w : الكتلة المولية لكلور السيانيدين وقدرها 287.24 غ/مول، ϵ_0 : معامل الامتصاص المولي لكلور السيانيدين وقدره 34700 ل/سم. مول.

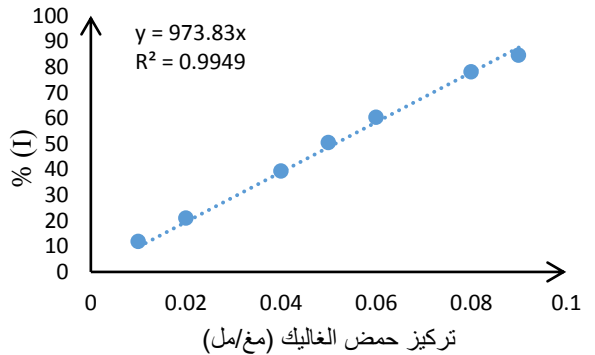
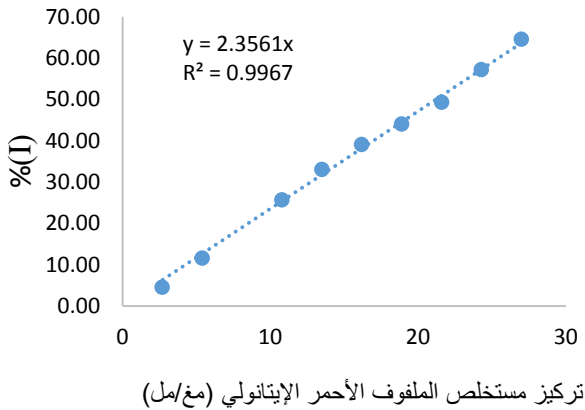
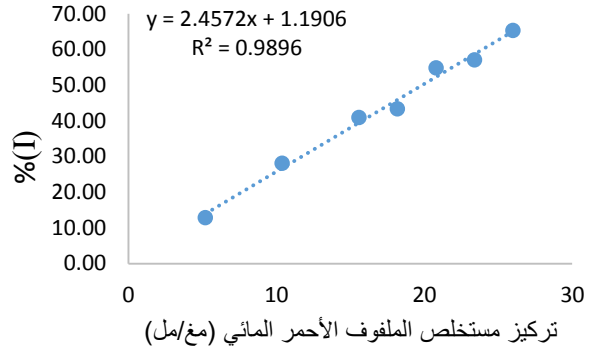
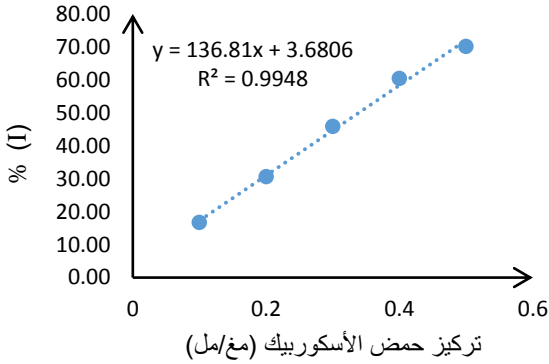
6.3.3. تعيين الفعالية المضادة للتأكسد (اختبار الـ DPPH):

مُزج 50 ميكرو لتر من كل مستخلص مع 1950 ميكرو لتر من محلول الـ DPPH، تركت العينات في الظلام مدة 30 دقيقة. قيس امتصاصية العينات عند طول الموجة 517 نانومتر، ثم حُسبت قدرة المستخلصات على تثبيط الجذور الحرة (%I) من العلاقة (4) [16].

$$I\% = \frac{A_{\text{control}} - A_{\text{sample}}}{A_{\text{control}}} \times 100 \quad (4)$$

حيث %I: النسبة المئوية لتثبيط الجذور الحرة، A_{Control} : امتصاصية العينة الشاهدة العائدة لمحلول الـ DPPH فقط، A_{sample} : امتصاصية العينة المدروسة.

تم التعبير عن قدرة المستخلصات على تثبيط الجذور الحرة كقيمة IC50، والتي تعرف على أنها تركيز المستخلص (مغ/مل) الذي يثبط تركيز الـ DPPH بنسبة 50%. قيست قيم الـ IC50 كما يلي: حضرت سلسلة معيارية من المستخلص المائي بتركيزات مختلفة، وقيست قدرتها على تثبيط جذور الـ DPPH، ورسمت تغيرات نسبة التثبيط بدلالة تراكيز هذا المستخلص. استقرت من الرسم البياني قيمة الـ IC50 لهذا المستخلص. كررت هذه العملية للمستخلص الإيتانولي من جهة، ولعينات معيارية من حمض الغاليك وحمض الأسكوربيك من جهة أخرى (الشكل (2)). قورنت قيم الـ IC50 للمستخلص المائي والإيتانولي مع مقابلاتها لكل من حمض الغاليك وحمض الأسكوربيك.



الشكل (2): السلاسل المعيارية لكل من حمض الغاليك وحمض الأسكوربيك ومستخلصي الملفوف الأحمر المائي والإيتانولي لتعيين الـ IC50.

4.3. التحليل الإحصائي:

استخدم برنامج IBM SPSS Statistic 23 لمعالجة النتائج، وهي حزمة برمجية للتحليل الإحصائي وإدارة البيانات. حُسبت المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية والفروق المعنوية بين المتوسطات بمجال ثقة 95% ($P=0.05$). كُررت كل تجربة 5 مرات ($n=5$) لجميع النتائج باستثناء تجارب قياس الفعالية المضادة للتأكسد ($n=3$). تم التعبير عن النتائج بالمتوسط الحسابي \pm الانحراف المعياري.

4. النتائج والمناقشة:

1.4. تعيين بعض المركبات الفعالة حيويًا في مستخلصات الملفوف الأحمر:

استخلصت الأنثوسيانينات الكلية والبروأنتوسيانيدات والفلافونويدات الكلية والفينولات الكلية من مطحون الملفوف الأحمر المجفف باستخدام ستة مذيبات مختلفة وذلك بتطبيق طريقتي الأمواج فوق الصوتية والحاضنة الهزازة عند درجة الحرارة 40 س° لمدة 15 دقيقة. سجلت النتائج في الجدولين (1) و(2).

1.1.4. نتائج استخلاص الأنثوسيانينات الكلية والبروأنتوسيانيدات:

أظهرت النتائج عند تطبيق طريقة الاستخلاص بالأمواج فوق الصوتية وباستخدام كل من الإيتانول 70% والإيتانول المحمض بحمض الليمون كمذيبات، أن قيم تراكيز الأنثوسيانينات، مرتفعة. لم يلاحظ أثر واضح لتحميض الماء المقطر أو الإيتانول 70% في استخلاص هذه المركبات. أظهرت نتائج الاستخلاص بالحاضنة الهزازة وباستخدام

الماء المقطر أو الإيتانول 70% كمذيبات أن قيم تراكيز الانثوسيانينات الكلية كانت كبيرة، في حين لوحظ نقصان قيم تراكيزها عند تحميض الماء المقطر أو الإيتانول 70% وهذا ما يوضحه الجدول (1). لم تسجل فروق معنوية كبيرة بين قيم تراكيز الأنثوسيانينات الكلية الناتجة عند الاستخلاص بطريقة الأمواج فوق الصوتية ومثيلاتها المستخلصة بالحاضنة الهزازة، وتبقى قيم تراكيز الأنثوسيانينات الكلية المستخلصة بطريقة الأمواج فوق الصوتية هي الأفضل عموماً. كما أظهرت نتائج الدراسة أن الاستخلاص بالماء المقطر أو الإيتانول 70% سجل أفضل قيمة لتركيز البروانثوسيانيدات بطريقة الأمواج فوق الصوتية، بينما بلغت أكبر قيمة لتركيز هذه المركبات عند الاستخلاص بالإيتانول 70%، يليه الماء المقطر، بطريقة الحاضنة الهزازة. لوحظ أيضاً نقصان قيم تراكيز البروانثوسيانيدات المستخلصة بكلتا الطريقتين عند تحميض الماء أو الإيتانول 70% كما هو مشار إليه في الجدول (1)، وتبقى، عموماً، قيم التراكيز الناتجة بطريقة الأمواج فوق الصوتية أكبر قليلاً مقارنةً مع القيم الناتجة بطريقة الحاضنة الهزازة. قد يعود سبب ذلك إلى أن طريقة الأمواج فوق الصوتية تعتمد على تكوين موجات قصيرة تغير من الضغط والحرارة ما يساعد في تحلل الجدر الخلوية النباتية، وهذا من شأنه تعزيز استخلاص المركبات الفعالة حيويًا مقارنةً بطريقة الحاضنة الهزازة [12].

استخلاص بعض المركبات الفعالة حيويًا من الملفوف الأحمر بطريقتي الأمواج فوق الصوتية والحاضنة الهزازة، ودراسة كفاءة المستخلصات في تثبيط جذور الـ DPPH

الجدول (1): قيم تراكيز الأنتوسيانينات الكلية والبروأنتوسيانيدات في مستخلصات الملفوف الأحمر الناتجة بطريقتي الأمواج فوق الصوتية والحاضنة الهزازة (200 دورة / دقيقة) عند درجة الحرارة 40 °س لمدة 15 دقيقة.

البروأنتوسيانيدات (مغ/100 غ نبات جاف)		الأنثوسيانينات الكلية (مغ/100 غ نبات جاف)		طريقة الاستخلاص المذيب
الحاضنة الهزازة	الأمواج فوق الصوتية	الحاضنة الهزازة	الأمواج فوق الصوتية	
^a 1.11±25.66 ^B	^a 2.39±36.58 ^A	^a 19.51±279.3 ^A	^{a,b} 11.80±296.4 ^A	الماء المقطر
^b 0.99±21.59 ^A	^{b,e} 2.00±24.66 ^A	^{a,b} 5.87±248.8 ^B	^b 12.98 ±301.4 ^A	الماء المقطر المحمض بحمض الليمون 2%
^c 1.07±16.97 ^B	^{e,c} 0.27±21.34 ^A	17.66±233.7 ^B c,b	^a 5.011 ±280.5 ^A	الماء المقطر المحمض بحمض الليمون 4%
^d 0.41±31.39 ^B	^a 0.59±37.76 ^A	^a 30.14±281.0 ^B	^c 7.05 ±338.6 ^A	الإيتانول 70%
^b 0.69±21.97 ^B	^d 1.85±29.15 ^A	^{a,b} 12.29±266.9 ^B	^c 2.85±354.6 ^A	الإيتانول 70% المحمض بحمض الليمون 2%
^b 0.10±21.31 ^A	^e 1.29±22.99 ^A	^c 16.83±211.2 ^B	^{a,b} 6.74±287.5 ^A	الإيتانول 70% المحمض بحمض الليمون 4%

يدل اختلاف الحروف الصغيرة a و b و c عن بعضها البعض ضمن العمود الواحد في الجدول إلى وجود فروق معنوية بين القيم، كما يدل اختلاف الحرفين A و B إلى وجود فروق معنوية بين القيم ضمن الصف الواحد لكل نوع من المركبات المدروسة استناداً إلى برنامج الـ SPSS.

2.1.4. نتائج استخلاص الفلافونويدات الكلية والفينولات الكلية:

لوحظ أن قيم تراكيز الفلافونويدات الكلية في المستخلصات الإيتانولية أكبر من مثيلاتها في المستخلصات المائية، وتناقصت قيم هذه التراكيز عند التحميص وذلك في كلتا طريقتي الاستخلاص كما هو موضح في الجدول (2). كما تشير النتائج إلى أن المستخلصات المائية تميزت بأكثر قيمة لتراكيز الفينولات الكلية مقارنةً بالمستخلصات الإيتانولية وذلك عند تطبيق كلتا طريقتي الاستخلاص. وُجِدَ، أيضاً، تناقصٌ في قيم تراكيز الفينولات الكلية

عند التحميص في جميع المستخلصات الناتجة بطريقة الأمواج فوق الصوتية، وكذلك في المستخلصات المائية لطريقة الحاضنة الهزازة، بينما ازدادت قيم تراكيز الفينولات الكلية المستخلصة بالإيتانول 70% المحمض بحمض الليمون في طريقة الحاضنة الهزازة (الجدول (2)).

الجدول (2): قيم تراكيز الفينولات الكلية والفلافونويدات الكلية في مستخلصات الملفوف الأحمر الناتجة بطريقتي الأمواج فوق الصوتية و الحاضنة الهزازة (200 دورة / دقيقة) عند درجة الحرارة 40 س^o لمدة 15 دقيقة.

الفينولات الكلية (مغ/100 غ نبات جاف)		الفلافونويدات الكلية (مغ/100 غ نبات جاف)		
الحاضنة الهزازة	الأمواج فوق الصوتية	الحاضنة الهزازة	الأمواج فوق الصوتية	طريقة الاستخلاص المذيب
^{a,b} 91.91±2026 ^A	^a 72.19±1915 ^A	^a 80.49±1010 ^A	^a 33.82±1106 ^A	الماء المقطر
^{a,b} 50.88±1961 ^B	^b 98.81 ±1831 ^A	^{d,b} 67.62 ±648.6 ^A	^b 32.37±615.0 ^A	الماء المقطر المحمض بحمض الليمون 2%
^{b,d} 28.34±1938 ^B	^b 81.50±1796 ^A	^{d,b} 20.92±615.4 ^A	^b 30.34±663.57 ^A	الماء المقطر المحمض بحمض الليمون 4%
^c 19.98±1767 ^B	^b 87.07 ±1833 ^A	^c 22.68 ±1141 ^A	^c 76.69±1272 ^A	الإيتانول 70%
^{c,d} 42.85±1854 ^A	^b 97.84 ±1874 ^A	^d 8.98±722.6 ^B	^a 44.93 ±1148 ^A	الإيتانول 70% المحمض بحمض الليمون 2%
^{d,b} 28.00±1922 ^B	^c 51.54±1706 ^A	^b 8.24 ±598.8 ^B	^d 40.67±857.8 ^A	الإيتانول 70% المحمض بحمض الليمون 4%

يدل اختلاف الحروف الصغيرة ^a و ^b و ^c و ^d عن بعضها البعض ضمن العمود الواحد في الجدول إلى وجود فروق معنوية بين القيم، كما يدل اختلاف الحرفين A و B إلى وجود فروق معنوية بين القيم ضمن الصف الواحد لكل نوع من المركبات المدروسة استناداً إلى برنامج SPSS.

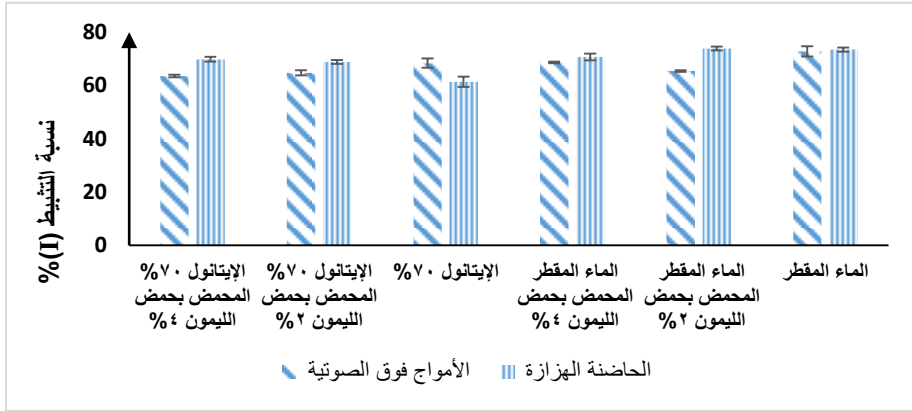
لم تسجل فروق معنوية كبيرة بين قيم تراكيز الفينولات الكلية، أو الفلافونويدات الكلية، المستخلصة بطريقة الأمواج فوق الصوتية وتلك الناتجة بطريقة الحاضنة الهزازة (الجدول (2)). تقاربت قيم تراكيز الأنثوسيانينات الكلية الناتجة في هذه البحث (الجدول (1)) مع نتائج إحدى الدراسات لكن مع اختلاف شروط الاستخلاص وتحضير العينات، حيث

جرى الاستخلاص بجهاز المايكرويف عند درجة حرارة الغرفة لمدة دقيقتين وباستخدام الإيثانول 60% [17]، الأمر الذي أدى أيضاً إلى مردود كبير نسبياً من الفينولات الكلية مقارنةً مع قيم تراكيز الفينولات الكلية الواردة في الجدول (1). يمكن، من جهة أخرى، أن تؤدي زيادة زمن الاستخلاص إلى زيادة قيم تراكيز المركبات المستخلصة كالأنثوسيانينات الكلية والفلافونويدات الكلية كما يلاحظ من نتائج إحدى الدراسات، حيث استمرت عملية الاستخلاص لمدة ساعة في حمام ثلجي باستخدام الإيثانول 70% المحمض بحمض كلور الماء 0.05%، ولم يلاحظ أثر واضح لتحميض الإيثانول 70% في زيادة كفاءة الاستخلاص [9]. يلاحظ، أيضاً، أن شروط تحضير العينة تؤثر في نتائج الاستخلاص، حيث وجد أن تراكيز المركبات الفعالة حيويًا المستخلصة من الملفوف الأحمر المجفد (الجدولان (1) و (2)). أكبر بكثير من القيم الناتجة في الدراسة التي استخدم فيها الملفوف الأحمر الطازج، [18]، تعتمد كفاءة استخلاص المركبات الفعالة حيويًا من المصادر النباتية على شروط طريقة الاستخلاص وتحضير العينات وزمن الاستخلاص إضافةً إلى نوع المذيب المستخدم [19]، كما يؤثر نوع النبات المدروس والظروف البيئية في قيم تراكيز المركبات المستخلصة كالأنثوسيانينات الكلية [9]. أكدت بعض الدراسات على استخدام الماء المقطر أو الإيثانول كمذيب في طرائق استخلاص المركبات الفعالة حيويًا من المصادر النباتية كونها آمنة بيئيًا وتتمتع بقطبية مناسبة للاستخلاص [20,17].

2.4 تعيين الفعالية المضادة للتأكسد (اختبار الـ DPPH):

يوجد العديد من الاختبارات التي من الممكن تطبيقها لمعرفة قدرة المركبات المضادة للتأكسد على التفاعل مع الجذور الحرة و تثبيطها، ومنها اختبار الـ DPPH [9]. حضنت

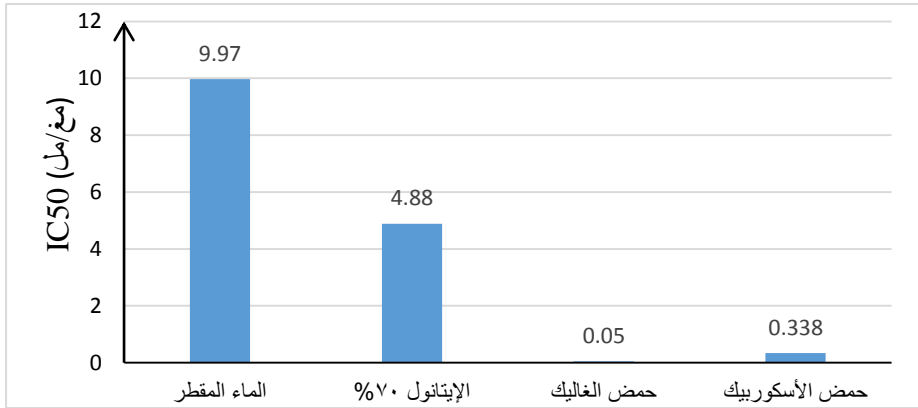
مستخلصات الملفوف الأحمر المجفد الناتجة بطريقتي الأمواج فوق الصوتية والحاضنة الهزازة مع محلول DPPH، وقيست قدرة هذه المستخلصات على كبح جذور الـ DPPH، وسجلت النتائج في الشكل (3).



الشكل (3): نسبة تثبيط جذور الـ DPPH لمستخلصات الملفوف الأحمر المجفد الناتجة بطريقتي الأمواج فوق الصوتية والحاضنة الهزازة (200 دورة/دقيقة) عند درجة الحرارة 40 س خلال 15 دقيقة.

لم تلاحظ فروق معنوية كبيرة بين نسب التثبيط للمستخلصات الناتجة بطريقة الأمواج فوق الصوتية والمستخلصات الناتجة بطريقة الحاضنة الهزازة، والتي تراوحت ما بين 60% إلى 70% من أجل جميع المذيبات المستخدمة. تقاربت نسب التثبيط الواردة في هذه البحث مع إحدى الدراسات التي أجريت على أنواع مختلفة من الملفوف الأحمر حيث بلغت أكبر نسبة للتثبيط 70% [8].

استخلاص بعض المركبات الفعالة حيويًا من الملفوف الأحمر بطريقتي الأمواج فوق الصوتية والحاضنة الهزازة، ودراسة كفاءة المستخلصات في تثبيط جذور الـ DPPH



الشكل (4): قيم الـ IC50 لمستخلصي الملفوف الأحمر المائي والإيثانولي و لحمض الغاليك وحمض الأسكوربيك.

يظهر الشكل (4) نتائج قيم الـ IC50 لمستخلصي الملفوف الأحمر المائي والإيثانولي الناتجين بطريقة الأمواج فوق الصوتية، وكذلك لحمض الغاليك وحمض الأسكوربيك. لوحظ أن المستخلص المائي للملفوف الأحمر أفضل بـ 10% تقريبا من المستخلص الإيثانولي في قدرته على تثبيط جذور الـ DPPH، في حين تميز حمض الغاليك بأفضل قيمة IC50 من بين جميع العينات المدروسة. أظهر مستخلص الملفوف الأحمر المائي تركيزاً أكبر من الفينولات الكلية مقارنة مع المستخلص الإيثانولي (الجدول (2))، الأمر الذي قد يفسر تميز المستخلص المائي بقيمة IC50 أفضل من قيمة الـ IC50. للمستخلص الإيثانولي. يلاحظ من الشكل (4) أيضاً أن حمض الغاليك تميز بقيمة IC50 أفضل من مثيلتها لحمض الأسكوربيك، وهذا يتفق مع بعض الدراسات المرجعية التي تؤكد أن قدرة حمض الغاليك على كبح جذور الـ DPPH أكبر مقارنةً بـ حمض الأسكوربيك [21].

5. الاستنتاجات:

- 1- الاستخلاص من العينات المجفدة أكثر كفاءة مقارنة بالاستخلاص من العينات الطازجة.
- 2- تقاربت قيم تراكيز المركبات المستخلصة بكلتا الطريقتين وباستخدام الماء المقطر أو الإيثانول 70% كمذيب.
- 3- لم يلاحظ أثر واضح لتحميص الماء أو الإيثانول في زيادة كفاءة الاستخلاص.
- 4- تناقصت قيم تراكيز معظم المركبات المستخلصة عند تحميص المذيب في كلتا طريقتي الاستخلاص.
- 5- أبدت جميع المستخلصات المدروسة فعالية كبيرة في تثبيط الجذور الحرة.

6. التوصيات:

- 1- تناول أوراق الملفوف الأحمر في الغذاء لاحتوائه على العديد من مضادات التأكسد المهمة لجسم الإنسان.
- 2- الاعتماد على طرائق اقتصادية وصديقة للبيئة لاستخلاص الملونات الطبيعية من أوراق الملفوف الأحمر وغيرها من النباتات.
- 3- الاستفادة من تقانات التحليل المتطورة مثل (HPLC) من أجل تعيين أهم المركبات الفعالة حيويًا الموجودة في مستخلصات الملفوف الأحمر.
- 4- استخدام مستخلصات الملفوف الأحمر كمضادات تأكسد وملونات طبيعية في الصناعات الغذائية.

- [1] He, J., & Giusti, M. M (2010) Anthocyanins: natural colorants with health-promoting properties, Annu. Rev. Food Sci. Technol., vol 1(1), 163-187.
- [2] Ticha, M. B., Haddar, W., Meksi, N., Guesmi, A., & Mhenni, M. F. (2016), Improving dyeability of modified cotton fabrics by the natural aqueous extract from red cabbage using ultrasonic energy. Carbohydrate polymers, 154, 287-295.
- [3] Chavez, L. A. C., Garcia-Barrientos, R., Ortega, L. E. G., Garcia, O. D., & Alvarado, M. I. E. (2019) - Natural vs Synthetic Colors. In Flavonoids-A Coloring Model for Cheering up Life. Intech Open.
- [4] Rizk, E. M., Azouz, A., Lobna, A. M. H., & Hareedy, T. (2009). Evaluation Of Red Cabbage Anthocyanin Pigments And Its Potential Uses As Antioxidant And Natural Food Colorants. Arab Univ. J. Agric. Sci. 17, 361-372
- [5] Özgür, M. Ü., & Çimen, E. (2018). Ultrasound-assisted extraction of anthocyanins from red rose petals and new spectrophotometric methods for the determination of total monomeric anthocyanins, Journal of AOAC international, Vol.101(4), 967-980.
- [6] Martin, J., Navas, M. J., Jimenez-Moreno, A. M., & Asuero, A. G., (2017) - Anthocyanin Pigments: Importance, Sample Preparation And Extraction. Phenolic Compounds-Natural Sources, Importance and Applications. 117-152.
- [7] Demirdöven, A., Özdoğan, K., & Erdoğan- Tokatlı, K. (2015). Extraction of anthocyanins from red cabbage by ultrasonic and conventional methods: optimization and evaluation, Journal of Food Biochemistry, Vol,39(5), 491-500.
- [8] Leja, M., Kamińska, I., & Kołton, A. (2010). Phenolic compounds as the major antioxidants in red cabbage, Folia Horticulturae, Vol. 22(1), 19-24.

- [9] Oancea, S., Mila, L., & Ketney, O. (2019). Content of Phenolics, in vitro Antioxidant Activity and Cytoprotective Effects against Induced Haemolysis of Red Cabbage Extracts, *Biotech. Lett.*, Vol. 24, 1-9.
- [10] Ahmadiani, N. (2015). Red Cabbage Anthocyanins: Horticultural and Chemical Factors Affecting Color Characteristics of Crude Extracts, Select Pigment Mixtures, and Isolated Pigments (Doctoral dissertation, The Ohio State University).
- [11] Abou-Arab, A. A., Abu-Salem, F. M., & Abou-Arab, E. A. (2011). Physico-Chemical Properties Of Natural Pigments (Anthocyanin) extracted from Roselle calyces (*Hibiscus subdariffa*), *Journal of American science*, Vol.7(7), 445-456.
- [12] Peredo Pozos, G. I., Ruiz-López, M. A., Zamora Natera, J. F., Alvarez Moya, C., Barrientos Ramirez, L., Reynoso Silva, M., & Vargas Radillo, J. J. (2020). Antioxidant capacity and antigenotoxic effect of *Hibiscus sabdariffa* L. extracts obtained with ultrasound-assisted extraction process, *Applied Sciences*, Vol.10(2), 560.
- [13] Motikar, P. D., More, P. R., & Arya, S. S. (2021). A Novel, Green Environment-Friendly Cloud Point Extraction Of Polyphenols From *Pomegranate* Peels: A Comparative Assessment With Ultrasound And Microwave-Assisted Extraction, *Separation Science And Technology*, Vol. 56(6), 1014-1025.
- [14] Vankar, P. S., & Shukla, D. (2011). Natural dyeing with anthocyanins from *Hibiscus rosa sinensis* flowers. *Journal of Applied Polymer Science*, Vol.122(5), 3361-3368.
- [15] Maksimović, Z., Malenčić, Đ., & Kovačević, N. (2005). Polyphenol Contents And Antioxidant Activity Of Maydis Stigma Extracts. *Bioresource Technology*, Vol. 96(8), 873-877.
- [16] Končić, M. Z., Kremer, D., Karlović, K., & Kosalec, I. (2010). Evaluation of antioxidant activities and phenolic content of *Berberis vulgaris* L. and *Berberis croatica* Horvat, *Food and chemical toxicology*, 48(8-9), 2176-2180.
- [17] Nguyen, H. K. N., Le Ngoc, T. P., Phanthikieu, L., Tran Thanh, T., & Mai Huynh, C. (2020). Bioactive compounds from *red cabbage* by microwave-assisted extraction: Anthocyanins, total phenolic compounds

and the antioxidant activity, *Asian Life Sciences*, 12, 172-184.

- [18] Chun, O. K., Smith, N., Sakagawa, A., & Lee, C. Y. (2004). Antioxidant properties of raw and processed cabbages, *International journal of food sciences and nutrition*, 55(3), 191-199.
- [19] Wen, L., Zhang, Z., Sun, D. W., Sivagnanam, S. P., & Tiwari, B. K. (2020). Combination of emerging technologies for the extraction of bioactive compounds. *Critical Reviews in Food Science and Nutrition*, Vol 60(11), 1826-1841.
- [20] Nawaz, H., Shad, M. A., Rehman, N., Andaleeb, H., & Ullah, N. (2020). Effect of solvent polarity on extraction yield and antioxidant properties of phytochemicals from bean (*Phaseolus vulgaris*) seeds, *Brazilian Journal of Pharmaceutical Sciences*, 56.
- [21] Brand-Williams, W., Cuvelier, M. E., & Berset, C. L. W. T. (1995). Use Of A Free Radical Method To Evaluate Antioxidant Activity, *Lwt-Food Science And Technology*, Vol.28 (1), 25-30.

الخصائص النباتية للفراسيون الأسود (Lamiaceae) *Ballota nigra* L.

الدكتورة: عبير سلطان *

ملخص

تضمن هذا البحث دراسة دقيقة ومفصلة للصفات الظاهرية الكبيرة منها والدقيقة لكامل أجزاء نبات الفراسيون الأسود *Ballota nigra* L. نظراً لأهميته الطبية وخاصة لخصائصه المعتدلة المسكنة والمهدئة للأعصاب .

أظهرت الدراسة التشريحية للورقة وجود النسيج الحباكي تحت البشرة العليا فقط في منطقة القرص ، وأن مقطع الساق رباعي توجد في مركزه فصوص كبيرة ويتوضع النسيج الدعامي في زواياه . وقد تبين وجود نوعين من الأوبار أوبار لامسة وأوبار غدية ذات أشكال متعددة ، وأن المسام من النوع المتعامد .

وهذه الدراسة هي الأولى في سوريا عن هذا الجنس .

الكلمات المفتاحية : العائلة الفاغرة - الفراسيون الأسود - صفات ظاهرية - تشريح - مسام - أوبار .

* قسم علم الحياة النباتية - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سوريا .

The botanical properties of *Ballota nigra* L. (Lamiaceae) .

Dr. Abeer Sultan*

Abstarct

This research investigated an accurate and detailed study of the morphological characteristics of all organs of *Ballota nigra* L.. *Ballota nigra* is widely known by its medical importance especially for its mild sedative and tranquilizer properties.

The anatomical study of the leaf showed that there is palisade tissue under the upper epidermis only in disk area.

The anatomical study of the stem showed that the stem is tetragonal in transversal sections with a central big lacuna and collenchyma tissues at angles .

The results showed two types of trichomes glandular and e-glandular (non-glandular) hairs.

Stomata are of Anomocytic type.

No study was conducted in Syria about this genus .

Key words : Lamiaceae , *Ballota nigra* , Morphology , Anatomy , Stomata, Trichomes. .

*Department of Botany , Faculty of Science , Tishreen University , Lattakia , Syria.

مقدمة :

ينتمي النوع *Ballota nigra*, L. (الفراسيون الأسود Black horehound أو فراسيون بلوطي أو دانه سوداء) إلى العائلة الفاغرة Lamiaceae (العائلة الشفوية Labiatae) ورتبة الفاغرات Lamiales وتحت صف النجميات Asteridae وصف المغنوليات Magnoliopsida (صف ثنائيات الفلقة Dicotyledons) وشعبة مغلفات البذور (Angiosperms) Magnoliophyta [1].

يضم الجنس *Ballota* 33-35 نوعاً تتوزع بشكل أساسي حول المتوسط وأوراسيا [2]. النبات عشب معمر ينتشر في كل من أوروبا، شمال إفريقيا، غرب آسيا، وأمريكا الشمالية [3] وفي أوروبا الغربية [4]. وهو فرد في العائلة الشفوية Lamiaceae [5,6] ويضم حوالي 90 نوعاً.

النبات ذو انتشار واسع حول العالم ويتضمن عدة تحت أنواع Subspecies مثل : *B. nigra* subsp. *nigra* و *B. nigra* subsp. *foetida* [7].

ذكر [8] وجود أربعة أنواع تابعة للجنس *Ballota* في الأراضي الليبية من بينها النوع *B. nigra* وهو نبات معمر، كما أشار [9] إلى وجود نوع واحد فقط في الأردن يتبع الجنس *Ballota* هو *B. undulata* (common black horehound) رسا، أسغان (وهو نبات عشبي معمر طوله 30-50 سم، ساقه متفرعة زغبية. الأوراق بسيطة بيضوية إلى قلبية الشكل مجعدة. الأزهار صغيرة بيضاء مرتبة في دورات، تعطي كؤوساً مسطحة تتضخم عند النضج، في حين بين [10] في دراسة لبعض أنواع من الفلورا ثنائيات الفلقة في محافظة اللاذقية وجود نوعين يتبعان الجنس *Ballota* هما *B. nigra* و *B. saxatilis*.

أما [11] فقد نوه إلى وجود 11 نوعاً تتبع هذا الجنس في الأراضي التركية ، لكن هذا العدد ازداد مؤخراً إلى 12 بعد تسجيل نوع جديد هو *B. antalyense* .

تمت الإشارة إلى خصائص النبات الطبية واستعمالاته لأول مرة في القرن الثالث عشر [3] ، وأعطى الاسم *Ballote* للنبات منذ زمن *Discorides*، وقد استخدمت أوراقه في علاج عضة الكلاب المسعورة في ذلك الوقت. ويستخدم النبات في هذه الأيام في البلاد الأوروبية بشكل رئيسي كدواء تقليدي، وذلك لخصائصه المسكنة المعتدلة والمهدئة للأعصاب وعلاوة على ذلك يوجد له استخدامات تجارية في أوروبا [11].

يعد النبات حالياً موضع اهتمام خاصة في بلدان الشرق الأوسط والذي انعكس بكمية الأبحاث والمقالات المجرأة حوله في تلك المنطقة [7] . ويختلف استخدام النبات بحسب المناطق والبلدان ويستعمل غالباً للعلاج في حالات اضطراب النوم المعتدل ، الحالة العصبية ، اضطراب المعدة، وفي شفاء الجروح [3] . كما يمكن أن يستعمل كعقار مضاد للإنبتان الجرثومي (مثل *Staphylococcus aureus* – *Escherichia coli*) ، فطري (مثل *Candida glabrata* – *Candida albicans*)، وللأوالي؛ وكمضاد للروماتيزم ومضاد أكسدة [2,3,5] ، ومن ناحية أخرى كعقار محتمل للسرطان [3] . يحوي النبات مركبات عديدة منها التربينات، الفلافونويدات، الفينولات، والتانينات [11]، والستيروئيدات والأحماض الكربوكسيلية [3].

أما بالنسبة للجرعة فيعطى للفرد البالغ 1.5-5 غ من النبات كنفيع شاي أو كمستخلصات ايتانولية أو مائية ، وكذلك الأمر بالنسبة لكبار السن ، أما بالنسبة للأطفال بعمر 3-12 عام فيجب ألا تعطى مستحضرات النبات إلا تحت إشراف طبي كما أن الجرعة تتعلق بوزن الجسم.

وقد بين [13] أن الزيت العطري المستخلص من الأجزاء الهوائية المزهرة للنبات فعال ضد الجراثيم إيجابية وسلبية الغرام، بالإضافة لفعاليتها تجاه ثلاثة أنواع من خمائر الـ *Candida*.

أهمية البحث وأهدافه :

انطلاقاً من وفرة النباتات الطبية والعطرية في سورية ، ومن الدور الذي يمكن أن تلعبه في تحقيق جزء من الأمن الدوائي وإيجاد مصدر جديد للدخل القومي، ومن كون النبات المدروس موضع اهتمام في الكثير من البلدان لاحتوائه على العديد من المركبات الفعالة ذات الخصائص العلاجية تجاه الكثير من الحالات المرضية قمنا بإعداد هذا البحث . يهدف البحث إلى دراسة الخصائص النباتية للنوع *B.nigra* L. والمتضمنة دراسة الصفات الظاهرية لجميع أجزاء النبات بالتفصيل، بالإضافة للدراسة التشريحية للساق والورقة .

مواد وطرائق البحث :

أولاً- جمع العينات :

جمع النبات من مدينة اللاذقية أول طريق دمسرخو ، وهو المكان الوحيد الذي وجد فيه وتم تنظيفه من الغبار والشوائب العالقة به تمهيداً لإجراء الدراسة عليه .

تم إجراء البحث في مخابر قسم علم الحياة النباتية في كلية العلوم بجامعة تشرين .

ثانياً- دراسة الصفات الظاهرية :

وصف النبات بالكامل توصيفاً علمياً دقيقاً إذ درست الصفات الظاهرية للأعضاء النباتية

المختلفة : الساق ، الورقة ، الزهرة {السبلات ، البتلات ، المذكر (الأسدية) ، المانت

(المدقة)} والثمرة بالعين المجردة وباستخدام مكبرة يدوية ومكبرة ضوئية ومجهر ضوئي .

قيست أبعاد مختلف الأجزاء باستخدام متر معدني ومسطرة مدرجة وورقة ميللمترية .

ثالثاً- الدراسة التشريحية :

درست البنية النسيجية للورقة والساق بإجراء عدد كبير من المقاطع العرضية الرقيقة ، وتلوينها بطريقة التلوين المضاعف ، ثم اختيرت أفضل المقاطع وفحصت بالمجهر العادي . كما درست الأوبار اللامسة (الواقية) والأوبار الغدية ، وكذلك أنماط المسام عن طريق نزع البشرة السفلية للورقة ووضعها في قطرة ماء على شريحة زجاجية وتغطيتها بساترة ثم فحصها بالمجهر الضوئي .

النتائج والمناقشة :

أولاً - نتائج دراسة الصفات الظاهرية :

إن النوع *B.nigra* نبات عشبي معمر ، متفرع بكثافة ومغطى بأوبار كثيفة يصل ارتفاعه إلى 150سم (الشكل 1). ويزوره النحل بكثرة (الشكل 2) . الساق قائمة ذات مقطع مربع بسبب وجود النسيج الدعامي Collenchyma في زواياها الأربع على طول امتداد الساق وهي مجوفة في مركزها (الشكل 3). الورقة بسيطة، بيضوية إلى قلبية الشكل، معنقة، حوافها مسننة بشكل منتظم وتنتهي بقمة ضيقة. موبرة ذات لون أخضر على الوجه العلوي وأخضر رمادي على الوجه السفلي، يبرز العصب المركزي والأعصاب الثانوية الكثيرة على وجهها السفلي بشدة (الشكل 4)، تبدو الورقة بمظهر مجعد بسبب بروز سطح القرص بين الأعصاب وتفرعاتها . تتوضع الأوراق على الساق بشكل متقابل متصالب، والأوراق الزهرية تشبه الأوراق الساقية لكنها أصغر منها، وأطول من الدورات الزهرية، يصل طول الورقة حتى 8 سم وعرضها حتى 6 سم ، في حين يبلغ طول المعلاق 3 سم. أما نمط التعريق فهو من النوع الشبكي ، وتكون تفرعات الأعصاب الثانوية ممتدة حتى حافة قرص الورقة ، وهذا النمط يسمى بالتعريق الشعاعي Actinodromous كما ذكر [14].

- تجتمع الأزهار في مجموعات تتوضع بشكل دوارات كثيفة وتكون بارزة نحو الخارج (الشكل 5) وهي تبدأ من الأسفل وتكون متباعدة. القنابات خيطية الشكل تقريباً محززة وموبرة، طولها 6 مم، وهو ما يعادل ثلثي طول الكأس تقريباً.
- الزهرة صغيرة ذات لون زهري إلى بنفسجي تكسوها أوبار كثيفة ، طولها 18 مم (الشكل 6) وأجزاؤها :
- الكأس عبارة عن خمس سبلات ملتحة بشكل أنبوب مستقيم يتسع في الأعلى ، طوله 10 مم، وهو مثلث بشدة بعشرة أثلام ، تنفصل السبلات في نهاية الأنبوب بأسنان قصيرة مثلثية الشكل ، متساوية ، نهاياتها مستدقة ومنحنية للخلف تشبه النجمة في المنظر العلوي، طولها حوالي 3 مم . تغطي حواف الكأس الخارجية بكثافة بالأوبار اللامسة والغدية (الشكل 7).
- التويج زهري اللون طوله 16 مم وهو مكون من خمس بتلات ملتحة بشكل أنبوب طويل مستقيم محرز وغير موبر. يفصل هذا الأنبوب في نهايته إلى شفتين: شفة عليا مستقيمة مكونة من بتلتين ملتحمتين نهاياتهما مدورة وتتفصلان في الأعلى بشكل بسيط، تكسو الشفة العليا أوبار طويلة كثيفة ، كما يتوضع ضمنها الأسدية والقلم والميسمان. وشفة سفلى منحنية للأسفل مكونة من التحام ثلاث بتلات عليها عروق، البتلتان الجانبيتان شكلهما بيضوي متطاوول ولهما نهاية مسننة، أما البتلة الوسطى فهي عريضة وممتدة إلى الخارج من البتلتين الجانبيتين، نهايتها مدورة مع انخماص في وسطها (الشكل 8).
- المذكر : أربع أسدية ملتحة مع الشفة العليا، اثنتان خارجيتان أطول من الداخليتين، خيوطها بيضاء عليها أوبار طويلة وتنتهي بمآبر صغيرة سوداء اللون (الشكل 9).
- المأنث : مبيض علوي مكون من أربع كرايل ملتحة بكل منها بويضة واحدة ذات توضع مشيمي محوري، يعلو المبيض قلم طويل أبيض اللون طوله 11 مم ينتهي بميسمين متساويين بالطول. (الشكل 10) . يوجد

أسفل المبيض قرص غدي. (الشكل 11) .

الثمار بيضوية متطاولة، ذات لون بني داكن طولها 2 مم وسطحها تقريباً أملس .
(الشكل 12) .

يزهر النبات ما بين أيار - أيلول.

وهذه الصفات الظاهرية تتوافق مع الدراسات الظاهرية السابقة للنبات [8, 11, 15, 16]

مع بعض الاختلافات البسيطة التي تعزى للعوامل البيئية ، كما تتطابق مع دراسة [10]

. ويوضح الجدول (1) أبعاد أجزاء النبات .

جدول (1) : متوسط أبعاد أجزاء نبات *B. nigra*

ارتفاع النبات	متوسط طول الورقة	متوسط عرض الورقة	متوسط طول الزهرة	متوسط طول الكأس	متوسط طول التويج	متوسط طول القلم	متوسط طول الثمرة
150 سم	8 سم	6 سم	18 مم	10 مم	16 مم	11 مم	2 مم



الشكل (1): منظر عام لنبات *B. nigra*



الشكل (2): نحلة على النبات



الشكل (3): مقطع عرضي في الساق

تبدو فيه الفصوة المركزية



ب- وجه سفلي



أ- وجه علوي

الشكل (4): ورقة النبات



الشكل (6): الزهرة



الشكل (5): نورة النبات



الشكل (7): الكأس من الأمام ، من الأعلى



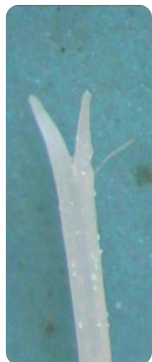
ج- الشفة العليا



ب- الشفة السفلى



الشكل (8): أ- التويج



ج- الميسمان



ب- المبيض



أ- المأنث (الشكل 10)



الشكل (9): سداتان



الشكل (12): الثمرة



الشكل (11): القرص الغدي



إن النبات وكمعظم نباتات العائلة الفاعرة مكسو بأوبار كثيفة ، فالجملة الفارعية للنبات مغطاة بالكامل بأوبار متنوعة مختلفة بالشكل والحجم (الشكل 13) .



(ب)



(ا)



(هـ)



(د)



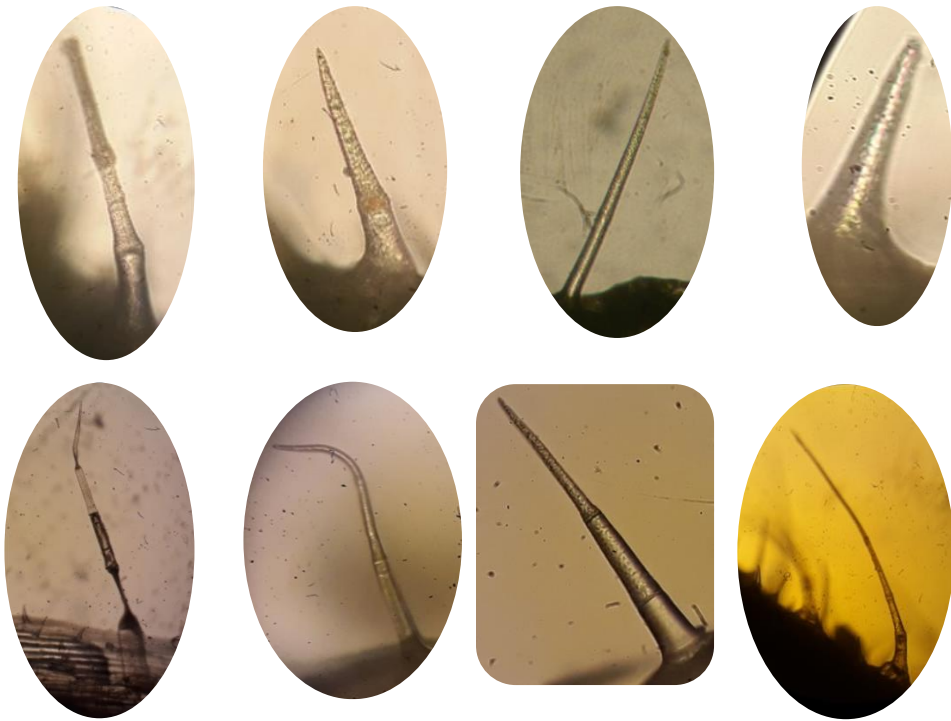
(ج)

الشكل (13) : توضع الأوبار على بعض أجزاء النبات

أ-على أعصاب الورقة ب-على قرص وعنق الورقة ج-على الكأس د-على الشفة العليا للتويج
هـ-على خيط السداة

لدى دراسة بعض هذه الأوبار بالمجهر الضوئي تبين أن هناك أوبار لامسة طويلة وقصيرة ، بعضها أملس وبعضها ذو قشيرة متأللة منها ما هي وحيدة خلية مدببة قصيرة وأخرى وحيدة خلية طويلة ، قد تكون عريضة أو رفيعة ، ومنها ما هي متعددة الخلايا على صف واحد يكون عدد خلاياها اثنتان، ثلاث، أربع وحتى خمس خلايا . بالإضافة لعدد قليل من الأوبار المفتولة والأوبار ذات النهاية المنحنية، وهناك أوبار غدية ذات

رأس كروي لا تملك قاعدة (لاطنئة) ومنها ما هي ذات قاعدة قصيرة جداً مكونة من خلية واحدة ، وبعضها ذو رأس بيضوي . الرأس قد يكون وحيد خلية أو متعدد الخلايا وعددها اثنتان أو أربع أو ثمان خلايا . أما القاعدة فمنها ما هو قصير مكون من خلية واحدة أو خليتين ومنها ما هو طويل مكون من خليتين ، ويبين (الشكلان 14-15) بعضاً من هذه الأوبار اللامسة والغدية .



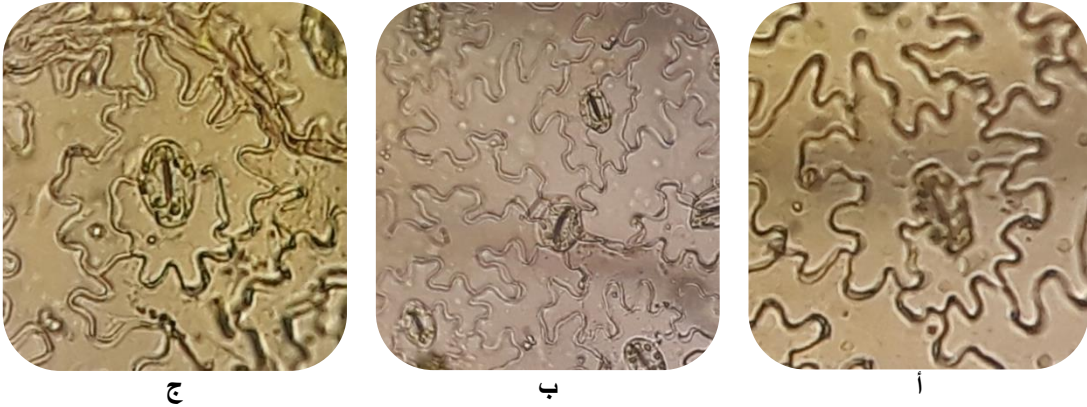
الشكل (14): بعض أشكال الأوبار اللامسة لنبات *B. nigra*



الشكل (15) : بعض أشكال الأوبار الغذائية لدى النبات المدروس

وقد ظهر قسم من هذه الأوبار في دراسة [11] بينما لم تظهر في دراستنا هذه أي أوبار متفرعة، حيث ذكر في الدراسة أن الأوبار بسيطة ونادراً ما تكون متفرعة ولوحظ وجود نوع واحد فقط من الأوبار المتفرعة وهي وبرة متفرعة إلى فرعين فقط .
أما بالنسبة للمسام فقد ظهرت على الوجه السفلي للأوراق فقط وهي من النمط المتعامد

(الشكل 16-أ) أي يحيط بالخليتين السمييتين خليتان مرافقتان متعامدتان مع فتحة السم وتدعى بحسب [17] Anomocytic وظهر بشكل قليل جداً بعض المسام من النوع غير المنتظم حيث يحيط بالخليتين السمييتين 5-6 خلايا ملحققة (الشكل 16-ب). وبشكل نادر ظهرت مسام من النمط المتعامد ولكن تكون فيه إحدى الخليتين الملحقتين وهي الكبيرة محيطة تقريباً بالثانية (الشكل 16-ج) .



الشكل (16): أنماط المسام

ثانياً- نتائج الدراسة التشريحية :

1- البنية النسيجية للساق :

يكون المقطع العرضي للساق رباعياً ، ويتوضع النسيج الدعامي Collenchyma في زواياه الأربع تحت البشرة بعدة طبقات . تشاهد الطبقات التالية في المقطع العرضي من الخارج نحو الداخل :

- بشرة : طبقة واحدة من الخلايا تصدر عنها الأوبار .

- نسيج حشوي Parenchyma قشري : عدد من الطبقات الخلوية تحوي فراغات وتحيط بالأسطوانة المركزية .

- حزم وعائية ناقلة : تنتشر في الأسطوانة المركزية بشكل حلقة حزم وعائية كبيرة تتخللها حزم وعائية صغيرة .
- نسيج حشوي Parenchyma مخي : خلايا كبيرة الحجم .
- فضوة كبيرة في المركز . كما في (الشكل 17) .



الشكل (17) : مقطع عرضي في ساق النبات المدروس

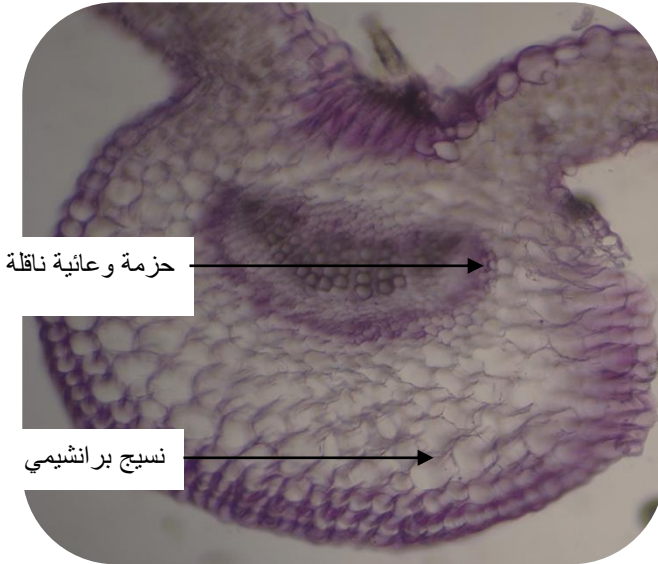
2- البنية النسيجية للورقة :

- يظهر (الشكل 18) مقطعاً عرضياً في منطقة نصل الورقة ، وتبدو فيه الطبقات التالية :
- بشرة عليا : طبقة واحدة من الخلايا المستطيلة تصدر عنها أوبار لامسة وغدية .
 - نسيج حباكي (عمادي) : صف واحد من الخلايا المتطاولة المتراصة تحت البشرة العليا .
 - نسيج فراغي : صفان إلى ثلاثة صفوف من الخلايا مع فراغات بينية كبيرة نسبياً .
 - بشرة سفلى : طبقة واحدة من الخلايا تصدر عنها الأوبار اللامسة والغدية .
- وقد لوحظ أن خلايا البشرة السفلى أصغر من خلايا البشرة العليا . هذا وتغطي طبقتا البشرة بقشيرة رقيقة .



الشكل (18): مقطع عرضي في الورقة - منطقة النصل

أما في منطقة العصب المركزي فتظهر بشرتان عليا وسفلى وبرانشيم تتوسطه حزمة وعائية ناقلة كبيرة (الشكل 19). وتظهر الحزم الوعائية الناقلة الصغيرة على مستوى مقاطع الأعصاب الثانوية.



الشكل (19): مقطع عرضي في الورقة - منطقة العصب المركزي

توافقت دراستنا هذه مع دراسة [11] إلى حد ما ، وكان هناك اختلاف في البنية النسيجية للورقة في منطقة النصل إذ ظهر في تلك الدراسة وجود صف إلى صفين من الخلايا في النسيج الفراغي ، أما في دراستنا فقد أوضحنا وجود صفين إلى ثلاثة صفوف من هذه الخلايا .

الاستنتاجات والمقترحات :

الاستنتاجات :

- أجريت دراسة للصفات الظاهرية ودراسة تشريحية للنوع *B.nigra* L. ، وهذه الدراسة هي الأولى في سوريا لهذا النوع النباتي .
- بينت دراسة الصفات الظاهرية أن النبات مكسو بكامله بالأوبار اللامسة فضلاً عن وجود الأوبار الغدية التي تفرز الزيت العطري وهناك تنوع كبير في أشكالها ، كما تبين وجود قرص غدي في الزهرة يتوضع أسفل المبيض .
- بينت الدراسة التشريحية أن المقطع العرضي للساق رباعي وفي مركزه فصوص كبيرة ، كما أظهر المقطع العرضي للورقة وجود النسيج الحباكي تحت البشرة العليا فقط .

المقترحات :

- 1- الاهتمام بالنبات ومحاولة الحفاظ عليه من الانقراض، لأننا لم نلاحظ وجوده إلا في المكان المذكور في متن الدراسة.
- 2- إجراء دراسات معمقة على النوع *B.nigra* وعلى أنواع أخرى تابعة للجنس *Ballota* .
- 3- استخلاص الزيت العطري من النبات والكشف عن مركباته للاستفادة منها صيدلانياً وطبياً وصناعياً .

المراجع العلمية :

- 1- CRONQUIST , A. , 1981- An integrated system of classification of flowering plant. Columbia University press , N.Y. 1881 (in : classification of plant . AL SAHAR,F. K) .
- 2- Majdi M. , Dastan D. , Maroofi H. , 2017- Chemical composition and antimicrobial activity of essential oils of *Ballota nigra* subsp. *kurdica* from Iran. Jundishapur J Nat Pharm Prod. August; Vol.12, No.3 .
- 3- Przerwa F. , Kukowka A. , Uzar I. , 2020- *Ballota nigra* L. - an overview of pharmacological effects and traditional uses . International journal edited by the Institute of Natural Fibres and Medicinal plants . vol.66 No.3
- 4- Duke JA. , Bogenschutz - Godwin MJ. , Cellier J De. , Duke PAK. , 2002- Handbook of Medicinal Herbs, 2th ed. Florida USA.
- 5- Kaya A. , Kürkçüoğlu M. , Dinç M. , Döğü S. , 2017- Compositions of the essential oils of *Ballota nigra* subsp. *uncinata* and subsp. *anatolica* from Turkey. Indian journal of pharmaceutical Education and Research , vol.51 .
- 6- Rechinger K. , 1982- Flora Iranica. Austria: Akademische Druck- U verlagsanstalt .
- 7- Ertas A. , Boga M. , Yesil Y. , 2014- Phytochemical profile and ABTS cation radical scavenging , cupric reducing antioxidant capacity and anti cholinesterase activities of endemic *Ballota nigra* L. *anatolica* J coast life Med.
- 8- JAFRI, S.M.H & El-GADI , A. , 1985- Flora of Libya , (Lamiaceae) , Al-faateh University , Faculty of science , Department of Botany , Tripoli-Libya , Vol.118 .

- 9- العيسوي داود محمد حسن ، 1998- الدليل الحقلّي لأزهار الأردن البرية والدول المجاورة ، عمان .
- 10- مخلوف محمد الهادي ، 2011- دراسة بعض أنواع من الفلورا (ثنائيات الفلقة) في محافظة اللاذقية/سوريا ، أطروحة دكتوراه ، جامعة تشرين ، كلية العلوم .
- 11- SAHIN F. , TOKER M. , EZER N. , 2005- Botanical Properties of a Mild Sedative : *Ballota nigra* L. Subsp. *nigra* . FABAD J. Pharm. sci. ,Vol.30 , 94-99 .
- 12- Bertrand MC. , Tillequin F. , Bailleul F. , 2000-Two major Flavonoids from *Ballota nigra* . Biochem syst Ecol.
- 13- Fraternal D. , Bucchini A. , Giamperi L. , Ricci D. , 2009- Essential oil composition and antimicrobial activity of *Ballota nigra* L. ssp. *foetida* . Nat prod commun. Apr; 4(4) .
- 14- HICKEY LJ. 1973- Classification of the architecture dicotyledons leaves ; Amer. J. Bot. Vol.60, No 1 .
- 15- DAVIS , P. H. , 1982- Flora of Turkey , Edinburgh university press , vol (7) .
- 16- MOUTERDE, P. , 1983 – Nouvell flore du liban et de la syrie , tome III – DAR EI-MACHREQ EDITEURS – BEYROUTH .
- 17- Praphakar M. , 2004- Structure , Delimitation , Nomenclature and classification of stomata . Acta Botanica sinica , Beijing , China.

معامل استمرار حل مسألة ديرخليه من أجل معادلة مونج - أمبير العقديّة

الدكتور: محمد شراباتي
كلية العلوم / جامعة البعث

المخلص

نوجد في هذا البحث معامل استمرار حل مسألة ديرخليه من أجل معادلة مونج - أمبير العقديّة في ساحة محدودة ذات حدود غير ملساء $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ وذلك بدلالة معامل استمرار التابع φ المعرف على حدود الساحة $\partial\Omega$ و معامل استمرار حل جزئي w لهذه المسألة. أخيراً نحصل على معامل الاستمرار للحل عندما يكون الحل الجزئي محققاً لشرط هولدر أو منتبياً إلى صف زيغمووند.

الكلمات المفتاحية: مسألة ديرخليه ، معادلة مونج - أمبير العقديّة ، معامل الاستمرار ، الحل الجزئي المستمر ، التابع المتعدد تحت توافقي.

Modulus of continuity of the solution to the Dirichlet problem for a complex Monge- Ampere equation

Dr. Mohamad Charabati
Faculty of Science / Al-Baath University

Abstract

We find in this paper the modulus of continuity of the solution to the Dirichlet problem for a complex Monge-Ampere equation in a bounded domain with non-smooth boundary $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, in terms of the modulus of continuity of the function φ defined on the boundary $\partial\Omega$ and the modulus of continuity of a subsolution w to this problem.

We finally obtain the modulus of continuity of the solution when the subsolution satisfies a Holder condition or belongs to Zygmund class.

Key Words: The Dirichlet problem, Complex Monge-Ampere equation, Modulus of continuity, continuous subsolution, plurisubharmonic function.

المقدمة.

تعتبر معادلة مونج - أمبير من المعادلات الهامة في مجال التحليل الرياضي سواء كانت معادلة مونج - أمبير الحقيقية التي تمت دراستها من قبل عدة علماء ومنهم Luis A. Caffarelli الحائز على جائزة آبل للعام 2023، أم كانت معادلة مونج - أمبير العقديّة والتي تمت دراستها بداية من قبل العالمين Bedford و Taylor في العام 1976 وإثبات وجود حل مستمر لهذه المعادلة وتعريفهما لمؤثر مونج - أمبير العقدي من أجل توابع متعددة تحت توافقية محدودة محلياً .

يهدف البحث لإيجاد معامل استمرار حل مسألة ديرخلية لمعادلة مونج - أمبير العقديّة

الآتية:

$$\begin{cases} (dd^c u)^n = \mu & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

حيث $(dd^c.)^n$ يشير إلى مؤثر مونج - أمبير العقدي.

في البداية يمكن أن نشير للقارئ إلى عدة مراجع هامة حول معادلة مونج - أمبير العقديّة ومنها [8] و [9] .

سنورد هنا موجزاً سريعاً لبعض النتائج الهامة التي تم إثباتها فيما يتعلق بهذه المسألة. لقد برهن بيدفورد و تايلور في [1] على وجود الحل المستمر لمسألة ديرخلية (1) عندما يكون القياس في الطرف الثاني من الشكل $f dV$ حيث f تابع مستمر على $\bar{\Omega}$ و dV قياس ليبينغ في \mathbb{C}^n ، و توصلنا إلى أن الحل يحقق استمرارية هولدر في حال كان التابعان f و φ يحققان شرط هولدر للاستمرار .

لاحقاً ، تمكن Kolodziej [10] من إثبات وجود الحل المستمر للمسألة من أجل $f \in L^p(\Omega)$ حيث $p > 1$ ، وفي العام 2008 قام Guedj و Kolodziej و Zeriahi بدراسة استمرارية هولدر للحل عندما $f \in L^p(\Omega)$ شريطة أن يكون محدوداً بقرب $\partial\Omega$ ،

كما تم تطوير هذه النتيجة والتخلي عن شرط محدودية f بقرب $\partial\Omega$ في [2] وتحسين قيمة أس هولدر باستخدام العلاقة التي تربط مؤثر موج - أمبير الحقيقي بمؤثر موج - أمبير العقدي.

أما من أجل القياسات المغايرة لقياس ليبيج فقد تم الحصول في [4] على استمرارية هولدر لحل مسألة ديرخليه في حالة القياس هو قياس هاوسدورف - ريس .

حديثاً تم طرح السؤال من قبل Zeriah في [6] حول امكانية إثبات استمرارية هولدر لحل المسألة بوجود حل جزئي محقق أيضاً لاستمرارية هولدر ، وقد تمت الاجابة على هذا السؤال من قبل Nyguen في [12] و [13] .

و بغية دراسة حالة أكثر عموماً لقد تم في [5] إثبات وجود الحل المستمر للمسألة عندما يوجد حل جزئي مستمر ذي معامل استمرار يحقق شرطاً متعلقاً بقابلية المكاملة .

الهدف من البحث.

يهدف هذا البحث لإيجاد معامل استمرار الحل لمسألة ديرخليه (1) في ساحة ذات حدود غير ملساء في حال وجود حل جزئي مستمر للمسألة. وبشكل أدق، أي إذا كان μ قياساً يحقق:

$$\mu \leq (dd^c w)^n$$

حيث w هو تابع متعدد تحت توافق في الساحة Ω ومستمر على $\bar{\Omega}$ ومعامل استمراره w يحقق شرطاً يتعلق بقابلية المكاملة .

بعض المفاهيم الأساسية.

تعريف.

ليكن u متابعاً مستمراً على المجموعة المترابطة G ، نعرّف معامل استمرار u ، والذي نرمز له بـ ω_u ، وفق العلاقة :

$$\omega_u(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |u(x) - u(y)| ; x, y \in G$$

حيث δ مقدار موجب صغير .

تعريف.

نقول عن التابع $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ إنه متعدد تحت توافقي plurisubharmonic على Ω إذا كان هذا التابع تحت توافقي على تقاطع المجموعة Ω مع أي مستقيم عقدي من الشكل $\{a + b\xi ; \xi \in \mathbb{C}\}$ حيث $a, b \in \mathbb{C}^n$ ثابته .

نرمز عادة بـ $PSH(\Omega)$ لمجموعة جميع التوابع المتعددة تحت التوافقية على Ω . نذكر هنا بعض خصائص هذه التوابع والتي سنحتاجها خلال بحثنا ويمكن الرجوع إلى إثباتها في المرجع [9].

1. إنّ مجموعة التوابع المتعددة تحت التوافقية $PSH(\Omega)$ تشكل مخروطاً محدباً بمعنى أنه إذا كان $u_1, u_2 \in PSH(\Omega)$ و $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ فإنّ $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in PSH(\Omega)$

2. إذا كان $u \in PSH(\Omega)$ فإن $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$ هو تابع متعدد تحت توافقي في الساحة $\Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega | dist(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ ، حيث إنّ ρ_ε أسرة النوى الملساء ذات الدعامات المترابطة $supp \rho_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$ بحيث $\int_{B(0, \varepsilon)} \rho_\varepsilon dv = 1$ ويكون $u_\varepsilon \searrow u$ عندما $\varepsilon \searrow 0$ و يسمى u_ε التنظيم القياسي standard regularization للتابع u .

3. لتكن U مجموعة جزئية مفتوحة من Ω ، إذا كان $u \in PSH(\Omega)$ و $v \in PSH(U)$ و $\limsup_{z \rightarrow y} v(z) \leq u(y)$ من أجل أي $y \in \partial U \cap \Omega$ ، عندئذ يكون التابع :

$$\omega = \begin{cases} \max\{u, v\} & \text{in } U \\ u & \text{in } \Omega \setminus U \end{cases}$$

متعدد تحت توافق في Ω .

4. إذا كان $u, v \in PSH(\Omega)$ وكان $u \leq v$ تقريباً في كل مكان في Ω (أي تتحقق المتراجحة في Ω باستثناء مجموعة قياسها معدوم) عندها فإن $u \leq v$ في كامل الساحة Ω .

5. ليكن التابع $u \in C(\Omega) \cap PSH(\Omega)$ ، عندئذ فإن التابعين التاليين:

$$u_\delta(z) = \sup_{|\xi| \leq \delta} u(z + \xi) ; z \in \Omega_\delta$$

و

$$\hat{u}_\delta(z) = \frac{1}{\tau_{2n} \delta^{2n}} \int_{|\xi-z| \leq \delta} u(\xi) dV(\xi) ; z \in \Omega_\delta$$

هما تابعان متعددان تحت توافقين في الساحة Ω_δ .

ولتوضيح تعريف مؤثر مونج . أمبير العقدي لا بد لنا من تعريف المؤثرين التفاضليين

$$d = \partial + \bar{\partial} \quad \text{و} \quad d^c = i/4(\bar{\partial} - \partial) \quad \text{و يكون}$$

$$dd^c = i/2 \partial \bar{\partial}$$

إذا كان التابع u أملس في الساحة Ω فإنه من الواضح أن

$$dd^c u = i/2 \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

وبذلك يمكن تعريف مؤثر مونج - أمبير العقدي للتابع الملساء كما يلي:

$$(dd^c u)^n = \det \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right) \beta^n$$

حيث

$$\beta = i/2 \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

لقد تمكن بيدفورد وتاييلور في بحثهما [1] من تعميم تعريف هذا المؤثر إلى توابع متعددة تحت توافقية محدودة محلياً (أي لتوابع ليست ملساء) وإثبات أن $(dd^c u)^n$ يشكل قياساً على المجموعة Ω .

تعريف.

لتكن K مجموعة جزئية من المجموعة Ω نعرف السعة وفق بيدفورد وتاييلور، والتي سنرمز لها $Cap(K, \Omega)$ ، بالعلاقة:

$$Cap(K, \Omega) = \sup \left\{ \int_K (dd^c u)^n ; u \in PSH(\Omega); -1 \leq u \leq 0 \right\}$$

سنحتاج إلى مبدأ المقارنة المتعلق بمؤثر مونج. أمبير العقدي والذي يفيدنا في مقارنة قيم تابعين متعددين تحت توافقيين من خلال مقارنة مؤثري مونج - أمبير لهما.

مبرهنة (مبدأ المقارنة) [11].

ليكن $u, v \in PSH(\Omega)$ بحيث $\liminf_{z \rightarrow \partial\Omega} (u(z) - v(z)) \geq 0$ ، وإذا كان $(dd^c u)^n \leq (dd^c v)^n$ بمعنى القياس على Ω ، عندئذ فإن $v \leq u$ في Ω .

سيكون إهتمامنا في هذا البحث على التعامل مع الساحات المحدودة غير الملساء عندما يكون تابع تعريفها ρ محققاً لشرط ليبشتز وليس أملساً، علماً أن الدراسات السابقة لمعادلة مونج - أمبير كانت تقوم في ساحات ملساء.

تعريف.

نقول عن الساحة المحدودة $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ إنها ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة إذا وجدت مجموعة مفتوحة Ω' تحوي $\bar{\Omega}$ وتابع متعدد تحت توافقي يحقق شرط ليبشتز $\rho: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث يكون:

- $\partial\Omega = \{z \in \Omega'; \rho(z) = 0\}$ و $\Omega = \{z \in \Omega'; \rho(z) < 0\}$
- $dd^c \rho \geq \beta$ في Ω .

مثال.

1. كل ساحة محدبة بقوة هي ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة، وذلك يعود لوجود تابع تعريف للساحة المحدبة بقوة ρ وهو تابع ليبشتز يحقق $\rho - c|z|^2$ محذب حيث c ثابت موجب.
2. كل ساحة شبه محدبة بقوة strictly pseudoconvex هي ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة.
3. تقاطع أي عدد منتهٍ من ساحات ليبشتز فوق محدبة بقوة هو أيضاً ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة.

النتائج ومناقشتها.

نريد في هذا البحث إثبات المبرهنة الآتية التي تعطينا معامل استمرار حل مسألة ديرخليه (1) بدلالة معامل استمرار الحل الجزئي w ومعامل استمرار التابع φ المعروف على $\partial\Omega$.

مبرهنة 1.

ليكن φ تابع معرف ومستمر على $\partial\Omega$ أي $\varphi \in C(\partial\Omega)$ ، ليكن μ قياس بوريل الموجب على ساحة ليبشتز فوق محدبة بقوة $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ويحقق $\mu \leq (dd^c w)^n$ حيث

W تابع متعدد تحت توافق على Ω ومستمر على $\bar{\Omega}$ وينعدم على $\partial\Omega$ ، ومعامل استمراره ω_w يحقق الشرط التالي من أجل قيمة ما $\tau > 0$:

$$\int_0^1 \frac{\omega_w(t)}{t^{1+\tau}} dt < \infty$$

عندئذ معامل استمرار حل مسألة ديرخلية (1) يحقق العلاقة:

$$\omega_u(\delta) \leq C \max \left\{ \omega^{\frac{\gamma}{n}}(\delta^\epsilon), \frac{\omega^\beta(\delta^\epsilon)}{\delta^{2\epsilon}} \right\}$$

حيث $0 < \gamma < \frac{1}{n+1}$ و $\epsilon = \frac{4}{4n+1}$ و β ثابت موجب ، يكون من أجله $\frac{\omega^\beta(t)}{t^2}$ تابعاً متزايداً ، و حيث:

$$\omega(t) = \max \left\{ \omega_\varphi \left(t^{\frac{1}{2}} \right), \omega_w(t), t^{\frac{1}{2}} \right\}$$

لنلاحظ أنّ وجود الحل الوحيد والمستمر u للمسألة ينتج مباشرة من المبرهنة 1 في [5] ونحتاج لإثبات هذه المبرهنة إلى بعض التمهيديات والمبرهنات المساعدة لدراسة معامل استمرار الحل لمسألة ديرخلية (1) ولذلك سنعرف هنا:

$$u_\delta(z) = \sup_{|\xi| \leq \delta} u(z + \xi) ; z \in \Omega_\delta$$

حيث

$$\Omega_\delta := \{z \in \Omega ; \text{dist}(z, \partial\Omega) > \delta\}$$

نعلم أنّ إيجاد معامل استمرار الحل يتمثل في الحصول على تقدير لنظيم $u_\delta - u$ في $\square^\infty(\Omega_\delta)$ ، ولكن لصعوبة دراسة هذا النظيم سنلجأ لدراسة نظيم $\hat{u}_\delta - u$ في $\square^\infty(\Omega_\delta)$ حيث:

$$\hat{u}_\delta(z) = \frac{1}{\tau_{2n} \delta^{2n}} \int_{|\xi-z| \leq \delta} u(\xi) dV(\xi) ; z \in \Omega_\delta$$

حيث τ_{2n} حجم الكرة الواحدة في \mathbb{C}^n .

وبالاستفادة من التمهيدية 3.4.3 في [3] نحصل على $\|u_\delta - u\|_{\square}^\infty \leq A \Theta(\delta)$ وإذا كان $\|\hat{u}_\delta - u\|_{\square}^\infty \leq B \Theta(\delta)$ ، حيث A و B ثوابت عددية و $\Theta(\delta)$ معامل استمرار ما يسعى نحو الصفر عندما δ يسعى نحو الصفر .
 بما أن التابع \hat{u}_δ معرف على Ω_δ لذلك وبغية الحصول على تابع معرف على كامل الساحة Ω سنبرهن التمهيدية التالية والتي سنقيدنا في تقدير نظم $\hat{u}_\delta - u$.

تمهيدية.

لتكن $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ساحة لبيشترز فوق محدبة بقوة و $\varphi \in C(\partial\Omega)$. لنفرض وجود تابع w متعدد تحت توافقي في Ω ومستمر على $\bar{\Omega}$ وينعدم على $\partial\Omega$ ويحقق الشرط $\mu \leq (dd^c w)^n$. عندئذٍ يوجد $\delta_0 > 0$ صغير بقدر كافٍ و $c_0 > 0$ يتعلق بالساحة Ω بحيث من أجل أي $0 < \delta_1 \leq \delta < \delta_0$ يكون التابع :

$$\tilde{u}_{\delta_1} = \begin{cases} \max\{\hat{u}_{\delta_1}, u + c_0\omega(\delta)\} & \text{in } \Omega_\delta \\ u + c_0\omega(\delta) & \text{in } \Omega \setminus \Omega_\delta \end{cases}$$

متعدد تحت توافقي في Ω ومستمر في $\bar{\Omega}$.

البرهان:

لنشكل بدايةً من الحل الجزئي w تابعاً v يحقق $v \leq u$ في Ω و $v = \varphi$ على $\partial\Omega$ ، ومن أجل ذلك نضع $v = w + h_\varphi$ حيث h_φ هو حل مسألة ديرخليه المتجانسة أي:

$$(dd^c h_\varphi)^n = 0 \quad \text{in } \Omega \quad , \quad h_\varphi = \varphi \quad \text{on } \partial\Omega.$$

واستناداً إلى المبرهنة 2.1.1 في [3] يكون معامل استمرار h_φ هو

$$\omega_{h_\varphi}(\delta) \leq C \max\left\{\omega_\varphi\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right), \delta^{\frac{1}{2}}\right\}$$

وبالتالي يكون $(dd^c v)^n \leq \mu$ في Ω و $v = \varphi$ على $\partial\Omega$ ، وبحسب مبدأ المقارنة يكون $v \leq u$ في Ω و في هذه الحالة يكون $\omega_v(\delta) \leq C \omega(\delta)$.

لإثبات التمهيدية يكفي أن نثبت أن $\hat{u}_{\delta_1} \leq u + c_0 \omega(\delta)$ على $\partial\Omega_\delta$ لأننا نحصل بذلك على النتيجة المرجوة اعتماداً على الخاصة 3 للتتابع المتعددة تحت التوافقية.

بحسب النتيجة 2.4.6 في [3] يوجد تابع متعدد فوق توافقي \tilde{v} مستمر على $\bar{\Omega}$ بحيث يكون $\tilde{v} = \varphi$ على $\partial\Omega$ ويحقق

$$\omega_{\tilde{v}}(\delta) \leq C \max \left\{ \omega_\varphi \left(\delta^{\frac{1}{2}} \right), \delta^{\frac{1}{2}} \right\}$$

حيث الثابت C يتعلق بالساحة Ω ، وبحسب مبدأ القيمة العظمى يكون $u \leq \tilde{v}$ في Ω .
لنأخذ $z \in \partial\Omega_\delta$ وبنتيجة استمرارية التابع u يوجد $\xi \in \mathbb{C}^n$ و $|\xi| = \delta_1$ بحيث يكون $\hat{u}_{\delta_1}(z) \leq u(z + \xi)$ وبالتالي نحصل على:

$$\hat{u}_{\delta_1}(z) - u(z) \leq u(z + \xi) - u(z) \leq \tilde{v}(z + \xi) - v(z)$$

لنأخذ $\xi_0 \in \mathbb{C}^n$ حيث $|\xi_0| = \delta$ و $z + \xi_0 \in \partial\Omega$ وبالتالي يكون :

$$\tilde{v}(z + \xi_0) = v(z + \xi_0) = \varphi(z + \xi_0)$$

ويمكننا أن نستنتج أن

$$\begin{aligned} \tilde{v}(z + \xi) - v(z) &= \tilde{v}(z + \xi) - \tilde{v}(z + \xi_0) + v(z + \xi_0) - v(z) \\ &\leq 2\omega_{\tilde{v}}(\delta) + \omega_v(\delta) \leq c_0 \omega(\delta) \end{aligned}$$

حيث c_0 ثابت يتعلق بالساحة Ω .

ملاحظة.

يمكننا الاستفادة من برهان التمهيدية السابقة في الحصول على تقدير معامل استمرار حل مسألة ديرخليه قرب حدود الساحة ، وبشكل أدق إذا كان $z_1, z_2 \in \Omega \setminus \Omega_\delta$ بحيث $|z_1 - z_2| \leq \delta$ فإن $|u(z_1) - u(z_2)| \leq 3c_0 \omega(\delta)$. في الواقع، يكفي أن نختار $z_1^*, z_2^* \in \partial\Omega_\delta$ بحيث يكون $|z_1 - z_1^*| \leq \delta$ و $|z_2 - z_2^*| \leq \delta$ و $|z_1^* - z_2^*| \leq \delta$ عندها يكون

$$\begin{aligned} & |u(z_1) - u(z_2)| \leq \\ & \leq |u(z_1) - u(z_1^*)| + |u(z_1^*) - u(z_2^*)| + |u(z_2) - u(z_2^*)| \\ & \leq 3c_0\omega(\delta) \end{aligned}$$

في المبرهنة التالية سنعمل على حساب نظيم $\hat{u}_\delta - u$ في $\mathcal{L}^1(\Omega_\delta, \mu)$ في مبرهنة مساعدة.

إن تكامل $\hat{u}_\delta - u$ بالنسبة للقياس μ في الساحة $\Omega_{\bar{\delta}}$ يعطى بالعلاقة:

$$\int_{\Omega_{\bar{\delta}}} (\hat{u}_\delta - u) d\mu \leq C \omega^{1/n}(\delta^{4/(4n+1)}),$$

$$\cdot \omega(t) = \max \left\{ \omega_\varphi \left(t^{\frac{1}{2}} \right), \omega_w(t), t^{\frac{1}{2}} \right\} \text{ و } \delta \leq \bar{\delta}$$

البرهان:

لنأخذ $0 < \epsilon < 1$ والذي سيتم تحديده لاحقاً، وباستخدام التمهيدية السابقة يكون:

$$\tilde{u}_\delta = \begin{cases} \max\{\hat{u}_\delta, u + c_0\omega(\delta^\epsilon)\} & \text{in } \Omega_{2\delta^\epsilon} \\ u + c_0\omega(\delta^\epsilon) & \text{in } \Omega \setminus \Omega_{2\delta^\epsilon} \end{cases}$$

تابع متعدد تحت توافقي في Ω ومستمر على في $\bar{\Omega}$.

لنستعرض التكامل الآتي:

$$\begin{aligned} I & := \int_{\Omega_{2\delta^\epsilon}} (\hat{u}_\delta - u)^n d\mu \leq \\ & \leq \int_{\Omega_{2\delta^\epsilon}} [\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^n d\mu + c_1\mu(\Omega)\omega(\delta^\epsilon) \end{aligned}$$

لنأخذ التنظيم القياسي للتابع w وهو $w_{\delta^\epsilon} \in PSH(\Omega_{\delta^\epsilon}) \cap C^\infty(\Omega_{\delta^\epsilon})$ ، وبما أن

$$\mu \leq (dd^c w)^n$$

$$I \leq I_1 + I_2 + c_1\mu(\Omega)\omega(\delta^\epsilon)$$

حيث:

$$I_1 := \int_{\Omega_{2\delta^\epsilon}} [\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^n (dd^c w_{\delta^\epsilon})^n$$

و

$$I_2 := \int_{\Omega_{2\delta^\epsilon}} [\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^n [(dd^c w)^n - (dd^c w_{\delta^\epsilon})^n]$$

لنبحث عن تقدير للتكامل الأول I_1 ، ولنلاحظ أن المشتقات من المرتبة الثانية للتابع الاملس w_{δ^ϵ} أصغر من $\|w\|/\delta^{2\epsilon}$ ، وهكذا يكون

$$I_1 \leq \frac{c_2}{\delta^{2n\epsilon}} \left(\|u\|_\infty + 1 \right)^{n-1} \|w\|_\infty^n \int_{\Omega_{2\delta^\epsilon}} [\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))] dV$$

لدينا $\tilde{u}_\delta = \max\{\hat{u}_\delta, u + c_0\omega(\delta^\epsilon)\}$ في الساحة $\Omega_{2\delta^\epsilon}$ ، وهذا يقتضي أن :

$$I_1 \leq \frac{c_2}{\delta^{2n\epsilon}} \left(\|u\|_\infty + 1 \right)^{n-1} \|w\|_\infty^n \int_{\Omega_\delta} [\hat{u}_\delta - u] dV$$

وباتباع نفس الخطوات في [7] ، نحصل على :

$$I_1 \leq c_3 \left(\|u\|_\infty + 1 \right)^{n-1} \|w\|_\infty^n \delta^{2-2n\epsilon}$$

الآن لنوجد تقدير للتكامل الثاني I_2 ، ولنضع

$$T := \sum_{j=0}^{n-1} (dd^c w)^j \wedge (dd^c w_{\delta^\epsilon})^{n-1-j}$$

باستخدام صيغة ستوكس [11] نحصل على :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\Omega_{\delta^\epsilon}} [\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^n [(dd^c w)^n - (dd^c w_{\delta^\epsilon})^n] \\ &= \int_{\Omega_{\delta^\epsilon}} [\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^n [dd^c(w - w_{\delta^\epsilon})] \wedge T \\ &\leq \int_{\Omega_{\delta^\epsilon}} (w - w_{\delta^\epsilon}) dd^c [\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^n \wedge T \end{aligned}$$

ويتحقق على الساحة Ω_{δ^ϵ} ما يلي :

$$\begin{aligned} dd^c[\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^n &= \\ &= n[\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^{n-1} dd^c(\tilde{u}_\delta - u) \\ &+ n(n-1)[\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^{n-2} d(\tilde{u}_\delta - u) \wedge d^c(\tilde{u}_\delta - u) \\ &\geq n[\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^{n-1} dd^c(\tilde{u}_\delta - u) \end{aligned}$$

وبالتالي نستنتج أنّ :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq -n \int_{\Omega_{\delta^\epsilon}} (w_{\delta^\epsilon} - w)[\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^{n-1} dd^c(\tilde{u}_\delta - u) \wedge T \\ &\leq n \int_{\Omega_{\delta^\epsilon}} (w_{\delta^\epsilon} - w)[\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^{n-1} dd^c u \wedge T \\ &\leq n\omega_w(\delta^\epsilon) \int_{\Omega_{\delta^\epsilon}} [\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^{n-1} dd^c u \wedge T \\ &\leq n\omega_w(\delta^\epsilon) \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\Omega_{\delta^\epsilon}} [\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^{n-1} dd^c u \wedge (dd^c w)^j \\ &\quad \wedge (dd^c w_{\delta^\epsilon})^{n-1-j} \end{aligned}$$

بما أنّ $w \leq 0$ في الساحة Ω و بحسب صيغة ستوكس مجدداً يكون

$$\begin{aligned} I_2 &\leq n\omega_w(\delta^\epsilon) \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\Omega_{\delta^\epsilon}} (-w) (-dd^c[\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^{n-1}) dd^c u \\ &\quad \wedge (dd^c w)^{j-1} \wedge (dd^c w_{\delta^\epsilon})^{n-1-j} \end{aligned}$$

ويتكرر الاستنتاج السابق على التكامل الأخير نجد أنّ:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq n(n-1)\omega_w(\delta^\epsilon) \|w\|_{\square}^\infty \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\Omega_{\delta^\epsilon}} [\tilde{u}_\delta - (u + c_0\omega(\delta^\epsilon))]^{n-2} (dd^c u)^2 \\ &\quad \wedge (dd^c w)^{j-1} \wedge (dd^c w_{\delta^\epsilon})^{n-1-j} \end{aligned}$$

وهكذا نحصل على

$$I_2 \leq (n+1)! \omega_w(\delta^\epsilon) \|w\|_{\square}^{n-1} \int_{\Omega} (dd^c u)^n$$

وبالنتيجة يصبح تقدير التكامل الأساسي I كما يلي:

$$I \leq c_3 \left(\|u\|_{\square}^{\infty} + 1 \right)^{n-1} \|w\|_{\square}^n \delta^{2-2n\epsilon} \\ + (n+1)! \omega_w(\delta^\epsilon) \|w\|_{\square}^{n-1} \int_{\Omega} (dd^c u)^n \\ + c_1 \mu(\Omega) \omega(\delta^\epsilon)$$

بما أن $\delta^{2-2n\epsilon}$ يكون ϵ نختار $\omega(\delta) = \max \left\{ \omega_\varphi \left(\delta^{\frac{1}{2}} \right), \omega_w(\delta), \delta^{\frac{1}{2}} \right\}$

متضمنة في $\omega(\delta^\epsilon)$ أي يكون $\epsilon/2 = 2 - 2n\epsilon$ أي نختار $\epsilon = 4/(4n+1)$

وبالتالي يكون:

$$I \leq C \omega(\delta^\epsilon) \quad ; \quad \epsilon = 4/(4n+1)$$

حيث C ثابت موجب يتعلق بالساحة Ω و $\mu(\Omega)$ و n و $\|u\|_{\square}^{\infty}$ و $\|w\|_{\square}^{\infty}$.

أخيراً وبحسب متراجحة هولدر يكون

$$\int_{\Omega_{2\delta^\epsilon}} (\hat{u}_\delta - u) d\mu \leq \mu(\Omega)^{1-1/n} I^{1/n} \leq C \omega^{1/n}(\delta^{4/(4n+1)})$$

إثبات المبرهنة 1.

ليكن \tilde{u}_δ التابع المتعدد تحت التوافقي والمعطى بالشكل:

$$\tilde{u}_\delta = \begin{cases} \max\{\hat{u}_\delta, u + c_0 \omega(\delta^\epsilon)\} & \text{in } \Omega_{2\delta^\epsilon} \\ u + c_0 \omega(\delta^\epsilon) & \text{in } \Omega \setminus \Omega_{2\delta^\epsilon} \end{cases}$$

لنعرف التابعين $v_2 = \tilde{u}_\delta$ و $v_1 = u + c_0 \omega(\delta^\epsilon)$ حيث c_0 ثابت موجب كما ورد

سابقاً و $\epsilon = 4/(4n+1)$. بالاستفادة من المبرهنة المساعدة يكون

$$a := \|(v_2 - v_1)_+\|_{\square^1(\Omega, \mu)}^\gamma \leq C \omega^{\gamma/n}(\delta^{4/(4n+1)})$$

حيث γ ثابت موجب يُحدد لاحقاً، كما أن $(v_2 - v_1)_+$ نقصد به

$$(v_2 - v_1)_+ = \max\{v_2 - v_1, 0\}$$

كما يمكننا بدون فقدان لعمومية المسألة أن نعتبر الثابت C في المتراجحة السابقة مساوياً

للوحد، وذلك لأنه يمكننا تقسيم طرفي معادلة مونج أمبير (1) على هذا الثابت.

نعلم أن $\omega(t)$ تابع متزايد تماماً لذلك فهو تقابل من أجل القيم الصغيرة لـ t ، وبالتالي يمكن أن نكتب :

$$\{v_1 - v_2 < -a - s\} \subset \Omega_{\delta^\epsilon} \subset \Omega_{\omega^{-1}(a^n/\gamma)}$$

بالاستفادة من التمهيديّة 1.3 في [7] نحصل على ما يلي :

$$\begin{aligned} t^n \text{Cap}(v_1 - v_2 < -a - s - t) &\leq \int_{\{v_1 - v_2 < -a - s\}} (dd^c u)^n \\ &= \mu(\{v_1 - v_2 < -a - s\}) \end{aligned}$$

وبحسب نتيجة المبرهنة 2 في [5] يكون

$$\begin{aligned} \mu(\{v_1 - v_2 < -a - s\}) &\leq \\ &\leq \frac{c}{\left[\omega^{-1}\left(\frac{n}{a\bar{\gamma}}\right)\right]^{2n}} [\text{Cap}(v_1 - v_2 < -a - s)]^{1+an} \end{aligned}$$

حيث α ثابت موجب سيتم تحديده لاحقاً.

وبالتالي ينتج من العلاقتين الأخيرتين ما يلي

$$\begin{aligned} t^n \text{Cap}(v_1 - v_2 < -a - s - t) &\leq \\ &\leq \frac{c}{\left[\omega^{-1}\left(\frac{n}{a\bar{\gamma}}\right)\right]^{2n}} [\text{Cap}(v_1 - v_2 < -a - s)]^{1+an} \end{aligned}$$

لنأخذ التابع

$$g(s) := [\text{Cap}(v_1 - v_2 < -a - s)]^{1/n}$$

المعرف على \square^+ والمتناقص والمستمر من اليمين (بحسب خواص السعة Cap).

وبالتالي فإن المتراجحة السابقة يمكن كتابتها بالشكل:

$$tg(s+t) \leq \frac{c}{\left[\omega^{-1}\left(\frac{n}{a\bar{\gamma}}\right)\right]^2} g(s)^{1+an}$$

وبحسب التمهيديّة 1.5 في [7] يكون $g(s) = 0$ من أجل جميع قيم $s \geq s^*$ حيث

$$s^* = \frac{2c g(0)^{an}}{(1 - 2^{-an}) \left[\omega^{-1} \left(a^{\frac{n}{\gamma}} \right) \right]^2}$$

هذا يعني أن $Cap(v_1 - v_2 < -a - s^*) = 0$ وبالتالي $v_2 - v_1 \leq a + s^*$ تقريباً في كل مكان في Ω وبالتالي بحسب خواص التوابع المتعددة تحت توافقية يكون $v_2 - v_1 \leq a + s^*$ في كامل Ω و بالتالي ينتج:

$$\sup_{\Omega} (v_2 - v_1) \leq a + \frac{C}{\left[\omega^{-1} \left(a^{\frac{n}{\gamma}} \right) \right]^2} Cap(v_1 - v_2 < -a)^{\alpha}$$

لنطبق مرة ثانية التمهيدية 1.3 في [7] من أجل $s = t = a$ فنجد:

$$\begin{aligned} Cap(v_1 - v_2 < -2a) &\leq a^{-n} \int_{\{v_1 - v_2 < -a\}} (dd^c u)^n \\ &\leq a^{-n-1} \left\| (v_2 - v_1)_+ \right\|_{\square^1(\Omega, \mu)} \end{aligned}$$

وبالتالي نحصل على المتراجحة التالية

$$\sup_{\Omega} (v_2 - v_1) \leq a + C_2 \frac{a^{-\alpha(n+1)}}{\left[\omega^{-1} \left(a^{\frac{n}{\gamma}} \right) \right]^2} \left\| (v_2 - v_1)_+ \right\|_{\square^1(\Omega, \mu)}^{\alpha}$$

وبوضع $\lambda := \left\| (v_2 - v_1)_+ \right\|_{\square^1(\Omega, \mu)}$ ، يمكننا أن نكتب المتراجحة السابقة كالاتي:

$$\sup_{\Omega} (v_2 - v_1) \leq \lambda^{\gamma} + C_2 \frac{\lambda^{-\alpha\gamma(n+1)+\alpha}}{\left[\omega^{-1} (\lambda^n) \right]^2}$$

لنختار من أجل أي $0 < \gamma < 1/(n+1)$ ، قيمة α وفق العلاقة:

$$\alpha = \frac{n\beta}{1 - \gamma(n+1)}$$

حيث β ثابت موجب معطى فرضاً.

وبتعويض قيمة α بما تساويها فيما سبق نحصل على

$$\sup_{\Omega} (v_2 - v_1) \leq \lambda^\gamma + C_2 \frac{\lambda^{n\beta}}{[\omega^{-1}(\lambda^n)]^2}$$

وبملاحظة أن $\lambda \leq \omega^{\frac{1}{n}}(\delta^\epsilon)$ و من تزايد التابع $\omega^\beta(t)/t^2$ ينتج أن:

$$\sup_{\Omega} (v_2 - v_1) \leq \omega^{\gamma/n}(\delta^\epsilon) + C_2 \frac{\omega^\beta(\delta^\epsilon)}{\delta^{2\epsilon}}$$

ويمكن كتابة العلاقة الأخيرة باستخدام max للتابعين بالشكل:

$$\sup_{\Omega} (v_2 - v_1) \leq C \max \left\{ \omega^{\frac{\gamma}{n}}(\delta^\epsilon), \frac{\omega^\beta(\delta^\epsilon)}{\delta^{2\epsilon}} \right\}$$

بما أن $v_2 - v_1 = 0$ في $\Omega \setminus \Omega_{2\delta^\epsilon}$ نحصل على

$$\sup_{\Omega_{2\delta^\epsilon}} (\hat{u}_\delta - u) \leq C \max \left\{ \omega^{\frac{\gamma}{n}}(\delta^\epsilon), \frac{\omega^\beta(\delta^\epsilon)}{\delta^{2\epsilon}} \right\}$$

وبالاستفادة من التمهيدية 3.4.3 في [3] ، يصبح التقدير الأخير صحيح من أجل

$$\sup_{\Omega_{2\delta^\epsilon}} (u_\delta - u) \text{ أي يكون:}$$

$$\sup_{\Omega_{2\delta^\epsilon}} (u_\delta - u) \leq C \max \left\{ \omega^{\frac{\gamma}{n}}(\delta^\epsilon), \frac{\omega^\beta(\delta^\epsilon)}{\delta^{2\epsilon}} \right\}$$

إنّ العلاقة الأخيرة مع الملاحظة المذكورة آنفاً تقودنا إلى صيغة معامل استمرار حل

مسألة ديرخليه (1) يُعطى بالعلاقة:

$$\omega_u(\delta) \leq C \max \left\{ \omega^{\frac{\gamma}{n}}(\delta^\epsilon), \frac{\omega^\beta(\delta^\epsilon)}{\delta^{2\epsilon}} \right\}$$

حيث $0 < \gamma < 1/(n+1)$ و $\epsilon = 4/(4n+1)$ وكذلك

$$\omega(t) = \max \left\{ \omega_\varphi \left(t^{\frac{1}{2}} \right), \omega_w(t), t^{\frac{1}{2}} \right\}$$

فيما يلي سنورد بعض الأمثلة والحالات الخاصة الهامة لتحديد معامل استمرار الحل.

مثال 1.

لتكن لدينا مسألة ديرخليه (1) بحيث يكون التابع $\varphi \in C^{0,1}(\partial\Omega)$ أي يحقق شرط لبشيتز و لنفرض وجود حل جزئي w للمسألة ومعامل استمراره يعطى بالعلاقة:

$$\omega_w(\delta) \leq \delta^{\beta_1} (-\log \delta)^{-\beta_2} ; 0 \leq \beta_1 \leq 1/2 , \beta_2 \geq 0$$

وحيث δ مقدار صغير موجب ، عندها يكون حل مسألة ديرخليه (1) مستمراً ومعامل استمراره يحقق:

$$\omega_u(\delta) \leq C \delta^{\frac{4\beta_1\gamma}{n(4n+1)}} \left(-\frac{4}{(4n+1)} \log \delta \right)^{-\beta_2\gamma/n}$$

حيث $0 < \gamma < 1/(n+1)$.

نتيجة.

1. إذا كان الحل الجزئي w للمسألة يحقق شرط هولدر أي $w \in C^{0,\nu}(\partial\Omega)$ عندئذ ينتج أن حل مسألة ديرخليه يكون مستمراً ويحقق شرط هولدر أيضاً وبالتحديد يكون معامل استمراره

$$\omega_u(\delta) \leq C \delta^{\frac{4\nu\gamma}{n(4n+1)}}$$

حيث $0 < \gamma < 1/(n+1)$.

هنا تجدر الإشارة إلى أنّ هذه النتيجة تُعدّ تعميماً لما تم الحصول عليه في

[13].

2. إذا كان الحل الجزئي w للمسألة يحقق شرط هولدر اللوغاريتمي (-Log (Holder

أي معامل استمراره $\omega_w(\delta) \leq (-\log \delta)^{-\tau}$ حيث $\tau \geq 0$ عندئذ يحقق معامل استمرار حل مسألة ديرخليه شرط هولدر اللوغاريتمي أيضاً أي يكون:

$$\omega_u(\delta) \leq C \left(-\frac{4}{(4n+1)} \log \delta \right)^{-\tau\gamma/n}$$

مثال 2.

لتكن لدينا مسألة ديرخليه (1) بحيث يكون التابع $\varphi \in C^{0,1}(\partial\Omega)$ و لنفرض وجود حل جزئي w للمسألة ينتمي إلى صف زيغوند أي يحقق:

$$|w(z+h) + w(z-h) - 2w(z)| \leq C|h| \quad ; h, z \in \mathbb{C}^n$$

عندئذٍ يكون حل مسألة ديرخليه u مستمراً وفق هولدر وكذلك أس هولدر له هو $2\gamma n / (4n + 1)$.

في الواقع، بما أن w ينتمي إلى صف زيغوند فإن معامل استمراره بحسب [14] يُعطى بالعلاقة:

$$\omega_w(\delta) \leq C \delta(-\log \delta)$$

ولنشكل التابع $\omega(\delta)$ الوارد في المبرهنة 1 كما يلي :

$$\omega(\delta) = \max \left\{ \delta(-\log \delta), \delta^{\frac{1}{2}} \right\} = \delta^{\frac{1}{2}}$$

حيث δ مقدار صغير موجب.

وأخيراً بحسب المبرهنة 1 يكون معامل استمرار حل مسألة ديرخليه هو :

$$\omega_u(\delta) \leq C \delta^{\frac{2\gamma}{n(4n+1)}}$$

حيث $0 < \gamma < 1/(n+1)$.

المقترحات والتوصيات.

1. دراسة وجود الحل المستمر لمسألة ديرخليه في حال كون الطرف الثاني من

المعادلة يتعلق أيضاً بالتابع المجهول u .

2. هل يمكن أن ينتمي الحل إلى الفضاء $C^{1,\alpha}$ أي هل يمكن أن يكون الحل قابلاً

للاشتقاق ومشتقه يحقق شرط هولدر في حالات خاصة كأن يكون القياس μ هو

قياس ليبيغ.

المراجع العلمية.

- [1] – E. Bedford and B. A. Taylor, "The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampere equation", *Invent. Math.* 37 (1976), 1-44.
- [2] – M. Charabati, "Holder regularity for solutions to complex Monge-Ampere equations ", *Annales Polonici Mathematici* 113 (2015), 109-127 .
- [3] – M. Charabati, "The Dirichlet problem for Complex Monge-Ampere equations", PhD Thesis, <http://www.theses.fr/19271614X>
- [4] – M. Charabati, "Regularity of solutions to the Dirichlet problem for Monge-Ampere equations", *Indiana University Mathematics Journal* 66 (2017), no.6, 2187-2204.
- [5] – M. Charabati, "The existence of a continuous solution to the complex Monge- Ampere equation for a measure satisfying some conditions", *Al-Baath University Journal* 44 (2022), in Arabic.
- [6] – S. Dinew, V. Guedj and A. Zeriahi "Open problems in pluripotential theory", *Complex Variables and Elliptic Equations* 61(2016), no.7, 902-930.
- [7] – V. Guedj, S. Kolodziej and A. Zeriahi, "Holder continuous solutions to Monge-Ampere equations", *Bull. Lond. Math. Soc.* 40 (2008), 1070-1080.
- [8] – V. Guedj and A. Zeriahi, "Degenerate complex Monge-Ampere equations", *EMS Tracts in mathematics* 26, European Mathematical Society, (2017).
- [9] –M. Klimek, " Pluripotential theory", *London mathematical Society Monographs*,6, Clarendon Press, Oxford, (1991).
- [10] – S. Kolodziej, "The complex Monge-Ampere equation", *Acta Math.* 180 (1998), 69-117.
- [11] – S. Kolodziej, "The complex Monge-Ampere equation and pluripotential theory", *Mem. Amer. Math. Soc.* 178 (2005), no. 840, x+64 pp.

- [12] – N.C. Nguyen, "On the Holder continuous subsolution problem for the complex Monge-Ampere equation", Calc. Var. (2018), no. 1, Art. 8, 15 pp.
- [13] – N.C. Nguyen, "On the Holder continuous subsolution problem for the complex Monge-Ampere equation II ", Analysis and PDE, Vol. 13, no. 2 (2020), 435-453.
- [14] – A. Zygmund, "Trigonometric series", Third Edition, Volume I & II combined, Cambridge University Press (2002).

اصطناع مركب فانادات النحاس $\text{CuO-V}_2\text{O}_5$ بطريقة الاصطناع الصلب ودراسة بنيته البلورية

محمد ماهر عباس*، أ.د. إبراهيم أسعد إسماعيل**

الملخص

تمّ في هذا البحث تحضير مركب CuV_2O_6 بطريقة الاصطناع الصلب وذلك انطلاقاً من أكاسيده الأولية ($\text{V}_2\text{O}_5, \text{CuO}$)، حيث تم مزج الأكسيدات باستخدام هاون من العقيق بوجود الأسيتون. وتمّ تجفيف العينات عند الدرجة 120°C وبعدها قمنا بالترميد لمدة 6 ساعات عند درجات حرارة مختلفة تتراوح بين $(300-700^\circ\text{C})$. تمّت دراسة اصطناع المركب الناتج باستخدام مخططات انعراج الأشعة السينية XRD التي بينت أنّ المركب يتشكّل عند الدرجة 600°C (وهذا ما أكدته مخطط التحليل الحراري التفاضلي DTA) وفق نمط ثلاثي الميل وكانت قيمة ثوابت الشبكة البلورية $a=9.170\text{\AA}$ - $b=3.522\text{\AA}$ - $c=6.480\text{\AA}$ وبلغت قيمة الزوايا $\alpha=92.30^\circ$ - $\beta=110.53^\circ$ - $\gamma=91.78^\circ$ وعند رفع درجة الحرارة حتى 700°C لاحظنا انصهار المركب.

الكلمات المفتاحية: اصطناع صلب، فانادات النحاس، $\text{CuO-V}_2\text{O}_5$ ، مزيج أكاسيد، بنية

بلورية

*طالب دراسات عليا، ماجستير في الكيمياء اللاعضوية، قسم الكيمياء، كلية العلوم، جامعة

البعث

**أستاذ الكيمياء اللاعضوية، قسم الكيمياء، كلية العلوم، جامعة البعث

The Synthesis of CuO-V₂ O₅ Copper Vanadate Compound by Solid State Method and The Study of Its Crystal Structure

*Mouhammad Maher Abass

**Ibrahim Ismmaeel

Abstract

In this research, CuV₂ O₆ was prepared by Solid state method, based on its primary oxides (V₂ O₅ , CuO). In the presence of acetone, the two oxides were mixed and combined using a granite mortar. The samples were calcinated at 120⁰ C and then incinerated for 6h at different temperatures ranging from (300-700⁰ C). The synthesis of the resultant product was investigated using X-ray diffraction (XRD) spectroscopy, which demonstrated that the compound is generated at 600 °C according to a triclinic pattern (and this was validated by the differential thermal analysis technique (DTA) scheme). The crystal lattice constants had a value of a=9.170Å - b=3.522Å - c=6.480Å, The angles are valued α=92.30⁰ - β=110.53⁰ - γ=91.78⁰ , When the temperature was raised to 700⁰ C, we observed the melting of the compound.

Key words: Solid state method, Copper Vanadate, CuO-V₂ O₅ , mixed oxides, crystal structure

*Master degree student

**Dr. Prof. in the department of Chemistry– Faculty of Science at Al–Baath University.

1- مقدمة

لطالما لاقت دراسة الأكاسيد اهتماماً من الباحثين، وخاصة الأكاسيد المعدنية المختلطة، والتي تعتبر ركيزة أساسية في الثورة الصناعية وفي التقدّم التكنولوجي في العالم وخاصة استخداماتها التطبيقية في التكنولوجيا الحديثة كالإلكترونيات الدقيقة والأجهزة الكهربائية والمغناطيسية^[1]، بالإضافة للخاصية الحفزية واستخدامات أخرى. ولا بد من أن تُدرَس الخصائص البنوية لهذه المركّبات كون جميع الأكاسيد المعدنية البسيطة والمختلطة تتواجد في الحالة الصلبة، ولأنّ الخصائص الفيزيائية والكيميائية مرتبطة بالتركيب الكيميائي والبنية البلورية^[2].

ونظراً لكون هذه الأكاسيد ثابتة لونياً وذات مقاومة عالية للحرارة، فقد استخدمت في صناعة الخزف والفخار، حيث تصل درجة حرارة الأفران المستخدمة في الحرق لدرجات عالية^[3].

تُحضّر جميع الأكاسيد المختلطة عن طريق حرق مزيج من أملاحها المعدنية أو أكاسيدها ضمن مجال حراري محدد.

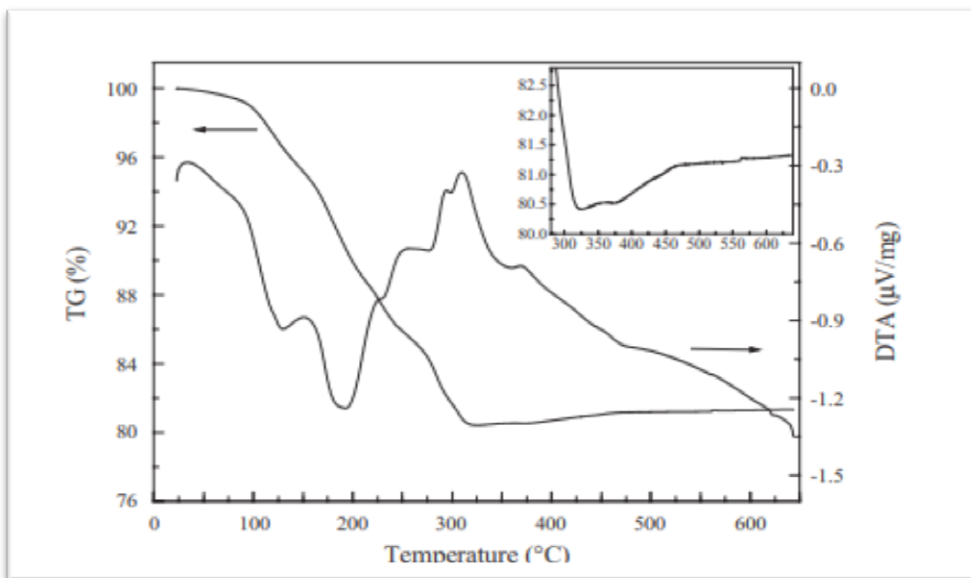
في بحثنا هذا قمنا بتحضير مركّب فانادات النحاس CuV_2O_6 بطريقة الاصطناع الصلب، حيث أولت الأكاسيد المختلطة للفاناديوم مع المعادن الانتقالية ($MO - V_2O_5$) اهتمام الباحثين، لما لها من أهمية بالغة في العديد من المجالات الصناعية

والتكنولوجية والتأنيوية^[8]، بالإضافة لقدرتها الحفزية الكبيرة واستخداماتها في صناعة المدخرات وبطاريات الليثيوم وأشباه الموصلات وفي صناعة الترانزيستورات والمستشعرات والمواد التأنيوية وتنقية المياه، مما دفع الباحثين في الآونة الأخيرة إلى تطوير وتحسين طرائق اصطناع وتحضير هذه المواد.^[4]

نورد فيما يلي دراسة مرجعية لبعض المواد التي قام الباحثين بتحضيرها بطرائق مختلفة:

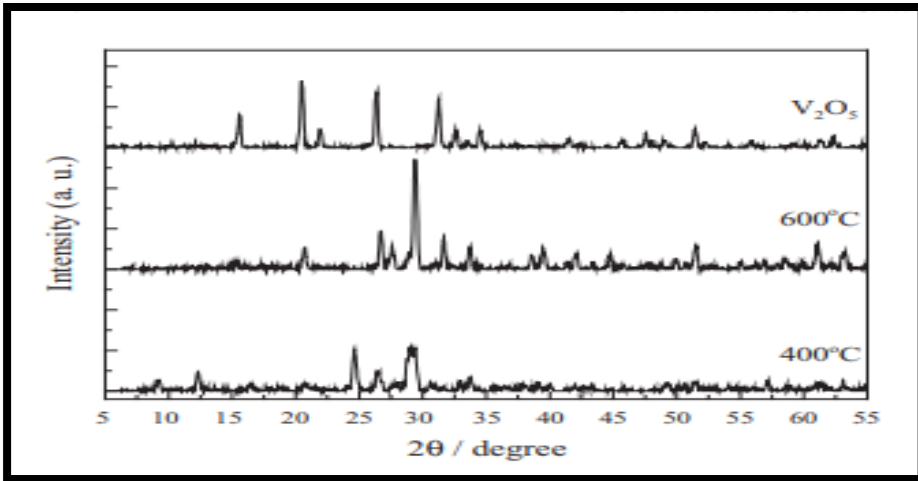
في العمل (1) قام العالم Chang Wan Ryu بتحضير فانادات النحاس بطريقة الترسيب المشترك، باستخدام (99% V₂O₅) و (99% Cu(NO₃)₂·2.5H₂O) كماد أولية، حيث كان لون العينات المحضرة عند الدرجة 400°C بنيًا مُحمراً، بينما كان لون العينات المحضرة عند الدرجة 600°C أسوداً.^[5]

يُظهر منحنى (TG/DTA) للمادة الأولية في (الشكل 1) فقدان الوزن العائد لفقدان الأستون وتبخّر الماء وتشكل الناتج. حيث بلغ إجمالي فقدان الوزن 19.6%. تم التفاعل عند الدرجة 320°C، مع ذلك تُلاحظ زيادة بسيطة في الوزن عند درجة حرارة أعلى من 320°C وقد تعود لامتنصاص O₂ من الهواء. عند المعالجة الحرارية ظهر نوعين من القمم، الأولى ماصّة للحرارة تبدأ من درجة حرارة الغرفة وصولاً إلى الدرجة 320°C، والتي تكون مسؤولةً عن تفاعل المواد الأولية، والثانية ناشرة للحرارة عند تشكل الناتج.^[5]



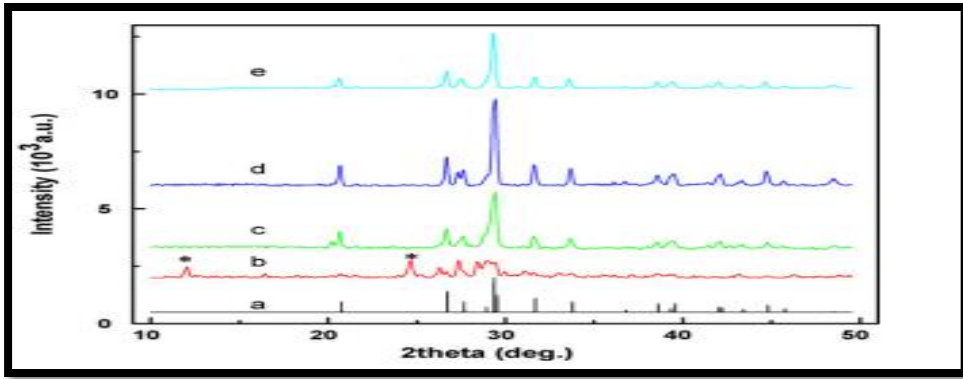
الشكل 1 منحنى (TG/DTA) للمادة الأولية

يُظهرُ مخطّط XRD للمادّة (فانادات النحاس) عند درجات حرارة مختلفة، حيث كانت الدرجة 650°C هي الأمثل لنموّ بلوريّ جيّد للمادّة ومن النمط ثلاثيّ الميل. حيث بينت المخططات عند الدّرجة 400°C قمم منخفضة الشدة والتي توضح أنّ عملية التبلور لم تتمّ بشكلٍ كاملٍ بعد. عند رفع الدّرجة حتى 600°C ظهرت قمم عائدة لتشكل CuV_2O_6 ثلاثيّ الميل بشدات عالية. [5]



الشكل 2 مخطط XRD لفانادات النحاس عند درجات حرارة مختلفة

العمل رقم 2: في هذا العمل قام العالم Tang Anping بتحضير مركب CuV_2O_6 باستخدام طريقة Sol-gel. استخدمت المواد التالية في عملية الاصطناع: حمض الستريك و NH_4VO_3 كمصدر للفاناديوم و XH_2O . $\text{Cu}(\text{OH})_2$. CuCO_3 بنسبة مولية 3:1:2، حيث خلطت المواد مع التحريك المستمر عند درجة حرارة 80°C ، وتغير لون المزيج أثناء التحريك من الشفاف إلى الوردى ثم الأزرق ثم الأسود المخضر في النهاية. تم تجفيف المزيج عند الدرجة 120°C ، وقسم المزيج الناتج لعدة عينات [6]. تم ترميد المزيج عند درجات حرارة مختلفة، ودرست العينات باستخدام XRD، وكانت النتائج كما يلي في الشكل 3 حيث ظهرت لدينا قمم عائدة لـ CuV_2O_6 عند الدرجة 500°C ، ولكن شدة هذه القمم كانت منخفضة، تزداد شدة القمم بزيادة درجة الحرارة [6].



الشكل 3 مخطط XRD لعينات فانادات نحاس محضرة بطريقة Sol-gel

العمل 3: في هذا العمل قام العالم Shaoyan Zhang بتحضير الأسلاك النانوية $R-CuV_2O_6$ باستخدام الطريقة الحرارية المائية ، بوصفها طريقة واعدة لاصطناع المواد الكيميائية ذات البنية النانوية، والتي تمّ تصنيعها نظراً لاستخدامها المحتمل في تخزين الطاقة وتحويلها وفي صناعة بطاريات الليثيوم. أظهرت نتائج هذه الدراسة أنّ الأسلاك النانوية $R-CuV_2O_6$ تمتلك قدرةً فائقةً على تخزين الطاقة مما يجعلها واحدةً من أكثر مرشحات الكاثود الواعدة لبطاريات الليثيوم المستخدمة في أجهزة مزيل الرجفان القلبي القابلة للزرع على المدى الطويل [7].

تمّ تصنيع هذه المواد انطلاقاً من المواد الأولية التالية: NH_4VO_3 و $CuCl_2$ ضمن أوتوكلاف مبطن بالتفلون، ويمكن وصف التفاعل بالمعادلة التالية:



2- الهدف من البحث:

اصطناع فانادات النحاس CuV₂O₆، وذلك باستخدام طريقة الاصطناع الصلب انطلاقاً من أكسيد الفاناديوم الخماسي V₂O₅ وأكسيد النحاس CuO، ودراسة الخصائص البلورية والثبات الحراري للمركب بواسطة تقنيات DTA و XRD، وتحديد درجة الحرارة المناسبة للاصطناع.

3- المواد والطرائق

3-1- المواد اللازمة لإجراء البحث:

- أكسيد النحاس CuO 98 % (General purpose reagent)
- أكسيد الفاناديوم V₂O₅ 98 % (General purpose reagent)
- أسيتون نقي 98% (Extra Pure)

3-2- الأجهزة والأدوات المستخدمة:

- 1- هاون من العقيق
- 2- ميزان تحليلي حساس بدقة (0.0001)gr.
- 3- مجفف للعينات من شركة memmert.
- 4- مرمدة لحرق العينات من شركة (Carbolite) يصل مداها ل 1100°C .

5- جهاز انعراج الأشعة السينية للمساحيق X-Ray Powder Diffractometer من

طراز

6- Philips - PW -1840 العامل على مهبط من الكوبالت Co_K بطول موجة

$$\lambda=1.78897$$

7- جهاز التحليل الحراري التفاضلي لدراسة السلوك الحراري للعينات DTA من نوع

Chimadzu

3-3- طريقة الاصطناع

استخدمنا طريقة الاصطناع الصلب، حيثُ تعتمدُ هذه الطريقة على مزج الأكاسيد الأولية بنقاوات عالية (98%) . تتميز هذه الطريقة بإعطاء مركبات متبلورة عالية النقاوة للمركب المحضّر نظراً للانطلاق من مواد أولية لا تحتوي شوائب من مواد مختلفة، كما أنّ البلورات الناتجة تكون كبيرة الحجم بالمقارنة مع بلورات ناتجة بطرائق أخرى مثل Sol-gel والترسيب المشترك وغيرهما^[9]

طريقة العمل:

في البداية، تمّ حساب أوزان المواد الأولية المستخدمة في الاصطناع انطلاقاً من النسب

الستيكيومترية للمعادلة التالية:



الجدول (1): يبين النسب المولية المأخوذة وكمية كل أكسيد مقدرة بالغرام gr

الجدول 1: النسب المولية المأخوذة وكمية كل أكسيد مقدرة بالغرام gr

CuO	V_2O_5	CuV_2O_6
1mol	1mol	1mol
1.83gr	4.172 gr	6 gr

بعد أخذ الأوزان المطلوبة لكل من CuO و V_2O_5 تم وضعهما معاً في هاون من العقيق لسحق العينات، ثم تم غمرها بالأسيتون النقي وطحنها بشكل جيد حتى تطاير كامل كمية الأسيتون .

استمرت العملية حتى تطاير كامل الأسيتون وأعيدت العملية عدة مرات لضمان الحصول على حبيبات متجانسة. تم ترميدها عند درجات حرارة مختلفة (300°C – 700°C).

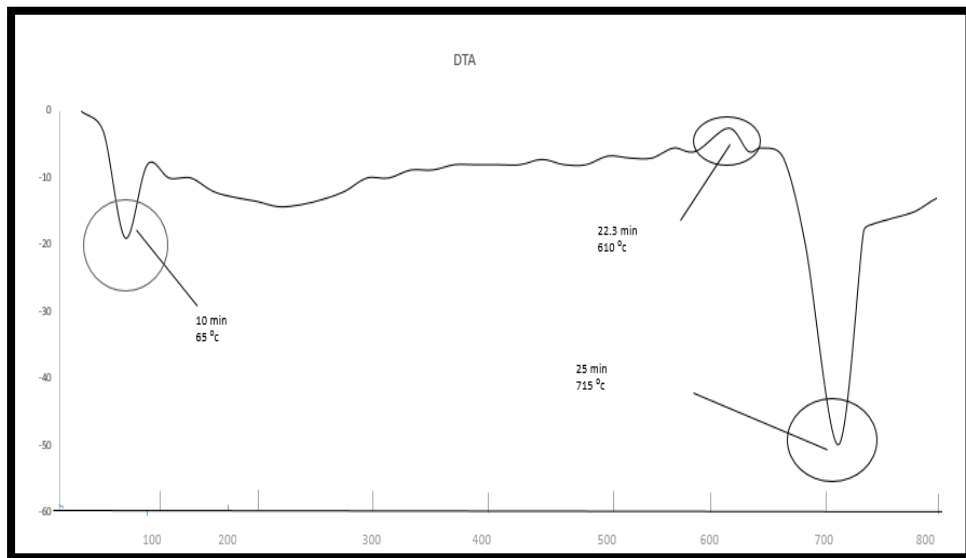
وأخيراً تم توصيف العينات السابقة باستخدام DTA و XRD.

4- النتائج والمناقشة:

4-1- دراسة منحنى التحليل التفاضلي DTA :

يبين المنحنى التالي السلوك الحراري لمزيج من أكسيدي النحاس و الفاناديوم حيث تظهر قمة عريضة عند الدرجة 65°C تعود لتطاير بقايا الأسيتون إضافة لماء الرطوبة (الناتج من امتصاص الأكاسيد لبخار الماء من الجو)، وتظهر في المنحنى (الشكل 4)

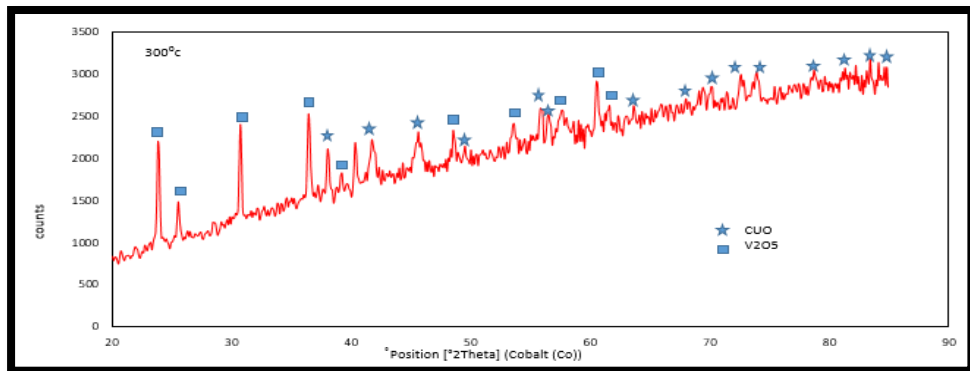
قمة ناشرة للحرارة عند الدرجة 620°C وهي تعود لتشكل المركب المطلوب CuV_2O_6 ، كما تظهر قمة ماصة للحرارة عند 712°C تدل على انصهار المركب.



الشكل 4 مخطط DTA لمزيج من $(\text{V}_2\text{O}_5-\text{CuO})$

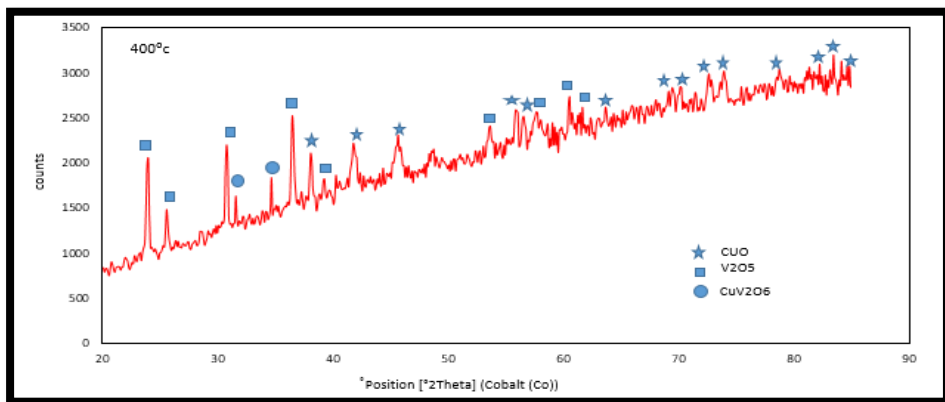
4-2- دراسة مخططات الـ XRD للعينات:

عند ترميد العينات عند الدرجة 300°C نلاحظ وجود قمم عائدة للأكاسيد الأولية V_2O_5 و CuO دون وجود أية قمم تدل على تشكل المركب المطلوب (الشكل 5).



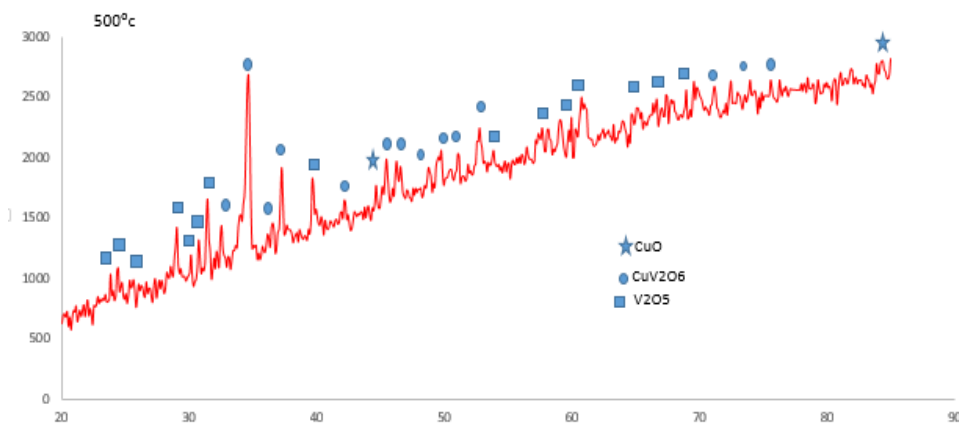
الشكل 5 مخطط XRD للمركب المحضّر عند الدرجة 300°C

عند رفع درجة الحرارة حتى 400°C نلاحظ انخفاض شدة القمم العائدة للأكاسيد الأولية (الشكل 6) وظهور قمتين جديدتين تعودان لتشكّل مركب CuV_2O_6 .



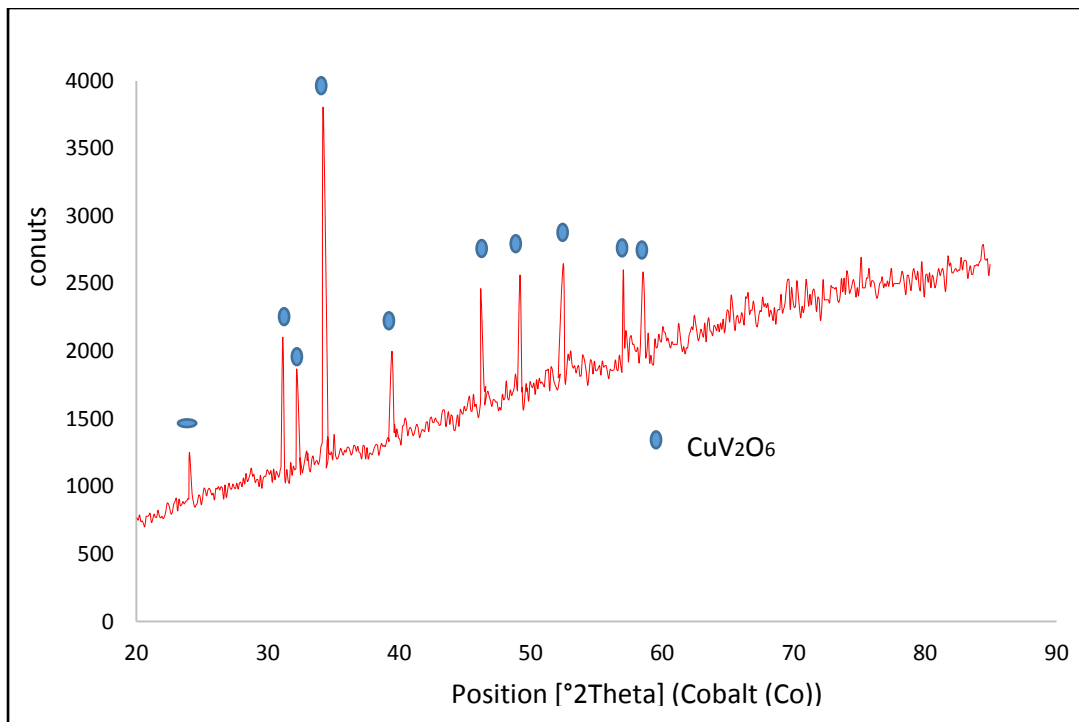
الشكل 6 مخطط XRD للمركب المحضّر عند الدرجة 400°C

وباستمرار رفع درجة الحرارة حتى 500°C يظهر زيادة في شدة القمم العائدة لمركب CuV_2O_6 وانخفاض شدة القمم العائدة للأوكاسيد الأولية واختفاء بعضها بشكل كامل (الشكل 7).



الشكل 7 مخطط XRD للمركب المحضّر عند درجة 500°C

وعند 600°C (الشكل 8)، نجد أن جميع القمم عائدة للمركب CuV_2O_6 ولا نلاحظ وجود أية قمم ترجع للأوكاسيد الأولية (كما هو موضح في الجدول 2) مما يدل على أن المركب تم اصطناعه بشكل كامل عند الدرجة 600°C وهي الدرجة المثالية للاصطناع. وذلك بالمقارنة مع البطاقة المرجعية ذات الرقم [451054] والتي تعود لبنية ثلاثي الميل.



الشكل 8 مخطط XDR للمركب المحضّر عند الدرجة 600°C

الجدول 2 قيم طيف XRD للعينة عند درجة حرارة 600°C

Num	المركب	2θ	I/I ₀ %
1	CuV ₂ O ₆	24.040	32%
2	CuV ₂ O ₆	31.15	55.2%
3	CuV ₂ O ₆	32.212	49.1%
4	CuV ₂ O ₆	34.217	100%
5	CuV ₂ O ₆	39.45	52.5%
6	CuV ₂ O ₆	46.2514	64.7%
7	CuV ₂ O ₆	49.196	67.3%
8	CuV ₂ O ₆	52.496	69.5%
9	CuV ₂ O ₆	57.05	68.3%
10	CuV ₂ O ₆	58.503	66%

عند رفع الحرارة إلى 700°C نلاحظ انصهار العينة كما هو موضح بالشكل 9:



الشكل 9 شكل المركب عند رفع درجة الحرارة إلى 700°C

4-3- دراسة البنية البلورية لمركب فانادات النحاس CuV_2O_6 :

بعد مقارنة قمم انعراج الأشعة السينية للعينة عند الدرجة C 600° مع القيم المرجعية في

البطاقة المرجعية ذات الرقم [451054] تبين أن نمط التبلور من النوع ثلاثي الميل

في النظام ثلاثي الميل لدينا $a \neq b \neq c$ و $\alpha \neq \beta \neq \gamma$

نحسب قيمة d (المسافة بين المستويات البلورية) وفق قانون براغ في انعراج الأشعة

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

السينية:

العلاقة الرابطة بين ثوابت الشبكة البلورية في النظام البلوري:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{(h^2 + k^2 + l^2)\sin^2 \alpha + 2(hk + kl + hl)\cos^2 \alpha - \cos \alpha}{a^2(1 - 3\cos^2 \alpha + 2\cos^3 \alpha)}$$

نظراً لصعوبة حسابات ثوابت الشبكة البلورية في بنية ثلاثي الميل نقوم بحساب d

المعيارية ونحسب d للعينة المحضرة وفق علاقة براغ

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

ونقوم بإجراء مطابقة للنتائج بالاعتماد على العلاقة التالية:

$$\frac{d_{Ref}}{d_{Exp}} \times 100 = R\%$$

وكانت النتائج وفق الجدول (3)

الجدول 3 جدول نتائج الحسابات

CuV ₂ O ₆ (المحضر)			قيم البطاقة المرجعية لمركب CuV ₂ O ₆ {451054}			مقدار التطابق R%
2θ (°)	θ (°)	d (Å)	2θ (°)	θ (°)	d (Å)	R%
24.04	12.075	4.387	24.127	12.063	4.387	99.9
31.15	15.575	3.4622	31.116	15.558	3.4622	99.9
32.212	16.125	3.3557	32.216	16.108	3.3557	99.9
34.217	17.125	3.1807	34.224	17.112	3.1807	99.9
39.45	19.7	2.8046	39.632	19.816	2.8046	99.8
46.48	23.24	2.4768	46.262	23.131	2.4760	99.9
49.45	24.725	2.3629	49.216	24.608	2.3629	99.8
52.55	26.275	2.2546	52.511	26.255	2.25461	99.8
57.05	28.525	2.1312	57.087	28.545	2.1312	99.8
58.45	29.45	2.0976	58.522	29.261	2.0976	99.9

من قيم الجدول 3 وبالمقارنة، كانت نسبة التطابق 99.9% \approx وبالتالي يمكن اعتماد

ثوابت الشبكة البلورية من البطاقة المرجعية لـ CuV_2O_6 :

الجدول 4 نتائج المعتمدة

المركب	اللون	نمط التبلور	ثابت الشبكة البلورية a (Å)	ثابت الشبكة البلورية b (Å)	ثابت الشبكة البلورية c (Å)	حجم الخلية العنصري V (Å ³)
CuV_2O_6	بني	ثلاثي الميل	9.170	3.552	6.480	197.50
		زاوية الأنعراج α°	زاوية الأنعراج β°	زاوية الأنعراج γ°		
		92.30	110.35	91.78		

ومن ثم تم قياس الكثافة التجريبية للمادة الناتجة بطريقة دورق الكثافة (picknometer) وذلك لثلاثة مرات على التوالي وأخذ متوسط القيمة لها وبالاعتماد على كثافة المادة تم

حساب Z (عدد الصيغ في الخلية البلورية الواحدة) وفق العلاقة التالية:

$$\rho = MZ / (N_a V)$$

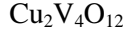
حيث M الوزن الجزيئي للمادة، Na عدد أفوغادرو ،

V حجم الخلية الاساسية مقاسا بوحدة (cm)³.

وبهذا فإن عدد الصيغ كان مساويا لما يلي:

$$Z = (N_a \cdot V \cdot \rho) / M = 1.997633743 \approx 2$$

و بالتالي يمكننا أن نكتب الصيغة العامة لمحتوى الخلية الأساسية بالشكل التالي:



أي أن الخلية الواحدة تحتوي على ذرتين من النحاس وأربعة ذرات فاناديوم و 12 ذرة أوكسجين.

وباستبدال قيمة Z كعدد صحيح في المعادلة السابقة ينتج لدينا قيمة الكثافة النظرية وكانت القيمة المحسوبة قريبة جدا من القيمة التجريبية مما يثبت دقة حساباتنا النظرية ودقة اختيارنا لوحدة الخلية الأساسية.

واخيراً تم حساب حجم التبلور من معادلة ديبيي شرر [2] : $L=K\lambda/(\beta \cos\theta)$

حيث

L: هو حجم التبلور للمادة مقدرا بـ nm³

K: هو ثابت الشبكة ويكون ضمن المجال 0.89-0.93 وعادة تؤخذ وسطيا 0.9

λ : هو طول موجة جهاز الأشعة السينية المستخدم مقدرا بـ nm

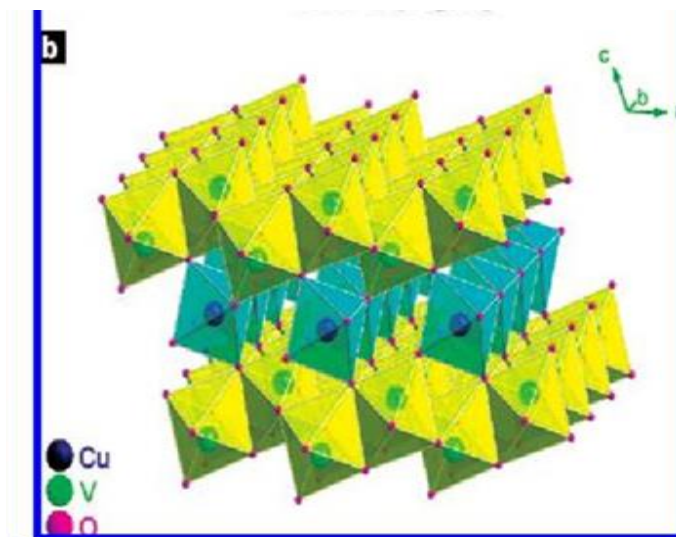
θ : هي زاوية انعراج الأشعة السينية للقمة الأعلى شدة

β : مقدار يعبر عن كامل عرض القمة الأكثر شدة في الطيف عند منتصف هذه القمة

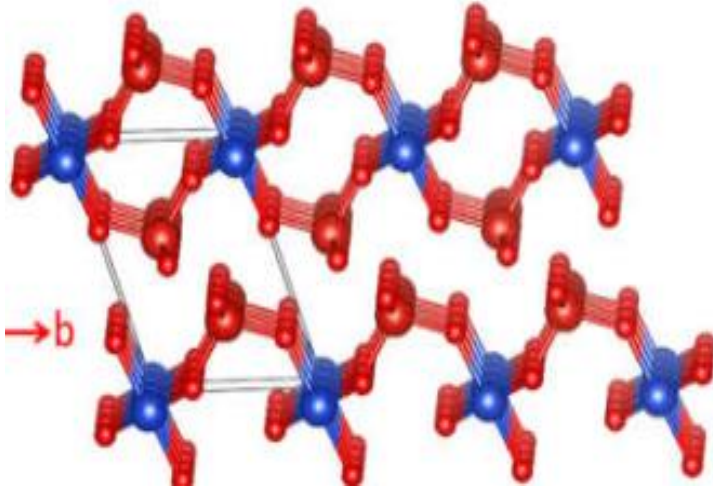
ويمكن حسابه من طيف انعراج الأشعة السينية للمركب

حجم الخلية	الكثافة	عدد الصيغ في الخلية	الكثافة النظرية	حجم
الأساسية	التجريبية	البلورية Z	$\rho_E \text{ gr/cm}^3$	التبلور
$v \text{ (A}^\circ)^3$	$\rho_t \text{ gr/cm}^3$			L (nm^3)
197.5	4.391	1.997633743	4.39620127	33.44

يوضح الشكلين التاليين البنية البلورية لمركب CuV_2O_6 ثلاثي الميل



الشكل 10 البنية البلورية للمركب المتشكل



الشكل 11 البنية البلورية للمركب المدروس

5- الخلاصة والتوصيات:

1- تم في هذا البحث دراسة تحضير مركب CuV_2O_6 بطريقة الاصطناع الصلب انطلاقاً

من CuO و V_2O_5 بنسبة مولية 1:1 .

2- تم دراسة تحضير المركب عند درجات حرارة مختلفة ضمن مجال (300°C - 700°C)

وكانت الدرجة المثالية للاصطناع 600°C وهو ما ظهر في مخطط DTA وأكدته

مخططات الـ XRD.

3- تم إثبات هوية المركب بالاعتماد على مخططات XRD ومقارنتها مع البطاقة

المرجعية [451054].

4- نوصي بدراسة تحضير مركبات الفاناديوم للعديد من المعادن الإنتقالية لما لها من

أهمية في التطبيقات الصناعية والتكنولوجيا الحديثة.

6- المراجع

- [1] Cousin P, Ross RA. Preparation of mixed oxides: a review. *Materials Science and Engineering: A*. 1990 Nov 20;130(1):119-25
- [2] Kleemiss F, Dolomanov OV, Bodensteiner M, Peyerimhoff N, Midgley L, Bourhis LJ, Genoni A, Malaspina LA, Jayatilaka D, Spencer JL, White F. Accurate crystal structures and chemical properties from NoSpherA2. *Chemical Science*. 2021;12(5):1675-92
- [3] Sankaranarayanan S, Hariram M, Vivekanandhan S, Ngamcharussrivichai C. Biosynthesized transition metal oxide nanostructures for photocatalytic degradation of organic dyes. In *Green Functionalized Nanomaterials for Environmental Applications 2022* Jan 1 (pp. 417-460). Elsevier.
- [4] Li G, Wu W, Zhang C, Peng H, Chen K. Synthesis of ultra-long single crystalline CuV2O6 nanobelts. *Materials Letters*. 2010 Apr 15;64(7):820-3.
- [5] Wei YJ, Nam KW, Chen G, Ryu CW, Kim KB. Synthesis and structural properties of stoichiometric and oxygen deficient CuV2O6 prepared via co-precipitation method. *Solid State Ionics*. 2005 Sep 1;176(29-30):2243-9.
- [6] Cao JQ, Wang XY, Tang A, Wang X, Wang Y, Wu W. Sol-gel synthesis and electrochemical properties of CuV2O6 cathode material. *Journal of alloys and compounds*. 2009 Jun 24;479(1-2):875-8.

- [7] Ma H, Zhang S, Ji W, Tao Z, Chen J. α -CuV₂O₆ nanowires: Hydrothermal synthesis and primary lithium battery application. Journal of the American Chemical Society. 2008 Apr 16;130(15):5361-7.
- [8] Prasad SR, Srikantaswamy S, Jagadish K, Abhilash MR, Nayan MB. Synthesis, Characterization of Copper Metavanadate (CuV₂O₆) Nanostructures via Hydrothermal Method and the Photocatalytic Performance. Oriental Journal of Chemistry. 2018;34(3):1263..
- [9] Smida YB, Marzouki R, Kaya S, Erkan S, Zid MF, Hamzaoui AH. Synthesis methods in solid-state chemistry. In Synthesis Methods and Crystallization 2020 Oct 7. IntechOpen.

قابلية جمع متسلسلات جاكوبي بطريقة نيورلاند

المعممة (N, p, q)

طالبة الماجستير: يمان محمد جمال الكردي

كية العلوم - جامعة البعث

اشراف الدكتور: منير مخلوف

ملخص

دراسة حول مسألة قابلية جمع متسلسلات جاكوبي بطريقة نيورلاند المعممة (N, p, q) التي تستخدم متتاليتين غير سالبتين الأولى متناقصة والثانية متزايدة حيث قمنا بإثبات مبرهنة تعتمد على الدالة الأسية بدلاً من الدالة اللوغاريتمية وذلك باستخدام دالة مساعدة $N(\emptyset)$ المأخوذة من القيم التقريبية لكثيرات حدود جاكوبي و قمنا بإثبات هذه المبرهنة وذلك بتجزئة مجال التكامل $[0, \pi]$ إلى أربعة مجالات جزئية وفقاً لقيم الدالة المساعدة $N(\emptyset)$.

الكلمات المفتاحية:

كثيرات حدود جاكوبي، قابلية الجمع، متسلسلات جاكوبي، طريقة نيورلاند المعممة، الالتفاف، توابع خاصة.

(N, p, q) Generalized Norlund summability of Jacobi series

Abstract:

A study on summability of Jacobi series by generalized Norlund method (N, p, q) , which uses two non-negative sequences, the first decreasing and the second increasing, where we prove a theorem that depends on the exponential function instead of the logarithmic function, using an auxiliary function $N(\emptyset)$ taken from the approximate values For Jacobi polynomials, where we prove the theorem by dividing the integration domain $[0, \pi]$ into four partial domains according to the values of the auxiliary function $N(\emptyset)$.

Keywords:

Jacobi Polynomials, Summability, Jacobi series, (N, p, q) method, Convolution, Special functions.

1. مقدمة:

تمت دراسة كثيرات الحدود المتعامدة من قبل سزيغو *szego*، حيث تمت دراسة قابلية جميع متسلسلات جاكوبي بعدة طرائق منها طريقة نيورلاند $[N.p_n]$ وذلك من قبل عدة باحثين مثل جويتا *Gubta*، وباندي *Pandy*. وبعد ذلك درست طريقة قابلية جمع متسلسلات جاكوبي بطريقة نيورلاند في نقطة معتبرة ثم قام خير *S.P.KHare* وتريبااثي *TriPathe* بدراسة قابلية جمع متسلسلات فورييه - جاكوبي بطريقة نيورلاند المعممة .

ثم بعد ذلك تمت دراسة قابلية جمع متسلسلات فورييه - جاكوبي بالطريقة المصفوفية من قبل الباحثين كريشنا نيجام *Hare Krishna Nigam* وشارما *Ajay Sharm*، و بعد ذلك قام براساد دالكال *Binod Prasad Dhakal* أيضا " بدراسة قابلية جمع متسلسلات جاكوبي عن طريق مصفوفة مثلثية سفلى.

2. تعاريف ومفاهيم أساسية:

1,2 كثيرات حدود جاكوبي [6]:

هي كثيرات حدود كلاسيكية متعامدة يمكن الحصول عليها بعدة طرائق من أهمها طريقة شميت و طريقة رودريج وطريقة الدالة المولدة. تعطي كثيرات حدود جاكوبي بصيغة رودريج الآتية :

$$p_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{d(x)^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]$$

حيث: $\alpha > -1$, $\beta > -1$ و $x \in [-1, +1]$

2.2, قابلية الجمع بطريقة نيورلاند المعممة [3] :

لنعرف الالتفاف $(p * q)_n$ بالشكل التالي :

$$(p * q)_n = \sum_{k=0}^n p_{n-k} q_k$$

إذا كان $(p * q)_n \neq 0$ لأجل كل n , عندئذ فإن تحويل نيورلاند المعمم (تحويل (N, p, q)) للمتسلسلة S_n هو عبارة عن المتتالية $\{t_n^{p,q}\}$ والتي حددها العام :

$$t_n^{p,q} = \frac{1}{(p * q)_n} \sum_{k=0}^n p_{n-k} q_k S_k \quad (1.4)$$

فإذا كان $t_n^{p,q} \rightarrow S$ عندما $n \rightarrow \infty$. فإننا نقول بأن المتتالية $\{S_n\}$ قابلة للجمع بطريقة نيورلاند المعممة (N, p, q) إلى العدد (S) ونرمز لذلك بـ:

$$S_n \rightarrow S(N, p, q) \quad (1.5)$$

2.3. متسلسلة فورييه-جاكوبي:

لنكن لدينا الدالة $f(x)$ معرفة على المجال $[-1, 1]$ و دالة الثقل:

$$W(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$$

بحيث يتحقق:

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) \in L[-1, 1] \quad ; \alpha > -1, \beta > -1$$

نعرف متسلسلة فورييه-جاكوبي للدالة $f(x)$ بالشكل :

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (2.1)$$

حيث $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ عبارة عن كثيرات حدود جاكوبي و a_n عبارة عن معاملات فورييه جاكوبي التي تعطى بالشكل:

$$a_n = \frac{(2n + \alpha + \beta + 1)\Gamma(n + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}$$

$$\times \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx \quad (2.2)$$

3. هدف البحث:

في هذا العمل نقوم بدراسة قابلية جمع متسلسلات جاكوبي بطريقة نيورلاند المعممة ضمن شروط معينة وذلك من خلال إثبات صحة المبرهنة التالية:

مبرهنة (1): إذا كانت $-\frac{1}{2k} < \alpha < \frac{1}{2k}$ حيث $k=1,2,\dots,n$ و $-\frac{1}{2} < \beta$

و $\{p_n\}$ متتالية غير سالبة متناقصة و $\{q_n\}$ متتالية غير سالبة متزايدة بحيث يتحقق:

$$\sum_{k=c}^n \frac{P_k}{(e^k) k^{\alpha+3/2}} = o\left(\frac{(p * q)_n}{q_n n^{\alpha+1/2}}\right) \quad (3.1)$$

حيث c عدد طبيعي

ويفرض أن:

$$q_n P_n = o((e^n)((p * q)_n)) \quad (3.2)$$

$$F_1(t) = \int_0^t |F(\varnothing)| d\varnothing = o\left(\frac{t^{2\alpha+2}}{e^{1/t}}\right); \quad t \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

و لنعرف:

$$F(\varnothing) = \{f(\cos \varnothing) - S\} \left(\sin \frac{\varnothing}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{\varnothing}{2}\right)^{2\beta+1}$$

$$P(1 \setminus \varnothing) = P_{[1 \setminus \varnothing]} = \sum_{K=0}^{[1 \setminus \varnothing]} p_k$$

$$\int_{-1}^b (1+x)^{(\beta-\alpha-1)/2} |f(x)| dx < \infty \quad (3.4)$$

عندئذ المتسلسلة (2.1) قابلة للجمع بطريقة نيورلاند المعممة (N, p, q) في نقطة

معتبرة $x = 1$ إلى العدد S حيث b ثابت.

لإثبات هذه المبرهنة نحتاج إلى التمهيدات الآتية:

4. تمهيدات:

تمهيدية (1) من [6]: إذا كان $\alpha > -1$ و $\beta > -1$ ، عندما $n \rightarrow \infty$ فإنه يتحقق مايلي:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = O(n^\alpha), \quad 0 \leq \theta \leq 1/n \quad (4.1)$$

$$= O(n^\beta), \quad \pi - 1/n \leq \theta \leq \pi \quad (4.2)$$

$$= n^{-\frac{1}{2}} k(\theta) \left[\cos(N\theta + r) + \frac{O(1)}{n \sin \theta} \right] \\ \frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \frac{1}{n} \quad (4.3)$$

حيث:

$$k(\Phi) = \pi^{-\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\Phi}{2} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\cos \frac{\Phi}{2} \right)^{-\beta-1/2}$$

$$N = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad r = -\left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \pi/4$$

تمهيدية (2) من [5]: إذا كانت $-\frac{1}{2^k} < \alpha < \frac{1}{2^k}$ حيث $k=1, 2, \dots, n$ و $-\frac{1}{2} < \beta$ ، الشرط (3.4) يحقق مايلي:

$$\int_{\delta}^{\pi} |F(\Phi)| \left(\cos \frac{\Phi}{2} \right)^{-\alpha-\beta-1} d\Phi < \infty, \quad 0 < \delta < \pi \quad (4.4)$$

تمهيدية (3) من [4]: إذا كانت $-\frac{1}{2^k} < \alpha < \frac{1}{2^k}$ حيث $k=1, 2, \dots, n$ و $-\frac{1}{2} < \beta$ ، الشرط (3.1) يحقق ما يلي:

$$q_n n^{\alpha+1/2} = o((p * q)_n) \quad (4.5)$$

تمهيدية (4) من [2]:

إذا كانت $\{p_n\}$ متتالية غير سالبة ومتناقصة، و من أجل n كبيرة فإن العلاقة تتحقق بشكل منتظم من أجل $0 < \Phi \leq \pi$ و $0 \leq a \leq n$ عندئذٍ :

$$\left| \sum_{k=a}^n p_k \cos\{(n-k+\rho)\Phi - r\} (n-k)^{\alpha+1/2} \right| = O(n^{\alpha+1/2} P(1/\Phi)) \quad (4.6)$$

$$\rho = \frac{\alpha+\beta+2}{2}, \quad r = \left(\alpha + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{2}, \quad \alpha \geq -1/2 \quad \text{حيث:}$$

تمهيدية (5):

إذا كانت $\{p_n\}$ متتالية غير سالبة متناقصة و $\{q_n\}$ متتالية غير سالبة متزايدة فإن:

$$\frac{P_n Q_n}{n+1} \leq (p * q)_n \quad (4.7)$$

الإثبات: بالتوزيع نجد:

$$(p * q)_n - P_n Q_n / (n+1) = \sum_{k=0}^n q_k (p_{n-k} - P_n / (n+1))$$

$$P_n = \sum_{k=0}^n p_k \quad \text{و} \quad Q_n = \sum_{k=0}^n q_k \quad \text{حيث:}$$

إن مجموع المعاملات q_k حيث $(k = 0.1.2 \dots)$ في الطرف الأيمن من المعادلة السابقة مساوٍ للصفر عند قيمة مثبتة لـ n ، ويكون $k_0 = \max k$ والذي يعتمد على n والذي من أجله المعاملات أصغر أو تساوي صفر و K يعتمد على n فقط.

$$p_{n-k} - \frac{P_n}{n+1} \leq 0 \quad \text{إن: } k \leq k_0 \quad \text{فإن:}$$

$q_k \leq q_{k_0}$ من تعريف $\{q_n\}$ بالتالي:

$$q_k \left(p_{n-k} - \frac{P_n}{n+1} \right) \geq q_{k_0} \left(p_{n-k} - \frac{P_n}{n+1} \right)$$

وإذا كان $k > k_0$ فيكون لدينا:

$$p_{n-k} - \frac{P_n}{n+1} > 0$$

$$q_k \geq q_{k_0} \quad \text{وأيضاً}$$

$$q_k \left(p_{n-k} - \frac{P_n}{n+1} \right) \geq q_{k_0} \left(p_{n-k} - \frac{P_n}{n+1} \right)$$

ومنه نجد:

$$\begin{aligned} (p * q)_n - \frac{P_n Q_n}{n+1} &= \sum_{k=0}^n q_k \left(p_{n-k} - \frac{P_n}{n+1} \right) \\ &\geq q_{k_0} \sum_{k=0}^n \left(p_{n-k} - \frac{P_n}{n+1} \right) = 0 \end{aligned}$$

وهو المطلوب.

التمهيدية (6):

إذا كانت $\{q_n\}$ متتالية غير سالبة متزايدة ، و $-\frac{1}{2k} < \alpha < \frac{1}{2k}$ حيث $k=1,2,\dots,n$ وعندئذٍ ماييلي محقق:

$$\sum_{v=0}^n q_v v^{\alpha-1/2} = O(q_n n^{\alpha-1/2}) \quad (4.8)$$

الإثبات: بمأن $Q_n = \sum_{v=0}^n q_v$ نجد :

$$\begin{aligned} Q_n n^{\alpha-1/2} - Q_{n-1} (n-1)^{\alpha-1/2} &= \\ = q_n n^{\alpha-1/2} - Q_{n-1} \{ (n-1)^{\alpha-1/2} - n^{\alpha-1/2} \} \end{aligned}$$

لكن بما أن $\{q_n\}$ متزايدة فإنه:

$$Q_{n-1} \leq Q_n \leq (n+1)q_n$$

ولدينا:

$$(n-1)^{\alpha-1/2} - n^{\alpha-1/2} \sim \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) n^{\alpha-3/2}$$

وذلك محقق من العلاقة الأتية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^{\alpha-1/2} - n^{\alpha-1/2}}{n^{\alpha-3/2}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\alpha-1/2} - 1}{x} =$$

$$= -\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = -\alpha + 1/2$$

ولدينا:

$$n^{\alpha-3/2} \leq n^{\alpha-1/2}$$

ومن أجل $1 - \alpha < d < \frac{1}{2}$ وإذا كانت n كبيرة ولنفرض $n \geq n_0$ فإنه:

$$Q_{n-1}\{(n-1)^{\alpha-1/2} - n^{\alpha-1/2}\} \leq dq_n n^{\alpha-1/2}$$

لذلك: $Q_n n^{\alpha-1/2} - Q_{n-1}(n-1)^{\alpha-1/2} \geq (1-d)q_n n^{\alpha-1/2}$

وبالتالي نحصل على:

$$\begin{aligned} \sum_{v=n_0}^n q_v v^{\alpha-1/2} &\leq \frac{1}{1-d} \{Q_n n^{\alpha-1/2} - Q_{n_0} - 1(n_0 - 1)^{\alpha-1/2}\} \\ &\leq \frac{1}{1-d} Q_n n^{\alpha-1/2} \quad (a) \end{aligned}$$

لكن:

$$\sum_{v=1}^{n_0-1} q_v v^{\alpha-1/2} = O\{Q_n n^{\alpha-1/2}\} \quad (b)$$

بما أن الطرف الأيسر ثابت و $Q_n n^{\alpha-1/2} \rightarrow \infty$ عندما $n \rightarrow \infty$ ، ومن (a) و (b)

نحصل على المطلوب.

تمهيدية (7):

إذا كانت $\{p_n\}$ متتالية غير سالبة متناقصة و $\{q_n\}$ متتالية غير سالبة متزايدة و

$$-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2^k} \quad \text{حيث } k=1,2,\dots,n \quad \text{و } -\frac{1}{2} < \beta$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} (n-k)^{\alpha-1/2} = O((p * q)_n n^{\alpha-1/2}) \quad (4.9)$$

الإثبات: لنعتبر M ثابت ما، وليكن لأجل $k \leq n/2$ لدينا:

$$(n-k)^{\alpha-1/2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1/2} n^{\alpha-1/2} = M n^{\alpha-1/2}$$

إن الطرف الأيسر من العلاقة (4.9) من أجل $0 \leq k \leq n/2$ يكتب بالصورة:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} P_k q_{n-k} (n-k)^{\alpha-1/2} &\leq M n^{\alpha-1/2} \sum_{0 \leq k \leq n/2} p_k q_{n-k} \\ &\leq M n^{\alpha-1/2} \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} \\ &= M n^{\alpha-\frac{1}{2}} (p * q)_n \end{aligned}$$

أما من أجل $k > \frac{n}{2}$ فهو:

$$p_k \leq \frac{P_k}{k+1} \leq \frac{P_n}{\frac{1}{2}(n+1)} = M \frac{P_n}{n+1}$$

وبالتالي:

$$p_k \leq M \frac{P_n}{n+1} \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n-1} q_{n-k} (n-k)^{\alpha-1/2}$$

الآن ليكن m أكبر عدد صحيح بحيث $n-m > n/2$ ، عندئذٍ حسب التمهيدية (5) والتمهيدية (6) نجد:

$$\begin{aligned} M \frac{P_n}{n+1} \sum_{v=1}^n q_v v^{\alpha-\frac{1}{2}} &\leq M \frac{P_n}{n+1} Q_m m^{\alpha-\frac{1}{2}} \\ &\leq M \frac{P_n Q_n}{n+1} n^{\alpha-\frac{1}{2}} \\ &\leq M n^{\alpha-\frac{1}{2}} (p * q)_n \end{aligned}$$

تمهيدية (8):

إذا كانت $\{p_n\}$ متتالية غير سالبة ومتناقصة و $\{q_n\}$ متتالية غير سالبة و متزايدة وبفرض:

$$N(\Phi) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(p * q)_n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} \lambda_{n-k} P_{n-k}^{(\alpha+1, \beta)} (\cos \Phi)$$

حيث:

$$\lambda_n = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \cong \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)} n^{\alpha+1}$$

عندئذٍ من أجل $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$, وبمأن $\{p_n\}$ و $\{q_n\}$ تحقق شروط

المبرهنة (1) عندئذٍ يكون:

$$N(\Phi) = O(n^{2\alpha+2}) \quad .0 \leq \Phi \leq 1/n \quad (4.10)$$

$$= O(n^{\alpha+\beta+1}) \quad . \pi - 1/n \leq \Phi \leq \pi \quad (4.11)$$

$$= O \left[\frac{q_n n^{\alpha+\frac{1}{2}} P\left(\frac{1}{\Phi}\right)}{(p * q)_n} \left(\sin \frac{\Phi}{2}\right)^{-\alpha-\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{\Phi}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}} \right]$$

$$+ O \left[n^{\alpha-1/2} \left(\sin \frac{\Phi}{2}\right)^{-\alpha-5/2} \left(\cos \frac{\Phi}{2}\right)^{-\beta-3/2} \right]$$

$$\frac{1}{n} \leq \Phi \leq \pi - 1/n \quad (4.12)$$

الإثبات: من أجل $0 \leq \Phi \leq \frac{1}{n}$, وحسب (4.1) نحصل على:

$$N(\Phi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)(p * q)_n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} (n-k)^{\alpha+1} (n-k)^{\alpha+1}$$

$$N(\Phi) = O \left[(p * q)_n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} (n-k)^{2\alpha+2} \right]$$

من التمهيدية (7) نجد:

$$N(\Phi) = O(n^{2\alpha+2})$$

وعندما $\pi - 1/n \leq \Phi \leq \pi$ وباستخدام (4.2) نحصل على (4.11).

$$N(\Phi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)(p * q)_n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} (n-k)^{\alpha+1} (n-k)^{\beta}$$

من التمهيدية (7) نجد:

$$= O(n^{\alpha+\beta+1})$$

ومن أجل $\frac{1}{n} \leq \phi \leq \pi - 1/n$ فيكون حسب التمهيدية (4) لدينا:

$$N(\phi) = \frac{O(1)}{(p * q)_n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} (n-k)^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-3/2} \\ \left(\cos \frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-1/2} \left[\cos\{(n-k)\phi + \rho\phi - r\} + \frac{O(1)}{(n-k) \sin \phi} \right]$$

$$N(\phi) = \frac{O(1)}{(p * q)_n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} (n-k)^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-3/2} \\ \left(\cos \frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-1/2} [\cos\{(n-k)\phi + \rho\phi - r\}] +$$

$$+ \frac{O(1)}{(p * q)_n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k q_{n-k} (n-k)^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-3/2} \left(\cos \frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-1/2} \\ \times \frac{O(1)}{(n-k) \sin \phi}$$

من التمهيدية (7) نجد :

$$= O \left[\frac{q_n n^{\alpha+\frac{1}{2}} P\left(\frac{1}{\phi}\right)}{(p * q)_n} \left(\sin \frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}} \right] \\ + O \left[n^{\alpha-1/2} \left(\sin \frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-5/2} \left(\cos \frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-3/2} \right]$$

إثبات المبرهنة (1):

نعلم من [8] أن المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة (2.1) في النقطة $x = 1$ يعطى بالشكل:

$$S_n(1) = 2^{\alpha+\beta+1} \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{\Phi}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{\Phi}{2}\right)^{2\beta+1} f(\cos \Phi) S'_n(1, \cos \Phi)$$

حيث $S'_n(1, \cos \Phi)$ يرمز إلى المجموع الجزئي النوني للمتسلسلة:

$$\sum_m \frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(1) P_m^{(\alpha,\beta)}(\cos \Phi)}{g_m}$$

حيث:

$$g_n = \frac{(2n + \alpha + \beta + 1)\Gamma(n + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}$$

ومن [9] نجد:

$$S'_n(1, \cos \Phi) = \lambda_n P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos \Phi)$$

لذلك فإن:

$$\begin{aligned} S_n(1) - S &= \\ &= 2^{\alpha+\beta+1} \lambda_n \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{\Phi}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{\Phi}{2}\right)^{2\beta+1} \{f(\cos \Phi) - S\} \\ &\quad \times P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos \Phi) d\Phi \\ &= 2^{\alpha+\beta+1} \lambda_n \int_0^{\pi} F(\Phi) P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos \Phi) d\Phi \end{aligned}$$

حيث λ_n الواردة في التمهيديّة (8).

الآن وبتطبيق طريقة (N, p, q) على المتسلسلة (2,1) في النقطة $x = 1$ نحصل على:

$$t_n^{p,q} = \frac{1}{(p * q)_n} \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} S_{n-k} \quad (1)$$

أي:

$$\begin{aligned} t_n^{p,q} - S &= \frac{1}{(p * q)_n} \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} (S_{n-k} (1) - S) \\ &= \int_0^\pi F(\Phi) N(\Phi) d\Phi \end{aligned}$$

لإثبات المبرهنة يكفي أن نبين بأن:

$$\int_0^\pi F(\Phi) N(\Phi) d\Phi = o(1); \quad n \rightarrow \infty$$

$N(\Phi)$ معرفة بالتمهيدية (8) حيث أوجدنا قيم مختلفة لها ولذلك قمنا بتجزئة التكامل

وفقاً لقيمتها المختلفة.

لنضع:

$$\begin{aligned} I &= \left[\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^\delta + \int_\delta^{\pi-1/n} + \int_{\pi-1/n}^\pi \right] d\Phi \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

حيث δ ثابت ما مناسب ولكن:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{1/n} |F(\Phi) O(n^{2\alpha+2})| d\Phi \quad \text{من (4.10)} \\ &= O(n^{2\alpha+2}) o\left(\frac{n^{-2\alpha-2}}{e^n}\right) \\ &= o(1) \quad , n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

ومن جهة ثانية لدينا :

$$I_2 = O\left(\frac{q_n n^{\alpha+1/2}}{(p * q)_n}\right) \int_{1/n}^{\delta} \frac{|F(\Phi)| P_{(1/\Phi)}}{\Phi^{(2\alpha+3)/2}} d\Phi$$

$$+ O(n^{\alpha-1/2}) \int_{1/n}^{\delta} \frac{|F(\Phi)|}{\Phi^{(2\alpha+5)/2}} d\Phi$$

$$= I_{2.1} + I_{2.2}$$

ليكن $\epsilon > 0$ ، و δ ثابت ما مناسب ، عندئذ:

$$|F_1(\Phi)| \leq \frac{\epsilon \Phi^{2\alpha+2}}{e^{\frac{1}{\Phi}}}, \quad 0 < \Phi \leq \delta$$

ومنه:

$$|I_{2.1}(\Phi)| \leq \frac{M q_n n^{\alpha+1/2}}{(p * q)_n} \int_{1/n}^{\delta} \frac{|F(\Phi)| P_{(1/\Phi)}}{\Phi^{(2\alpha+3)/2}} d\Phi$$

حيث M ثابت ما موجب ، بالتالي:

$$|I_{2.1}| \leq \frac{M q_n n^{\alpha+1/2}}{(p * q)_n} \left\{ \left[\frac{F_1(\Phi) P_{(1/\Phi)}}{\Phi^{(2\alpha+3)/2}} \right]_{1/n}^{\delta} - \int_{1/n}^{\delta} F_1(\Phi) \times d\left(\frac{P_{(1/\Phi)}}{\Phi^{(2\alpha+3)/2}}\right) \right\}$$

$$= I_{2.1.1} + I_{2.1.2}$$

إذا كان $M(\delta)$ ثابت متعلق بـ δ ، فنحصل على:

$$I_{2.1.1} = \frac{M(\delta) q_n n^{\alpha+1/2}}{(p * q)_n} + o\left(\frac{q_n P_n}{(p * q)_n e^n}\right)$$

$$= o(1)$$

حسب التمهيدية (3) والعلاقة (3.2).

كما أن:

$$\begin{aligned}
 |I_{2.1.2}| &\leq \frac{M\epsilon q_n n^{\alpha+1/2}}{(p * q)_n} \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{\Phi^{2\alpha+2}}{e^{\frac{1}{\Phi}}} \left| d \left(\frac{P_{(1/\Phi)}}{\Phi^{(2\alpha+3)/2}} \right) \right| \\
 &= \frac{M\epsilon q_n n^{\alpha+1/2}}{(p * q)_n} \int_{1/\delta}^n \frac{x^{-2\alpha-2}}{e^x} d\{P_{[x]} x^{(2\alpha+3)/2}\} \\
 &= \frac{M\epsilon q_n n^{\alpha+1/2}}{(p * q)_n} \int_{1/\delta}^n \frac{x^{-2\alpha-2}}{e^x} \{x^{(2\alpha+3)/2} dP_x\} + (2\alpha + 3)/2 \\
 &\quad \cdot x^{(2\alpha+1)/2} P_{[x]} dx \\
 &= \frac{M\epsilon q_n n^{\alpha+1/2}}{(p * q)_n} \left[\int_{1/\delta}^n \frac{x^{-(2\alpha+1)/2}}{e^x} dP_{[x]} + (2\alpha + 3)/2 \right. \\
 &\quad \left. \cdot \int_{1/\delta}^n \frac{x^{-(2\alpha+3)/2}}{e^x} P_{[x]} dx \right] \\
 &= \frac{M\epsilon q_n n^{\alpha+1/2}}{(p * q)_n} [J + (2\alpha + 3)/2K]
 \end{aligned}$$

حيث P_x دالة قفز لها قفزة قيمتها p_k عندما $x = k$

$$\begin{aligned}
 J &= \sum_{k=c}^n \frac{p_k}{k^{(2\alpha+1)/2} e^k} \cdot c \text{ ثابت ما موجب} \\
 &= O \left(\sum_{k=c}^n \frac{P_k}{k^{(2\alpha+3)/2} e^k} \right)
 \end{aligned}$$

حيث $P_n = \sum_{k=0}^n p_k$

وأيضاً:

$$k \leq \sum_{k=c-1}^{n-1} P_k \int_k^{k+1} \frac{x^{-(2\alpha+3)/2}}{e^x} dx = O \left\{ \sum_{k=c-1}^n \frac{P_k}{k^{(2\alpha+3)/2} e^k} \right\}$$

وبالتالي من (3.1) نجد :

$$|I_{2.1.2}| \leq M\epsilon$$

أيضاً:

$$\begin{aligned} |I_{2.2}| &\leq Mn^{\alpha-1/2} \int_{1/n}^{\delta} |F(\Phi)| \Phi^{-(2\alpha+5)/2} d\Phi \\ &= n^{\alpha-1/2} \left\{ M [F_1(\Phi) \Phi^{-(2\alpha+5)/2}]_{1/n}^{\delta} \right. \\ &\quad \left. + M \int_{1/n}^{\delta} F_1(\Phi) \Phi^{-(2\alpha+7)/2} d\Phi \right\} \end{aligned}$$

وبملاحظة أن:

$$= I_{2.2.1} + I_{2.2.2}$$

لذلك:

$$\begin{aligned} I_{2.2.1} &= M(\delta)n^{\alpha-1/2} + o(1) \\ &= o(1) \quad , \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

ومن جهة ثانية لدينا:

$$\begin{aligned} |I_{2.2.2}| &\leq M\epsilon n^{\alpha-1/2} \int_{1/n}^{\delta} \frac{\Phi^{\alpha-3/2}}{(e^{1/\Phi})} d\Phi \\ &= M\epsilon n^{\alpha-1/2} \int_{1/\delta}^n \frac{x^{-(2\alpha+1)/2}}{e^x} d\Phi \\ &\leq M\epsilon \quad . \quad a < 1/2 \end{aligned}$$

بالتالي:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sup}|I_2|$ صغير بقدر كافٍ ، وبالتالي بحكم اختيارية الثابت δ نحصل على المطلوب حيث $0 < \delta$ ، ولدينا $I_3 \rightarrow 0$ و $I_4 \rightarrow 0$ عندما $n \rightarrow \infty$ ، و من أجل قيمة ما مثبتة لـ δ نحصل على:

$$I_3 = O\left(\frac{q_n n^{\alpha+\frac{1}{2}}}{(p * q)_n}\right) \int_{\delta}^{\pi-\frac{1}{n}} |F(\Phi)| \left(\sin \frac{\Phi}{2}\right)^{-\alpha-\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{\Phi}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}} \\ \times P[1/\Phi] d\Phi \\ + O(n^{\alpha-1/2}) \int_{\delta}^{\pi-1/n} |F(\Phi)| \left(\sin \frac{\Phi}{2}\right)^{-\alpha-5/2} \left(\cos \frac{\Phi}{2}\right)^{-\beta-3/2} d\Phi \\ = I_{3.1} + I_{3.2}$$

بما أن المقدار $\left(\sin \frac{\Phi}{2}\right)^{-\alpha-3/2}$ محدود من أجل $\delta \leq \Phi \leq \pi$ حيث $P[1/\Phi]$ محدود ولأجل $-\beta - \frac{1}{2} > -\beta - \alpha - 1$ لدينا:

$$I_{3.1} = O\left(\frac{q_n n^{\alpha+1/2}}{(p * q)_n}\right) \int_{\delta}^{\pi-1/n} |F(\Phi)| \left(\cos \frac{\Phi}{2}\right)^{-\alpha-\beta-1} d\Phi$$

من التمهيدية (2) و (3) يكون:

$$I_{3.1} = O\left(\frac{q_n n^{\alpha+1/2}}{(p * q)_n}\right)$$

$$I_{3.1} = o(1) . n \rightarrow \infty$$

وذلك وفقاً للشرط الوارد في نص المبرهنة $\frac{1}{2^k} < \alpha < \frac{1}{2^k}$ حيث كان شرطاً أساسياً في التمهيديات المستخدمة وطريقة إثبات المبرهنة.

ولنضع التكامل $I_{3.2}$ بالشكل :

$$I_{3.2} = \left(\int_{\delta}^{\delta'} + \int_{\delta'}^{\pi-1/n} \right) d\Phi$$

وبأخذ $\epsilon' > 0$ عدداً مامعطي نستطيع اختيار δ' بحيث يكون:

$$\int_{\delta'}^{\pi} \left(\cos \frac{\Phi}{2} \right)^{-\alpha-\beta-1} |F(\Phi)| d\Phi \leq \epsilon'$$

إن $I_{3.2}$ في المجال $(\delta', \pi - 1/n)$ هو أقل من أو يساوي $M\epsilon'$.

$$n^{\alpha-1/2} \int_{\delta'}^{\pi-1/n} |F(\Phi)| \left(\cos \frac{\Phi}{2} \right)^{-\beta-3/2} d\Phi$$

$$= n^{\alpha-1/2} \int_{\delta'}^{\pi-1/n} |F(\Phi)| \left(\cos \frac{\Phi}{2} \right)^{-\beta-\alpha-1} \left(\cos \frac{\Phi}{2} \right)^{\alpha-1/2} d\Phi$$

$$\leq M\epsilon'$$

$$\left(\cos \frac{\Phi}{2} \right)^{\alpha-1/2} = o\left(\left(\frac{1}{n} \right)^{\alpha-1/2} \right)$$

بما أن :

بالتالي فإن النهاية العظمى توول إلى الصفر ، ومن أجل الثابت δ' لدينا:

$$\int_{\delta}^{\delta'} |F(\Phi)| \left(\sin \frac{\Phi}{2} \right)^{-\alpha-5/2} \left(\cos \frac{\Phi}{2} \right)^{-\beta-3/2} d\Phi = o(1)$$

حيث : $0(n^{\alpha-1/2}) \rightarrow 0$ عندما $\alpha < 1/2$.

أخيراً:

$$I_4 = o(n^{\alpha+\beta+1}) \int_{\pi-1/n}^{\pi} |F(\Phi)| d\Phi$$

ولما كان $n^{\alpha+\beta+1} = o\left(\left(\cos \frac{\Phi}{2} \right)^{-\alpha-\beta-1} \right)$ محققة بانتظام عندما

$$I_4 \rightarrow 0 \text{ ومنه ينتج أن } \pi - \frac{1}{n} \leq \Phi \leq \pi$$

وبذلك يتم إثبات المطلوب .

5. نتائج :

أ- إن طريقة نيورلاند المعممة (N, p, q) تؤول إلى طريقة نيورلاند (N, p_n) عندما $q_n = 1$ لكل عدد طبيعي n .

ب- إن طريقة نيورلاند المعممة (N, p, q) تؤول إلى طريقة ريس (\bar{N}, q_n) عندما $p_n = 1$ لكل عدد طبيعي n .

لأنه لو كانت المتتالية $\{p_n\}$ غير سالبة وموجبة بحيث:

$p_0 > 0$ وإذا كان :

$$P_n = \sum_{R=0}^n p_R \rightarrow \infty \quad ; \quad n \rightarrow \infty$$

$$\bar{t}_n = P_n^{-1} \sum_{R=0}^n p_R S_R \rightarrow S \quad . \quad n \rightarrow \infty$$

عندئذ نقول أنّ $\{S_n\}$ قابلة للجمع بطريقة ريس، ونكتب:

$$S_n \rightarrow S(\bar{N}, p_n)$$

حيث: $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية من المرتبة n للمتسلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ وإذا كان :

$$t_n = P_n^{-1} \sum_{k=0}^n p_k S_{n-k} \rightarrow S$$

عندما $n \rightarrow \infty$. عندئذ نقول أنّ $\{S_n\}$ قابلة للجمع بطريقة نيورلاند ونكتب:

$$S_n \rightarrow S(N, p_n)$$

6. توصيات ومقترحات:

- 1) دراسة قابلية جمع متسلسلات جاكوبي بطريقة ريس _ المصفوفية .
- 2) دراسة قابلية جمع متسلسلات جاكوبي بطريقة نيورلاند _ هاوسدورف.
- 3) دراسة قابلية جمع متسلسلات جاكوبي بطريقة نيورلاند _ آبل.

7. المراجع المستخدمة :

- [1] Binod Prasad Dhakal. Summability of Jacobi Series by lower Traingular Matrix Method .American Journal of Mathematical Analysis , Vol.1,No.3, (2013),42-47.
- [2] Hare Krishna Nigam and Ajay Sharma. AStudy of Almost Matrix Summability of Fourier-Jacobi Series ,ISSN 1842-6298 (electronic),1843-7265(Print),Volume6(2011),89-106.
- [3] N.Singh, N.Sharma, 2000, 110, " On (N, p, q) Summability Factors of Infinite Series ", (61-68) .
- [4] Pandey, B. N.: On the summability of Jacobi series by (N, p_n) method, Indian J. Pure Appl. Math., 12. (1981). 1438-1447.
- [5] Gupta. D. P.: D.Sc. Thesis, Nörlund summability of Jacobi series, University of Allahabad, Allahabad, (1970).
- [6] G. Szego, Gabor: Orthogonal Polynomials. Colloquium Publications. Amer. Math. Soc. Providence.,23.(1959).
- [7] Hardy. G. H.: (1949). Divergent Series. The University Press, Oxford.
- [8] Obrechhoff, N.: (1936). Formulés asymptotiqués pour les polynomés de Jacobi et Sur les séries suivant les mémés, polynomes. Ann. Univ. Sofia, Faculte Physico, Math., 32, 39-135.
- [9]Rau, H.: (1929). Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen(German) , J.f. . Math., 161, 237-254

تركيب سلوكيات إغناشاك الديناميكية للحالة المستوية الثانية لانفعالات الجسم المرن دقيق الاستقطاب

طالب الدكتوراه: راجح ديب¹
اشراف الدكتور: منتجب الحسن

ملخص البحث:

يتعلق البحث بالنموذج الرياضي للحالة الديناميكية المستوية الثانية لانفعالات المرنة للجسم الصلب دقيق الاستقطاب، والمتجانس والمتماثل المناحي، المعين بـ 5 ثوابت والمناقش رياضياً من خلال الباحثين [9] Eringen و [7] Nowacki، والذي يرمز له اختصاراً بـ $2D(E-N:5)$.

في البحث، من أجل الجسم المعبر، أولاً: سنعرض:

(أ) الوصف التقليدي [3]، (ب) وصف [5] Lamé، (ج) وصف [1,2,3,5,10] Ignaczak، (د) طريقة متجه Schaefer [5.p.p.217] في حل مسألة Lamé للجسم المعبر.

ثانياً: سنعمم طريقة متجه Schaefer لتشمل:

(ا) الوصف التقليد للجسم المعبر، (ب) وصف Ignaczak للجسم المعبر.

أخيراً سننهي البحث باقتراح عدد من المسائل للمناقشة.

الكلمات المفتاحية: - طريقة التراكيب - العمليتان الديناميكيان، النظاميتين، الكلاسيكية والتممة - معادلات الحركة بالإجهادات من نوع Ignaczak - الجسم المرن دقيق الاستقطاب ($2D(E-N:5)$ - الحالة الديناميكية المستوية الثانية لانفعالات المرنة.

¹ طالب دكتوراه في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

Combining regular solutions of the Ignaczak dynamical process relating to the second plane state of elastic strains of the micropolar elastic solid

Rameh Rajab Deeb [‡]

Abstract:

The paper relates to the mathematical model of the second plane state of small elastic strains of micropolar homogeneous and isotropic solid of 5 material constants, mathematically proposed by Eringen [9] and Nowacki [7], and shortly denoted by 2D(E-N:5).

In paper, for the 2D(E-N:5) considerable body, first we present:

I) The Classical Description, II) The Lamé Description, III) The Ignaczak Description [1,2,3,5,10], IV) The Schaefer vector method [5, pp.217] in solving the Lamé problem for the considerable body.

Then, we generalize the Schaefer vector method to: I) The traditional description for the second plane state of elastic strains of the 2D(E-N:5) considerable body, II) The Ignaczak description for the 2D(E-N:5) considerable body in its second plane state of elastic strains. Finally we end paper by suggesting some problems for discussing.

[‡] Ph.D. Student At Department of Mathematics-Faculty of Science – Al-Baath University, Homs-Syria

Key words: The Superposition Method -The Classical and Complementary Dynamical processes -Stress Equations of Ignaczak Type - Micropolar Elastic Solid 2D(E-N:5) -The Second Plane State of Elastic Strains.

1. مقدمة:

في [5,8] استُخدمت طريقة متجه Schaefer، في حل مسائل القيم الحدية لمعادلات Lamé ضمن الحالة المستوية الثانية لانفعالات الجسم (E-N:5) ذلك انطلاقاً من متجه Schaefer:

$$\zeta \equiv (\zeta_1, \zeta_2, 0), \quad \zeta_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} u_{3,\beta} - \varphi_\alpha, \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad \text{علماً أن: } \epsilon_{\alpha\beta} \text{ هو شبه}$$

تسور Levi-Civita النسبي بالوزن $\frac{1}{2}$ ، على الفضاء الاقليدي ثنائي البعد R^2 . بعدها تم

بنفس الطريقة، حل مسائل القيم الحدية لمعادلات Lamé للحالة ثنائية البعد، المتناظرة محورياً للانفعالات المرنة للجسم من النموذج (E-N:5)، (انظر مثلاً: [5])، كما قام نفس الباحث بحل مسائل القيم الحدية لمعادلات Lamé للحالة ثلاثية البعد للانفعالات المرنة للجسم من النموذج (E-N:6) [6]. وفي [5,6] أيضاً، قام الباحث Dyzlewicz باستخدام طريقة متجه Schaefer في حل مسائل القيم الحدية والابتدائية لمعادلات Lamé ضمن الحالة المستوية الثانية لانفعالات المرنة للجسم (E-N:5). هذا بالنسبة للتغطية المرجعية للطريقة.

في عام 1963 وضع الباحث البولندي Ignaczak وصفاً جديداً لجسم Hooke الصلب المرن من خلال معادلة تنسورية واحدة بالإجهادات، مزودة بشروط حدية وبشروط ابتدائية مصاغة بطريقة معينة. بعدها قام نفس الباحث عام 1971 بتعميم ذلك إلى جسم صلب مرن أكثر تعقيداً [10]. بعدها، في عام 2004 قام الباحث Dyzlewicz بتعميم ذلك إلى الجسم الصلب المرن (E-N:5) (اختصار لـ: Eringen-Nowacki)، الخاضع لحمول ميكانيكية، ضمن الحالة الديناميكية المستوية الثانية لانفعالات المرنة لهذا الجسم [5] (انظر أيضاً [1]).

2. هدف وأهمية البحث:

1. يهدف البحث إلى تعميم طريقة متجه Schaefer لتشمل: (I) الوصف التقليدي للجسم المعتر، (II) وصف Ignaczak للجسم المعتر.

2. تكمن أهمية البحث بأنه يزودنا بطريقة تحليلية جديدة في حل معادلات Ignaczak التيسورية التي تصف الحالة الديناميكية المستوية الثانية للانفعالات المرنة للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب والمتجانس والمتماثل المناحي، والمعين بـ 5 ثوابت مادية، ومن نوع Eringen-Nowacki، والذي نرسم له اختصاراً بالرمز: $2D(E-N:5)$ (القضبان: الحديدية، النحاسية، الألمنيوم، الفولاذ، ... الخ)، وبالتالي يمكن أن تملك نتائج هذا البحث أهمية كبيرة في مقاومة المواد وفي مخبر المواد والتسليح، ... الخ.

3. طرق البحث:

سنستخدم نتائج البحثين [5,8]، المتمثلة بطريقة متجه Schaefer في حل مسألة Lamé للجسم $2D(E-N:5)$ ، الذي يشغل في لحظة البدء المنطقة Ω بسيطة الترابط والمحدودة في المتنوعة الاقليدية R^2 ، ضمن الحالة الديناميكية المستوية الثانية لانفعالات المرنة لهذا الجسم، وسوف نستخدم هذه النتائج من أجل تعميم طريقة متجه Schaefer إلى مسألة الوصف التقليدي (العام) للجسم المعتر $2D(E-N:5)$ ، الذي يشغل في لحظة البدء المنطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية R^2 ، ضمن الحالة الديناميكية المستوية الثانية لانفعالات المرنة لهذا الجسم. بعدها باستخدام تعميم الاسلوب السابق، سنقوم باستنتاج طريقة تنسور Schaefer في حل معادلات Ignaczak بالإجهادات، والتي تصف الجسم $2D(E-N:5)$ ، ضمن الحالة الديناميكية المستوية الثانية لانفعالات المرنة.

بالتالي من أجل متطلبات البحث، نعرض فيمايلي ما يهمنا من نتائج البحثين [5,8].

3-1 مسألتا الوصف التقليدي ووصف *Lame* للحالة الديناميكية للجسم $(E-N:5)2D$ ، المتجانس والمتماثل المناحي، ضمن الحالة الديناميكية المستوية الثانية للانفعالات المرنة لهذا الجسم، الذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω ، المحدودة في المتنوعة الإقليدية ثنائية البعد R^2 [5]:

توطئة: سنفترض أن كافة الأدلة اللاتينية...., k, j, i تأخذ القيم 1, 2, 3، وأن كافة الأدلة الإغريقية...., α, β, γ تأخذ القيم 1, 2. وسنعمد رموز Einstein في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3 وفي المتنوعة الإقليدية ثنائية البعد R^2 ، ولتكن $Ox_1x_2x_3$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة، ومباشرة، وعطالية، وقاعدتها هي (e_1, e_2, e_3) . من أجل الحالة المستوية الثانية للانفعالات المرنة للجسم المدروس، تكون كافة الحقول التيسورية التي تحكم الحالة الترموديناميكية للجسم المعتبر، تكون مستقلة عن الاحداثي الديكارتي الثالث x_3 ، حيث توصف العملية الديناميكية المرنة للجسم المعتبر المتجانس والمتماثل المناحي من خلال الحقول التيسورية: $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$ ، حيث أن: \mathbf{u} و $\boldsymbol{\varphi}$ حقلان متجهيان مستقلان، هما على الترتيب، حقل الإزاحات وحقل التوجهات، إضافةً إلى ما تقدم ذكره فإن: $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}$ ، حقول تنسورية من المرتبة الثانية، هي على الترتيب: حقل إجهادات القوة، و حقل إجهادات العزم، و حقل الانفعالات، و حقل الانفعالات دقيقة الاستقطاب. وإذا رمزنا بـ $[0, \infty[$ و $]0, \infty[$ ، فيمكن أن تمثل الحقول السابقة في $\Omega \times T^+$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي e_i ، على الشكل التالي:

$$\mathbf{u} \equiv (0, 0, u_3), \quad \boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2, 0), \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{13} \\ 0 & 0 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{31} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} \equiv \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

حيث:

$$\mu_{33} = \frac{\beta}{2(\beta + \gamma)} \mu_{\alpha\alpha} \quad (3.4)$$

كما أن: $\beta, \gamma \in \mathbf{R}_+$ الثوابت مادية للجسم المدروس، أخيراً ننوه إلى أن جميع المركبات الموجودة في العلاقات السابقة تتبع للموضع: $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega$ وللزمن t .

أولاً) الوصف التقليدي: يتألف الوصف التقليدي للحالة الديناميكية للجسم 2D (E-N:5) المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الثانية لانفعالات المرنة، يتألف من المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [5]:

معادلات الحركة، المحققة في $\Omega \times \mathbf{T}^+$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} (\sigma_{3\alpha} - \sigma_{\alpha 3}) + \mu_{\alpha\beta, \alpha} + Y_{\beta} &= J \ddot{\varphi}_{\beta}, \\ \sigma_{\alpha 3, \alpha} + X_3 &= \rho \ddot{u}_3, \end{aligned} \quad (3.5)$$

علماً أن: J, ρ ، على الترتيب تمثلان الكثافة الحجمية والعطالة الدورانية للجسم المعتبر و $\mathbf{X} \equiv (0, 0, X_3)$ يمثل حقل القوة الحجمية و $\mathbf{Y} \equiv (Y_1, Y_2, 0)$ حقل العزم الحجمي. نرمز بواسطة الفاصلة الدلالية للمشتق الجزئي بالنسبة للموضع: $f_{, \beta} = \frac{\partial f}{\partial x_{\beta}}$ ، كما نرمز بالنقطة للمشتق الجزئي بالنسبة للزمن: $\dot{f} \equiv \partial f / \partial t$. أخيراً

الرموز $\in_{\alpha\beta}$ تمثل المركبات الديكارتية لتتسور Levi-Civita، النسبي، من المرتبة

$$\text{الثانية، مع الوزن: } w = \frac{1}{2}.$$

معادلات انسجام الانفعالات، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\kappa_{\alpha\beta} + \in_{\delta\beta} \gamma_{3\delta,\alpha} = 0, \quad \kappa_{\alpha\alpha} + \in_{\delta\beta} \gamma_{\beta 3,\delta} = 0, \quad (3.6)$$

العلاقات الهندسية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\gamma_{\alpha 3} = u_{3,\alpha} + \in_{\alpha\beta} \varphi_{\beta}, \quad \gamma_{3\alpha} = \in_{\beta\alpha} \varphi_{\beta}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta,\alpha}, \quad (3.7)$$

العلاقات التأسيسية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$(\sigma_{\alpha 3}, \sigma_{3\alpha}) = (\mu + \alpha) (\gamma_{\alpha 3}, \gamma_{3\alpha}) + (\mu - \alpha) (\gamma_{3\alpha}, \gamma_{\alpha 3}), \quad (3.8)$$

$$\mu_{\alpha\beta} = (\gamma + \varepsilon) \kappa_{\alpha\beta} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{\beta\alpha} + \beta \kappa_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta},$$

حيث $\mu, \alpha, \varepsilon \in R_+$ باقي الثوابت المادية، التي عددها الإجمالي هو 5، أما $\delta_{\alpha\beta}$

فهو رمز دلتا كرونিকা،

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\sigma_{\alpha 3} n_{\alpha} = p_3, \quad \mu_{\alpha\beta} n_{\alpha} = m_{\beta}, \quad (3.9)$$

حيث التوابع $[(p_3, m_{\beta}): \partial\Omega \times T \rightarrow R]$ مفروضة، و $\partial\Omega$ تمثل الحدود الملساء

للمنطقة Ω ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$)، أما: $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0)$ فهي المركبات الديكارتية لمتجه

واحدة ناظم $\partial\Omega$ والموجه نحو خارج Ω .

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$\varphi_{\alpha} = h_{\alpha}, \quad u_3 = h_3, \quad (3.10)$$

$$\dot{\varphi}_{\alpha} = \ell_{\alpha}, \quad \dot{u}_3 = \ell_3,$$

حيث التوابع $[(h_{\alpha}, h_3, \ell_{\alpha}, \ell_3): \Omega \rightarrow R]$ مفروضة.

ثنائياً) وصف *Lame*: يتألف وصف *Lame* للحالة الديناميكية للجسم 2D (E-N:6) المتجانس والتمائل المناحي، ضمن الحالة المستوية الثانية لانفعالات المرنة، يتألف من المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [5]:

معادلات *Lame* للحركة، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\square_4 \varphi_\alpha + (\beta + \gamma - \varepsilon) \varphi_{\beta, \beta \alpha} + 2\alpha \varepsilon_{\alpha \gamma} u_{3, \gamma} + Y_\alpha = 0, \quad (3.11)$$

$$\square_2 u_3 + 2\alpha \varepsilon_{\alpha \beta} \varphi_{\beta, \alpha} + X_3 = 0, \quad (3.12)$$

حيث: $\square_4 = (\gamma + \varepsilon) \Delta_1 - 4\alpha - J \partial_t^2$ و $\square_2 = (\mu + \alpha) \Delta_1 - \rho \partial_t^2$

و $D = \Delta_1 - \frac{1}{\kappa} \partial_t$ و Δ_1 هو مؤثر لابلاس الاشتقاقي السلمي ثنائي البعد:

$$, \partial_t f = \dot{f} = df / dt, \text{ أما } (\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2})$$

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$[(\mu + \alpha) u_{3, \alpha} + 2\alpha \varepsilon_{\alpha \beta} \varphi_\beta] n_\alpha = p_3, \quad (3.13)$$

$$[(\gamma + \varepsilon) \varphi_{\beta, \alpha} + (\gamma - \varepsilon) \varphi_{\alpha, \beta} + \beta \varphi_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha \beta}] n_\alpha = m_\beta,$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$\varphi_\alpha = h_\alpha, \quad u_3 = h_3, \quad \dot{\varphi}_\alpha = \ell_\alpha, \quad \dot{u}_3 = \ell_3, \quad (3.14)$$

نضيف إلى المسألة السابقة (3.11)-(3.14)، العلاقات الهندسية (3.7) والعلاقات التأسيسية (3.8)، وندعو المسألة الناتجة مسألة وصف *Lame* للحالة الديناميكية المستوية الثانية لانفعالات المرنة الجسم الصلب المرن 2D (E-N:6) المتجانس والتمائل المناحي.

2-3 طريقة متجه Schaefer في حل مسألة وصف Lamé للحالة الديناميكية
المستوية الثانية للانفعالات المرنة للجسم (2D(E-N:6) [5]:

نحصل على هذه الطريقة، باتباع الآتي:

بتعويض المركبات: $\zeta_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} u_{3,\beta} - \varphi_\alpha$: Schaefer لمتجه $\zeta_\alpha \equiv (\zeta_1, \zeta_2, 0)$ ،

في المعادلتين (3.11) و (3.12) ، من ثم بالاستفادة من العلاقة:

$$\epsilon_{\alpha\gamma} \epsilon_{\epsilon\delta} = \delta_{\alpha\epsilon} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\gamma\epsilon} \quad (3.15)$$

نحصل على المعادلتين التاليتين المحققتين في $\Omega \times T^+$ لأجل التوابع المجهولة u_3 و ζ_α :

$$\square_4 \zeta_\alpha + (\beta + \gamma - \epsilon) \zeta_{\beta,\beta\alpha} - \frac{1}{2} \square_4^* \epsilon_{\alpha\beta} u_{3,\beta} - Y_\alpha = 0, \quad (3.16)$$

$$\square_2^* u_3 + 2\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \zeta_{\alpha,\beta} + X_3 = 0, \quad (3.17)$$

حيث \square_4^* و \square_2^* ، على الترتيب هما \square_4 و \square_2 بعد تعويض $\alpha = 0$.

لنفترض الآن أن:

$$\begin{aligned} u_3 &= u_3^0 + u_3' , \varphi_\alpha = \varphi_\alpha^0 + \varphi_\alpha' , \\ \zeta_\alpha &= \zeta_\alpha^0 + \zeta_\alpha' , Y_\alpha = Y_\alpha^0 + Y_\alpha' , \end{aligned} \quad (3.18)$$

حيث المقاطع: φ_α^0 , u_3^0 تتعلق بجسم هوك ضمن المرونة الديناميكية التقليدية، والحالة
المستوية الثانية للانفعالات التقليدية المرنة ، بينما تمثل المقاطع المتجهية φ_α' , u_3' بالمقاطع
الزائدة عن المقاطع التقليدية السابقة. عندئذٍ بوضع: $\zeta_\alpha^0 = 0$ ، نصل إلى مسألة القيم
الحدية والابتدائية للجسم في إطار المرونة الخطية التقليدية ضمن الحالة الديناميكية
المستوية الثانية للانفعالات التقليدية المرنة لجسم هوك الناتج، حيث نحصل من المعادلة
(3.17) على معادلات Lamé التقليدية التالية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\square_2^* u_3^0 + X_3 = 0, \quad (3.19)$$

إلى ذلك نضيف الشروط الحدية والابتدائية، التقليدية التالية، التي نحصل عليها من

الشروط الحدية والابتدائية (3.9) و (3.10):

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\sigma_{\alpha 3}^0 n_\alpha = p_3 \quad (3.20)$$

حيث: $\sigma_{\alpha 3}^0 = \sigma_{3\alpha}^0$ هي المركبات الديكارتية لحقل الإجهادات التقليدي σ^0 ، المتناظر،

وهي تعطى بالعلاقات التأسيسية، الكلاسيكية، التالية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\sigma_{\alpha 3}^0 = 2\mu \varepsilon_{\alpha 3}^0, \quad (3.21)$$

حيث: $\varepsilon_{\alpha 3}^0 = \varepsilon_{3\alpha}^0$ هي المركبات الديكارتية لحقل الانفعالات، التقليدي ε^0 ، المتناظر،

وهي تعطى بالعلاقات الهندسية، الكلاسيكية، التالية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\varepsilon_{\alpha 3}^0 = \frac{1}{2} u_{3,\alpha}^0 \quad (3.22)$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_3^0 = h_3, \quad \dot{u}_3^0 = \ell_3, \quad (3.23)$$

الآن، من أجل استنتاج مسألة القيم الحدية والابتدائية، المتممة أو الزائدة

لأجل u_3', ζ_α' ، يلزمنا هنا اثبات صحة المعادلة التالية في $\Omega \times T^+$:

$$2 \square_2^* \varphi_\alpha^0 + \varepsilon_{\alpha\beta} X_{3,\beta} = 0 \quad (3.24)$$

الأثبات: باشتقاق طرفي المعادلة، جزئياً بالنسبة لـ x_β ، ومن ثم بظرب الطرفين

بـ $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ، نحصل على المعادلة التالية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$2 \square_2^* \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} u_{3,\beta}^0 \right) + \varepsilon_{\alpha\beta} X_{3,\beta} = 0, \quad (3.25)$$

ينتج عن ذلك وعن كون أن التوجهات الكلاسيكية: φ_α^0 ، تعطى بـ :

$$\varphi_\alpha^0 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u_{3,\beta}^0 \quad (3.26)$$

أن المعادلة (3.24) محققة.

نحصل الآن، على المعادلات التفاضلية، الزائدة، لأجل ζ'_α, u'_3 باتباع مايلي. بتطبيق

المؤثر الديناميكي \square_2^* على طرفي المعادلة (3.16)، نحصل على المعادلة التالية في

$$:\Omega \times T^+$$

$$\begin{aligned} \square_2^* [\square_4^* \zeta_\alpha + (\beta + \gamma - \varepsilon) \zeta_{\beta,\beta\alpha} - \frac{1}{2} \square_4^* \in_{\alpha\beta} u_{3,\beta}] \\ - \square_2^* Y_\alpha = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

الآن من المعادلة (3.27)، لأجل $(\zeta_\alpha^0 = 0$ و $Y_\alpha^0 = 0)$ ، تتفصل أو تخرج

المعادلة التالية، المحققة في: $\Omega \times T^+$

$$\square_4^* (2 \square_2^* \varphi_\alpha^0 + \in_{\alpha\beta} X_{3,\beta}) = 0, \quad (3.28)$$

التي بدورها محققة بسبب تحقق المعادلة (3.25).

ينتج عن المعادلات: (3.12) و (3.19)، وعن المعادلات (3.27) و (3.28)، أن

الحقول الزائدة: $\zeta'_\alpha = \zeta_\alpha$ ، u'_3 ، تحقق المعادلات التالية في $\Omega \times T^+$:

$$\square_2^* u'_3 + 2\alpha \in_{\alpha\beta} \zeta_{\alpha,\beta} + \hat{X}_3 = 0, \quad (3.30)$$

$$\square_2^* [\square_4^* \zeta_\alpha + (\beta + \gamma - \varepsilon) \zeta_{\beta,\beta\alpha} - \frac{1}{2} \square_4^* \in_{\alpha\beta} u'_{3,\beta}] - \hat{Y}_\alpha = 0 \quad (3.31)$$

حيث:

$$\hat{X}_3 = 0 \quad , \quad \hat{Y}_\alpha = \square_2^* Y_\alpha - \frac{1}{2} \square_4^* \epsilon_{\alpha\beta} X_{3,\beta} \quad (3.32)$$

بحذف مركبات متجه تشيفر: ζ_α من المعادلتين (3.30) و(3.31)، من خلال تعويض:

$$\zeta_\alpha = \zeta'_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} u'_{3,\beta} - \phi'_\alpha \quad (3.33)$$

نحصل على جملة المعادلتين التاليتين، المحققتين في $\Omega \times T^+$ ، للحقول الزائدة: u'_3, ϕ'_α :

$$\square_2 u'_3 + 2\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \phi'_{\beta,\alpha} + \hat{X}_3 = 0 \quad , \quad (3.34)$$

$$\square_2^* [\square_4 \phi'_\alpha + (\beta + \gamma - \epsilon) \phi'_{\beta,\beta\alpha} + 2\alpha \epsilon_{\alpha\gamma} u'_{3,\gamma}] + \hat{Y}_\alpha = 0 \quad (3.35)$$

إلى جملة المعادلات الزائدة (3.34)-(3.35)، نضيف الشروط الحدية والابتدائية التالية الناتجة عن الشروط الحدية والابتدائية الأصلية: (3.13)-(3.14) (أو عن (3.9) و(3.10)):

الشروط الحدية، الزائدة، المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} [(\mu + \alpha) u'_{3,\alpha} + 2\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \phi'_\beta] n_\alpha &= 0 \quad , \\ [(\gamma + \epsilon) \phi'_{\beta,\alpha} + (\gamma - \epsilon) \phi'_{\alpha,\beta} + \beta \phi'_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta}] n_\alpha &= m_\beta - m_\beta^0 \quad , \end{aligned} \quad (3.36)$$

علماً أن:

$$\begin{aligned} m_\beta^0 &= \mu_{\alpha\beta}^0 n_\alpha \quad , \quad \phi_\alpha^0 = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} u_{3,\beta}^0 \quad , \\ \mu_{\alpha\beta}^0 &= (\gamma + \epsilon) \kappa_{\alpha\beta}^0 + (\gamma - \epsilon) \kappa_{\beta\alpha}^0 + \beta \kappa_{\gamma\gamma}^0 \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (3.37) \\ \kappa_{\gamma\gamma}^0 &= 0 \quad , \quad \kappa_{\alpha\beta}^0 = \phi_{\beta,\alpha}^0 \quad , \end{aligned}$$

ونلاحظ من (3.37)، أن المقدارين: m_β^0 يعبر عنهما بدلالة ϕ_α^0 ، والتي بدورها تُحدد

من حل مسألة القيم الحدية والابتدائية الكلاسيكية: (3.19)-(3.23).

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$\begin{aligned} u'_3 &= 0, \quad \varphi'_\alpha = h_\alpha - \varphi_\alpha^{0(0)}, \\ \dot{u}'_3 &= 0, \quad \dot{\varphi}'_\alpha = \ell_\alpha - \dot{\varphi}_\alpha^{0(0)}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

حيث هنا: $\varphi_\alpha^{0(0)}$ و $\dot{\varphi}_\alpha^{0(0)}$ ، على الترتيب، هما القيمتان الابتدائيتان لـ φ_α^0 و $\dot{\varphi}_\alpha^0$.

آلية حل المسألة:

بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية الكلاسيكية (3.23)-(3.19)، نحصل على الحل الكلاسيكي: u_3^0 ، بالتالي نحصل على التوجهات الكلاسيكية φ_α^0 ، باستخدام العلاقة الكلاسيكية (3.26). بعدها بحل المسألة المتممة أو الزائدة (3.34)-(3.38) (التي أصبحت جميع معطيات شروطها الحدية والابتدائية معلومة)، بحلها نحصل على u'_3, φ'_α . بتعويض الحل التقليدي u_3^0, φ_α^0 والحل الزائد u'_3, φ'_α في العلاقتين الأولى والثانية من العلاقة (3.18)، نحصل على الحل: u_3, φ_α لمسألة Lamé (3.14)-(3.11) و (3.7) و (3.8). بعدها باستخدام العلاقات الهندسية (3.7) نحصل على الانفعالات، بعدها نحصل من الانفعالات الناتجة ومن العلاقات التأسيسية (3.8) على الإجهادات.

3-3: وصف *Ignaczak* بالإجهادات للجسم $2D(E-N:5)$ ضمن الحالة الديناميكية المستوية الثانية للانفعالات المرنة لهذا الجسم [5]: يتألف وصف *Ignaczak* للحالة الديناميكية المستوية الثانية للانفعالات المرنة للجسم $2D(E-N:5)$ ، المتجانس والتمائل المناحي، يتألف من المعادلات والعلاقات التأسيسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [5]:

معادلات الحركة بالإجهادات، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$J^{-1} \in_{\beta\alpha} R_\beta - \frac{1}{2\mu} \ddot{\sigma}_{(\alpha 3)} + \frac{1}{2\alpha} \ddot{\sigma}_{[\alpha 3]} = 0, \quad (3.39)$$

$$J^{-1}R_{\alpha, \beta} - \frac{1}{2\gamma} [\ddot{\mu}_{(\alpha\beta)} - \hat{\nu} \ddot{\mu}_{\varepsilon\varepsilon} \delta_{\alpha\beta}] + \frac{1}{2\varepsilon} \ddot{\mu}_{[\alpha\beta]} = 0, \quad (3.40)$$

$$J^{-1} \varepsilon_{\alpha\beta} R_{\beta} + \rho^{-1} R_{3,\alpha} - \frac{1}{2\mu} \ddot{\sigma}_{(\alpha 3)} - \frac{1}{2\alpha} \ddot{\sigma}_{[\alpha 3]} = 0, \quad (3.41)$$

حيث:

$$R_{\beta} = \hat{R}_{\beta} + Y_{\beta}, R_{3} = \hat{R}_{3} + X_{3}, \hat{R}_{\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} (\sigma_{3\alpha} - \sigma_{\alpha 3}) + \mu_{\alpha\beta, \alpha},$$

$$\hat{R}_{3} = \sigma_{\alpha 3, \alpha}, \hat{\nu} = \frac{\beta}{2(\gamma + \beta)},$$

$$\sigma_{(\alpha 3)} = \frac{1}{2} (\sigma_{\alpha 3} + \sigma_{3\alpha}), \quad \sigma_{[\alpha 3]} = \frac{1}{2} (\sigma_{\alpha 3} - \sigma_{3\alpha}) \quad \text{أخيراً:}$$

$$\mu_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (\mu_{\alpha\beta} + \mu_{\beta\alpha}), \quad \mu_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} (\mu_{\alpha\beta} - \mu_{\beta\alpha}) \quad \text{و:}$$

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\sigma_{\alpha 3} n_{\alpha} = p_3, \quad \mu_{\alpha\beta} n_{\alpha} = m_{\beta}, \quad (3.42)$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$\sigma = \sigma^{(0)}, \quad \mu = \mu^{(0)}, \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{(0)}, \quad \dot{\mu} = \dot{\mu}^{(0)} \quad (3.43)$$

حيث:

$$\sigma^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13}^{(0)} \\ 0 & 0 & \sigma_{23}^{(0)} \\ \sigma_{31}^{(0)} & \sigma_{32}^{(0)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} \mu_{11}^{(0)} & \mu_{12}^{(0)} & 0 \\ \mu_{21}^{(0)} & \mu_{22}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33}^{(0)} \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

$$\dot{\sigma}^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\sigma}_{13}^{(0)} \\ 0 & 0 & \dot{\sigma}_{23}^{(0)} \\ \dot{\sigma}_{31}^{(0)} & \dot{\sigma}_{32}^{(0)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mu}^{(0)} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\mu}_{11}^{(0)} & \dot{\mu}_{12}^{(0)} & 0 \\ \dot{\mu}_{21}^{(0)} & \dot{\mu}_{22}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mu}_{33}^{(0)} \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

علماً أن:

$$\mu_{33}^{(0)} = \hat{\nu} \mu_{\alpha\alpha}^{(0)}, \quad \dot{\mu}_{33}^{(0)} = \hat{\nu} \dot{\mu}_{\alpha\alpha}^{(0)}, \quad (3.46)$$

وأن:

$$\begin{aligned} [\sigma_{\alpha 3}^{(0)}, \sigma_{3\alpha}^{(0)}] &= (\mu + \alpha) [\gamma_{\alpha 3}^{(0)}, \gamma_{3\alpha}^{(0)}] + (\mu - \alpha) [\gamma_{3\alpha}^{(0)}, \gamma_{\alpha 3}^{(0)}], \\ \mu_{\alpha\beta}^{(0)} &= (\gamma + \varepsilon) \kappa_{\alpha\beta}^{(0)} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{\beta\alpha}^{(0)} + \beta \kappa_{\gamma\gamma}^{(0)} \delta_{\alpha\beta}, \\ \gamma_{\alpha 3}^{(0)} &= h_{3,\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta} h_{\beta}, \quad \gamma_{3\alpha}^{(0)} = \varepsilon_{\beta\alpha} h_{\beta}, \quad \kappa_{\alpha\beta}^{(0)} = h_{\beta,\alpha}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

كما أن:

$$\begin{aligned} [\dot{\sigma}_{\alpha 3}^{(0)}, \dot{\sigma}_{3\alpha}^{(0)}] &= (\mu + \alpha) [\dot{\gamma}_{\alpha 3}^{(0)}, \dot{\gamma}_{3\alpha}^{(0)}] + (\mu - \alpha) [\dot{\gamma}_{3\alpha}^{(0)}, \dot{\gamma}_{\alpha 3}^{(0)}], \\ \dot{\mu}_{\alpha\beta}^{(0)} &= (\gamma + \varepsilon) \dot{\kappa}_{\alpha\beta}^{(0)} + (\gamma - \varepsilon) \dot{\kappa}_{\beta\alpha}^{(0)} + \beta \dot{\kappa}_{\gamma\gamma}^{(0)} \delta_{\alpha\beta}, \\ \dot{\gamma}_{\alpha 3}^{(0)} &= \ell_{3,\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta} \ell_{\beta}, \quad \dot{\gamma}_{3\alpha}^{(0)} = \varepsilon_{\beta\alpha} \ell_{\beta}, \quad \dot{\kappa}_{\alpha\beta}^{(0)} = \ell_{\beta,\alpha}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

العلاقات التأسيسية العكسية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha 3} &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{(\alpha 3)} + \frac{1}{2\alpha} \sigma_{[\alpha 3]}, \quad \gamma_{3\alpha} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{(\alpha 3)} - \frac{1}{2\alpha} \sigma_{[\alpha 3]}, \\ \kappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\gamma} \mu_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2\varepsilon} \mu_{[\alpha\beta]} - \frac{\hat{\nu}}{2\gamma} \mu_{\varepsilon\varepsilon} \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

العلاقات التي الإزاحة والدورانات بدلالة الإجهادات، والمحققة في $\bar{\Omega} \times T$:

$$\varphi_{\alpha} = \ell_{\alpha} t + h_{\alpha} + J^{-1}(t * R_{\alpha}), \quad (3.50)$$

$$u_3 = \ell_3 t + h_3 + \rho^{-1}(t * R_3), \quad (3.51)$$

حيث النجمة * تعني الطي [11]: $t * f(\mathbf{x}; t) = \int_0^t (t - \tau) f(\mathbf{x}; \tau) d\tau$

آلية حل مسألة Ignaczak: بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية (3.48) - (3.39)

والأخذ بعين الاعتبار العلاقات (3.4) نحصل على الإجهادات: (σ, μ) . وإذا عوضنا

هذا الحل الناتج: (σ, μ) في العلاقات التأسيسية العكسية (3.49)، نحصل على الانفعالات:

(γ, κ) . أما إذا عوضنا الحل: (σ, μ) في العلاقات (3.50) و (3.51)، فنحصل على

الإزاحات والدورانات: (\mathbf{u}, φ) .

4. النتائج والمناقشة:

في كلٍ من الوصف التقليدي (3.10)-(3.1)، و وصف Ignaczak (3.51) - (3.39) للجسم المعتبر $2D(E-N:5)$ ، ضمن الحالة الديناميكية المستوية الثانية لانفعالاته المرنة، سنفرض فيه أن:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}' , \quad \varphi = \varphi^0 + \varphi' , \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}' , \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^0 + \boldsymbol{\mu}' , \quad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\gamma}' , \\ \boldsymbol{\kappa} &= \boldsymbol{\kappa}^0 + \boldsymbol{\kappa}' , \quad \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^0 + \mathbf{Y}' , \end{aligned} \quad (4.1)$$

حيث الحقول $(\mathbf{u}^0, \varphi^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$ و \mathbf{Y}^0 ، تتعلّق بالمرونة الخطية، الكلاسيكية والديناميكية المترابطة (موديل Hooke) ضمن الحالة المستوية الثانية لانفعالات المرنة لهذا الجسم، أما الحقول $(\mathbf{u}', \varphi', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$ و \mathbf{Y}' فهي الحقول المتممة، أو الزائدة عن حقول الجسم Hooke، المذكور أعلاه.

1-4 تعميم طريقة متجه *Schaefer* إلى حل مسألة الوصف التقليدي (العام) للجسم

$2D(E-N:5)$ ، ضمن الحالة المستوية الثانية لانفعالات المرنة لهذا الجسم:

1-1-4 مسألة القيم الحدية والابتدائية المتعلقة بالحقول $(\mathbf{u}^0, \varphi^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$:

نحصل عليها باتباع ما يلي.

من المعادلتين $(3.5)_2$ ، نحصل على:

معادلات الحركة، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma_{\alpha 3, \alpha}^0 + X_3 = \rho \ddot{u}_3^0 , \quad (4.2)$$

من معادلات توافق الانفعالات (3.6)، نحصل على المعادلات التالية المحققة

في $\Omega \times T$:

$$\kappa_{\alpha \beta}^0 + \varepsilon_{\delta \beta} \varepsilon_{3 \delta, \alpha}^0 = 0 , \quad \kappa_{\alpha \alpha}^0 + \varepsilon_{\delta \beta} \varepsilon_{\beta 3, \delta}^0 = 0 , \quad (4.3)_1$$

التي إذا حذفنا منها انفعالات العزم، الكلاسيكية، فإننا نحصل فقط على معادلة واحدة؛ هي:

معادلة توافق الانفعالات التقليدية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\varepsilon_{13,2}^0 - \varepsilon_{23,1}^0 = 0, \quad (4.3)_2$$

ومن العلاقات الهندسية (3.7)، نحصل على العلاقات الهندسية الكلاسيكية التالية،

المحققة في $\Omega \times T^+$:

العلاقات الهندسية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\varepsilon_{\alpha 3}^0 = u_{3,\alpha}^0 + \varepsilon_{\alpha\beta} \varphi_{\beta}^0, \quad \varepsilon_{3\alpha}^0 = \varepsilon_{\beta\alpha} \varphi_{\beta}^0, \quad \kappa_{\alpha\beta}^0 = \varphi_{\beta,\alpha}^0, \quad (4.4)_1$$

والتي اعتمادا على تعريف الدوران الكلاسيكي $(\varphi_{\alpha}^0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} u_{3,\beta}^0)$ ، وبمساعدة

العلاقة: $\varepsilon_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\varepsilon\delta} = \delta_{\alpha\varepsilon} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\gamma\varepsilon}$ ، فإن العلاقة الأولى والثانية منها (أي

من (4.4)₁)، تعطينا:

العلاقات الهندسية الكلاسيكية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\varepsilon_{\alpha 3}^0 = \varepsilon_{3\alpha}^0 = \frac{1}{2} u_{3,\alpha}^0, \quad (4.4)_2$$

وهنا يتضح تناظر حقل الانفعالات التتسوري، الكلاسيكي،

من العلاقات التأسيسية (3.8)، نحصل على العلاقات التأسيسية الكلاسيكية التالية،

المحققة في $\Omega \times T$:

$$(\sigma_{\alpha 3}^0, \sigma_{3\alpha}^0) = (\mu + \alpha) (\varepsilon_{\alpha 3}^0, \varepsilon_{3\alpha}^0) + (\mu - \alpha) (\varepsilon_{3\alpha}^0, \varepsilon_{\alpha 3}^0), \quad (4.5)_1$$

$$\mu_{\alpha\beta}^0 = (\gamma + \varepsilon) \kappa_{\alpha\beta}^0 + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{\beta\alpha}^0 + \beta \kappa_{\gamma\gamma}^0 \delta_{\alpha\beta},$$

حيث: $\kappa_{\gamma\gamma}^0 = 0$

وكون أن تتسور الانفعالات الكلاسيكية متناظر، فإن العلاقة الأولى من العلاقات

السابقة تعطينا:

العلاقات التأسيسية الكلاسيكية التالية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\sigma_{\alpha 3}^0 = 2\mu \varepsilon_{\alpha 3}^0, \quad (4.5)_2$$

من الشروط الحدية (3.9)، نحصل على:

الشروط الحدية، الكلاسيكية، التالية، المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\sigma_{\alpha 3}^0 n_{\alpha} = p_3, \quad (4.6)$$

ومن الشروط الابتدائية (3.10)، نحصل على:

الشروط الابتدائية الكلاسيكية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_3^0 = h_3, \quad \dot{u}_3^0 = \ell_3, \quad (4.7)$$

تمثل المسألة (4.7)-(4.2) بالمسألة الكلاسيكية للوصف التقليدي العام للجسم

2D(E-N:5)، ضمن الحالة الديناميكية المستوية الثانية لانفعالاته المرنة.

4-1-2 مسألة القيم الحدية والابتدائية للحقول المتممة $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$ (الزائدة):

نحصل عليها باتباع ما يلي.

بدايةً نلزمنا المعادلة المساعدة التالية:

$$\square_2^* \mu_{\alpha\beta, \alpha}^0 + \frac{1}{2} \square_4^* \epsilon_{\alpha\beta} X_{3,\beta} = J \square_2^* \ddot{\varphi}_{\alpha}^0 \quad (4.8)$$

المحققة في $\Omega \times T^+$. بسهولة يمكن ملاحظة أن هذه المعادلة تنتج عن المعادلة (3.24)

وعن العلاقة الهندسية الثانية في (4.4)₁ وعن العلاقة التأسيسية الثانية في (4.5)₁.

للحصول، الآن، على المعادلات للحقول المتممة $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$ (الزائدة) نتبع الآتي.

تطبيق المؤثر \square_2^* على طرفي المعادلة (3.5)₁ فنحصل بذلك على المعادلة التالية (في):

$(\Omega \times T^+)$:

$$\square_2^* [\epsilon_{\alpha\beta} (\sigma_{3\alpha} - \sigma_{\alpha 3}) + \mu_{\alpha\beta, \alpha}] + \hat{Y}_{\beta} + \frac{1}{2} \square_4^* \epsilon_{\alpha\beta} X_{3,\beta} = J \square_2^* \ddot{\varphi}_{\beta}^0 \quad (4.9)$$

ينتج الآن عن (4.9) و(4.8) وعن المعادلتين (3.5)₂، أن مجموعة الحقول

المتممة $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$ يحقق نظام المعادلات، المتمم (الزائد)، التالي في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma'_{\alpha 3, \alpha} + \hat{X}_3 = \rho \ddot{u}'_3, \quad (4.10)$$

$$\square_2^* [\epsilon_{\alpha \beta} (\sigma'_{3\alpha} - \sigma'_{\alpha 3}) + \mu'_{\alpha \beta, \alpha}] + \hat{Y}_\beta = J \square_2^* \ddot{\phi}'_\beta$$

من معادلات توافق الانفعالات (3.6)، نحصل على:

معادلات انسجام الانفعالات، المحققة في $\Omega \times T$:

معادلات توافق الانفعالات، المتممة، التالية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\kappa'_{\alpha \beta} + \epsilon_{\delta \beta} \gamma'_{3\delta, \alpha} = 0, \quad \kappa'_{\alpha \alpha} + \epsilon_{\delta \beta} \gamma'_{\beta 3, \delta} = 0, \quad (4.11)$$

ومن العلاقات الهندسية (3.7)، نحصل على:

العلاقات الهندسية، المتممة، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\gamma'_{\alpha 3} = u'_{3, \alpha} + \epsilon_{\alpha \beta} \phi'_\beta, \quad \gamma'_{3\alpha} = \epsilon_{\beta \alpha} \phi'_\beta, \quad \kappa'_{\alpha \beta} = \phi'_{\beta, \alpha}, \quad (4.12)$$

ومن العلاقات التأسيسية (3.8)، نحصل على:

العلاقات التأسيسية، المتممة، المحققة في $\Omega \times T$:

$$(\sigma'_{\alpha 3}, \sigma'_{3\alpha}) = (\mu + \alpha) (\gamma'_{\alpha 3}, \gamma'_{3\alpha}) + (\mu - \alpha) (\gamma'_{3\alpha}, \gamma'_{\alpha 3}), \quad (4.13)$$

$$\mu'_{\alpha \beta} = (\gamma + \epsilon) \kappa'_{\alpha \beta} + (\gamma - \epsilon) \kappa'_{\beta \alpha} + \beta \kappa'_{\gamma \gamma} \delta_{\alpha \beta},$$

إلى معادلات الحقل والعلاقات (4.10)-(4.13) نضيف الشروط الحدية والابتدائية، التالية:

الشروط الحدية، المتممة (على $\partial\Omega \times T$):

$$\sigma'_{\alpha 3} n_\alpha = 0, \quad \mu'_{\alpha \beta} n_\alpha = m_\beta - m_\beta^0, \quad (4.14)$$

الشروط الابتدائية، المتممة، المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u'_3 = 0, \quad \phi'_\alpha = h_\alpha - \phi_\alpha^{0(0)}, \quad (4.15)$$

$$\dot{u}'_3 = 0, \quad \dot{\phi}'_\alpha = \ell_\alpha - \dot{\phi}_\alpha^{0(0)},$$

حيث المقادير: m_β^0 و $\phi_\alpha^{0(0)}$ و $\dot{\phi}_\alpha^{0(0)}$ هي نفسها المقادير الواردة في نهاية الفقرة

الثالثة، ضمن طرق وأدوات البحث.

تمثل المسألة (4.15)-(4.10) بالمسألة المتممة (الزائدة) للجسم $2D(E-N:5)$ ، ضمن الحالة الديناميكية المستوية الثانية لانفعالات المرنة لهذا الجسم.

آلية حل مسألة الوصف التقليدي الجسم $2D(E-N:5)$ بطريقة متجه *Schafer* المعممة: بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية الكلاسيكية (4.7)-(4.2)، نحصل على الحقول الكلاسيكية $(u_3^0, \varphi_\alpha^0, \varepsilon_{\alpha 3}^0, \sigma_{\alpha 3}^0)$. بعدها وبمساعدة العلاقات الهندسية التي تربط ما بين φ_α^0 و $\kappa_{\alpha\beta}^0$ نحصل على $\kappa_{\alpha\beta}^0$. بعدها باستخدام العلاقات التأسيسية التي تربط ما بين $\mu_{\alpha\beta}^0$ و $\kappa_{\alpha\beta}^0$ نحصل $\mu_{\alpha\beta}^0$.

وبحل مسألة القيم الحدية والابتدائية، المتممة (الزائدة) (4.15)-(4.10) نحصل على الحقول المتممة $(u'_3, \varphi'_\alpha, \sigma'_{\alpha 3}, \sigma'_{3\alpha}, \mu'_{\alpha\beta}, \gamma'_{\alpha 3}, \gamma'_{3\alpha}, \kappa'_{\alpha\beta})$. أخيراً باستخدام العلاقات (3.4)-(3.1) و (4.1)، نحصل على الحل $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$ لمسألة القيم الحدية والابتدائية الأصلية (3.1)-(3.10).

2-4 تعميم طريقة متجه *Schaefer* إلى وصف *Ignaczak* للجسم $2D(E-N:5)$:

1-2-4 مسألة *Ignaczak* للقيم الحدية والابتدائية للحقول $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$:

نحصل على هذه المسألة باتباع ما يلي. بدايةً، نسمي المقطع التتسوري المتناظر:

$$\boldsymbol{\zeta} = \zeta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (4.16)$$

الذي تعطى مصفوفة مركباته الديكارتية بـ:

$$\boldsymbol{\zeta} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \zeta_{13} \\ 0 & 0 & \zeta_{23} \\ \zeta_{31} & \zeta_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

حيث:

$$\zeta_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \rho^{-1} R_{3,\alpha} - \frac{1}{2\mu} \ddot{\sigma}_{(\alpha 3)} \quad (4.18)$$

ندعوه بمقطع Schafer التنسوري. ولنعرف الآن مقطع Schafer التنسوري المتمم، على أنه المقطع التنسوري من المرتبة الثانية والمتناظر عكسياً، التالي:

$$\chi = \chi_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (4.19)$$

الذي تعطى مصفوفة مركباته الديكارتية بـ:

$$\chi \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \chi_{13} \\ 0 & 0 & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

حيث:

$$\chi_{\alpha 3} = J^{-1} \in_{\alpha\beta} R_{\beta} + \frac{1}{2} \rho^{-1} R_{3,\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \ddot{\sigma}_{[\alpha 3]}, \quad (4.21)$$

$$\chi_{3\alpha} = - \left\{ J^{-1} \in_{\alpha\beta} R_{\beta} + \frac{1}{2} \rho^{-1} R_{3,\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \ddot{\sigma}_{[\alpha 3]} \right\},$$

لنلاحظ، الآن، أن معادلي Ignaczak التنسوريتين (3.39) و(3.41) تكتبان في $\Omega \times T^+$

بالشكل²:

$$\zeta_{\alpha 3} + \chi_{3\alpha} = 0, \quad (4.22)$$

$$\zeta_{\alpha 3} + \chi_{\alpha 3} = 0, \quad (4.23)$$

فإذا كتبنا:

$$\zeta_{\alpha 3} = \zeta_{\alpha 3}^0 + \zeta'_{\alpha 3} \quad (4.24)$$

حيث $\zeta_{\alpha 3}^0$ هو الجزء الكلاسيكي و $\zeta'_{\alpha 3}$ الجزء المتمم لحقل Schafer التنسوري $\zeta_{\alpha 3}$.

² إن جملة المعادلتين التنسوريتين (3.39) و(3.41)، تملكان الشكل: $L_{(3.39)} = 0$ و $L_{(3.41)} = 0$ ، فإذا وضعنا:

$$L_A = \frac{1}{2} [L_{(3.41)} - L_{(3.39)}] \text{ و } L_S = \frac{1}{2} [L_{(3.41)} + L_{(3.39)}]$$

كتبنا المعادلتين (3.39) و(3.41) بالشكل: $L_S - L_A = 0$ و $L_S + L_A = 0$ (حيث هنا: $\zeta_{\alpha 3} = L_S$)، وذلك

بهدف تخصيص الجزء: $L_S = 0$ ليصف الحقول الكلاسيكية. هذا بدوره ينتج عن حقيقة أن معادلات الإجهادات،

الكلاسيكية، لا يتغير طرفها الأيسر باستبدال كل α بـ 3 وكل 3 بـ α .

نحصل، الآن، على معادلات Ignaczak الكلاسيكية بالتتابع المجهولة الكلاسيكية:

$$\sigma_{\alpha 3}^0, \text{ بوضع } \zeta_{\alpha 3}^0 = 0 \text{ في المعادلة (4.18)، فنحصل على:}$$

معادلة Ignaczak الكلاسيكية، الحركة، التالية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\hat{c}_2^2 R_{3,\alpha}^0 - \ddot{\sigma}_{\alpha 3}^0 = 0, \quad (4.25)$$

حيث:

$$R_3^0 = \hat{R}_3^0 + X_3, \quad \hat{R}_3^0 = \sigma_{\alpha 3,\alpha}^0, \quad \hat{c}_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

من الشروط الحدية (3.42)، نحصل على الشرط الحدي التالي، لأجل المعادلة التنسورية

$$(4.25):$$

الشروط الحدية، الكلاسيكية، المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\sigma_{\alpha 3}^0 n_\alpha = p_3 \quad (4.26)$$

ومن الشروط الابتدائية (3.43) - (3.48)، نحصل على الشروط، الابتدائية،

الكلاسيكية، التالية لأجل حقل الإجهادات الكلاسيكية σ^0 المحقق للمعادلة التنسورية

$$(4.25):$$

$$\sigma^0 = \text{sym } \sigma^{(0)}, \quad \dot{\sigma}^0 = \text{sym } \dot{\sigma}^{(0)}, \quad (4.27)$$

حيث الرمز sym يدل على الجزء التناظري؛ $\text{sym } \mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T) = Q_{(ij)} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ؛

بالتالي تأخذ الشروط الابتدائية السابقة الشكل الديكارتي التالي في $\Omega \times \{0\}$:

$$\sigma_{\alpha 3}^0 = \sigma_{(\alpha 3)}^{(0)}, \quad \dot{\sigma}_{\alpha 3}^0 = \dot{\sigma}_{(\alpha 3)}^{(0)}, \quad (4.28)$$

حيث هنا:

$$\sigma_{(\alpha 3)}^{(0)} = 2\mu \varepsilon_{\alpha 3}^{(0)}, \quad \varepsilon_{\alpha 3}^{(0)} = \frac{1}{2} f_{3,\alpha}, \quad (4.29)$$

$$\dot{\sigma}_{(\alpha 3)}^{(0)} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{\alpha 3}^{(0)}, \quad \dot{\varepsilon}_{\alpha 3}^{(0)} = \frac{1}{2} \ell_{3,\alpha}, \quad (4.30)$$

من العلاقات₁(3.49) ، نحصل على:

العلاقات التأسيسية الكلاسيكية محلولةً بالنسبة للانفعالات الكلاسيكية ε^0 ، المحققة في $\Omega \times T$:

$$2\mu \varepsilon_{\alpha 3}^0 = \sigma_{\alpha 3}^0 , \quad (4.31)$$

كما نحصل من العلاقات₂(3.49) ، على العلاقات التأسيسية محلولةً بالنسبة لانفعالات

العزم، الكلاسيكية (في $\Omega \times T$):

$$\kappa_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2\gamma} \mu_{(\alpha\beta)}^0 + \frac{1}{2\varepsilon} \mu_{[\alpha\beta]}^0 - \frac{\hat{v}}{2\gamma} \mu_{\varepsilon\varepsilon}^0 \delta_{\alpha\beta} , \quad (4.32)$$

حيث: $\mu_{\varepsilon\varepsilon}^0 = 0$ ؛

ومن العلاقات (3.51) ومن تعريف الدورانات الكلاسيكية φ_3^0 ($\varphi_\alpha^0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} u_{3,\beta}^0$) ،

نجد:

العلاقات التالية التي تعطينا الإزاحة الكلاسيكية u^0 والدوران الكلاسيكي φ^0 في $\bar{\Omega} \times T$ ،

وفقاً لوصف Ignaczak:

$$u_3^0 = \ell_3 t + h_3 + \rho^{-1}(t * R_3^0) , \quad (4.33)$$

$$\varphi_\alpha^0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} [\ell_3 t + h_3 + \rho^{-1}(t * R_3^0)]_{,\beta} , \quad (4.34)$$

نعين انفعالات العزم، الكلاسيكية $\kappa_{\alpha\beta}^0$ من العلاقة التالية (في $\bar{\Omega} \times T$):

$$\kappa_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\gamma} [\ell_3 t + h_3 + \rho^{-1}(t * R_3^0)]_{,\gamma\alpha} \quad (4.35)$$

إن معادلة الحركة بالإجهادات (4.25) تملك الشكل التكاملي-التفاضلي التالي (في $\Omega \times T$)

:[4]

$$\hat{c}_2^2(t * R_{3,\alpha}^0) - \sigma_{\alpha 3}^0 = -\mu (\ell_{3,\alpha} t + h_{3,\alpha}) \quad (4.36)$$

بسهولة يمكن التأكد من أن المعادلات السابقة (4.36) تكافئ مسألة القيم الابتدائية (4.25) و (4.30)-(4.27).

بهدف إيجاد معادلات الحقول الزائدة $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \theta', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$ تلزمنا المبرهنة المساعدة التالية:
مبرهنة مساعدة:

ينتج من المعادلة الكلاسيكية، التكاملية-التفاضلية (4.36) وعن العلاقات (4.35) و (4.32) و (3.15) أن الحقول الكلاسيكية $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$ ، تحقق المعادلات التالية:

1. المعادلة التالية في $\Omega \times T$:

$$\square_2^* [\ell_3 t + h_3 + \rho^{-1}(t * R_3^0)] + X_3 = 0, \quad (4.37)$$

2. المعادلة التالية في $\Omega \times T$:

$$\square_2^* \in_{\alpha\beta} [\ell_3 t + h_3 + \rho^{-1}(t * R_3^0)]_{,\beta} + \in_{\alpha\beta} X_{3,\beta} = 0, \quad (4.38)$$

3. المعادلة التالية في $\Omega \times T^+$:

$$J^{-1} \square_2^* \hat{R}_\beta^0 + \frac{1}{2} J^{-1} \square_4^* \in_{\beta\gamma} X_{3,\gamma} = \frac{1}{2} \square_2^* \in_{\beta\gamma} \rho^{-1} R_{3,\gamma}^0, \quad (4.39)$$

حيث: $\hat{R}_\beta^0 = \mu_{\alpha\beta,\alpha}^0$

4. المعادلة التالية في $\Omega \times T^+$:

$$J^{-1} \square_2^* \in_{\alpha\beta} \hat{R}_\beta^0 + \frac{1}{2} \square_2^* \rho^{-1} R_{3,\alpha}^0 = \frac{1}{2} J^{-1} \square_4^* X_{3,\alpha} \quad (4.40)$$

5. المعادلة التالية في $\Omega \times T^+$:

$$\begin{aligned} & \square_2^* \left\{ J^{-1} \hat{R}_{\alpha, \beta}^0 - \frac{1}{2\gamma} [\dot{\mu}_{(\alpha\beta)}^0 - \hat{v} \dot{\mu}_{\varepsilon\varepsilon}^0 \delta_{\alpha\beta}] + \frac{1}{2\varepsilon} \dot{\mu}_{[\alpha\beta]}^0 \right\} + \\ & + \frac{1}{2} J^{-1} \square_4^* \in_{\alpha\gamma} X_{3, \gamma\beta} = 0, \end{aligned} \quad (4.41)$$

البرهان:

1. نحصل على المعادلة (4.37) مباشرة من المعادلة التكاملية- التفاضلية (4.36)،

بعد اشتقاق طرفيها، جزئياً بالنسبة لـ x_α ،

2. نحصل على المعادلة (4.38) مباشرة من المعادلة (4.37)، بعد اشتقاق طرفيها،

جزئياً بالنسبة لـ x_β ، من ثم ضرب طرفي المعادلة الناتجة بـ $\in_{\alpha\beta}$ ،

3. في المعادلة (4.38)، باستبدال كل β بـ γ ، ومن ثم كل α بـ β ، من ثم باشتقاق

المعادلة الناتجة جزئياً بالنسبة لـ x_α ، وبالإستفادة من (4.35)، نحصل مباشرة على:

$$2 \square_2^* \kappa_{\alpha\beta}^0 + \in_{\beta\gamma} X_{3, \gamma\alpha} = 0, \quad (4.42)$$

ينتج، الآن، عن العلاقة السابقة، وعن العلاقة (4.32)، أن المعادلة التالية تكون محققة:

$$\square_2^* \mu_{\alpha\beta}^0 + \frac{1}{2} [(\gamma + \varepsilon) \in_{\beta\gamma} X_{3, \gamma\alpha} + (\gamma - \varepsilon) \in_{\alpha\gamma} X_{3, \gamma\beta}] = 0, \quad (4.43)$$

وباشتقاق طرفين المعادلة السابقة، جزئياً بالنسبة لـ x_α ، تأخذ الشكل التالي:

$$\square_2^* \hat{R}_\beta^0 + \frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \Delta_1 \in_{\beta\gamma} X_{3, \gamma} = 0, \quad (4.44)$$

تنتج المعادلة (4.39) من المعادلة (4.44) باستخدام المعادلة (4.38)،

4. بضرب طرفي العلاقة (4.39) بـ $\in_{\alpha\beta}$ ، ومن ثم نستفيد من العلاقة (3.15)، فنحصل

مباشرة على العلاقة المطلوبة (4.40)،

5. في (4.39) أيضاً، نستبدل كل β بـ α ، ومن ثم نشق المعادلة الناتجة بالنسبة لـ x_β ، فنجد:

$$J^{-1} \square_2^* \hat{R}_{\alpha, \beta}^0 + \frac{1}{2} J^{-1} \square_4^* \epsilon_{\alpha \gamma} X_{3, \gamma \beta} = \frac{1}{2} \square_2^* \epsilon_{\alpha \gamma} \rho^{-1} R_{3, \gamma \beta}^0 \quad (4.45)$$

الآن، باستخدام العلاقتين (4.35) و(4.32)، نحصل من المعادلة (4.45)، على المعادلة المطلوبة (4.41).

2-2-4 مسألة Ignaczak للقيم الحدية والابتدائية للحقول المتممة (الزائدة):

$$:(\mathbf{u}', \varphi', \sigma', \mu', \gamma', \kappa')$$

من أجل الحصول على معادلات Ignaczak للحركة بلغة الإجهادات المتممة $\sigma'_{\alpha\beta}, \mu'_{\alpha 3}$ ،

نطبق \square_2^* على طرفي المعادلات (3.41) - (3.39) (بعد كتابة (3.39) و(3.41) على

الترتيب بالشكل (4.22) و(4.23))، نحصل على المعادلات التالية (المحققة في $\Omega \times T^+$):

$$\square_2^* (\zeta_{\alpha 3} + \chi_{3\alpha}) = 0, \quad (4.46)$$

$$\square_2^* \{J^{-1} R_{\alpha, \beta} - \frac{1}{2\gamma} [\ddot{\mu}_{(\alpha\beta)} - \hat{\nu} \ddot{\mu}_{\epsilon\epsilon} \delta_{\alpha\beta}] + \frac{1}{2\epsilon} \ddot{\mu}_{[\alpha\beta]}\} = 0, \quad (4.47)$$

$$\square_2^* (\zeta_{\alpha 3} + \chi_{\alpha 3}) = 0, \quad (4.48)$$

ولنلاحظ الآن، أنه: أولاً: المعادلة (4.46) بمساعدة المعادلتين (4.25) و(4.40) ،

ثانياً: المعادلة (4.47) بمساعدة المعادلة (4.41)، ثالثاً: المعادلة (4.48)، بمساعدة

المعادلتين (4.25) و(4.40)، تعطينا جميعاً:

معادلات Ignaczak للحركة بلغة الإجهادات المتممة ، والمحققة في $\Omega \times T^+$:

$$J^{-1} \in_{\alpha\beta} \mathcal{R}'_{\beta} + \square_2^* \left\{ \frac{1}{2\mu} \ddot{\sigma}'_{(\alpha 3)} - \frac{1}{2\alpha} \ddot{\sigma}'_{[\alpha 3]} \right\} = 0, \quad (4.49)$$

$$J^{-1} \mathcal{R}'_{\alpha, \beta} - \square_2^* \left\{ \frac{1}{2\gamma} [\ddot{\mu}'_{(\alpha\beta)} - \hat{\nu} \ddot{\mu}'_{\varepsilon\varepsilon} \delta_{\alpha\beta}] - \frac{1}{2\varepsilon} \ddot{\mu}'_{[\alpha\beta]} \right\} = 0, \quad (4.50)$$

$$J^{-1} \in_{\alpha\beta} \mathcal{R}'_{\beta} + \square_2^* \rho^{-1} R'_{3,\alpha} - \square_2^* \left\{ \frac{1}{2\mu} \ddot{\sigma}'_{(\alpha 3)} + \frac{1}{2\alpha} \ddot{\sigma}'_{[\alpha 3]} \right\} = 0, \quad (4.51)$$

حيث :

$$R'_3 = \hat{R}'_3 + \hat{X}_3, \quad \hat{R}'_{\alpha} = \sigma'_{\alpha 3, \alpha}, \quad \hat{X}_3 \equiv 0,$$

$$\mathcal{R}'_{\beta} = \hat{\mathcal{R}}'_{\beta} + \hat{Y}_{\beta}, \quad \hat{\mathcal{R}}'_{\beta} = \square_2^* \hat{R}'_{\beta}, \quad \hat{R}'_3 = \in_{\alpha\beta} (\sigma'_{3\alpha} - \sigma'_{\alpha 3}) + \mu'_{\alpha\beta, \alpha},$$

$$\hat{Y}_{\alpha} = \square_2^* Y_{\alpha} - \frac{1}{2} \square_4^* \in_{\alpha\beta} X_{3,\beta},$$

من الشروط الحدية (3.42) ، نحصل على:

الشروط الحدية، المتممة، والمحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\sigma'_{\alpha 3} n_{\alpha} = 0, \quad \mu'_{\alpha\beta} n_{\alpha} = m_{\beta} - m_{\beta}^0, \quad (4.52)$$

حيث أن : $m_{\beta}^0 = \mu_{\alpha\beta}^0 n_{\alpha}$ ، والتي فيها تنتج $\mu_{\alpha\beta}^0$ عن العلاقة (4.35) وعن العلاقة

التأسيسية الكلاسيكية (4.32) ،

ومن الشروط الابتدائية (3.43) - (3.48) ، نحصل على:

الشروط الابتدائية، المتممة، التالية لأجل الحقول المتممة (الزائدة) (σ', μ') (المحققة في

$(\Omega \times \{0\})$:

$$\begin{aligned} \sigma' &= \text{skew } \sigma^{(0)}, \quad \mu' = \mu^{(0)} - \mu^{0(0)}, \\ \dot{\sigma}' &= \text{skew } \dot{\sigma}^{(0)}, \quad \dot{\mu}' = \dot{\mu}^{(0)} - \dot{\mu}^{0(0)}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

حيث الرمز skew \mathbf{Q} يدل على الجزء التناظري العكسي؛ $\text{skew } \mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T) = Q_{[ij]} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ؛

بالتالي تأخذ الشروط الابتدائية السابقة الشكل الديكارتي التالي في $\Omega \times \{0\}$:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\alpha 3} &= \sigma_{[\alpha 3]}^{(0)}, \quad \sigma'_{3\alpha} = \sigma_{[3\alpha]}^{(0)} = -\sigma_{[\alpha 3]}^{(0)}, \\ \mu'_{\alpha\beta} &= \mu_{\alpha\beta}^{(0)} - \mu_{\alpha\beta}^{0(0)}, \quad \mu'_{33} = \hat{\nu} [\mu_{\alpha\alpha}^{(0)} - \mu_{\alpha\alpha}^{0(0)}], \\ \dot{\sigma}'_{\alpha 3} &= \dot{\sigma}_{[\alpha 3]}^{(0)}, \quad \dot{\sigma}'_{3\alpha} = \dot{\sigma}_{[3\alpha]}^{(0)} = -\dot{\sigma}_{[\alpha 3]}^{(0)}, \\ \dot{\mu}'_{\alpha\beta} &= \dot{\mu}_{\alpha\beta}^{(0)} - \dot{\mu}_{\alpha\beta}^{0(0)}, \quad \dot{\mu}'_{33} = \hat{\nu} [\dot{\mu}_{\alpha\alpha}^{(0)} - \dot{\mu}_{\alpha\alpha}^{0(0)}], \end{aligned} \quad (4.54)$$

علماً أن:

$$\sigma_{[\alpha\beta]}^{(0)} = 2\alpha \gamma_{[\alpha\beta]}^{(0)}, \quad \gamma_{[\alpha\beta]}^{(0)} = \frac{1}{2} h_{3,\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta} h_{\beta}, \quad (4.55)$$

و تنتج $\mu_{\alpha\beta}^{0(0)}$ ، عن وضع $t = 0$ ، في عبارة الانفعالات الكلاسيكية $\mu_{\alpha\beta}^0$ ، الناتجة

عن دمج العلاقتين (4.35) و (4.32)، حيث ينتج لدينا:

$$\mu_{\alpha\beta}^{0(0)} = \frac{1}{2} [(\gamma + \epsilon) \epsilon_{\beta\gamma} h_{3,\gamma\alpha} + (\gamma - \epsilon) \epsilon_{\alpha\gamma} h_{3,\gamma\beta}] \quad (4.56)$$

كما أن:

$$\dot{\sigma}_{[\alpha\beta]}^{(0)} = 2\alpha \dot{\gamma}_{[\alpha\beta]}^{(0)}, \quad \dot{\gamma}_{[\alpha\beta]}^{(0)} = \frac{1}{2} \ell_{3,\alpha} + \epsilon_{\alpha\beta} \ell_{\beta}, \quad (4.57)$$

وتنتج $\dot{\mu}_{\alpha\beta}^{0(0)}$ ، عن وضع $t = 0$ في عبارة المشتقات الجزئية الزمنية للانفعالات الكلاسيكية:

$\dot{\mu}_{\alpha\beta}^0$ ، والناتجة بدورها عن دمج المشتقات الجزئية الزمنية للعلاقتين (4.35) و (4.32)،

فينتج:

$$\dot{\mu}_{\alpha\beta}^{0(0)} = \frac{1}{2} [(\gamma + \epsilon) \epsilon_{\beta\gamma} \ell_{3,\gamma\alpha} + (\gamma - \epsilon) \epsilon_{\alpha\gamma} \ell_{3,\gamma\beta}] \quad (4.58)$$

الآن من العلاقات التأسيسية (3.49)، نحصل على:

العلاقات التأسيسية العكسية، المتممة، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\gamma'_{\alpha 3} = \frac{1}{2\mu} \sigma'_{(\alpha 3)} + \frac{1}{2\alpha} \sigma'_{[\alpha 3]}, \quad \gamma'_{3\alpha} = \frac{1}{2\mu} \sigma'_{(\alpha 3)} - \frac{1}{2\alpha} \sigma'_{[\alpha 3]}, \quad (4.59)$$

$$\kappa'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\gamma} \mu'_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2\varepsilon} \mu'_{[\alpha\beta]} - \frac{\hat{\nu}}{2\gamma} \mu'_{\varepsilon\varepsilon} \delta_{\alpha\beta},$$

أخيراً، من العلاقات (3.50) و(3.51) و(4.34) نحصل على:

العلاقات التي الإزاحة والدورانات، المتممة بدلالة الإجهادات المتممة، والمحققة في

$\bar{\Omega} \times T$

$$\varphi'_\alpha = (\ell_\alpha - \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \ell_{3,\beta}) t + (h_\alpha - \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} h_{3,\beta}) + \quad (4.60)$$

$$+ J^{-1}[t * (\hat{R}'_\alpha + Y_\alpha)] + J^{-1}(t * \hat{R}^0_\alpha) - \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \rho^{-1}(t * R^0_{3,\beta}),$$

$$u'_3 = \rho^{-1}(t * R'_3) \quad (4.61)$$

آلية حل مسألة وصف Ignaczak الجسم 2D(E-N:5) بطريقة متجه Schafer المعممة:

بحل مسألة الوصف الإجهادي، الكلاسيكي (4.35)-(4.25)، نحصل على الحقول

الكلاسيكية $(\mathbf{u}^0, \varphi^0, \sigma^0, \mu^0, \varepsilon^0, \kappa^0)$. بعدها بحل مسألة الوصف الإجهادي، المتمم

(4.61)-(4.49)، نحصل على الحقول الفيزيائية المتمم $(\mathbf{u}', \varphi', \sigma', \mu', \gamma', \kappa')$. أخيراً،

بالتعويض في العلاقات (4.1)، نحصل على الحل $(\mathbf{u}, \varphi, \sigma, \mu, \gamma, \kappa)$ ، لمسألة الوصف

الإجهادي، الأصلية (3.51)-(3.39).

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولاً) الاستنتاجات: في البحث، لأجل الجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب: 2D(E-N:5)

ضمن الخالة المستوية الثانية للانفعالات المرنة لهذا الجسم، ناقشنا ما يلي:

1. تعميم طريقة متجه Schafer إلى مسألة الوصف التقليدي العام لهذا الجسم؛

2. تعميم طريقة متجه Schafer إلى مسألة وصف Ignaczak لهذا الجسم.

ثانياً) المقترحات (التوصيات): يمكن أن نوصي بمناقشة المسائل الآتية:

مسألة 1: إعادة الدراسة السابقة لأجل الجسم $2D (E-N:5)$ ، ضمن الحالة الترموديناميكية المستوية الأولى للانفعالات المرنة لهذا الجسم، والخاضع لحقل حراري.

مسألة 2: إعادة الدراسة السابقة لأجل الجسم $2D (E-N:5)$ ، ضمن الحالة الترموديناميكية ذات التناظر المحوري للانفعالات المرنة للجسم، الخاضع بدوره لحقل حراري.

مسألة 3: من أجل الجسم $2D (E-N:5)$ ضمن الحالة الترموديناميكية المستوية الأولى للانفعالات المرنة، وغير محدود، يطلب إثبات أن عملية Schaefer-Ignaczak الترموديناميكية، المتممة، هي عملية متساوية الحرارة (Isothermal)، أي أن: $\theta' \equiv 0$ ،

مسألة 4: تعميم طريقة متجه Schafer إلى المرونة الخطية دقيقة الاستقطاب، وثنائية الأبعاد، ضمن الترموديناميك المعمم بزمن استرخاء واحد [4]:

(Generalized thermodynamics of one relax time)

مسألة 5: تعميم طريقة متجه Schafer إلى المرونة الخطية دقيقة الاستقطاب، وثنائية الأبعاد، ضمن الترموديناميك المعمم بزمني استرخاء [4]:

(Generalized thermodynamics of two relax times)

المراجع

- [1] Al-Hasan M., Dyszlewicz J. (2014) Coupled Dynamic Micropolar Problems of Thermoelasticity: Stress-Temperature Equations of Motion of Ignaczak Type. In: Hetnarski R.B. (eds) Encyclopedia of Thermal Stresses. Springer, Dordrecht, p.740-753.
- [2]- Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Eslami, M.R., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y., 2013 - Theory of Elasticity and Thermal Stresses, Springer Science+Business Media Dordrecht.
- [3] - Hetnarski, R.B., and Ignaczak, J., 2011 - The Mathematical Theory of Elasticity, Second Edition, CRC Press, Taylor & Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, Boca Raton, FL 33487-2742.
- [4]- Ignaczak, J., Starzewski, M.O., 2010 - Thermoelasticity with Finite Wave Speeds, Oxford University Press Inc., New York.
- [5]- Dyszlewicz, J., 2004 - Micropolar Theory of Elasticity, in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .
- [6]-Dyszlewicz, J., 1996 - Selected problems of linear asymmetrical thermoelasticity, Journal of Thermal Stresses, 19, 185-206.
- [7] -Nowacki, W., 1986 - Theory of Asymmetric Elasticity, Warsaw, PWN.
- [8]-Dyszlewicz, J., 1980- Selected boundary problems of equa-

tions for the plane problems in micropolar theory of elasticity, Stud. Geotech. et. mech., I-1980, 2 , 3 , 5-20 ; II-1980 ,2 , 4 , 21-36.

[9] – Eringen , A . C , **1966** - Linear theory of micropolar elasticity, J.Math. Mech., 15 , 909 – 930.

[10] - Ignaczak , J , 1971 - Tensorial equations of motion for elastic materials with microstructure , in : Trends of Elasticity and Thermoelasticity, Witold Nowacki Ann.Volume , Wolters-Noordhoff Groningen , 90 – 111;

[11] – Debnath, L& Bhatta , D , **2007** – Integral Transforms and their

Applications, (Second Edition), CRC Press, Boca Raton, Florida.