مجلة جامعة البعث

سلسلة العلوم الأساسية

مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 45 . العدد 12

1444 هـ - 2023 م

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة البعث

سورية . حمص . جامعة البعث . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : 2138071 31 963 ++

. موقع الإنترنت : www.albaath-univ.edu.sy

. البريد الالكتروني : magazine@ albaath-univ.edu.sy

ISSN: 1022-467X

<u>شروط النشر في مجلة جامعة البعث</u>

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
- طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
- **اذا كان الباحث طالب دراسات عليا:**

يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقته على النشر في المجلة.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:**

يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :**

يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.

- **اذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :**

يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):**

عنوان البحث . . ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1- مقدمة
2- هدف البحث
3- مواد وطرق البحث
4- النتائج ومناقشتها .
5- الاستنتاجات والتوصيات .
6- المراجع.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (الآداب – الاقتصاد- التربية – الحقوق – السياحة – التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):**
- عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1. مقدمة.
2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
3. أهداف البحث و أسئلته.
4. فرضيات البحث و حدوده.
5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
7. منهج البحث و إجراءاته.
8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
9. نتائج البحث.
10. مقترحات البحث إن وجدت.
11. قائمة المصادر والمراجع.

7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:

أ- قياس الورق 17.5×25 B5.

ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 – يمين 2.5- يسار 2.5 سم

ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8

ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20

. كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي . العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.

ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.

8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.

9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.

10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة . الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة . سنة النشر . وتتبعها معترضة (-) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة . دار النشر وتتبعها فاصلة . الطبعة (ثانية . ثالثة) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة.

وفيما يلي مثال على ذلك:

-MAVRODEANUS, R1986- **<u>Flame Spectroscopy</u>**. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

. بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة . المجلد والعدد (كتابة مختزلة) وبعدها فاصلة . أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة.

مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases **<u>Clinical Psychiatry News</u>** , Vol. 4. 20 – 60

ج. إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد

بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: (المراجع In Arabic)

رسوم النشر في مجلة جامعة البعث

1. دفع رسم نشر (40000) ل.س أربعون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (100000) ل.س مئة الف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (6000) ل.س ستة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

المحتوى

تطابقات الامتصاص

طالــب الدراســات العليــا : بشرى جاد الله [2]

كلية: العلوم – جامعة: دمشق

الدكتور المشرف: شوقي الراشد [1]

ملخَّص:

نقوم في هذه الورقة بنقل مفهوم الـ n_امتصاص (وبشكل خاص ثنائية الامتصاص) إلى تطابقات أنصاف الحلقات، حيثُ نُعرِّف التَّطابق ثنائي الامتصاص وتعميمهُ (n_ تطابق امتصاص) ونُعرِّف التَّطابق ثنائي الامتصاص الإبتدائي في نصف الحلقة، وندرس بعض القضايا المُتعلقة بتلك المفاهيم.

الكلمات المفتاحية: أنصاف الحلقات، التَّطابقات، المثالي ثنائي الامتصاص.

[1] أستاذ مساعد قسم الرياضيات جامعة دمشق.

[2] طالبة دراسات عليا جامعة دمشق.

Absorbing Congruences

Shwki Al-Rashed **Bushra Jad Ala**

Abstract:

In this paper we convey a concept of n_absorbing (particularly 2_absorbing) to semiring congruences. We define 2_absorbing congruence and it's Generalization (n_absorbing congruence), we define Primary 2_absorbing congruence. Then we study some issues related to these concepts.

Key Words: Semirings, Congruences, Absorbing Ideals.

1 . مُقدِّمة:

تلعب التَّطابقات دوراً هامَّاً في أنصاف الحلقات بشكل عام وفي نصف الحلقة المداريَّة بشكلٍ خاص، لايوجد تقابل بين المثاليَّات والتَّطابقات كما في نظرية الحلقات، ويتناسب مفهوم التَّطابقات مع أنصاف الحلقات بشكل أفضل من المثاليات (تتحدَّد بنية حلقة خارج القسمة بواسطة المثاليَّات، وهذا غير ممكن في أنصاف الحلقات، وفقاً للعلاقة التَّالية: $[a+I=b+I \iff a-b\in I\ ]$ حيثُ a,b عناصر من الحلقة، و I مثالي. المُشكلة في أنصاف الحلقات هي عدم وجود العنصر $-b$ بالضرورة).

فقد تمَّ تعريف الطيف الأوَّلي لأنصاف الحلقات من خلال علاقات التَّطابق وذلك لكون المثاليات لاتحتفظ بدورها المُميَّز في أنصاف الحلقات. في عام 2016 قامت Kalina mincheva بتعريف التَّطابق الأولي وتحديد بُعد krull بشكل مشابه لنظرية الحلقات "هو طول أطول سلسلة من التَّطابقات الأوَّلية في الجداء الديكارتي لنصف الحلقة $R\times R$"([1], p.18). أيضاً قامت بتعريف جذر التَّطابق بأنَّه "تقاطع جميع التَّطابقات الأوَّلية التي تحوي التَّطابق"([1], p.22)، وذلك بهدف دراسة أصفار هلبرت لكثيرات الحُدود المداريَّة. ولإثبات عدم وجود تقابل بين التَّطابقات والمثاليَّات في أنصاف الحلقات كما هو الحال في الحلقات، قامت بتعريف القوى المُعمَّمة لعناصر تطابق وإعطاء صيغة جبريَّة من خلالها لجذر التَّطابق.

في عام 2007 قام العالم Badwi بصياغة تعميم للمثالي الأوَّلي في الحلقات التَّبديليَّة[4] ، وذلك نظراً لأهميته، ويدعى (2 − absorbing ideal) المثالي ثنائي الامتصاص. حيثُ يكون المثالي الفعليI ثنائي امتصاص إذا وفقط إذا حقَّق الشرط: من أجل $a, b, c \in R$ إذا كان $abc \in I$ فإمَّا $ab \in I$ أو $ac \in I$ أو $bc \in I$. في عام 2011 قام Darni وSoheilnia بتقديم مفهوم المودول الجُزئي ثنائي الامتصاص، أيضاً في عام 2012 قام Tayprakash Ninu chaudhari بتعريف مماثل للمثالي ثنائي الامتصاص في أنصاف الحلقات، وفي عام 2013 قام Darni وPuczylowski بتعريف نصف الزمرة ثنائية الامتصاص، و في 2016 قام كلاً من Hatic Çay، Hojjat Mostafanasab وGulsen ulucak بتعريف المثاليَّات ثنائية الامتصاص في أنصاف الزمر التَّبديليَّة.

ونظراً لأهمية التَّطابقات والدور الهام الذي تلعبه في الهندسة المداريَّة، قمنا بنقل مفهوم ثنائية الامتصاص وتعميمهُ n–امتصاص إلى التَّطابقات بهدف دراسة خواص جبريَّة إضافيَّة للتَّطابقات.

2 .هدف البحث: نقوم في هذا البحث بدراسة تعميم مفهوم التَّطابق الأوَّلي، وهو مفهوم الـ n_امتصاص (والحالة الخاصَّة منه ثنائية الامتصاص) وإثبات بعض القضايا المُتعلِّقة به. كما نهدف إلى إثبات أنَّ تطابق نصف الحلقة المداريَّة $\Omega(\mathbb{T}^n)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص.

3 . تعاريف ومُبرهنات:

1.3 نصف الحلقة ([1], p.14) ([2], p.4) ([3], p.4) ([8], p.12): تدعى الثلاثية $(R,+,\cdot)$، حيثُ + جمع و . ضرب، نصف حلقة إذا تحققت الشُّروط الآتية:

1) الثنائية $(R,+)$ هي مونوئيد تبديلي(الصفر 0 هو عنصر حيادي).

2) الثنائية $(R,\cdot)$ هي مونوئيد (الواحد 1 هو عنصر حيادي).

3) الضرب توزيعي على الجمع.

4) العنصر الحيادي الجمعي ماص $a\cdot 0=0\cdot a=0$ من أجل $a\in R$.

إذا كانت R نصف حلقة بحيث $(R,\cdot)$ تبديليَّة، عندئذٍ يُقال عن R إنَّها تبديليَّة. وإذا كانت R نصف حلقة بحيث يوجد لكل عنصر غير صفري في R معاكس ضربي، عندئذٍ فإنَّ R تُدعى نصف حقل. في هذه الحالة تكون الثنائية $(R\backslash\{0\},\cdot)$ هي زمرة.

إحدى أهم أنصاف الحلقات هي نصف الحلقة المداريَّة، المُعرَّفة بالشَّكل الآتي:

2.3 تعريف ([1], p.15)([2], p.5) ([8], p.14): يُقال عن $(R,\oplus,\odot,-\infty,0)$ بأنَّها نصف حلقة مداريَّة إذا حققت الشروط الآتية:

1) $(R,\oplus,-\infty)$ نصف زمرة مداريَّة.

2) $(R,\odot)$ نصف زمرة.

3) $a\odot b=b\odot a$.

4) $a\odot(b\oplus c)=a\odot b\oplus a\odot c$.

5) $.a \odot 0 = a$

6) $.a \odot -\infty = -\infty$

يُدعى العنصر $-\infty$ العنصر الصفري لِـ R ، و 0 العنصر الواحدي لِـ R. ويُعطى جمع عنصرين بالشَّكل $(x \oplus y = \max\{x, y\})$، كما يُعطى جداء عنصرين بالشَّكل $(x \odot y = x + y)$. حيثُ تُعرَّف نصف الزمرة $(M, \oplus)$ بأنَّها مجموعة غير خالية M مُعرَّف عليها العملية التَّجميعية $\oplus$.

ويُقال عن $(M, \oplus, -\infty)$ بأنَّها نصف زمرة مداريَّة إذا حقَّقت الشروط الاتية:

1) $(M, \oplus)$ نصف زمرة.

2) $.v \oplus w = w \oplus v$

3) $.v \oplus -\infty = v$

4) $v \oplus v = v$

بفرض لدينا $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ نصف حلقة مداريَّة حقيقيَّة، تكون المجموعة الأساسيَّة لها $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. ويُعطى جمع عنصرين بالشَّكل $(x \oplus y = \max\{x, y\})$ بالتَّرتيب المُعتاد للأعداد الحقيقيَّة، العنصر الأصغرهو $-\infty$. كما يُعطى جداء عنصرين بالشَّكل $(x \odot y = x + y)$ حيثُ $+$ هو الجمع المُعتاد للأعداد الحقيقيَّة ويتحقَّق: $[(-\infty) \odot a = a \odot (-\infty) = -\infty \ \ \forall a \in \mathbb{R}_{\max}]$

وهي تشكِّل نصف حقل. كما أنَّ كلاً من $\mathbb{Q}_{\max}$ وَ $\mathbb{Z}_{\max}$ هي أنصاف حقول جزئيَّة من $\mathbb{R}_{\max}$ وتملك المجموعات الأساسيَّة $\mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ وَ $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ على التَّرتيب.

وبشكل مُناظر يُمكن أن تكون المجموعة الأساسيَّة لِ $\mathbb{T}$ هي $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. ويُعطى جمع عنصرين بالشَّكل $(x\oplus y=\min\{x,y\})$ بالتَّرتيب المُعتاد للأعداد الحقيقيَّة، العنصر الأكبر هو ∞. وبفرض $\mathbb{B}$ نصف الحقل البولياني $\mathbb{B}=\{0,1\}$ فإنَّ $\mathbb{B}=\{-\infty,0\}\in\mathbb{T}$ بالنسبة لِ max وَ $\mathbb{B}=\{0,\infty\}\in\mathbb{T}$ بالنسبة لِ min.

3.3 تعريف ([8], p.14) ([2], p.4) ([1], p.15): إذا كانت الثنائية $(R,+,\cdot)$ نصف حلقة تبديليَّة و $S\subset R$. يُقال عن S إنَّها نصف حلقة جزئية من R (Subsemiring) إذا تحقَّق أنَّ:

$$1,0\in S \quad , \quad a+b, a\cdot b\in S$$

4.3 تعريف ([8], p.19) ([2], p.5) ([1], p.16): بفرض لدينا R_1,R_2 أنصاف حلقات. يُدعى التطبيق $f:R_1\to R_2$ (Semiring homomorphism) تشاكل نصف حلقي إذا تحقَّق مايلي:

1)− $f(a+b)=f(a)+f(b)$
2)− $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$
3)− $f\left(0_{R_1}\right)=0_{R_2}$
4)− $f\left(1_{R_1}\right)=1_{R_2}$

وذلك أيَّاً كان $a,b\in R_1$.

مثال: إنَّ التَّطبيق الآتي هو تشاكل نصف حلقي:

$$f:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{B}$$
$$a\mapsto\begin{cases}1 & \text{if } a\neq-\infty\\ 0 & \text{if } a=-\infty\end{cases}$$

أيضاً لدينا التَّطبيق الآتي تشاكل نصف حلقي:

$$g: \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{T} \quad ; \quad (g(0) = -\infty , g(1) = 0)$$

5.3 تعريف ([8], p.22) ([2], p.86) ([1], p.15)): بفرض $(R,+,\cdot)$ نصف حلقة تبديليَّة واحدية. يُعرَّف التَّطابق Ω لنصف الحلقة R بأنَّه مجموعة جزئيَّة من الجداء الديكارتي $R \times R$ تُحقِّق الشُّروط الآتية:

1)− $(a,a) \in \Omega$, for $a \in R$

2)− $(a,b) \in \Omega$, if and only if $(b,a) \in \Omega$

3)− if $(a,b) \in \Omega$, and $(b,c) \in \Omega$ then $(a,c) \in \Omega$

4)− if $(a,b) \in \Omega$, and $(c,d) \in \Omega$ then $(a+c, b+d) \in \Omega$

5)− if $(a,b) \in \Omega$, and $(c,d) \in \Omega$ then $(a \cdot c, b \cdot d) \in \Omega$

حيثُ يكون التَّطابق الأصغر الوحيد هو القطر لِ $R \times R$ والذي يُرمز له بِ Δ، ويُدعى التَّطابق التَّافه (وهو يُقابل المثالي الصفري).$R \times R$ هو تطابق غير فعلي، أمَّا التَّطابقات المتبقية فتُدعى فعليَّة. إذا كان I مثالي فإنَّنا نرمز إلى التَّطابق المولَّد بالأزواج $(a,0)$ من أجل كل $a \in I$ بِ Ω_I.

يُرمز لنصف حلقة القسمة لِ R على التَّطابق Ω بِ R/Ω. ونعلم في الجبر التَّبادلي أنَّه من أجل المثالي I يكون $R/I = R/\Omega_I$.

6.3 تعريف ([1], p.16)): تُعرَّف نواة التَّطابق بأنَّها صف التَّكافؤ للعنصر الصفري. أي من أجل التَّطابق $\Omega \subseteq R \times R$ لدينا:

$$Ker(\Omega) = \{a \in R \mid (a,0) \in \Omega\}$$

نواة التَّطابق دوماً مثالي. ويُقال عن نواة تطابق بأنَّها تافهة إذا كانت مساوية للمجموعة الصفرية $\{0\}$.

في نصف الحلقة الجامدة لدينا:

$$(a+b,0) \in \Omega \Longrightarrow (a,0) \in \Omega$$

ومنه أيَّاً كان $(a+b) \in Ker(\Omega)$ فإنَّ $a \in Ker(\Omega)$ و $b \in Ker(\Omega)$، وتُدعى المثاليَّات التي تُحقِّق هذه الخاصَّة (Saturated).

7.3 تعريف ([1], p.16): إذا كان $\varphi: R_1 \to R_2$ شعاع بين أنصاف الحلقات R_1, R_2، و Ω هو تطابق لِ R_2، الصورة العكسية لِ Ω هي التَّطابق:

$$\varphi^{-1}(\Omega) = \{(\alpha_1,\alpha_2) \in R_1 \times R_1 \mid (\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2)) \in \Omega\}$$

8.3 تعريف ([1], p.16): نقصد بنواة شعاع الصورة العكسية للتطابق التَّافه $\varphi^{-1}(\Delta)$ ونرمز لها بِ $Ker(\varphi)$.

9.3 تعريف ([1], p.16): نقصد بِ($\mathbb{B}$_algebra) نصف حلقة تبديليَّة جامدة جمعيَّاً أي $(a+a=a\ ,\forall a)$ وسنرمز بِ A لِ ($\mathbb{B}$_algebra) اختياري. نُلاحظ أنَّ الجمع الجامد يُعرِّف ترتيب كمايلي:

$$a \geq b \Leftrightarrow a+b=a\ ;\ a \oplus b = \sup\{a,b\}\ , or\ a \oplus b = \inf\{a,b\}$$

تُدعى عناصر $A \times A$ أزواج، والإحداثيات للزوج α هي (α_1,α_2).

10.3 تعريف ([1], p.17) ([2], p.91) ([3], p.8): يُعرَّف الجداءالمُتشابك (الملفوف) للأزواج $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$ و $\beta = (\beta_1,\beta_2)$ بالشكل الآتي:

$$\beta\alpha = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \,, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

نُلاحظ أنَّه تجميعي، وأنَّ مجموعة الأزواج تُشكل مونوئيد بالنسبة لهذه العملية (العنصر الحيادي هو الزوج $(1,0)$).

يُرمز للقوة $n-th$ لِ α وفق الجداء المُتشابك بِα^n. كما يُرمز للزوج $(1,0)$ بِ α^0.

ويُعرَّف جداء عنصر a بزوج (α_1, α_2) بالشكل $a(\alpha_1, \alpha_2) = (a\alpha_1, a\alpha_2)$ وهو الجداء المُتشابك لِ $(a, 0)(\alpha_1, \alpha_2)$.

11.3 تعريف ([1], p.17): يُعرَّف جداء تطابقين $\Omega, \Omega_1 \subseteq A \times A$ بأنَّه التَّطابق المولَّد بالمجموعة

$$\{\beta\alpha \mid \alpha \in \Omega, \beta \in \Omega_1\}$$

12.3 تعريف ([1], p.18): من أجل الحلقات التبديليَّة، يكون المثالي أوَّلي إذا وفقط إذا كان التَّطابق المُقابل لايحوي جداءات مُتشابكة لأزواج تتوضَّع خارج التَّطابق. أي بفرض P مثالي لحلقة تبديليَّة و Ω_P تطابق بالنَّواة P عندئذٍ فإنَّ P أوَّلي إذا وفقط إذا تحقَّق مايلي:

إذا كان $\beta\alpha \in \Omega_P$ فإنَّهُ إمَّا $\alpha \in \Omega_P$ أو $\beta \in \Omega_P$. ويُمكن التحقق من ذلك بالشَّكل:

$$\beta\alpha \in \Omega_P \Leftrightarrow \big((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2), 0\big) \in \Omega_P$$
$$\Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \in P$$

13.3 تعريف ([3], p.5) ([1], p.18): يُقال عن التَّطابق Ω لِـ($\mathbb{B}$_algebra) A بأنَّه أوَّلي (Prime Congruences) إذا كان فعلي وتحقَّق مايلي:

إذا كان $\beta\alpha \in \Omega$، عندئذٍ $\alpha \in \Omega$ أو $\beta \in \Omega$ وذلك من أجل $\alpha, \beta \in A \times A$.

وندعو ($\mathbb{B}$_algebra) منطقة إذا كان التَّطابق التَّافه له أوَّلي.

مثال: بفرض لدينا $\mathbb{B}[x]$ مُرتَّبة كليَّاً وفقاً لدرجات x (بالنسبة لِـ max) (وذلك كون الجمع يُعطي ترتيب كلي). وبفرض لدينا $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ و $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$، بفرض أنَّ $\beta_1 \geq \beta_2$ و $\alpha_1 \geq \alpha_2$ و $\alpha_1\beta_2 \geq \alpha_2\beta_1$ عندئذٍ:

$$\beta\alpha = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\,, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = (\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2) \in \Delta$$

إذا كان $\beta \notin \Delta$ عندئذٍ فإنَّ $\alpha_1 = 0$ (وذلك حيثُ $\mathbb{B}[x]$ تُحقِّق الشَّرط التَّالي: إذا كان $ab = ac$ فإمَّا $a = 0$ أو $b = c$ (Cancellative)) ومنهُ $\alpha_2 = 0$ وَ $\alpha \in \Delta$

ومنهُ $\mathbb{B}[x]$ هي منطقة.

14.3 تعريف ([1], p.23): بفرض I مثالي في الحلقة R جذرهُ $Rad(I)$، وبفرض Ω_I وَ $\Omega_{Rad(I)}$ هي التَّطابقات المُقابلة (حيثُ I وَ $Rad(I)$ هي النواة لكل منهما على التَّرتيب). عندئذٍ لدينا:

$$(a, b) \in \Omega_{Rad(I)} \Leftrightarrow (a, b)^n \in \Omega_I \text{ for a large enough } n$$

وذلك وفقاً لِـ: $$(a, b)^n \in \Omega_I \Leftrightarrow ((a - b)^n, 0) \in \Omega_I$$

حيثُ $(a, b)^n$ ترمز إلى القوة $n - th$ بالنسبة للجداء المُتشابك.

أمَّا بالنسبة لأنصاف الحلقات فإنَّ الأمر معقد أكثر، كما هو موضَّح فيمايلي.

15.3 تعريف([3], p.10) ([1], p.22): بفرض Ω تطابق لِ A يُعرَّف جذر Ω ويُرمز لهُ بِ $Rad(\Omega)$، بأنَّهُ تقاطع جميع التَّطابقات الأوَّليَّة الَّتي تحوي Ω. يُدعى Ω بالتَّطابق الجذري إذا تحقَّق أنَّ $Rad(\Omega) = \Omega$. وهو يُعطى بالصِّيغة الآتية:

$$Rad(\Omega) = \{\alpha \mid GP(\alpha) \cap \Omega \neq \emptyset\}$$

حيثُ:

$$GP(\alpha) = \left(\alpha^{*^{k}} + (c,0)\right)\alpha^{l}; \alpha^{*} = (\alpha_1 + \alpha_2, 0), \left(\left(\beta\alpha\right)^{*} = \alpha^{*}\beta^{*}\right)$$

$$\text{where } k, l \text{ are non} - \text{negative integers, and } c \in A$$

هي مجموعة القوى المُعمَّمة للزوج α.

ومنهُ $Rad(\Delta) = \{\alpha \mid GP(\alpha) \cap \Delta \neq \emptyset\}$ وهي مجموعة الأزواج عديمة القوى Nilpotent. حيثُ يكون الزوج α عديم القوى إذا تحقَّق أنَّ $GP(\alpha) \cap \Delta \neq \emptyset$

16.3 تعريف ([1], p.27): يُدعى التَّطابق لِ A ابتدائي إذا تحقَّق الشَّرط الآتي:

$$\{\alpha \mid \exists \beta \notin \Omega : \alpha\beta \in \Omega\} \subseteq Rad(\Omega)$$

17.3 مُبرهنة ([1], p.27): إنَّ جذر التَّطابق الابتدائي هو تطابق أوَّلي.

نورد فيما يلي من خلال المُبرهنة الآتية بعض الخواص الجبريَّة لتطابقات أنصاف الحلقات:

18.3 مُبرهنة ([2], p.87, p.94): بفرض R نصف حلقة تبديليَّة، وبفرض $\Omega, \Omega_1 \subseteq R \times R$ تطابقات لنصف الحلقة R. عندئذٍ تتحقَّق القضايا الآتية:

1- إنَّ $\Omega \cap \Omega_1$ هو تطابق. ومنه فإنَّ تقاطع أُسرة من التَّطابقات لنصف حلقة تبديليَّة هو أيضاً تطابق.

2- من أجل الزوج $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$ والزوج الإختياري $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ يتحقَّق مايلي: $\beta\alpha \in \Omega$، ومنهُ $\Omega\Omega_1 \subseteq \Omega$.

4. تطابقات الامتصاص: (Absorbing Congruence)

1.4 تعريف التَّطابق ثنائي الامتصاص: نقول عن التَّطابق Ω لِـ A (𝔹_algebra) بأنَّه ثنائي الامتصاص إذا كان فعلي وتحقَّق مايلي:

إذا كان $\gamma\beta\alpha \in \Omega$ فإنَّهُ إمَّا $\alpha\beta \in \Omega$ أو $\beta\gamma \in \Omega$ أو $\alpha\gamma \in \Omega$ ،من أجل كل $\alpha, \beta, \gamma \in A \times A$.

وبحيثُ يكون $\gamma\beta\alpha$ هو الجداء المُتشابك للأزواج الثلاث α, β, γ:

$$\gamma\beta\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2)(\gamma_1, \gamma_2)$$
$$= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\,, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(\gamma_1, \gamma_2)$$
$$= ((\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\,)\gamma_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\gamma_2 \;\;,\;\; (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\,)\gamma_2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\gamma_1)$$
$$\gamma\beta\alpha = (\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\,\gamma_1 + \alpha_1\beta_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_2\,, \alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\,\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_1) \;\; (*)$$

أي يكون Ω ثنائي الامتصاص إذا كانت الثنائية $(*)$ تنتمي إلى Ω عندئذٍ:

إمَّا $(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\,, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) \in \Omega$

أو $(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2\,, \alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) \in \Omega$

أو $(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2\,, \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) \in \Omega$.

مثال: بفرض لدينا التَّطابق $\Omega =< (x^2, y^2) >$.

إنَّ $\Omega \in (x,0)(x,xy^2) = (x^2,x^2y^2)$ ولكنَّ أيَّاً من $(x,0),(x,xy^2)$ لاينتمي إلى Ω. أيضاً:

$$(x,xy^2)^2 = (x,xy^2)(x,xy^2) = (x^2 + x^2y^4, x^2y^2 + x^2y^2) \in \Omega$$

ولكنَّ أيَّاً من $(x,xy^2),(x,xy^2)$ لاينتمي إلى Ω.

ومنهُ Ω هو تطابق ثنائي الامتصاص وليس أوَّلي.

من أجل الحلقات التبديليَّة، يكون المثالي ثنائي الامتصاص إذا وفقط إذا كان التَّطابق المُقابل لايحوي جداءات مُتشابكة لأزواج تتوضَّع خارج التَّطابق. أي بفرض I مثالي لحلقة تبديليَّة و Ω_I تطابق بالنَّواة I عندئذٍ فإنَّ I ثنائي الامتصاص إذا وفقط إذا تحقَّق:

إذا كان $\gamma\beta\alpha \in \Omega_I$ فإنَّهُ إمَّا $\alpha\beta \in \Omega_I$ أو $\beta\gamma \in \Omega_I$ أو $\alpha\gamma \in \Omega_I$.

للتحقق من ذلك: لدينا α في Ω_I إذا وفقط إذا تحقَّق $\alpha_1 - \alpha_2 \in I$. ومنه يكون $\alpha\beta$ في Ω_I إذا وفقط إذا تحقَّق $(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \in I$.

I مثالي أوَّلي إذا وفقط إذا تحقَّق مايلي:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \in I \text{ implies either } (\alpha_1 - \alpha_2) \in I$$
$$\text{or } (\beta_1 - \beta_2) \in I$$

I مثالي ثنائي الامتصاص إذا وفقط إذا تحقَّق مايلي:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \in I \ implies\ either\ (\alpha_1 - \alpha_2) \in I$$
$$or\ (\beta_1 - \beta_2) \in I\ or\ (\gamma_1 - \gamma_2) \in I$$

ويُمكن التحقق من ذلك بالشَّكل:

$$\beta\alpha\gamma \in \Omega_I \Leftrightarrow \big((\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2),0\big) \in \Omega_I$$
$$\Leftrightarrow (\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2) \in I$$

اثبات التكافؤ الثَّاني يكون حسب التعريف. أمَّا من أجل التكافؤ الأوَّل:

$$\beta\alpha\gamma \in \Omega_I \Leftrightarrow \alpha_1\beta_1\gamma_2+\alpha_2\beta_2\gamma_2+\alpha_1\beta_2\gamma_1+\alpha_2\beta_1\gamma_1=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1\beta_1\gamma_2+\alpha_1\beta_2\gamma_1=-\alpha_2\beta_2\gamma_2-\alpha_2\beta_1\gamma_1$$
$$\big((\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2),0\big) \in \Omega_I$$
$$\Leftrightarrow ((\alpha_1\beta_1-\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+\alpha_2\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2),0) \in \Omega_I$$
$$\Leftrightarrow (\alpha_1\beta_1\gamma_1-\alpha_1\beta_2\gamma_1-\alpha_2\beta_1\gamma_1+\alpha_2\beta_2\gamma_1-\alpha_1\beta_1\gamma_2$$
$$+\alpha_1\beta_2\gamma_2+\alpha_2\beta_1\gamma_2-\alpha_2\beta_2\gamma_2,0) \in \Omega_I$$

وتعميم ماسبق من أجل $n-$ تطابق امتصاص يكون بالشَّكل الآتي:

2.4 تعريف: نقول عن التَّطابق الفعلي Ω لـ ِ(𝔹_algebra) A بأنَّه $n-$ امتصاص إذا كان $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1} \in \Omega$ يعني أنَّ الجداء المُتشابك لِ n زوج منها ينتمي لِ Ω. حيثُ $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1} \in A$.

3.4 مُبرهنة: إذا كان $Q\,,P$ تطابقين أوَّليين غير تافهين لِ A عندئذٍ فإنَّ $Q\cap P$ هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات: حسب القضيَّة (1) من المُبرهنة (18.3) فإنَّ التَّقاطع $Q\cap P$ هو تطابق. نفرض الآن أنَّ $(\alpha\beta)\gamma \in Q\cap P$ من أجل $\alpha,\beta,\gamma \in A\times A$، عندئذٍ يتحقَّق: $(\alpha\beta)\gamma \in P$ و $(\alpha\beta)\gamma \in Q$. وبما أنَّ P هو تطابق أوَّلي عندئذٍ إمَّا $(\alpha\beta) \in P)$ أو $\gamma \in P$. إذا كان $(\alpha\beta) \in P$ فإمَّا $\alpha \in P$ أو $\beta \in P$، وبشكل مُشابه $\alpha \in Q$ أو $\beta \in Q$ أو $\gamma \in Q$.

بفرض $\alpha \in Q \cap P$ عندئذٍ وبالإعتماد على القضيَّة (2) من المُبرهنة (18.3) إمَّا $\alpha\beta \in Q \cap P$ أو $\beta\gamma \in Q \cap P$ أو $\alpha\gamma \in Q \cap P$ ومنه فإنَّ $Q \cap P$ هو تطابق ثنائي الامتصاص.

$$\alpha(\beta\gamma) \in I(JK) = \{\alpha(\beta\gamma) \mid \alpha \in I, \beta\gamma \in JK\} \in PQ \subseteq P \cap Q \qquad \square$$

4.4 : بفرض لدينا $\varphi: R_1 \to R_2$ شعاع بين أنصاف الحلقات التبديليَّة R_1, R_2. إذا كان Ω_2 هو تطابق ثنائي الامتصاص في R_2، فإنَّ $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص في R_1.

الإثبات: إنَّ φ هو تشاكل نصف حلقي، وبحسب التَّعريف (7.3) يكون $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ تطابق. ليكن $\alpha\beta\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$ بحيث $\alpha, \beta, \gamma \in R_1$. عندئذٍ:

$$\varphi(\alpha\beta\gamma) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \Omega_2$$

وبما أنَّ Ω_2 هو تطابق ثنائي الامتصاص عندئذٍ:

إمَّا $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) \in \Omega_2$ أو $\varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \Omega_2$ أو $\varphi(\alpha)\varphi(\gamma) \in \Omega_2$ ومنه:

إمَّا $\alpha\beta \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$ أو $\beta\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$ أو $\alpha\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$ ومنهُ $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص في R_1. $\square$

5.4 مُبرهنة: في الجبر التَّبادلي، إذا كانت R حلقة و Ω هو تطابق ثنائي الامتصاص. عندئذٍ فإنَّ الجذر لهُ هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات: بفرض I مثالي في الحلقة R جذرهُ $Rad(I)$، وبفرض Ω_I وَ $\Omega_{Rad(I)}$ هي التَّطابقات المُقابلة (حيثُ I وَ $Rad(I)$ هي النواة لكل منهما على التَّرتيب). نعلم أنَّ:

$$(a,b) \in \Omega_{Rad(I)} \Leftrightarrow (a,b)^n \in \Omega_I \text{ for a large enough } n$$
$$\Leftrightarrow ((a-b)^n, 0) \in \Omega_I$$

ومنهُ: $\alpha\beta\gamma \in \Omega_{Rad(I)} \Leftrightarrow (\alpha\beta\gamma)^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \alpha^n\beta^n\gamma^n \in \Omega_I$

بما أنَّ Ω_I هو تطابق ثنائي الامتصاص، عندئذٍ:

إمَّا $(\alpha\beta)^n \in \Omega_I = \alpha^n\beta^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \alpha\beta \in \Omega_{Rad(I)}$

أو $(\beta\gamma)^n \in \Omega_I = \beta^n\gamma^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \beta\gamma \in \Omega_{Rad(I)}$

أو $(\alpha\gamma)^n \in \Omega_I = \alpha^n\gamma^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \alpha\gamma \in \Omega_{Rad(I)}$

ومنهُ $\Omega_{Rad(I)}$ هو تطابق ثنائي الامتصاص. □

6.4 مُبرهنة: بفرض لدينا Ω هو تطابق ثنائي الامتصاص في نصف الحلقة A. عندئذٍ $Rad(\Omega)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص في نصف الحلقة A، ومن أجل كل $\alpha \in Rad(\Omega)$ يكون:

$$(\alpha_1{}^2 + \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2{}^2) = (\alpha_1 + \alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$$

الإثبات: لدينا من أجل كل $\alpha \in Rad(\Omega)$ لدينا، $GP(\alpha) \cap \Omega \neq \emptyset$ أي $\left(\alpha^{*^k} + \right.$ $\left.(c,0)\right)\alpha^l \in \Omega$، وبما أنَّ Ω هو تطابق ثنائي الامتصاص في نصف الحلقة A، نُلاحظ أنَّ:

$$(\alpha_1{}^2 + \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2{}^2) = (\alpha_1 + \alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$$

بفرض لدينا $\alpha, \beta, \gamma \in A$ بحيث $\gamma\beta\alpha \in Rad(\Omega)$ عنئذٍ لدينا:

$$((\gamma\beta\alpha)^*, 0)(\gamma\beta\alpha) \in \Omega$$

ونعلم حسب مُبرهنة أنَّ $[(\beta\alpha)^* = \alpha^*\beta^*]$، ومنهُ:

$$(\alpha^*\beta^*\gamma^*, 0)(\gamma\beta\alpha) = ((\alpha^*, 0)(\alpha))((\beta^*, 0)(\beta))((\gamma^*, 0)(\gamma)) \in \Omega$$

وكون Ω ثنائي الامتصاص فإنَّ: (الجداء المُتشابك تبديلي)

$$(\alpha^*\beta^*,0)(\beta\alpha) = ((\alpha^*,0)(\alpha))((\beta^*,0)(\beta)) \in \Omega$$

ومنهُ $\beta\alpha \in Rad(\Omega)$.

7.4 : إنَّ جذر التَّطابق الابتدائي في A هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات: إنَّ $Rad(\Omega)$ هو تطابق لأنَّ $Rad(\Omega) = \bigcap_{\Omega\subseteq\Omega'} Primes\ \Omega'$ وتقاطع عدة تطابقات هو تطابق. نفرض الآن أنَّ $(\alpha\beta)\gamma \in Rad(\Omega)$ وحسب المُبرهنة (17.3) فإنَّ $Rad(\Omega)$ هو تطابق أوَّلي أي $\alpha\beta \in Rad(\Omega)$ أو $\gamma \in Rad(\Omega)$. إذا كان $\gamma \in Rad(\Omega)$ وكون $Rad(\Omega)$ هو تطابق يُحقِّق الخاصَّة (2) من المُبرهنة (18.3) فإنَّ $\alpha\gamma \in Rad(\Omega)$ أو $\beta\gamma \in Rad(\Omega)$. ومنه $Rad(\Omega)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص. □

8.4 نتيجة: كل تطابق أوَّلي هو تطابق ثنائي الامتصاص.

9.4 تعريف: نقول عن التَّطابق الفعلي Ω لِـ A (𝔹_algebra) بأنَّه ثنائي الامتصاص ابتدائي إذا تحقَّق الشَّرط الآتي:

$$\{\alpha\gamma \mid \exists\beta \notin \Omega :\ \alpha\beta\gamma \in \Omega\} \cup \{\beta\gamma \mid \exists\alpha \notin \Omega :\ \alpha\beta\gamma \in \Omega\} \subseteq Rad(\Omega)$$

10.4 مُبرهنة: بفرض لدينا $\varphi: R_1 \to R_2$ شعاع بين أنصاف الحلقات التبديليَّة R_1, R_2. إذا كان Ω_2 هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي في R_2، فإنَّ $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي في R_1.

الإثبات: إنَّ φ هو تشاكل نصف حلقي، وبحسب التَّعريف (7.3) يكون $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ تطابق، وَ $\varphi^{-1}(\sqrt{\Omega_2})$ تطابق. ليكن $\alpha\beta\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$ بحيث $\alpha, \beta, \gamma \in R_1$.

عندئذٍ:

$$\varphi(\alpha\beta\gamma) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \Omega_2$$

وبما أنَّ Ω_2 هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي عندئذٍ:

$$\varphi(\alpha)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2} \text{ أو } \varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2}$$

إذا كان $\varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2}$ فإنَّ: $\beta\gamma \in \varphi^{-1}(\sqrt{\Omega_2})$

أمَّا إذا كان $\varphi(\alpha)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2}$ فإنَّ $\alpha\gamma \in \varphi^{-1}(\sqrt{\Omega_2})$ ومنهُ:

$$\{\alpha\gamma \mid \exists\beta \notin \Omega_2 : \alpha\beta\gamma \in \Omega_2\} \cup \{\beta\gamma \mid \exists\alpha \notin \Omega_2 : \alpha\beta\gamma \in \Omega_2\}$$
$$\subseteq \varphi^{-1}(Rad(\Omega_2)) = Rad(\varphi^{-1}(\Omega_2))$$

ومنهُ $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي في R_1. □

11.4 مُبرهنة: كل تطابق ابتدائي هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي.

الإثبات: بفرض لدينا $\Omega \in A$ تطابق ابتدائي، و $(\alpha\beta)\gamma \in \Omega$ (حيثُ $\alpha,\beta \in A$)، عندئذٍ:

$$\{\gamma: \alpha\beta\gamma \in \Omega\} \subseteq Rad(\Omega)$$

بما أنَّ $Rad(\Omega)$ هو تطابق وَ $\alpha,\beta \in A$ عندئذٍ لدينا $\alpha\gamma \in Rad(\Omega)$ أو $\beta\gamma \in Rad(\Omega)$ ومنهُ:

$$\{\alpha\gamma \mid \exists\beta \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega\} \cup \{\beta\gamma \mid \exists\alpha \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega\}$$
$$\subseteq Rad(\Omega)$$ □

5 . تطابقات الامتصاص المداريَّة:(Tropical Absorbing Congruence)

1.5 نصف حلقة كثيرات الحُدود المداريَّة ([5],P.3)([6],P.50)**:** بفرض لدينا نصف حلقة كثيرات الحدود المداريَّة $S = \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$ بالمُتغيِّرات $x = (x_1, \dots, x_n)$. عناصر S هي كثيرات حدود بمُعاملات في $\mathbb{T}$ حيثُ تكون جميع العمليات مداريَّة أي عناصر S لها الشَّكل:

$$(F(x) = \oplus_{u\in\mathbb{Z}^n} a_u \odot x^u = max_{u\in\mathbb{Z}^n} a_u + x.u)$$

حيثُ $a_u \in \mathbb{T}$ وجميع a_u مساوِية لِ $-\infty$ باستثناء عدد منتهٍ. التَّطابقات على S هي علاقات تكافؤ على S مُغلقة تحت الضَّرب المداري والجمع المداري، أي إذا كان $F_1 \sim G_1$ و $F_2 \sim G_2$ عندئذٍ يتحقَّق أنَّ: $F_1 \oplus F_2 \sim G_1 \oplus G_2$ وَ $F_1 \odot F_2 \sim G_1 \odot G_2$.

وإذا كان $\phi: S \longrightarrow R$ تشاكل نصف حلقي، عندئذٍ $\{F \sim G \,:\, \phi(F) = \phi(G)\}$ هو تطابق، وجميع التَّطابقات على S تنشأ على هذا النَّحو. وهذا هو السَّبب الرَّئيسي لإعتبار التَّطابقات بدلاً من المثاليَّات فقط في أنصاف الحلقات. من أجل المجموعة الجُزئيَّة $\{(F_\alpha, G_\alpha): \alpha \in A\}$ من $S \times S$ يوجد تطابق أصغر على S يحوي $F_\alpha \sim G_\alpha$ من أجل جميع $\alpha \in A$، وَ يُرمز لهُ $< F_\alpha \sim G_\alpha >_{\alpha\in A}$.

ومنهُ، من أجل أي مجموعة جزئيَّة $S \subseteq \mathbb{T}^n$ يُعرَّف التَّطابق $\Omega(S)$ بالشَّكل الآتي:

$$\Omega(S) = \{(f, g) |\ f(a) = g(a), \forall a \in S\} \subseteq \mathbb{T}[X] \times \mathbb{T}[X]$$

وبالمقابل تُعرَّف مُتنوعة التَّطابق Ω بالشَّكل:

$$V(\Omega) = \{a \in \mathbb{T}^n \,|\ \ f(a) = g(a), \forall (f, g) \in \Omega\} \subseteq \mathbb{T}^n$$

ومن أجل أي تطابق Ω لِ $\mathbb{T}[X]$ يتحقَّق مايلي:

$$V(\Omega(V(\Omega))) = V(\Omega)\ , \Omega \subseteq \Omega(V(\Omega))$$

2.5 مُبرهنة ([6], p.50): من أجل $(f,g),(f',g') \in \mathbb{T}[X] \times \mathbb{T}[X]$ أيَّ عنصرين يتحقَّق مايلي:

$$V\big((f,g) \times (f',g')\big) = V(f,g) \cup V(f',g')$$

3.5 مُبرهنة: إنَّ $\Omega(\mathbb{T}^n)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات:

الحالة الأولى: بفرض لدينا إحدى الثنائيات لها الشكل $(h, 0_{\mathbb{T}})$، وبفرض لدينا:

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (f,g) \times (k,l) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

أي
$$(h \odot (f \odot k \oplus g \odot l), h \odot (f \odot l \oplus g \odot k)) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

وذلك من أجل $f,g,h,k,l \in \mathbb{T}[X]$.

إذا كان h هو كثير الحُدود الصفري، فإنَّ h هو الدَّالة الصفريَّة على $\mathbb{T}^n$ ومنهُ فإنَّ $(h, 0_{\mathbb{T}}) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$، وحسب الخاصَّة (2) من المُبرهنة (18.3) يكون:

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (k,l) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{أو} \quad (h, 0_{\mathbb{T}}) \times (f,g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

نفرض الآن أنَّ h كثير حُدود غير صفري، أي $(h(a) > 0_{\mathbb{T}}\ , \forall a \in \mathbb{T}^n)$، عندئذٍ فإنَّ $h(a)$ يملك مقلوب ضربي مداري، ومنه إذا كان:

$$(h \odot (f \odot k \oplus g \odot l))(a) = (h \odot (f \odot l \oplus g \odot k))(a)$$

فإنَّ
$$(f \odot k \oplus g \odot l)(a) = (f \odot l \oplus g \odot k)(a)$$

وذلك أيَّاً كانت $a \in \mathbb{T}^n$ ومنهُ $(f,g) \times (k,l) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$.

الحالة الثَّانية: بفرض لدينا إثنان من الثنائيات لها الشكل $(h, 0_{\mathbb{T}}), (k, 0_{\mathbb{T}})$، وبفرض لدينا

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (k, 0_{\mathbb{T}}) \times (f,g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

أي $$(h\odot k\odot f, h\odot k\odot g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

وذلك من أجل $f, g, h, k \in \mathbb{T}[X]$.

إذا كان $h\odot k$ هو كثير الحُدود الصفري، فإنَّ $h\odot k$ هو الدَّالة الصفريَّة على $\mathbb{T}^n$ ومنهُ فإنَّ $(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (k, 0_{\mathbb{T}}) = (h\odot k, 0_{\mathbb{T}}) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$.

نفرض الآن أنَّ $h\odot k$ كثير حُدود غير صفري، $(h\odot k(a) > 0_{\mathbb{T}}\ , \forall a \in \mathbb{T}^n)$، عندئذٍ فإنَّ $h\odot k(a)$ يملك مقلوب ضربي مداري، ومنه إذا كان:

$$(h\odot k\odot f)(a) = (h\odot k\odot g)(a)$$

فإنَّ:

$$f(a) = g(a)$$

وذلك أيَّاً كانت $a \in \mathbb{T}^n$ ومنهُ $(f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$. وحسب الخاصَّة (2) من المُبرهنة (18.3) يكون:

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{أو} \quad (k, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

الحالة الثَّالثة: بفرض لدينا $(f_1, f_2) \times (g_1, g_2) \times (h_1, h_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$

أي: $$(f_1\odot g_1 \oplus f_2\odot g_2\ , f_1\odot g_2 \oplus f_2\odot g_1) \times (h_1, h_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

$$(((f_1\odot g_1 \oplus f_2\odot g_2)\odot h_1)\oplus((f_1\odot g_2 \oplus f_2\odot g_1)\odot h_2),$$
$$((f_1\odot g_1 \oplus f_2\odot g_2)\odot h_2))\oplus((f_1\odot g_2 \oplus f_2\odot g_1)\odot h_1) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

نعلم أنَّ الضرب المداري توزيعي على الجمع المداري، ومنهُ فإنَّ:

$$(f_1\odot g_1\odot h_1 \oplus f_2\odot g_2\odot h_1 \oplus f_1\odot g_2\odot h_2 \oplus f_2\odot g_1\odot h_2)(a)$$
$$= (f_1\odot g_1\odot h_2 \oplus f_2\odot g_2\odot h_2 \oplus f_1\odot g_2\odot h_1 \odot \oplus f_2\odot g_1\odot h_1)(a)$$

وذلك أيَّاً كانت $a \in \mathbb{T}^n$.

ونريد إثبات أنَّ إحدى الجداءات الآتية تنتمي إلى $\Omega(\mathbb{T}^n)$.

1. $(f_1,f_2)\times(g_1,g_2)\in\Omega(\mathbb{T}^n)$، أي:

$$(f_1\odot g_1\oplus f_2\odot g_2)(a)=(f_1\odot g_2\oplus f_2\odot g_1)(a)$$

2. $(f_1,f_2)\times(h_1,h_2)\in\Omega(\mathbb{T}^n)$، أي:

$$(f_1\odot h_1\oplus f_2\odot h_2)(a)=(f_1\odot h_2\oplus f_2\odot h_1)(a)$$

3. $(g_1,g_2)\times(h_1,h_2)\in\Omega(\mathbb{T}^n)$، أي:

$$(g_1\odot h_1\oplus g_2\odot h_2)(a)=(g_1\odot h_2\oplus g_2\odot h_1)(a)$$

وذلك أيَّاً كانت $a\in\mathbb{T}^n$.

من أجل 1: نريد إثبات أنَّ $(f_1,f_2)\times(g_1,g_2)\in\Omega(\mathbb{T}^n)$، نريد إثبات أنَّ:

$$a\in V\big((f_1,f_2)\times(g_1,g_2)\big)\,,\forall a\in\mathbb{T}^n$$

$$a\in V\big((f_1,f_2)\times(g_1,g_2)\times(h_1,h_2)\big)\,,\forall a\in\mathbb{T}^n \quad \text{(فرضاً)}$$

ونعلم أنَّ الجداء المُختلط تجميعي، ومنهُ فإنَّ:

$$a\in V(((f_1,f_2)\times(g_1,g_2))\times(h_1,h_2))\,,\forall a\in\mathbb{T}^n$$

وحسب المُبرهنة (2.5) فإنَّ:

$$a\in[V\big((f_1,f_2)\times(g_1,g_2)\big)]\cup[V(h_1,h_2)]\,,\forall a\in\mathbb{T}^n$$

إذا كانت $a\in V\big((f_1,f_2)\times(g_1,g_2)\big)$ فإنَّ 1 مُحقَّقة.

نفرض الآن أنَّ $a\in V(h_1,h_2)$، ومنهُ $h_1(a)=h_2(a)$.

وبماأنَّ الجمع الجامديُعرِّف ترتيب كلي، نفرض $(f_1\geq f_2\ ,g_1\geq g_2\,,h_1\geq h_2)$

نُلاحظ الآن أنَّ العلاقة 2 تقابل العلاقة الآتية:

$$\max\{f_1(a)+h_1(a),f_2(a)+h_2(a)\}$$
$$=\max\{f_1(a)+h_2(a),f_2(a)+h_1(a)\}$$

$$\max\{f_1(a)+h_1(a),f_2(a)+h_2(a)\}=f_1(a)+h_1(a) \quad \text{(فرضاً)}$$

$$\max\{f_1(a)+h_2(a),f_2(a)+h_1(a)\}=f_1(a)+h_1(a)$$

ومنهُ فإنَّ العلاقة 2 مُحقَّقة. يتم إثبات العلاقة 3 بنفس الاسلوب، ومنهُ يتم المطلوب.□

6 . المراجع:

[1]. MINCHEVA.K,. 2016. - Semiring Congruences and Tropical Geometry. PhD Thesis. Baltimore (Maryland), Johns Hopkins University,81P.

[2]. HARSU.M,. 2016. - Layered Tropical commutative Algebra. Licentiate thesis. Finland, University Of Tampere,149P.

[3].QIU.D,.2017. -- On Algebraic Congruences, arXiv: 1512.08088.

[4].BADAWI.A,. 2007. - On 2-absorbing ideals of commutative rings. Bulletin of the Australian Mathematical Society , Volume 75(Issue 3),. Pages. 417 – 429.

[5]. MACLCGAN.D,. 2017.- Tropical Schemes, Tropical Cycles, and Valuated Matroid, arXiv: 1401.4654.

[6]. ESTORM.R,. 2017. - The Tropical Nullstelensats for Congruences, Advances in Mathematics [Internet], Volume 308,. Pages.36-82.

[7]. Mousa M. a Study in Absorbing Ideals. Master Thesis. Damascus: Damascus University; 2019.(In Arabic)

[8].ROBERT.HSC,. 2016.- On the Etale Fundamental Group of Schemes over the Natural Numbers. PhD Thesis. Canberra, Australian National University,124P.

الاشتقاق الضبابي العادي والكسري بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم للدوال الضبابية المثلثية

إبراهيم الحوراني [1] د. محمد العلي [2] د. عدنان الطيباني [3]

الملخص

نهدف من هذا البحث إلى دراسة العلاقة بين مشتق هوكوهارا المعمم لدالة ضبابية وطول الدالة الضبابية، بالإضافة إلى مفهومي التكامل والاشتقاق الكسريين الضبابيين. كما قمنا في هذا البحث بعرض بعض أنواع المشتقات الكسرية الضبابية للدوال الضبابية المثلثية ودراستها.

الكلمات المفتاحية: دالة ضبابية، فرق هوكوهارا المعمم، طول الدالة الضبابية، تكامل ريمان–ليوفيل الكسري الضبابي المعمم، مشتق كابوتو– كاتاغامبولا الكسري الضبابي

[1] طالب ماجستير في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث – سوريا.
[2] أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث – سوريا.
[3] مدرس في قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية – جامعة البعث – سوريا.

Ordinary and Fractional Fuzzy Derivation by Generalized Hukuhara Difference Concept of Triangular Fuzzy Functions

Ibrahem Al-Horany [1] Dr. Muhammad Ali [2] Dr. Adnan Al-Taybani [3]

Abstract

The aim of this paper is to study the relationships between the generalized Hukuhara fuzzy derivation and fuzzy function length, in addition to the concepts of fuzzy fractional integration and derivation. We also study some types of fuzzy fractional derivatives.

Key words: Fuzzy function, Generalized Hukuhara Difference, length of fuzzy function, Fuzzy Riemann-Liouville Generalized Fractional Derivative, Fuzzy Caputo-Katugampola Fractional Derivative.

[1] Master student, Department of Mathematics Al-Baath University.
[2] Assistant Professor, Department of Mathematics Al-Baath University.
[3] Department of Basic Sciences, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering Al-Baath University.

المقدمة

ظهر مفهوم المعادلات التفاضلية الضبابية لأول مرة عام 1978، وحاز على اهتمام عدد من الباحثين، حيث تم تطوير المفاهيم المتعلقة بهذا الموضوع نظراً لأهمية تطبيقاته. نقدم في هذا البحث عرضاً موجزاً عن المشتق الضبابي العادي والمشتق الضبابي الكسري لدالة ضبابية ثلاثية، ونظراً لاختلاف الفروق المستخدمة في عملية الاشتقاق تم تعريف عدة أنواع من المشتقات العادية والكسرية الضبابية، كالمشتق الضبابي العادي باستخدام فرق هوكوهارا والذي عرف من قبل Puri وRalescu عام1983 والمشتق الضبابي العادي باستخدام فرق هوكوهارا المعمم والذي عُرِفَ من قبل من قبل Bede عام 2013، بالإضافة إلى مشتق كابوتو الكسري باستخدام فرق هوكوهارا عام 2012 وباستخدام فرق هوكوهارا المعمم عام 2014.

هدف البحث.

التعرف على صيغة المشتق الضبابي من مرتبة صحيحة والمشتق الضبابي من مرتبة كسرية لدالة ضبابية ثلاثية وذلك باستخدام فرق هوكوهارا المعمم، فضلاً عن توضيح علاقة طول الدالة الضبابية بمشتقاتها ذات المراتب الصحيحة والكسرية باستخدام فرق هوكوهارا المعمم. كما يهدف هذا البحث إلى تقديم إثبات جديد لبعض المبرهنات مختلف عن ما تم عرضه في معظم المراجع العلمية، بالإضافة إلى توضيح صيغة مشتق كابوتو– كاتاغامبولا الكسري الضبابي لما ورد في المرجعين [3،1].

1. تعاريف ومبرهنات أساسية:

تعريف.(1). [9].

لتكن X مجموعة غير خالية ولنفرض أنَّ A مجموعة جزئية من X، ولنعرف الدالة μ_A بالشكل:

$$\begin{aligned} \mu_A &: X \to [0,1] \\ x &\to \mu_A(x) \end{aligned}$$

عندئذ ندعو المجموعة A المزودة بالدالة μ_A مجموعة جزئية ضبابية من X، وندعو الدالة μ_A بدالة العضوية، فإذا كان $x \in X$ فإننا ندعو القيمة $\mu_A(x)$ بدرجة انتماء العنصر x إلى المجموعة A. يتم التعبير عن المجموعة الجزئية الضبابية A من X بالشكل (A, μ_A)، وأحياناً بالشكل μ_A للاختصار.

تعريف. (2). [9].

لتكن X مجموعة غير خالية ولنفرض أنَّ A مجموعة جزئية ضبابية من X. يعرف حامل المجموعة الجزئية الضبابية A والذي يرمز له بالرمز $supp(A)$ بأنه المجموعة:

$$supp(A) = \{x \in X \ : \ \mu_A(x) > 0\}$$

تعريف. (3). [4].

لتكن X مجموعة غير خالية ولنفرض أنَّ A مجموعة جزئية ضبابية من X وأنَّ X فضاءً طبولوجياً. تعرف مجموعة القطع من المستوى $0 \le r \le 1$ للمجموعة الجزئية الضبابية A والتي يرمز لها بالرمز $A(r)$ بأنها المجموعة:

$$A(r) = \begin{cases} x \in X \quad ; \ \mu_A(x) \ge r & if \ \ r > 0 \\ cl(supp(A)) & if \ \ r = 0 \end{cases}$$

حيث إنَّ $cl(supp(A))$ هي لصاقة حامل المجموعة الجزئية الضبابية A.

ملاحظة. (1).

ليس بالضرورة أن تكون المساواة $A(0)=cl(supp(A))=X$ صحيحة.

مثال.1.

لنفرض أنَّ $X=\mathbf{R}$ وأنَّ A مجموعة جزئية ضبابية في $\mathbf{R}$ مزودة بدالة العضوية:

$$\mu_A(x):\mathbf{R}\to[0,1]$$

حيث إنَّ:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} x-1 & ;\ 1\leq x\leq 2 \\ 3-x & ;\ 2<x<3 \\ 0 & ;\ x\notin[1,3[\end{cases}$$

عندئذ فإنَّ:

$$A(r)=[r+1,3-r]\ \ if\ \ 0<r\leq 1$$

ونلاحظ أنَّ $[1,3]=\overline{]1,3[}=A(0)$.

تعريف. (4). [4].

لنفرض أنَّ $X=\mathbf{R}$ وأنَّ A مجموعة جزئية ضبابية في $\mathbf{R}$ مزودة بدالة العضوية:

$$\mu_A:\mathbb{R}\to[0,1]$$

نقول إنَّ A تشكل عدداً حقيقياً ضبابياً إذا تحققت الشروط الآتية:

i. $A(r)\neq\phi$ وذلك أياً كان $0\leq r\leq 1$.

ii. $A(r)$ مجال مغلق من $\mathbf{R}$ وذلك أياً كان $0\leq r\leq 1$.

iii. المجموعة $supp(A)=\{x\in\mathbb{R}:\mu_A(x)>0\}$ محدودة.

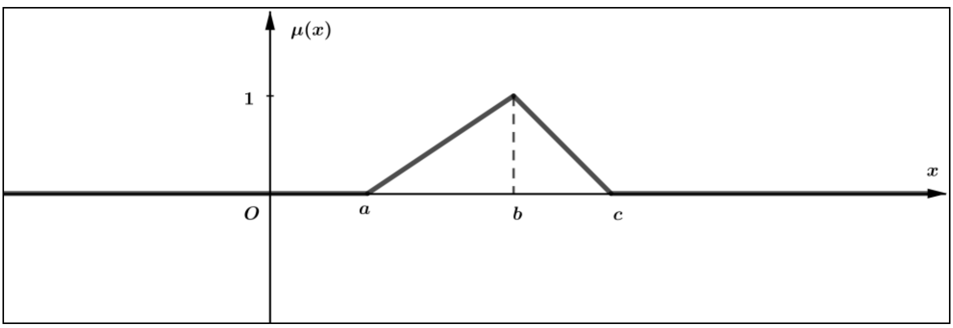
ملاحظة. (2).

إذا كان A عدداً حقيقياً ضبابياً فإنَّ $A(r)=\left[a_1(r),a_2(r)\right]$، ونرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية الضبابية بالرمز $\mathbf{F_R}$.

تجدر الإشارة إلى أنه يوجد نوعين أساسيين من الأعداد الضبابية الحقيقية وهما الأعداد الضبابية المثلثية والأعداد الضبابية الرباعية. سنقتصر في هذا البحث على الأعداد الضبابية المثلثية وسنستخدم الرمز $\mathbf{F_R}$ للدالة عليها.

تعريف. (5). [4].

ليكن A عدداً حقيقياً ضبابياً، عندئذ نقول عن العدد الحقيقي الضبابي A إنه عدد ضبابي مثلثي إذا كان التمثيل البياني لدالة العضوية μ_A له الشكل:



نلاحظ أنَّ دالة العضوية لعدد ضبابي مثلثي لها قاعدة الربط:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0 & if\ \ x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & if\ \ a<x\le b \\ \dfrac{x-c}{b-c} & if\ \ b<x\le c \\ 0 & if\ \ x\ge c \end{cases}$$

نعبر عن العدد الحقيقي الضبابي المثلثي بالشكل $A=(a,b,c)$، ونلاحظ أنَّ:

$$\mu_A(b)=1,\ \mu_A(a)=0,\ \mu_A(c)=0$$

أما مجموعة القطع من المستوى r للعدد الضبابي الثلاثي $A=(a,b,c)$ تأخذ الشكل:

$$A(r)=[a+(b-a)\,r\ ,\ c+(b-c)\,r\ ] \qquad (*)$$

1.1. العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية الضبابية.

ليكن $A,B\in \mathbf{F_R}$ ولنفرض أنَّ $\lambda\in \mathbf{R}$ وأنَّ:

$$A(r)=[a_1(r),a_2(r)]\ ,\ B(r)=[\,b_1(r),b_2(r)]$$

هي مجموعة القطع من المستوى r لكل منهما على الترتيب، عندئذ تعرف العمليات الحسابية على $\mathbf{F_R}$ بالشكل الآتي:

أولاً. الجمع. [4]. إنَّ ناتج مجموع العددين الحقيقين الضبابيين A,B هو العدد الحقيقي الضبابي $A\oplus B$، والذي مجموعة القطع من المستوى r لهُ هي:

$$(A\oplus B)(r)=A(r)+B(r)=[a_1(r)+b_1(r),\ a_2(r)+b_2(r)\,]$$

ثانياً. الفرق. [4]. إنَّ ناتج الفرق بين العددين الحقيقين الضبابيين A,B هو العدد الحقيقي الضبابي $A!\ \ B$، والذي مجموعة القطع من المستوى r لهُ هي:

$$(A!\ \ B)(r)=A(r)-B(r)=[\,a_1(r)-b_2(r),\ a_2(r)-b_1(r)\,]$$

ثالثاً. الضرب بعدد حقيقي. [4]. إنَّ ناتج ضرب العدد الحقيقي الضبابي A بالعدد الحقيقي λ هو العدد الحقيقي الضبابي $\lambda.A$، والذي مجموعة القطع من المستوى r لهُ هي:

$$(\lambda.A)(r)=\lambda.(A(r))=\begin{cases}[\lambda\, a_1(r),\lambda\, a_2(r)] & if\quad \lambda\geq 0\\ [\lambda\, a_2(r),\lambda\, a_1(r)] & if\quad \lambda<0\end{cases}$$

رابعاً. الجداء. [4]. إنَّ ناتج جداء العددين الحقيقين الضبابيين A,B هو العدد الحقيقي الضبابي $A\square\ B$، والذي مجموعة القطع من المستوى r لهُ هي:

$$(A\square\ B)(r)=A(r)\ B(r)=[\,\min P(r),\ \max P(r)\,]$$

حيث $P(r)=\{a_1(r)b_1(r),\ a_1(r)b_2(r)\ ,\ a_2(r)b_1(r),\ a_2(r)b_2(r)\}$.

خامساً. القسمة. [4]. إنَّ ناتج قسمة العدد الحقيقي الضبابي A على العدد الحقيقي الضبابي B، حيث إنَّ $0\notin supp(B)$ هو العدد الحقيقي الضبابي (A/B) والذي مجموعة القطع له من المستوى r هي:

$$(A/B)(r)=\frac{A(r)}{B(r)}=\left[\ a_1(r),a_2(r)\ \right].\left[\ \frac{1}{b_2(r)},\frac{1}{b_1(r)}\right]$$

مثال.1.

ليكن لدينا العددين الحقيقيين الضبابيين المثلثيين $A=(1,2,3),B=(3,4,5)$، عندئذٍ وحسب الصيغة $(*)$ نجد مجموعة القطع من المستوى r لكل من العددين A,B هي على الرتيب $A(r)=[\,1+r\ ,3-r\ ]\quad,\quad B\,(r)=[3+r\ ,5-r\ ]$.

بتطبيق العمليات السابقة على مجموعتي القطع من المستوى r لكل من A و B نحصل على:

- $(A\oplus B)(r)=A(r)+B(r)=[\,4+2r,8-2r\,]$، ومنه: $A\oplus B=(4,6,8)$.
- $(A\,!\,\,B)(r)=A(r)-B(r)=[-4+2r,-2r\,]$، ومنه: $A\,!\,\,B=(-4,-2,0)$.
- $(4.A)(r)=4.\big(A(r)\big)=[\,4+4r\ ,\ 12-4r\,]$، ومنه: $(4.A)=(4,8,12)$.
- $(A\square\ B)(r)=A(r)\ B(r)=[(1+r)(3+r),(3-r)(5-r)\ ]$.
- $(A/B)(r)=\dfrac{A(r)}{B(r)}=[(1+r)/(5-r)\ ,(3-r)/(3+r)\ ]$.

ملاحظة. (1).

ليكن $A,B\in \mathbf{F_R}$ عندئذ فإنَّ:

1- إنَّ $(A\square\ B)$ و $(A/B);0\notin supp(B)$ ليسا عددان حقيقيان ضبابيان مثلثيان، وذلك لأن مجموعتي القطع من المستوى r لهما ليستا من الشكل $(*)$.

2- $(A!\ B)\oplus B\neq A$.

3- $A!\ A=A\oplus(-1).A\neq 0$.

4- إنَّ مجموعة الأعداد الحقيقية الضبابية لا تشكل فضاءً متجهياً فوق الحقل □.

تعريف. (1). [2،4].

ليكن $A,B\in \mathbf{F_R}$، إذا وجد عدد حقيقي ضبابي C يحقق أنَّ $B=A\oplus C$، عندئذ ندعو C بفرق هوكوهارا للعددين الحقيقيين الضبابيين A,B، ويرمز له بالرمز $A\ !_H\ B$.

تعريف. (2). [1،2،4].

ليكن $A,B\in \mathbf{F_R}$، إذا وجد عدد حقيقي ضبابي C، يحقق أنَّ:

$$i.A=B\oplus C \ \ or\ \ ii.B=A\oplus(-1)C$$

عندئذ ندعو C بفرق هوكوهارا المعمم للعددين الحقيقيين الضبابيين A,B، ويرمز له بالرمز $A\ !_{gH}\ B$.

في الحالة i نكتب $C=A\ !_{i-gH}\ B$ وفي الحالة ii نكتب $C=A\ !_{ii-gH}\ B$.

وإذا كان $A=(a_1,a_2,a_3),B=(b_1,b_2,b_3)$ عددان حقيقيان ضبابيان مثلثيان، عندئذٍ فإنَّ فرق هوكوهارا المعمم للعددين A,B موجود دوماً، وهو عدد حقيقي ضبابي مثلثي له الشكل:

$$\begin{array}{ll} i.C=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3) & if\ \ a_1-b_1<a_3-b_3 \\ ii.C=(a_3-b_3,a_2-b_2,a_1-b_1) & if\ \ a_1-b_1>a_3-b_3 \end{array}$$

مبرهنة. (1). [1].

لتكن $M, N, K \in \mathbf{F_R}$، عندئذ القضايا الآتية صحيحة

1- إذا وُجد $M \,!_{gH}\, N$، فهو وحيد.

2- $M \,!_{gH}\, M = 0$.

3- يكون $M \,!_{i-gH}\, N$ موجوداً عندما وفقط عندما يكون $M \,!_{ii-gH}\, N$ موجوداً.

4- $(M \oplus N) \,!_{gH}\, N = M$.

5- إذا كان $M \,!_{gH}\, N$ و $N \,!_{gH}\, M$ موجودان، فإنَّ:

$$0 \,!_{gH} \left(M \,!_{gH}\, N\right) = N \,!_{gH}\, M$$

6- $M \,!_{gH}\, N = N \,!_{gH}\, M = K$ إذا وفقط إذا كان $K = -K$ و $M = N$.

2.1. الدوال الضبابية.

تعريف. (1). [1].

تسمى كل دالة x معرفة بالشكل:

$$x : \square \longrightarrow \mathbf{F_R}$$
$$t \longrightarrow x(t)$$

دالة مجموعة قيمها أعداد حقيقية ضبابية.

إذا كانت x دالة مجموعة قيمها إعداد حقيقية ضبابية عندئذ فإنَّ مجموعة القطع من المستوى r لها تأخذ الشكل: $x(t,r) = \left[x_1(t,r), x_2(t,r)\right]$.

سنستخدم في هذه الورقة مصطلح الدالة الضبابية للإشارة إلى الدالة التي مجموعة قيمها أعداد حقيقية ضبابية وذلك للاختصار.

تعريف. (2). [1،2].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية معرفة على المجال $]a,b[$، ولنفرض أنَّ $t_0 \in]a,b[$ وأنَّ h عدداً حقيقياً موجباً يحقق أنَّ $t_0+h \in]a,b[$. إذا كان $x(t_0+h) \,!_{gH}\, x(t_0)$ موجوداً، فإن مشتق هوكوهارا المعمم للدالة الضبابية x عند t_0 والذي يرمز له بالرمز $x'_{gH}(t_0)$ يعطى بالصيغة:

$$x'_{gH}(t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{x(t_0+h) \,!_{gH}\, x(t_0)}{h} := \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h x(t_0)}{h}$$

ملاحظة. (1).

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية معرفة على المجال $]a,b[$ عندئذ:

1- إذا كان $t_0 \in]a,b[$ وكان $x'_{gH}(t_0)$ موجوداً فإنَّ $x'_{gH}(t_0) \in \mathbf{F_R}$.

2- إذا كان مشتق هوكوهارا المعمم للدالة الضبابية x موجوداً عند كل $t \in]a,b[$ فإننا ندعو الدالة:

$$x'_{gH} :]a,b[\longrightarrow \mathbf{F_R}$$
$$t \longrightarrow x'_{gH}(t)$$

بمشتق هوكوهارا المعمم للدالة الضبابية x.

3- بما فرق هوكوهارا المعمم يملك إحدى الصيغتين i أو ii فإنَّ مشتق هوكوهارا المعمم يرمز له بالشكل $x'_{i-gH}(t)$ أو $x'_{ii-gH}(t)$ بالترتيب حسب الصيغة المستخدمة.

4- لنفرض أنَّ مجموعة القطع من المستوى r للدالة الضبابية $x(t)$ هي:

$$x(t,r) = \left[x_1(t,r)\ ,\ x_2(t,r)\right]$$

عندئذٍ فإن مجموعة القطع من المستوى r للمشتق $x'_{gH}(t)$ تأخذ أحد الشكلين:

الأول. $x'_{i-gH}(t,r) = \left[x'_1(t,r)\ ,\ x'_2(t,r)\right]$.

الثاني. $x'_{ii-gH}(t,r)=\left[x'_2(t,r)\ ,\ x'_1(t,r)\right]$.

حيث إنَّ $x'_1(t,r)\ ,\ x'_2(t,r)$ دالتـان حقيقيتـان قابلتـان للمفاضـلة بالنسـبة إلـى t، وهنـا نلاحظ أنَّ: $x'_{i-gH}(t)=\ominus_H(-1)x'_{ii-gH}(t)$.

تعريف (3). [1].

لـــتكن $x(t)$ دالـــة ضـــبابية معرفـــة علـــى $D\subseteq\mathbb{R}$ ولنفـــرض أنَّ $x(t,r)=\left[x_1(t,r)\ ,\ x_2(t,r)\right]$ هـي مجموعـة القطـع مـن المسـتوى r لهـا، إنَّ طـول الدالة الضبابية $x(t)$ هو الدالة الحقيقية $l(x)$ والتي تعطى وفق قاعدة الربط:

$$l(x)(t,r)=x_2(t,r)-x_1(t,r)$$

إذا كان h عدداً حقيقياً موجباً يحقق أنَّ $t+h\in D$ وذلك لأجل كل $t\in D$، عندئذ نقول عن الدالة الضبابية $x(t)$ إنها:

- ذات طول متزايد إذا كان: $l(x)(t+h,r)\geq l(x)(t,r);\forall t\in D$.
- ذات طول متناقص إذا كان: $l(x)(t+h,r)\leq l(x)(t,r);\forall t\in D$.
- ذات طول مضطرد إذا كانت ذات طول متزايد أو متناقص.

مبرهنة. (1). [1،8].

ليكن $A,B\in\mathbf{F_R}$ ، عندئذ تكون القضايا الآتية صحيحة:

$(a)\ \ l((-1)A)=l(A)$

$(b)\ \ l(A\oplus B)=l(A)+l(B)$

$(c)\ \ l\left(A\ominus_{gH}B\right)=|\,l(A)-l(B)|$

تعريف. (4). [1،3].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية معرفة على المجال $[t_0,T]$ وبفرض أن $p>0$ ، يُعرف تكامل ريمان− ليوفيل الكسري الضبابي المعمم من النوع p والمرتبة $0<\alpha<1$ بالشكل:

$$\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\, x(t)=\frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\odot\int_{t_0}^{t} s^{p-1}\left(t^p-s^p\right)^{\alpha-1}\odot\, x(s)\,ds$$

ويُعرف بصيغة مجموعة القطع من المستوى r بالشكل:

$$\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\, x(t,r)=\left[\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\, x_1(t,r)\,,\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\, x_2(t,r)\right]$$

حيث إنَّ:

$$\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\, x_1(t,r)=\frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t} s^{p-1}\left(t^p-s^p\right)^{\alpha-1} x_1(s,r)\,ds$$

$$\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\, x_2(t,r)=\frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t} s^{p-1}\left(t^p-s^p\right)^{\alpha-1} x_2(s,r)\,ds$$

مبرهنة. (2). [1].

من أجل أي دالتين ضبابيتين $x(t),y(t)$ ومن أجل أي مرتبتين كسريتين $\alpha,\beta\in(0,1)$، تكون القضيتان الآتيتان صحيحتين:

$1-\ \boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\,(x\oplus y)(t)=\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\, x(t)\oplus\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\, y(t).$

$2-\ l\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}x\right)(t,r)=\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\, l\,(x)\left(t,r\right).$

تعريف (5). [1،3].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية معرفة على $[t_0,T]$ وبفرض أن $p>0$ ، يُعرف مشتق ريمان− ليوفيل الكسري الضبابي المعمم باستخدام فرق هوكوهارا المعمم من النوع p والمرتبة $0<\alpha<1$ بالشكل:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}_{gH}}\,x(t)=t^{1-p}\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x\right)'_{gH}(t)\ \ ;\ t\in[t_0,T]\ \ ,\ \ 0<\alpha<1$$

حيث إنَّ:

$$\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t)=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\cdot\int_{t_0}^{t}s^{p-1}\left(t^p-s^p\right)^{-\alpha}\cdot x(s)\,ds$$

$$\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x\right)'_{gH}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t+h)\ominus_{gH}\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t)}{h}$$

وهنا نميز الحالتين:

- في حالة الاشتقاق باستخدام فرق هوكوهارا من النوع الأول $(i-gH)$، يكون:

$$\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x\right)'_{i-gH}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t+h)\ominus_{H}\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t)}{h}$$

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}_{gH}}\,x(t)=t^{1-p}\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x\right)'_{i-gH}(t)\ \ ;\ t\in[t_0,T]\ \ ,\ \ 0<\alpha<1$$

ومجموعة القطع من المستوى r للمشتق في هذه الحالة هي:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\boldsymbol{RL}_{i-gH}}\,x(t,r)=\left[\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}}\,x_1(t,r),\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}}\,x_2(t,r)\right]$$

- في حالة الاشتقاق باستخدام فرق هوكوهارا من النوع الثاني $(ii-gH)$، يكون:

$$\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x\right)'_{ii-gH}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t)\ominus_{H}\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x(t+h)}{h}$$

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}_{gH}}\,x(t)=t^{1-p}\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x\right)'_{ii-gH}(t)\ \ ;\ t\in[t_0,T]\ \ ,\ \ 0<\alpha<1$$

ومجموعة القطع من المستوى r للمشتق في هذه الحالة هي:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\boldsymbol{RL}_{ii-gH}}\,x(t,r)=\left[\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}}\,x_2(t,r),\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}}\,x_1(t,r)\right]$$

مبرهنة. (3). [1،3].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية، عندئذ لأجل $0<\alpha<1$ و $p>0$ ، فإنَّ:

$$\left(\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\ \boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\ x\right)(t)=x(t)$$

تعريف (6). [1،3].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية وبفرض أنَّ المشتق $\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\ x(t)$ موجود في الفترة $[t_0,T]$ حيث إنَّ $p>0$ و $0<\alpha<1$، عندئذ يُعرف مشتق كابوتو كاتاغامبولا الكسري الضبابي بالشكل:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\ x(t)=\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\left(x(t)\ !_{\ gH}\ x(t_0)\right)$$

تعريف (7). [1].

لتكن لدينا $x(t)$ دالة ضبابية و $x(t,r)=\left[x_1(t,r),x_2(t,r)\right]$ مجموعة القطع لها من المستوى r. نقول عن الدالة $x(t)$ أنها مستمرة مطلقاً إذا كانت كل من الدالتين $x_1(t,r),\ x_2(t,r)$ مستمرتين مطلقاً.

2. النتائج ومناقشتها:

في هذه الفقرة نعرض أهم النتائج التي توصلنا إليها، فضلاً عن إعادة إثبات بعض المبرهنات بطريقة مختلفة عن الطريقة التي وردت في المراجع العلمية، والبداية مع المبرهنة الآتية والتي نقدم إثباتها بطريقة مختلفة عن طريقة إثباتها في المراجع العلمية.

مبرهنة. (1). [6،8].

إذا كانت $x(t)=\left(z_1(t),z_2(t),z_3(t)\right)$ دالة ضبابية مجموعة قيمها أعداداً حقيقيةً ضبابية مثلثية ومعرفة على المجال $[a,b]$ ، عندئذٍ القضايا الآتية صحيحة:

1- إذا كانت $x(t)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الأول $(i-gH)$ من أجل $t\in[a,b]$ عندئذٍ يكون:

$$x'_{i-gH}(t)=\left(z'_1(t),z'_2(t),'z_3(t)\right)$$

2- إذا كانت $x(t)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الثاني $(ii-gH)$ من أجل $t\in[a,b]$ عندئذٍ يكون:

$$x'_{ii-gH}(t)=\left(z'_3(t),z'_2(t),\ z'_1(t)\right)$$

البرهان.

بداية نثبت صحة الحالة الثانية:

بما أن $x(t)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الثاني $(ii-gH)$ من أجل $t\in[a,b]$ وبالفرض لدينا $x(t)=\left(z_1(t),z_2(t),z_3(t)\right)$ وبما أن مشتق هوكوهارا المعمم يُعرف بالشكل:

$$x'_{gH}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)\,!\,_{gH}\,x(t)}{h}$$

ومن أجل هذه الحالة يكون $x'_{ii-gH}(t,r)=\left[x'_2(t,r)\ ,\ x'_1\ (t,r)\right]$ ولكن مجموعة القطع من المستوى r للدالة المفروضة تُعطى بالشكل:

$$x(t,r)=[\,z_1(t)+(z_2(t)-z_1(t))\,r\;,\;z_3(t)+(z_2(t)-z_3(t))\,r\,]$$
$$=\left[\,z_1(t)(1-r)+r\,z_2(t)\;,\;z_3(t)(1-r)+r\,z_2(t)\,\right]$$

وبالتالي:

$$x_1(t,r)=z_1(t)(1-r)+r\,z_2(t)\;,\;x_2(t,r)=z_3(t)(1-r)+r\,z_2(t)$$

ومنه فإنَّ:

$$x_1'(t,r)=z_1'(t)(1-r)+r\,z_2'(t)\;\;,\;\;x_2'(t,r)=z_3'(t)(1-r)+r\,z_2'(t)$$

وبالتعويض في العلاقة لمجموعة قطع المشتق من النوع الثاني نجد أنَّ:

$$x'_{ii-gH}(t,r)=\left[x_2'(t,r)\;,\;x_1'\;(t,r)\right]$$
$$=\left[z_3'(t)(1-r)+r\,z_2'(t),z_1'(t)(1-r)+r\,z_2'(t)\right]$$

وبمقارنـة النـاتج الأخير مـع العلاقـة(*) نجد أن $z_3'(t)=a,z_2'(t)=b,\;z_1'(t)=c$ ومن ثم يكون $x'(x)=\left(z_3'(t),z_2'(t),\;z_1'(t)\right)$.

ننتقل الآن إلى إثبات الحالة الأولى وذلك بتطبيق العلاقة:

$$x'_{i-gH}(t)=!\;_H\,(-1)\,x'_{ii-gH}(t)$$

والتي ينتج عنها أنَّ:

$$x'_{i-gH}(t)=!\;_H\,(-1)\,x'_{ii-gH}(t)=!\;_H\,(-1)\left(z_3'(t),z_2'(t),\;z_1'(t)\right)$$
$$=!\;_H\left(-z_1'(t),-z_2'(t),-z_3'(t)\right)$$
$$=\left(z_1'(t),z_2'(t),\;z_3'(t)\right)$$

مبرهنة. (2).

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية معرفة على $D \subseteq \mathbb{R}$ ولنفرض أنَّ $x(t,r) = [x_1(t,r)\ ,\ x_2(t,r)]$ هي مجموعة القطع من المستوى r لها، عندئذ تكون الدالة الضبابية $x(t)$ تفاضلية من النوع $(i-gH)$ إذا وفقط إذا كانت ذات طول متزايد وتفاضلية من النوع $(ii-gH)$ إذا وفقط إذا كانت ذات طول متناقص.

البرهان.

في حال كانت $x(t)$ ذات طول متزايد، عندئذ:

$$l(x)(t+h,r) \geq l(x)(t,r); \forall t \in D\, and\, t+h \in D$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2(t,r) - x_1(t,r) \leq x_2(t+h,r) - x_1(t+h,r)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1(t+h,r) - x_1(t,r) \leq x_2(t+h,r) - x_2(t,r)$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \frac{x_1(t+h,r) - x_1(t,r)}{h} \leq \lim_{h\to 0} \frac{x_2(t+h,r) - x_2(t,r)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1'(t,r) \leq x_2'(t,r)$$

وهذا يبين أنَّ:

$$x'_{i-gH}(t,r) = [x_1'(t,r)\ ,\ x_2'\ (t,r)]$$

في حال كانت $x(t)$ ذات طول متناقص، عندئذ باتباع نفس الخطوات السابقة نجد أنَّ:

$$x'_{ii-gH}(t,r) = [x_2'(t,r)\ ,\ x_1'\ (t,r)]$$

مبرهنة. (3).

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية معرفة على $D \subseteq \mathbb{R}$، عندئذ الدالة الضبابية $x(t)$ ذات طول متزايد إذا وفقط إذا كان $\frac{d}{dt}[l(x)(t,r)] \geq 0$ وذات طول متناقص إذا وفقط إذا كان $\frac{d}{dt}[l(x)(t,r)] \leq 0$.

البرهان.

لنفرض أنَّ الدالة الضبابية $x(t)$ ذات طول متزايد عندئذ يكون:

$$\begin{aligned} & l(x)(t+h,r) \geq l(x)(t,r); \forall t \in D \, and \, t+h \in D \\ & \Leftrightarrow l(x)(t+h,r) - l(x)(t,r) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{l(x)(t+h,r) - l(x)(t,r)}{h} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{d}{dt}[l(x)(t,r)] \geq 0 \end{aligned}$$

إذا كانت الدالة الضبابية $x(t)$ ذات طول متناقص عندئذ باتباع نفس الخطوات السابقة نجد أنَّ $\frac{d}{dt}[l(x)(t,r)] \leq 0$.

تجدر الاشارة إلى أنه تم إثبات هذه المبرهنة كتفسير لاستخدامها من قبل أغلب الباحثين للتحقق من أن الدالة الضبابية ذات طول متزايد أو متناقص عن طريق اشتقاق دالة الطول بدون ملاحظتنا لوجود إثبات لها.

ملاحظة. (1). [1].

من الممكن أن يملك تكامل ريمان ليوفيل الكسري الضبابي المعمم طولاً متزايداً على مجالات جزئية من المجال الكلي ومتناقصاً على مجالات جزئية اخرى من المجال الكلي، حتى وإن كانت الدالة $x(t)$ تملك طول متناقص أو متزايد على كامل المجال الكلي.

مثال.1.

من أجل $p=1$ و $\alpha = 1/2$ والدالة الضبابية $x:(0,1] \to \mathbf{F_R}$ المُعرفة بالشكل

$$x(t) = \left(\sqrt{t} - 1, 0, 1 - \sqrt{t}\right) \quad ; \quad t \in (0,1]$$

لدينا:

$$l(x)(t,r) = 2\sqrt{t}\,(r-1)$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{d}{dt} l(x)(t,r) = \frac{r-1}{\sqrt{t}} \le 0\ ;\ r \in [0,1]$$

أي أن الدالة $x(t)$ تملك طول متناقص، أيضاً ومن أجل $t \in (0,1]$ لدينا:

$$\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\frac{1}{2},1} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \odot \int_0^1 (t-s)^{\frac{1}{2}} \odot x(s)\, ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \odot \left(\frac{\pi}{2} t - 2\sqrt{t}, 0, 2\sqrt{t} - \frac{\pi}{2} t \right)$$

ويكون:

$$l\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\frac{1}{2},1} x \right)(t,r) = \frac{2(r-1)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\pi}{2} t - 2\sqrt{t} \right)$$

ومنه نجد:

$$\frac{d}{dt}\left(l\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\frac{1}{2},1} x \right)(t,r) \right) = \frac{2(r-1)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) = \mathrm{H}$$

ونلاحظ أنَّ:

$$\mathrm{H} \le 0\ ;\ t \in \left[4/\pi^2, 1 \right] \quad and \quad \mathrm{H} \ge 0\ ;\ t \in \left(0, 4/\pi^2 \right]$$

أي إنَّ $\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{\frac{1}{2},1} x(t)$ يملك طولاً متزايداً على المجال $\left(0, 4/\pi^2 \right]$ وطولاً متناقصاً على المجال $\left[4/\pi^2, 1 \right]$.

مبرهنة (4). [1،3].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية ولنفرض أنها مستمرة مطلقاً وقابلة للاشتقاق بمفهوم هوكوهارا المعمم من النوع الأول أو من النوع الثاني، و $0<\alpha<1$ عندئذ فإن:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t)=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\odot\left[\left(t^{p}-t_{0}^{p}\right)^{-\alpha} x(t_{0})\oplus\int_{t_{0}}^{t}\left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha}\odot\, x'_{gH}(s)\,ds\right]$$

$$=\frac{p^{\alpha}\left(t^{p}-t_{0}^{p}\right)^{-\alpha}\odot\, x(t_{0})}{\Gamma(1-\alpha)}\oplus\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\frac{d}{ds}x\right)(t)$$

حيث إنَّ $t\in[t_{0},T]$ وإنَّ $\frac{d}{ds}x=x'_{gH}(s)$.

البرهان.

سنقوم بإثبات صحة العلاقة عن طريق مجموعة القطع من المستوى r لمشتق ريمان ليوفيل الكسري الضبابي المعمم.

أولاً. في حال كانت الدالة $x(t)$ قابلة للاشتقاق باستخدام فرق هوكوهارا المعمم من النوع الأول $(i-gH)$ عندئذ يكون لدينا:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{RL}_{i-gH}}^{\alpha,p}\, x(t,r)\\&=\left[\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\, x_{1}(t,r),\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}}^{\alpha,p}\, x_{2}(t,r)\right]\\&=\left[t^{1-p}\,\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, x_{1}(t,r)\right),\, t^{1-p}\,\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, x_{2}(t,r)\right)\right]\end{aligned}\qquad(1)$$

لكن:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, x_{1}(t,r)\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_{0}}^{t}s^{p-1}\left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha}x_{1}(s,r)\,ds\right)$$

نكامل بالتجزئة فنحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, x_1(t,r)\right)$$
$$=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left(\frac{x_1(t_0,r)}{p(1-\alpha)\left(t^{p}-t_0{}^{p}\right)^{\alpha-1}}+\int_{t_0}^{t}\frac{\left(t^{p}-s^{p}\right)^{1-\alpha}}{p\,(1-\alpha)}\frac{d}{ds}x_1(s,r)\,ds\right)$$
$$=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(x_1(t_0,r)\,t^{p-1}\left(t^{p}-t_0^{p}\right)^{-\alpha}+\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}\frac{\left(t^{p}-s^{p}\right)^{1-\alpha}}{p\,(1-\alpha)}\frac{d}{ds}x_1(s,r)\,ds\right)$$

وبتطبيق دستور اشتقاق تكامل حدوده تابعة لوسيط نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, x_1(t,r)\right)$$
$$=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(t^{p-1}x_1(t_0,r)\left(t^{p}-t_0{}^{p}\right)^{-\alpha}+\int_{t_0}^{t}t^{p-1}\left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha}\frac{d}{ds}x_1(s,r)\,ds\right)$$
$$=\frac{p^{\alpha}\,t^{p-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(x_1(t_0,r)\left(t^{p}-t_0{}^{p}\right)^{-\alpha}+\int_{t_0}^{t}s^{p-1}\left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha}s^{1-p}\frac{d}{ds}x_1(s,r)\,ds\right)$$
$$=t^{p-1}\left(\frac{p^{\alpha}x_1(t_0,r)\left(t^{p}-t_0{}^{p}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\frac{d}{ds}x_1\right)(t,r)\right)$$

وبالمثل يكون:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, x_2(t,r)\right)$$
$$=t^{p-1}\left(\frac{p^{\alpha}x_2(t_0,r)\left(t^{p}-t_0{}^{p}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\, s^{1-p}\frac{d}{ds}x_2\right)(t,r)\right)$$

وبالتعويض في العلاقة (1) نحصل على:

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{RL}_{i-gH}}^{\alpha,p}\, x(t,r)$$
$$=\left[t^{1-p}\,\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\,x_1(t,r)\right),\, t^{1-p}\,\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\,x_2(t,r)\right)\right]$$
$$=\begin{bmatrix}\dfrac{p^{\alpha}x_1(t_0,r)\left(t^p-t_0{}^p\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\,s^{1-p}\,\dfrac{d}{ds}x_1\right)(t,r)\,,\\ \dfrac{p^{\alpha}x_2(t_0,r)\left(t^p-t_0{}^p\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\,s^{1-p}\,\dfrac{d}{ds}x_2\right)(t,r)\end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{RL}_{i-gH}}^{\alpha,p}\, x(t,r)=\left[\frac{p^{\alpha}x_1(t_0,r)\left(t^p-t_0{}^p\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\,,\,\frac{p^{\alpha}x_2(t_0,r)\left(t^p-t_0{}^p\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right]$$
$$+\left[\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\,s^{1-p}\,\frac{d}{ds}x_1\right)(t,r),\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}}^{(1-\alpha),p}\,s^{1-p}\,\frac{d}{ds}x_2\right)(t,r)\right]$$

وفي حال كانت الدالة $x(t)$ قابلة للاشتقاق باستخدام فرق هوكوهارا المعمم من النوع الثاني $(ii-gH)$ يكون لدينا باتباع خطوات مماثلة لما سبق:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\boldsymbol{RL}_{ii-gH}}\, x(t,r)=\left[t^{1-p}\,\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x_2(t,r)\right),\, t^{1-p}\,\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,x_1(t,r)\right)\right] \qquad (2)$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{p^{\alpha}x_2(t_0,r)\left(t^{p}-{t_0}^{p}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,s^{1-p}\,\dfrac{d}{ds}x_2\right)(t,r)\,, \\ \dfrac{p^{\alpha}x_1(t_0,r)\left(t^{p}-{t_0}^{p}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,s^{1-p}\,\dfrac{d}{ds}x_1\right)(t,r)\end{bmatrix}$$

$$=\left[\frac{p^{\alpha}x_2(t_0,r)\left(t^{p}-{t_0}^{p}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\,,\,\frac{p^{\alpha}x_1(t_0,r)\left(t^{p}-{t_0}^{p}\right)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right]$$

$$+\left[\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,s^{1-p}\,\frac{d}{ds}x_2\right)(t,r),\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,s^{1-p}\,\frac{d}{ds}x_1\right)(t,r)\right]$$

من (1) و (2) وبالعودة للشكل الضبابي ينتج أن:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{RL}_{gH}}\, x(t)=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\odot\left[\left(t^{p}-t_0^{p}\right)^{-\alpha}x(t_0)\oplus\int_{t_0}^{t}\left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha}\odot\, x'_{gH}(s)\,ds\right]$$

$$=\frac{p^{\alpha}\left(t^{p}-t_0^{p}\right)^{-\alpha}\odot\, x(t_0)}{\Gamma(1-\alpha)}\oplus\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}}\,s^{1-p}\,\frac{d}{ds}x\right)(t)$$

قمنا بتقديم إثبات هذه المبرهنة بعد ملاحظتنا استخدامها من قبل الباحثين في إثبات صيغة مشتق كابوتو كاتاغامبولا الكسري الضبابي كما في المراجع [1،3،5] دون وجود إثبات صريح عليها في المراجع.

مبرهنة. (5). [1،3].

لتكن $x(t)$ دالة ضبابية ولنفرض أنها مستمرة مطلقاً وذات طول مطرد، عندئذ فإن:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}x(t)=\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{(1-\alpha),p}\,s^{1-p}\frac{d}{ds}x\right)(t)$$

$$=\frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\odot\int_{t_0}^{t}\left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha}\odot x'_{gH}(s)\,ds\ ;\ t\in[t_0,T]\,,\ 0<\alpha<1$$

البرهان.

حسب تعريف مشتق كابوتو-كاتاغامبولا الكسري الضبابي لدينا:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\,x(t)=\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\left(x(t)\ominus_{gH}x(t_0)\right)=\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\,x(t)\ominus_{gH}\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\,x(t_0)$$

$$=\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\,x(t)\ominus_{gH}\frac{\left(t^{p}-t_0{}^{p}\right)^{-\alpha}p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\odot x(t_0)$$

وحسب مبرهنة (4) من هذه الفقرة لدينا:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{\alpha,p}\,x(t)=\frac{p^{\alpha}\left(t^{p}-t_0^{p}\right)^{-\alpha}\odot x(t_0)}{\Gamma(1-\alpha)}\oplus\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{(1-\alpha),p}\,s^{1-p}\frac{d}{ds}x\right)(t)$$

فنجد أنَّ:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\,x(t)=\frac{p^{\alpha}\left(t^{p}-t_0^{p}\right)^{-\alpha}\odot x(t_0)}{\Gamma(1-\alpha)}\oplus\left(\boldsymbol{I}_{\mathbf{RL}_{gH}}^{(1-\alpha),p}\,s^{1-p}\frac{d}{ds}x\right)(t)$$

$$\ominus_{gH}\frac{\left(t^{p}-t_0{}^{p}\right)^{-\alpha}p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\odot x(t_0)$$

وبالتالي:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{CK}_{gH}}\, x(t)=\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}_{gH}}\, s^{1-p}\,\frac{d}{ds}\,x \right)(t) \oplus \frac{p^{\alpha}\left(t^{p}-t_0^{p}\right)^{-\alpha} \square\ x(t_0)}{\Gamma(1-\alpha)}$$

$$!_{\ gH}\ \frac{\left(t^{p}-{t_0}^{p}\right)^{-\alpha} p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square\ x(t_0)$$

وحسب 2 من مبرهنة. (1) من الفقرة 1.1 نجد أنَّ:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{CK}_{gH}}\, x(t)=\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}_{gH}}\, s^{1-p}\,\frac{d}{ds}\,x \right)(t) \oplus 0=\left(\boldsymbol{I}^{(1-\alpha),p}_{\mathbf{RL}_{gH}}\, s^{1-p}\,\frac{d}{ds}\,x \right)(t)$$

تجدر الإشارة إلى أنه قد تمَّ إثبات صحة هذه المبرهنة بطريقة أوضح مما هي مذكورة في المراجع العلمية التي قمنا بالاطلاع عليها.

مبرهنة. (6).

إذا كانت $x(t)=\left(z_1(t),z_2(t),z_3(t)\right)$ دالة ضبابية معرفة على $[a,b]$ قيمها أعداد حقيقية ضبابية مثلثية، عندئذٍ القضايا الآتية صحيحة:

1- إذا كانت $x(t)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الأول $(i-gH)$ وذلك لأجل كل $t\in[a,b]$ عندئذٍ يكون:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{CK}_{gH}}\, x(t)=\left(\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{CK}}\, z_1(t),\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{CK}}\, z_2(t),\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{CK}}\, z_3(t)\right)$$

2- إذا كانت $x(t)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الثاني $(ii-gH)$ وذلك لأجل كل $t\in[a,b]$ عندئذٍ يكون:

$$\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{CK}_{gH}}\, x(t)=\left(\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{CK}}\, z_3(t),\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{CK}}\, z_2(t),\boldsymbol{D}^{\alpha,p}_{\mathbf{CK}}\, z_1(t)\right)$$

الاثبات:

حسب **مبرهنة. (5)** نجد أنَّ:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t) = \frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \int_{t_0}^{t} \left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha} \square\ x'_{gH}(s)\,ds \ ;\ 0<\alpha<1$$

في حال كانت $x(s)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الأول $(i-gH)$ من أجل $t\in[a,b]$ عندئذٍ بناءً على مبرهنة سابقة يكون:

$$x'_{i-gH}(s)=\left(z'_1(s),z'_2(s),z'_3(s)\right)$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t) = \frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \int_{t_0}^{t} \left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha} \square \left(z'_1(s),z'_2(s),z'_3(s)\right)ds$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha} \square\ z'_1(s)\,ds \ , \\ \dfrac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha} \square\ z'_2(s)\,ds \ , \\ \dfrac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha} \square\ z'_3(s)\,ds \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t)=\left(\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_1(t),\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_2(t),\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_3(t)\right)$$

وفي حال كانت $x(s)$ قابلة للاشتقاق بمفهوم فرق هوكوهارا المعمم من النوع الثاني $(ii-gH)$ من أجل $t\in[a,b]$ عندئذٍ بناءً على مبرهنة سابقة يكون:

$$x'_{i-gH}(s)=\left(z'_3(s),z'_2(s),z'_1(s)\right)$$

وبالتعويض في العلاقة السابقة نجد:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t) = \frac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \int_{t_0}^{t} \left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha} \square \left(z'_3(s),z'_2(s),z'_1(s)\right)ds$$

$$=\begin{pmatrix} \dfrac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \int_{t_0}^{t} \left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha} \square\ z_3'(s)\,ds\ , \\ \dfrac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \int_{t_0}^{t} \left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha} \square\ z_2'(s)\,ds\ , \\ \dfrac{p^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \square \int_{t_0}^{t} \left(t^{p}-s^{p}\right)^{-\alpha} \square\ z_1'(s)\,ds \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}_{gH}}^{\alpha,p}\, x(t)=\left(\boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_3(t), \boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_2(t), \boldsymbol{D}_{\mathbf{CK}}^{\alpha,p}\, z_1(t)\right)$$

ملاحظة. (2).

تم إثبات هذه المبرهنة لأجل مشتق كابوتو الكسري الضبابي (عندما $p=1$ في صيغة مشتق كابوتو كاتاغامبولا) وذلك في المرجع [6].

المراجع العلمية

[1] ALLAHVIRANLOO. T., 2021- Fuzzy Fractional differential operators and equations. Springer, 293p.

[2] GHAFFARI. M., ALLAHVIRANLOO. T., ABBASBANDY. S., AZHINI. M., 2021. On the fuzzy solutions of time-fractional problems. IJFS. Vol. 18, no. 3, pp. 51-66.

[3] HOA. N. V., et al., 2018- Fuzzy fractional differential equations under Caputo-Katugampola fractional derivative approach, Fuzzy Sets Syst., ScienceDirect, Vol.375, pp. 70-90.

[4] DE BARROS. L., BASSANEZI. R., LODWICK. W., 2017- A first course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics. Springer, 299p.

[5] LUPULESCU. V., 2016- Solving interval-valued fractional initial value problems under Caputo gH-fractional differentiability, Fuzzy Sets Syst., ScienceDirect, Vol. 309, pp.1-34.

[6] HOA. N. V., 2014- Fuzzy fractional functional differential equations under Caputo gH-differentiability, Communications in nonlinear Science and Numerical Simulation, ScienceDirect, Vol. 22, pp. 1134-1157.

[7] AGARWAL. R., LAKSHMIKANTHAM. V., and NIETO. J., 2010- On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty. Nonlinear Anal., ELSEVIER, Vol. 72, pp. 2859-2862.

[8] BEDE. B., GNANA BHASKAR. T., LAKSHMIKANTHAM. V., 2007_Perspectives of Fuzzy Initial Value problems, Communications in Applied Analysis, no.11, 339-358.

[9]. ZADEH. L.A., 1965 – Fuzzy Sets, INFORMATION AND CONTROL, **8**, 338-353.

C_2- مـــــــــــودولات و D_2- مـــــــــــودولات

حمزة حاكمي[1] بشار الحسين[2]

قســم الـريــاضيــات كليــة العـلوم جـامعــة دمشــق

الملخص

نعلم أن معرفة طبيعة أو خواص حلقة الإندومورفيزمات $S = End_R(M)$ لمودول ما M لها تأثير كبير على المودول M، وفي بعض الأحيان، خواص الحلقة S تعطينا فكرة كاملة أو شبه كاملة عن المودول M نفسه.

في هذه المقالة، درسنا مفهوم D_2-مودول وحلقة الإندومورفيزمات له. حيث نقول عن المودول M إنه D_2-مودول إذا كان لأجل أي مودولين جزئيين A, B للمودول M يحققان أن $M/B \cong A$ وأن A حد مباشر للمودول M، ينتج أن B حد مباشر للمودول M. وقد أثبتنا أن حلقة الإندومورفيزمات $S = End_R(M)$ لمودول ما تكون منتظمة عندما وفقط عندما يكون المودول M هو D_2-مودول ويحقق أنه لأجل كل عنصر $f \in S$ فإن $Im(f)$ حد مباشر للمودول M.

فضلاً عن ذلك، درسنا مفهوم C_2-مودول وحلقة الإندومورفيزمات له. حيث نقول عن المودول M إنه C_2-مودول، إذا كان لأجل أي مودولين جزئيين A, B من المودول M وكان $A \cong B$ وأن A حد مباشر للمودول M، ينتج أن B حد مباشر

[1] أستاذ في قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة دمشق.

[2] طالب دراسات عليا قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة دمشق.

للمودول M. وقد أثبتنا أن، حلقة الإندومورفيزمات $S = End_R(M)$ لمودول ما M تكون منتظمة عندما وفقط عندما يكون المودول M هو C_2-مودول ويحقق أنه لأجل كل عنصر $f \in S$ فإن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M.

أخيراً وجدنا أن المودول M يكون C_2- مودول و D_2-مودول في آن معاً عندما وفقط عندما يتحقق الشرط الآتي: لأجل كل عنصر $f \in S$ فإن $Im(f)$ يكون حداً مباشراً للمودول M إذا وفقط إذا كان $Ker(f)$ حداً مباشراً للمودول M.

الكلمات المفتاحية: الحلقة المنتظمة وشبه المنتظمة، D_2-مودول، C_2-مودول، المودولات الإسقاطية (الأفقية) المباشرة.

التصنيف الرياضياتي العالمي للعام (2020): 16P40، 16P20، 16D40، 16D50.

C_2 –Modules and D_2 –Modules

Hamza Hakmi[1] **Bashar Alhussein**[2]

Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University

Abstract

We have known that basic quality or the properties of the endomorphism $S = End_R(M)$ for some module M has a big effect of the module M. In some times the properties of ring S give a complete or semi-complete idea of the same module M.

In this paper we study the concept of D_2 –module and its endomorphism ring. Where the module M is said to be D_2 –module, if for every two sub-modules A, B of M such that $M/B \cong A$ and A is a direct summand of M, then B is a direct summand of M.

We have proved that the endomorphism ring S of some module M, is regular if and only if the module M is D_2 –module and for every element $f \in S$, $Im(f)$ is a direct summand of M.

In addition to that, we study the concept of C_2 –module and its endomorphism ring. Where the module M is said to be C_2 –module, if for every two submodules A, B of M such that

$B \cong A$ and A is a direct summand of M, then B is a direct summand of M.

We have proved that the endomorphism ring S of some module M, is regular if and only if the module M is C_2-module and for every element $f \in S$, $Ker(f)$ is a direct summand of M.

Finally, we found that the module M is D_2-module and C_2-module at the same time if and only if the module satisfy the following condition: for every element $f \in S$, $Ker(f)$ is a direct summand of M if and only if $Im(f)$ is a direct summand of M.

Key Words: Regular and semi-regular ring, D_2-Module and C_2-Module, Direct Projective (Injective) module.

2020 Mathematics Subject Classification: 16P40 ،16P20 ،16D40 ، 16D50.

[1] Proof. Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University.

[2] Graduate Student. Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University.

المقـــدمــــــة.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. لنفرض أن A, B مودولين جزئيين في M، وأن A حد مباشر للمودول M.

نعلم أنه إذا كان $f : M \to M$ تماثلاً للمودول M فإن $f(A)$ هو حد مباشر للمودول M. ولكن إذا كان $g : A \to B$ تماثل مودولات، فإنه ليس بالضرورة أن يكون $g(A) = B$ حداً مباشراً للمودول M.

لأجل ذلك تم إدخال مفهوم C_2-مودول، وهو المودول M الذي يحقق الشرط الآتي: إذا كان A, B مودولين جزئيين في M وكان $A \cong B$ وأن A حد مباشر للمودول M، ينتج أن B حد مباشر للمودول M.

من جهة أخرى، لدينا حسب مبرهنة التماثل الأولى، أنه إذا كان $f : M \to M$ تشاكلاً للمودول M فإن $M/Ker(f) \cong Im(f)$، [4].

وهنا نعلم أنه إذا كان المودول الجزئي $Im(f)$ حداً مباشراً للمودول M، فإنه ليس بالضرورة أن يكون المودول الجزئي $Ker(f)$ حداً مباشراً للمودول M. إن هذه القضية قد تم تعميمها على النحو الآتي:

إذا كان A, B مودولين جزئيين في مودول M وكان $M/B \cong A$ وأن A حد مباشر للمودول M، فإن B ليس بالضرورة أن يكون حداً مباشراً للمودول M.

لأجل ذلك تم إدخال مفهوم D_2-مودول، وهو المودول M الذي يحقق الشرط الآتي: إذا كان A, B مودولين جزئيين في M وكان $M/B \cong A$ وأن A حد مباشر للمودول M، ينتج أن B حد مباشر للمودول M.

من الجدير ذكره هنا، أن مفهوم الـD_2-مودولات يعد مفهوماً ثنوياً لمفهوم الـC_2-مودولات.

في هذه المقالة، درسنا جانباً من مفهومي الـ D_2-مودولات والـC_2-مودولات والشروط المكافئة لهذين المفهومين، فضلاً عن دراستنا لحلقة الإندومورفيزمات لهذين الصفين من المودولات، وعلاقة هذه الحلقة بمفهوم الانتظام في الحلقات.

حيث تم إثبات أن، حلقة الإندومورفيزمات $S=End_R(M)$ لمودول ما M تكون منتظمة عندما وفقط عندما يكون المودول M هو C_2-مودول ويحقق أنه لأجل كل عنصر $f\in S$ فإن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M. فضلاً عن ذلك، وجدنا أن حلقة الإندومورفيزمات $S=End_R(M)$ لمودول ما تكون منتظمة عندما وفقط عندما يكون المودول M هو D_2-مودول ويحقق أنه لأجل كل عنصر $f\in S$ فإن $Im(f)$ حد مباشر للمودول M. إضافة إلى ذلك، تم إثبات أن المودول M هو C_2- مودول و D_2-مودول في آن معاً عندما وفقط عندما يتحقق الشرط الآتي:
لأجل كل عنصر $f\in S$ فإن $Im(f)$ يكون حداً مباشراً للمودول M إذا وفقط إذا كان $Ker(f)$ حداً مباشراً للمودول M.

1. تعـــــاريـــــف ومفـــاهيـــم أســـاسيـــــة.

تعريـــف 1-1. لتكن R حلقة، نقول عن العنصر $e\in R$ إنه جامد إذا كان $e^2=e$، [1].

تعريـــف 1-2. لتكن R حلقة، نقول عن العنصر $a\in R$ إنه منتظم إذا وجد عنصر $b\in R$ يحقق أن $a=aba$، ونقول عن الحلقة R إنها منتظمة إذا كانت جميع عناصرها منتظمة، [5].

تعريـــف 1-3. لتكن R حلقة، نقول عن العنصر المغاير للصفر $a\in R$ إنه شبه منتظم إذا وجد عنصر $b\in R$ يحقق أن $b=bab$، ونقول عن الحلقة R إنها شبه منتظمة إذا كانت جميع عناصرها المغايرة للصفر شبه منتظمة، [3].

مبرهنـــة 1-4 [6].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وليكن $f \in S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - العنصر $f \in S$ هو عنصر منتظم.

2 - كل من $Im(f)$ و $Ker(f)$ هو حد مباشر للمودول M .

2. المـــودولات مـــن النـــوع D_2 .

تعريـــــف [7].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R . نقول عن المودول M إنه D_2-مودول إذا كان لأجل أي مودولين جزئيين A, B من المودول M يحققان $M/B \cong A$ وكان A حداً مباشراً في M ينتج أن B حد مباشر في M .

تمهيديـــــة 1-2.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R . إذا كان المودول M هو D_2-مودول، عندئذ أي حد مباشر للمودول M هو أيضاً D_2-مودول.

البرهـــــان.

لنفرض أن المودول M هو D_2-مودول وليكن N حداً مباشراً في M، عندئذ $M = N \oplus K$ حيث K مودول جزئي في M. لنفرض أن A حد مباشر للمودول N ، عندئذ $N = A \oplus A'$ حيث A' مودول جزئي في N ، وليكن B مودولاً جزئياً آخر في N بحيث إن $N/B \cong A$. لما كان:

$$M = N \oplus K = A \oplus A' \oplus K$$

نجد أن A حد مباشر للمودول M . فضلاً عن ذلك، لما كان $B \subseteq N \subseteq M$ نجد أن B مودول جزئي في M ، ولما كان $N/B \cong A$ ومنه فإن:

$$A \cong N/B \cong (N+K)/(B+K) = M/(B+K)$$

ولما كان M هو D_2-مودول نجد أن المودول الجزئي $B+K$ هو حد مباشر في M ومنه فإن $M=(B+K)\oplus K'$ حيث K' مودول جزئي في M. ولما كان $B\subseteq N$ نجد أن:

$$B\cap K \subseteq N\cap K = 0$$

أي إن $B\cap K=0$، ومنه فإن $M=B\oplus(K\oplus K')$. ولما كان $B\subseteq N$ نجد أن:

$$N = B\oplus(N\cap(K\oplus K'))$$

ومنه فإن B حد مباشر في N وهذا يبين أن N هو D_2-مودول.

مبرهنـــــة 2-2.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1 - المودول M هو D_2-مودول.

2 - لأجل أي حدين مباشرين A,B للمودول M فإن أي تشاكل مودولات غامر $f:A\to B$ ينشطر.

3 - لأجل أي حد مباشر A للمودول M فإن أي تشاكل مودولات غامر $f:M\to A$ ينشطر.

البرهـــــان.

$(1)\Rightarrow(2)$. لنفرض أن M هو D_2-مودول. وليكن A,B حدين مباشرين للمودول M ولنفرض أن $f:A\to B$ تشاكل مودولات غامر. لنفرض أيضاً أن $\pi:M\to A$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $f\pi:M\to B$ تشاكل مودولات غامر، ومنه فإن $M/Ker(f\pi)\cong B$، ولما كان B حداً مباشراً للمودول M وأن M هو D_2-مودول نجد أن $Ker(f\pi)$ حد مباشر في M. ولما كان A حداً مباشراً للمودول M فإن $M=A\oplus A'$، حيث A' مودول جزئي في M.

لنبرهن على أن $Ker(f\pi)=Ker(f)\oplus A'$.

ليكن $x\in Ker(f\pi)$، عندئذ فإن $x\in M$ وأن $x=a+a'$، حيث $a\in A$ و $a'\in A'$ ومنه نجد أن:

$$f\pi(x)=f\pi(a+a')=f(a)=0$$

ومنه فإن $a\in Ker(f)$ وبالتالي فإن $x=a+a'\in Ker(f)+A'$، أي إن:

$$Ker(f\pi)\subseteq Ker(f)+A'$$

ليكن $y\in Ker(f)+A'$، عندئذ فإن $y\in M$ وأن $y=y_1+y_2$ حيث $y_1\in Ker(f)$ و $y_2\in A'$ ولما كان $Ker(f)\subseteq A$ نجد أن:

$$f\pi(y)=f\pi(y_1+y_2)=f(y_1)=0$$

ومنه فإن $y\in Ker(f\pi)$ وبالتالي يكون $Ker(f)+A'\subseteq Ker(f\pi)$. مما سبق نجد أن:

$$Ker(f\pi)=Ker(f)+A'$$

ولما كان $Ker(f)\cap A'\subseteq Ker(f)\cap A'=0$، نجد أن $Ker(f\pi)=Ker(f)\oplus A'$. ولما كان $Ker(f\pi)$ حداً مباشراً في M نجد أن $Ker(f)$ حد مباشر في M، وهكذا نجد أن التشاكل f ينشطر.

$(2)\Leftarrow(3)$. واضح.

$(3)\Leftarrow(1)$. ليكن A حداً مباشراً للمودول M و B مودولاً جزئياً في M بحيث إن $M/B\cong A$. لنفرض أن $\alpha:M/B\to A$ هذا التشاكل ولنفرض أيضاً أن $\pi:M\to M/B$ تشاكل القانوني الغامر، فنجد أن $\alpha\pi:M\to A$ هو تشاكل مودولات غامر، وحسب الفرض فإن التشاكل $\alpha\pi$ ينشطر وبالتالي فإن $Ker(\alpha\pi)$ حد مباشر في M. لنبرهن على أن $Ker(\alpha\pi)=B$.

ليكن $x\in Ker(\alpha\pi)$، عندئذ فإن $x\in M$ وأن $\alpha\pi(x)=0$ وبالتالي فإن:

$$\alpha\pi(x)=\alpha(x+B)=0$$

ولما كان α تماثلاً نجد أن $x+B=B$ ومنه فإن $x\in B$ وبالتالي فإن $Ker(\alpha\pi)\subseteq B$.

ليكن $b\in B$، عندئذ فإن $b+B=B$ ومنه فإن $\pi(b)=b+B=0$ وأن $\alpha(\pi(b))=\alpha(0)=0$ ومنه نجد أن $b\in Ker(\alpha\pi)$ وبالتالي $B\subseteq Ker(\alpha\pi)$.

مما سبق نجد أن $Ker(\alpha\pi)=B$ وبالتالي فإن B حد مباشر للمودول M ومنه فإن M هو D_2-مودول.

تعريـــــف [2].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. نقول عن المودول M إنه إسقاطي مباشر إذا كان لأجل كل حد مباشر K للمودول M ولأجل كل تشاكل غامر $f:M\to K$ يوجد عنصر $g\in S$ يحقق أن $fg=\pi$ ، حيث $\pi:M\to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر.

مبرهنـــــة 2-3.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - المودول M إسقاطي مباشر.

2 - المودول M هو D_2-مودول.

البرهـــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن المودول M إسقاطي مباشر وليكن A حداً مباشراً في M ولنفرض أيضاً أن B مودول جزئي في M ويحقق $M/B\cong A$.

لنفرض أن $\alpha : M / B \to A$ هذا التشاكل وأن $\pi : M \to A$ التشاكل الإسقاطي الغامر وأن $\lambda : M \to M / B$ التشاكل القانوني الغامر، فنجد أن $\alpha\lambda : M \to A$ هو تشاكل غامر، ولما كان المودول M إسقاطي مباشر فإنه يوجد $\mu \in S$ بحيث إن $(\alpha\lambda)\mu = \pi$. لنبرهن على أن:

$$Ker(\mu\pi) = Ker(\pi)$$

واضح أن $Ker(\pi) \subseteq Ker(\mu\pi)$. ليكن $x \in Ker(\mu\pi)$ عندئذ $x \in M$ وأن $\mu\pi(x) = 0$ ومنه فإن $(\alpha\lambda)\mu\pi(x) = 0$ وبالتالي فإن $\pi^2(x) = \pi(x) = 0$ ، أي إن $x \in Ker(\pi)$ ومنه فإن:

$$Ker(\mu\pi) \subseteq Ker(\pi)$$

وهكذا نجد أن $Ker(\mu\pi) = Ker(\pi)$.ولما كان $(\alpha\lambda)\mu = \pi$ نجد أن $\pi(\alpha\lambda)\mu\pi = \pi$ وبالتالي فإن $(\mu\pi)(\alpha\lambda)(\mu\pi) = \pi\mu$

لنبرهن الآن على أن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda) = Ker(\alpha\lambda)$. واضح أن $Ker(\alpha\lambda) \subseteq Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)$.

ليكن $x \in Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)$ ، عندئذ فإن $(\mu\pi)(\alpha\lambda)(x) = 0$ ومنه فإن $(\alpha\lambda)(\mu\pi)(\alpha\lambda)(x) = 0$ وبالتالي فإن $\pi^2(\alpha\lambda)(x) = 0$ ومنه يكون $\pi(\alpha\lambda)(x) = 0$ ، ولما كان $(\alpha\lambda)(x) \in A$ نجد أن $(\alpha\lambda)(x) = 0$ ومنه فإن $x \in Ker(\alpha\lambda)$ وهكذا نجد أن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda) \subseteq Ker(\alpha\lambda)$ ومنه فإن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda) = Ker(\alpha\lambda)$. لنبرهن على أن $Ker(\alpha\lambda) = B$.

ليكن $y \in Ker(\alpha\lambda)$ ، عندئذ فإن $(\alpha\lambda)(y) = 0$ ومنه فإن $\lambda(y) = 0$ وأن $y + B = B$ ومنه فإن $y \in B$ ، أي إن $Ker(\alpha\lambda) \subseteq B$. ليكن $b \in B$ ، عندئذ فإن $b + B = B$ ومنه يكون $\lambda(b) = B = 0$ ومنه $(\alpha\lambda)(b) = 0$ وبالتالي فإن $b \in Ker(\alpha\lambda)$ ومنه $B \subseteq Ker(\alpha\lambda)$ وهكذا فإن $Ker(\alpha\lambda) = B$. ولما

كان $(\mu\pi)(\alpha\lambda)\in S$ عنصراً جامداً فإن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)$ هو حد مباشر في M وبالتالي فإن $Ker(\alpha\lambda)=B$ حد مباشر في M.

$(2)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن K حد مباشر للمودول M وأن $f:M\to K$ تشاكل مودولات غامر ولنفرض أيضاً أن $\pi:M\to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر. لما كان $M/Ker(f)\cong Im(f)=K$ وأن M هو D_2-مودول فإن $Ker(f)$ حد مباشر في M ومنه فإن التشاكل f منتظم وبالتالي يوجد $g\in S$ بحيث $fgf=f$ وهذا يبين أن $fg\in S$ عنصر جامد ولما كان $fg(x)\in K$ أياً كان $x\in M$ وأن $x=fg(x)+(1-fg)(x)$ نجد أن $\pi(x)=fg(x)$ ومنه فإن $fg=\pi$ وهكذا فإن المودول M إسقاطي مباشر.

3. المـــودولات مـــن النـــــوع C_2.

تعريــــــف [7].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. نقول عن M إنه C_2-مودول إذا كان لأجل أي مودولين جزئيين A,B من المودول M يحققان إن $B\cong A$ وكان A حد مباشر في M ينتج أن B حد مباشر في M.

تمهيديـــــــة 3-1.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. إذا كان M هو C_2-مودول، عندئذ فإن أي حد مباشر للمودول M هو أيضاً C_2-مودول.

البرهـــــــان.

لنفرض أن المودول M هو C_2-مودول وليكن N حداً مباشراً في M، عندئذ $M=N\oplus K$ حيث K مودول جزئي في M. لنفرض أن A حد مباشر

للمودول N ، عندئذ $N = A \oplus A'$ حيث A' مودول جزئي في N ، وليكن B مودولاً جزئياً آخر في N بحيث إن $B \cong A$. لما كان:

$$M = N \oplus K = A \oplus A' \oplus K$$

نجد أن A حد مباشر للمودول M . فضلاً عن ذلك، لما كان $B \subseteq N \subseteq M$ نجد أن B مودول جزئي في M ولما كان $B \cong A$ وأن M هو C_2-مودول نجد أن B حد مباشر في M ومنه فإن $M = B \oplus B'$ حيث B' مودول جزئي في M. ولما كان $B \subseteq N$ نجد أن $N = B \oplus (N \cap B')$ ومنه فإن B حد مباشر في N وهذا يبين أن N هو C_2-مودول.

مبرهنـــــة 3-2.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R . الشروط الآتية متكافئة:

1 - المودول M هو C_2-مودول.

2 - لأجل أي حدين مباشرين A, B للمودول M فإن أي تشاكل مودولات متباين $f : A \to B$ ينشطر.

3 - لأجل أي حد مباشر A للمودول M فإن أي تشاكل مودولات متباين $f : A \to M$ ينشطر.

البرهـــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن M هو C_2-مودول. وليكن A, B حدين مباشرين للمودول M ولنفرض أن $f : A \to B$ تشاكل مودولات متباين. عندئذ فإن التشاكل $f : A \to Im(f)$ هو تماثل، أي إن $A \cong Im(f)$. ولما كان A حداً مباشراً للمودول M وأن M هو C_2-مودول نجد أن $Im(f)$ حد مباشر في M وبالتالي فإن $M = Im(f) \oplus K$. ولما كان $Im(f) \subseteq B$ نجد أن:

$$B = Im(f) \oplus (B \cap K)$$

وهذا يبين أن $Im(f)$ حد مباشر في B وبالتالي فإن التشاكل المتباين f ينشطر.

$(2)\Leftarrow(3)$. واضح.

$(3)\Leftarrow(1)$. ليكن A حداً مباشراً للمودول M و B مودولاً جزئياً في M بحيث إن $A\cong B$. لنفرض أن $\alpha:A\to B$ هذا التشاكل ولنفرض أيضاً أن $\tau:B\to M$ تشاكل الاحتواء القانوني، عندئذ فإن:

$$\tau\alpha:A\to M$$

تشاكل مودولات متباين وحسب الفرض فإن التشاكل $\tau\alpha$ ينشطر وبالتالي فإن $Im(\tau\alpha)$ حد مباشر في M ولما كان:

$$Im(\tau\alpha)=\tau\alpha(A)=\tau(B)=B$$

نجد أن B حد مباشر للمودول M ومنه فإن M هو C_2-مودول.

مبرهنـــــة 3-3.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ لأجل أي عنصر جامد $e\in S$ ولأجل أي عنصر $f\in S$ الشروط الآتية متكافئة:

1 – المودول M هو C_2-مودول.

2 – كل تماثل $\alpha:Im(f)\to Im(e)$ يمكن تمديده إلى تشاكل $M\to M$.

3 – إذا كان $Ker(f)=Ker(e)$ فإن $e\in fS$.

4 – إذا كان $Ker(f)=Ker(e)$ فإن $eS=fS$.

5 – إذا كان $Ker(fe)=Ker(e)$ فإن $Im(fe)$ حد مباشر في M.

البرهـــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن M هو C_2-مودول وأن $\alpha:Im(f)\to Im(e)$ تماثل مودولات، عندئذ فإن $Im(f)$ حد مباشر في M وبالتالي فإن $M=Im(f)\oplus K$ حيث K مودول جزئي في M.

لنفرض أن $\pi : M \to Im(f)$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $\alpha\pi : M \to Im(e)$ تشاكل مودولات غامر وأنه أياً كان $z \in Im(f)$ فإن $\alpha\pi(z) = \alpha(z)$ وهذا يبين أن $\alpha\pi : M \to M$ هو تمديد للتماثل α.

$(2) \Leftarrow (3)$. لنفرض أن $Ker(f) = Ker(e)$، عندئذ فإن العلاقة $\alpha : Im(f) \to Im(e)$ المعرفة بالشكل $\alpha(f(m)) = e(m)$ وذلك أياً كان $m \in M$ هي تشاكل مودولات متباين، لأنه إذا كان $f(m) \in Ker(\alpha)$ فإن $\alpha(f(m)) = 0$ وبالتالي فإن $e(m) = 0$، ومنه فإن:

$$m \in Ker(e) = Ker(f)$$

وبالتالي يكون $f(m) = 0$. وهذا التشاكل غامر أيضاً، لأنه إذا كان $z \in Im(e)$ فإن $z = e(m)$ حيث $m \in M$ وأن $f(m) \in Im(f)$ ويحقق $\alpha(f(m)) = e(m)$ ومنه نجد أن $\alpha : Im(f) \to Im(e)$ تماثل وحسب الفرض فإنه يوجد $g \in S$ تمديد للتماثل α، أي إن:

$$g = \alpha\big|_{Im(f)} : Im(f) \to M$$

ومنه نجد أنه أياً كان $m \in M$ فإن:

$$e(m) = \alpha(f(m)) = gf(m)$$

ومنه يكون $e = gf \in Sf$.

$(3) \Leftarrow (4)$. لنفرض أن $Ker(f) = Ker(e)$، عندئذ حسب الفرض فإن $e \in Sf$ومنه فإن $Se \subseteq Sf$.

من جهة أخرى، لما كان:

$$Ker(f) = Ker(e) = Im(1_M - e)$$

نجد أن $f(1_M - e) = 0$ ومنه فإن $f = fe \in Se$ وبالتالي فإن $Sf \subseteq Se$ وهكذا نجد أن $Se = Sf$.

$(4)\Leftarrow(5)$. لنفرض أن $Ker(fe)=Ker(e)$ ، عندئذ حسب الفرض فإن $Sfe=Se$ ومنه يوجد عنصر $\lambda\in S$ تحقق إن $e=\lambda fe$ وأن $e=e\lambda fe$ ومنه يكون $e\lambda=(e\lambda)f(e\lambda)$. لنضع $g=fe\lambda$ فنجد أن $g\in S$ عنصر جامد وأن:

$$Im(g)=Im(fe\lambda)\subseteq Im(fe)$$

كما أن:

$$Im(fe)=Im(fee)=Im(fe\lambda fe)\subseteq Im(fe\lambda)=Im(g)$$

ومنه فإن $Im(g)=Im(fe)$ وبالتالي فإن $Im(fe)$ حد مباشر في M.

$(5)\Leftarrow(1)$. ليكن A حداً مباشراً للمودول M وأن B مودول جزئي في M بحيث $A\cong B$ ولنفرض أن $\alpha:A\to B$ هذا التشاكل. لما كان A حداً مباشراً في M فإنه يوجد عنصر جامد $g\in S$ بحيث إن $A=Im(g)$ ومنه فإن $\alpha g:M\to B$ تشاكل مودولات وأن:

$$Ker(\alpha g)=g^{-1}(Ker(\alpha))=g^{-1}(0)=Ker(g)$$

وبحسب الفرض فإن $Im(\alpha g)$ حد مباشر في M ولما كان:

$$Im(\alpha g)=\alpha g(M)=\alpha(A)=B$$

نجد أن B حد مباشر في M ومنه فإن المودول M هو C_2-مودول.

تعريــــف [2].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. نقول عن المودول M إنه أفقي مباشر إذا كان لأجل كل حد مباشر K للمودول M ولأجل كل تشاكل متباين $f:K\to M$ يوجد عنصر $g\in S$ يحقق أن $gf=\tau$ ، حيث $\tau:K\to M$ تشاكل الاحتواء القانوني.

مبرهنـــــة 3-4.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ لأجل أي عنصر جامد $e \in S$ ولأجل أي عنصر $f \in S$ الشروط الآتية متكافئة:

1 - المودول M هو C_2-مودول.

2 - إذا كان $f \in eS$ وأن $e \in \ell_S(Ker(f))$ فإن $fS = eS$.

3 - إذا كان $Ker(f) = Ker(e)$ فإن $e \in fS$.

البرهـــــان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن M هو C_2-مودول وأن $f \in eS$ ولنفرض أيضاً أن $e \in \ell_S(Ker(f))$، عندئذ فإن $e(Ker(f)) = 0$ ومنه فإن $Ker(f) \subseteq Ker(e)$. ولما كان $f \in Se$ فإنه يوجد $g \in S$ بحيث إن $f = ge$ وهذا يبين أن $Ker(e) \subseteq Ker(f)$ ومنه نجد أن $Ker(f) = Ker(e)$ وبحسب المبرهنة (3-3) نجد أن $Sf = Se$.

$(2) \Leftarrow (3)$. لنفرض أن $Ker(f) = Ker(e)$، عندئذ فإن $Ker(f) = Ker(e) = Im(1-e)$ ومنه فإن $f(1-e) = 0$ وبالتالي يكون $f = fe \in Se$.

من جهة أخرى، لما كان $Ker(f) = Ker(e)$ فإن $e(Ker(f)) = 0$ ومنه فإن $e \in \ell_S(Ker(f))$ وبالتالي نجد أن $Se \subseteq \ell_S(Ker(f))$.

ليكن $\lambda \in \ell_S(Ker(f))$، عندئذ فإن $\lambda(Ker(f)) = 0$ ومنه نجد أن:

$$\lambda(Im(1-e)) = Im(\lambda(1-e)) = \lambda(Ker(f)) = 0$$

ومنه فإن $\lambda(1-e) = 0$، أي إن $\lambda = \lambda e \in Se$ ومنه يكون $\ell_S(Ker(f)) \subseteq Se$ وهكذا نجد أن:

$$\ell_S(Ker(f)) = Se = Sf$$

$(3)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن A حد مباشر للمودول M وأن B مودول جزئي في M بحيث إن $A\cong B$، لنفرض أن هذا التماثل هو $\alpha:A\to B$. لما كان A حداً مباشراً في M فإنه يوجد عنصر جامد $g\in S$ بحيث إن $Im(g)=A$ ومنه نجد أن $\alpha g:M\to B$ تشاكل مودولات وأن:

$$Ker(\alpha g)=g^{-1}(Ker(\alpha))=g^{-1}(0)=Ker(g)$$

وحسب الفرض نجد أن $\ell_S(Ker(\alpha g))=S\alpha g$. ولما كان $Ker(\alpha g)=Ker(g)$ نجد أن:

$$g(Ker(\alpha g))=0$$

ومنه فإن $g\in\ell_S(Ker(\alpha g))=S\alpha g$ وبالتالي يوجد $\lambda\in S$ بحيث إن $g=\lambda\alpha g$ وإن $g=g\lambda\alpha g$ ومنه يكون $g\lambda=(g\lambda)\alpha(g\lambda)$. لنضع $\mu=\alpha g\lambda$ فنجد أن $\mu\in S$ عنصر جامد وبالتالي فإن $Im(\mu)$ حد مباشر في M. فضلاً عن ذلك، إن:

$$Im(\mu)=Im(\alpha g\lambda)\subseteq Im(\alpha g)=Im(\alpha g\lambda\alpha g)\subseteq Im(\alpha g\lambda)=Im(\mu)$$

ومنه فإن:

$$Im(\mu)=Im(\alpha g)=\alpha g(M)=\alpha(A)=B$$

وهذا يبين أن B حد مباشر للمودول M ومنه فإن المودول M هو C_2-مودول.

مبرهنـــــة 3-5.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - المودول M أفقي مباشر.

2 - المودول M هو C_2-مودول.

البرهـــــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن المودول M أفقي مباشر وليكن A,B مودولين جزئيين في M بحيث إن $A\cong B$ وأن A حد مباشر في M ولنفرض أن $\alpha:A\to B$ هو هذا التماثل وأن $\tau_A:A\to M$ و $\tau_B:B\to M$ تشاكلي الاحتواء القانونيين، عندئذ فإن $\tau_B\alpha:A\to M$ هو تشاكل مودولات متباين ولما كان المودول M أفقي مباشر فإنه يوجد $\lambda\in S$ بحيث إن $\lambda(\tau_B\alpha)=\tau_A$.

لنفرض أن $\pi:M\to A$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ يكون $\lambda(\tau_B\alpha)\pi=\tau_A\pi=\pi$ وبالتالي فإن $(\pi\lambda)(\tau_B\alpha)\pi=\pi^2=\pi$ وهذا يبين أن $Im(\pi\lambda)=Im(\pi)=A$، لأن:

$$Im(\pi)=Im(\pi\lambda)(\tau_B\alpha)\pi\subseteq Im(\pi\lambda)\subseteq Im(\pi)$$

فضلاً عن ذلك، إن $(\pi\lambda)(\tau_B\alpha)(\pi\lambda)=\pi\lambda$ وهذا يبين أن $(\tau_B\alpha)(\pi\lambda)\in S$ عنصر جامد ومنه فإن $Im(\tau_B\alpha)(\pi\lambda)$ حد مباشر في M وأن:

$$Im(\tau_B\alpha)(\pi\lambda)=(\tau_B\alpha)(\pi\lambda)(M)=(\tau_B\alpha)(A)=B$$

ومنه فإن B حد مباشر في M.

$(2)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن K حد مباشر للمودول M وأن $\alpha:K\to M$ تشاكل مودولات متباين، عندئذ فإن $\alpha:K\to\alpha(K)$ تماثل، أي إن $K\cong\alpha(K)$ ولما كان M هو C_2-مودول وأن K حد مباشر للمودول M نجد أن $\alpha(K)$ حد مباشر للمودول M ومنه فإن $M=\alpha(K)\oplus N$. لنفرض أن $\pi:M\to\alpha(K)$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $\pi(M)=\alpha(K)$ ومنه نجد أن:

$$\pi(M)=\pi(\pi(M))=\pi(\alpha(K))$$

ولما كان لأجل كل $k\in K$ فإن $\alpha(k)\in\alpha(K)=\pi(M)$ نجد أن $\pi(\alpha(k))=\alpha(k)$ وهذا يبين لنا أن $\pi\alpha=\alpha$ ولما كان $\alpha:K\to\alpha(K)$ تماثل

نجد أن $\alpha^{-1}\pi\alpha=\tau$ حيث $\tau:K\to M$ تشاكل الاحتواء القانوني. لنفرض أن $f=\alpha^{-1}\pi$ فنجد أن $f\in S$ وأن $f\alpha=\tau$ وهذا يبين أن المودول M أفقي مباشر.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. لنأخذ المجموعتين الآتيتين:

$$I(M)=\{\ f:f\in S;Im(f)\ \text{is direct sumanndof}\ M\ \}$$

$$L(M)=\{\ f:f\in S;Ker(f)\ \text{is direct sumanndof}\ M\ \}$$

إن كل مجموعة من المجموعتين $I(M)$ و $L(M)$ هي مجموعة جزئية وغير خالية من S.

مبرهنـــــة 3-6.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - المودول M هو D_2-مودول و C_2-مودول.

2 - $I(M)=L(M)$.

البرهـــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن المودول M هو D_2-مودول و C_2-مودول. ليكن $f\in I(M)$، عندئذ فإن $f\in S$ وأن المودول الجزئي $Im(f)$ حد مباشر في M، لما كان $M/Ker(f)\cong Im(f)$ وأن المودول M هو D_2-مودول نجد أن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M، ومنه فإن $f\in L(M)$، وهكذا نجد أن $I(M)\subseteq L(M)$.

ليكن $g\in L(M)$، عندئذ فإن $g\in S$ وأن $Ker(g)$ حد مباشر للمودول M، وبالتالي يوجد مودول جزئي B في M بحيث إن $M=Ker(g)\oplus B$. لنفرض أن $\pi:M\to B$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $Im(\pi)=B$، ومنه فإن:

$$Im(\pi)=B\cong M/Ker(g)\cong Im(g)$$

ولما كان المودول M هو C_2-مودول وأن $Im(\pi)=B$ حد مباشر للمودول M نجد أن $Im(g)$ حد مباشر للمودول M ومنه فإن $g\in I(M)$ ، وبالتالي يكون $L(M)\subseteq I(M)$. مما سبق نجد أن:

$$I(M)=L(M)$$

$(2)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن $I(M)=L(M)$ ، ولنبرهن أولاً على أن المودول M هو D_2-مودول.

ليكن A حداً مباشراً للمودول M وأن $f:M\to A$ تشاكلاً مودولياً غامراً، عندئذ فإن $f\in S$ وأن $Im(f)=A$ حد مباشر للمودول M ومنه فإن $f\in I(M)=L(M)$ وبالتالي فإن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M وهذا يبين أن التشاكل f ينشطر، وبحسب المبرهنة (2−2) نجد أن المودول M هو D_2-مودول.

لنبرهن الآن على أن المودول M هو C_2-مودول.

ليكن B حداً مباشراً للمودول M وأن $g:B\to M$ تشاكلاً مودولياً متبايناً. لنفرض أن $\pi:M\to B$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $g\pi:M\to M$ هو تشاكل للمودول M ، أي إن $g\pi\in S$ ، وأن:

$$Ker(\pi)\subseteq Ker(g\pi)$$

ليكن $x\in Ker(g\pi)$ ، عندئذ فإن $g\pi(x)=0$ ومنه فإن $\pi(x)\in Ker(g)=0$ وبالتالي يكون $x\in Ker(\pi)$ ، وهكذا فإن $Ker(g\pi)\subseteq Ker(g)$. ما سبق نجد أن $Ker(g\pi)=Ker(\pi)$. ولما كان $Ker(\pi)$ حداً مباشراً للمودول M ، نجد أن $Ker(g\pi)$ حد مباشر للمودول M ، ولما كان $g\pi\in S$ وبحسب الفرض فإن $g\pi\in L(M)=I(M)$ ومنه فإن $Im(g\pi)$ حد مباشر للمودول M ، ولما كان:

$$Im(g\pi)=g\pi(M)=g(B)=Im(g)$$

نجد أن $Im(g)$ حد مباشر للمودول M، أي إن التشاكل g ينشطر، وبحسب المبرهنة (2−3) نجد أن المودول M هو C_2-مودول.

مبرهنـــــة 3−7.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 − المودول M هو D_2-مودول وأن $I(M)=S$.

2 − الحلقة S منتظمة.

البرهـــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن المودول M هو D_2-مودول وأن $I(M)=S$. ليكن $f\in S$، عندئذ فإن $f\in I(M)$، ومنه فإن المودول الجزئي $Im(f)$ حد مباشر في M، لما كان:

$$M/Ker(f)\cong Im(f)$$

وأن المودول M هو D_2-مودول نجد أن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M، وبحسب المبرهنة (1−4) نجد أن العنصر $f\in S$ هو عنصر منتظم ومنه فإن الحلقة S منتظمة.

$(2)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن الحلقة S منتظمة. لنبرهن أولاً على أن $I(M)=S$. واضح بحسب التعريف أن $I(M)\subseteq S$. ليكن $f\in S$، لما كانت الحلقة S منتظمة، عندئذ حسب المبرهنة (1−4) فإن $Im(f)$ حد مباشر في M ومنه نجد أن $f\in I(M)$ وبالتالي يكون $S\subseteq I(M)$، وهذا يبين أن $I(M)=S$.

لنبرهن الآن على أن المودول M هو D_2-مودول. ليكن A حداً مباشراً للمودول M ولنفرض أن $g:M\to A$ تشاكل مودولات غامر، عندئذ فإن $g\in S$، ولما كانت الحلقة S منتظمة، عندئذ حسب المبرهنة (1−4) فإن $Ker(g)$ حد مباشر للمودول M وهذا يبين أن التشاكل g ينشطر، وبحسب المبرهنة (2−2) نجد أن المودول M هو D_2-مودول.

مبرهنـــــة 3-8.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – المودول M هو C_2-مودول وأن $L(M) = S$.

2 – الحلقة S منتظمة.

البرهــــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن المودول M هو C_2-مودول وأن $L(M) = S$. ليكن $f \in S$، عندئذ حسب الفرض فإن $f \in L(M)$، ومنه فإن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M وبالتالي يوجد مودول جزئي A في M بحيث إن $M = Ker(f) \oplus A$، ومنه نجد أن $A \cong M/Ker(f) \cong Im(f)$، ولما كان A حداً مباشراً للمودول M وأن المودول M هو C_2-مودول، ينتج أن $Im(f)$ حد مباشر للمودول M. أصبح لدينا كل من $Im(f)$ و $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M، وحسب المبرهنة (1-4) نجد أن العنصر $f \in S$ منتظم وبالتالي تكون الحلقة S منتظمة.

$(2)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن الحلقة S منتظمة. لنبرهن أولاً على أن $L(M) = S$. واضح بحسب التعريف أن $L(M) \subseteq S$. ليكن $f \in S$، لما كانت الحلقة S منتظمة، عندئذ حسب المبرهنة (1-4) فإن $Ker(f)$ حد مباشر للمودول M ومنه نجد أن $f \in L(M)$ وبالتالي يكون $S \subseteq L(M)$، وهذا يبين أن $L(M) = S$.

لنبرهن الآن على أن المودول M هو C_2-مودول. ليكن B حداً مباشراً للمودول M ولنفرض أن $g : B \to M$ تشاكل مودولات متباين، ولنفرض أيضاً أن $\pi : M \to B$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $g\pi : M \to M$ تشاكل للمودول M، أي إن $g\pi \in S$، ولما كانت الحلقة S منتظمة، عندئذ حسب المبرهنة (1-4) نجد أن $Im(g\pi)$ حد مباشر للمودول M، ولما كان:

$$Im(g\pi) = g\pi(M) = g(B) = Im(g)$$

نجد أن المودول الجزئي $Im(g)$ حد مباشر للمودول M وهذا يبين أن التشاكل g ينشطر، وبحسب المبرهنة (3-2) نجد أن المودول M هو C_2-مودول.

المــراجـــع العــلميـــة.

[1] – Anderson, F. W. and Fuller K. R., " Rings and Categories of Modules ", New York. Springer 1973.

[2] – Derya, K. and Rachid, T., " A Note on Endomorphism Rings of Semi-Projective Modules ", Math. Proc. Royal Irish Academy. 112A, No, 2, (2012), pp. 93 – 99.

[3] – Hamza, H., " I_0-Rings and I_0-Modules ", Math. J. Okayama Univ. **40**. (1998), p. 91–97.

[4] – Kasch, F., " Modules and Rings ", London Math. Soc. Mono. 1982.

[5] – Von Neumann, J., " On Regular Rings ", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. (1936).

[6] – Ware, R., " Endomorphism Rings of Projective Modules ", Trans. Amer. Math. Soc. 155, p. 233 – 256. (1971).

[7] – Wisbauer, R., " Foundations of Modules and Rings ", Gordon, 1991.

حل مسألة ديرخليه باستخدام تحويل هانكل الكروي المنتهي – ZZ المشترك على قشرة كروية

طالبة الدكتوراه: رقية رضوان

معيدة في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث

الأستاذ المشرف: أ. د. محمد عامر

ملخّص البحث

في هذا البحث تمَّ تعريف تحويل هانكل الكروي المنتهي على قشرة كروية واستنتجنا واحدة من أهم خواصه وهي تحويل هانكل الكروي المنتهي على قشرة كروية لمؤثر بيسل التفاضلي، وقمنا بإثبات هذه الخاصة، تمَّ مناقشة شرط ديرخليه– ديرخليه لأجل هذه الخاصة، كما أنه تمَّ تعريف تحويل هانكل الكروي المنتهي –ZZ المشترك على قشرة كروية، وقد خصصنا هذا البحث في حل مسألة ديرخليه – ديرخليه على قشرة كروية باستخدام طريقة تحويل هانكل الكروي المنتهي – ZZ المشترك على قشرة كروية حيث استخدام هذا التحويل المشترك ننتقل لمعادلة جبرية بشكل مباشر.

أيضاً تمَّ دراسة المسألة لأجل حالتين هما: شروط ابتدائية وحدية متغيرة وشروط ابتدائية وحدية ثابتة، ننوه أيضاً تمَّ رسم جميع الأشكال يدوياً على برنامج بوربوينت لتوضيح فكرة انتقال الحرارة على قشرة كروية.

كلمات مفتاحية:

تحويل هانكل الكروي المنتهي على قشرة كروية، تحويل ZZ، ديرخليه–ديرخليه، معادلة تفاضلية جزئية، معادلة جبرية.

Solving the Dirichlet problem by using the joint Finite Spherical Hankel-ZZ Transform On a Spherical Shell

Phd.student: **Roqia Rdwan**

Supervised by: **Prof: Mohammad Amer**

Summary

In this research, the finite spherical Hankel transform on a spherical shell was defined, and we deduced one of its most important properties, which is the finite spherical Hankel transform of the Bessel differential operator on a spherical shell, and we proved this property, The Dirichlet-Dirichlet condition has been discussed for this property, and was defined joint finite spherical Hankel ZZ-transform on a spherical shell, and we have devoted this research to solving the Dirichlet-Dirichlet problem on a spherical shell using the method of the joint finite spherical Hankel -ZZ transform on a spherical shell where using this common the transform we move to an algebraic equation directly.

The problem was also discussed for two cases: variable initial and boundary conditions and constant initial and boundary conditions.

all figures were drawn manually using Microsoft PowerPoint, to clarify the idea of heat transfer on a spherical shell.

Key Words:

Finite Spherical Hankel Transform on spherical a shell, ZZ Transform, Dirichlet-Dirichlet, Partial Differential Equation, algebraic equation.

1.مقدمة:

متسلسلة فورييه – بيسل وتحويل هانكل المنتهي مفيدة للغاية في العلوم الفيزيائية والهندسية، وهي تعتبر تقنيات عملية لحل مسائل القيمة الحدية المعبر عنها في الإحداثيات الاسطوانية، يمكن تعميم متسلسلة فورييه – بيسل وتحويل هانكل المنتهي إلى الإحداثيات الكروية [3]. تحويل هانكل الكروي المنتهي تمَّ تقديمه بواسطة (Chen) عام 1982 [5] وهو تحويل تكاملي يحتوي على دوال بيسل الكروية ذات الترتيب الصحيح الموجب كنواة له، حيث تعتبر دوال بيسل الكروية عبارة عن حل معادلة بيسل الكروية، كما أنَّ دوال بيسل الكروية ترتبط بدوال بيسل الاسطوانية ذات الرتيب نصف الصحيح الموجب [2]، وتظهر أهمية هذا التحويل في حل العديد من المسائل ذات التماثل الكروي ذات الشروط الحدية والابتدائية. في عام 2016 قام زين العابدين ظفر بتعديل تحويل سوميدو وقدَّم تحويلا جديداً عُرِف باسم تحويل ZZ حيث أنَّ لهذا التحويل دور مهم في حل معادلات تفاضلية جزئية. [6,7]

تحويلي هانكل الكروي المنتهي المعرَّف على قشرة كروية و ZZلهما أهمية كبيرة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية حيث بتطبيق كل تحويل بشكل مفرد على معادلة تفاضلية جزئية يعطينا معادلة تفاضلية عادية، لكن دمج هذين التحويلين في تحويل واحد ينقلنا لمعادلة جبرية وذلك عند تطبيق التحويل المشترك على معادلة تفاضلية جزئية، وهذه الطريقة تعتبر أسرع بالحل من تطبيق كل تحويل بشكل مفرد.

2. أهمية وهدف البحث:

الهدف من هذا البحث هو مناقشة وحل مسألة رياضية فيزيائية تسمى مسألة ديرخليه معرَّفة على قشرة كروية وذلك باستخدام طريقة جديدة هي دمج تحويل هانكل الكروي المنتهي معرَّف على مجال قشرة كروية مع تحويل ZZ في تحويل واحد مشترك حيث

تكمن أهمية هذا التحويل المشترك في حل معادلات تفاضلية جزئية ذات تماثل كروي وبالتالي نحصل على معادلة جبرية بشكل مباشر.

3. طرائق البحث: تعاريف ومفاهيم أساسية:

3.1. تعاريف:

3.1.1. التماثـــــــــــــــل الكـــــــــــــــروي:

هو أن يكون الجسم كروياً تماماً ، كلنا يعلم أن للكرة عدد لا نهائي من الأقطار ، ولكن دعونا نتخير قطرين كل منهما عمودي على الأخرى ، ليكون الجسم متماثل كروياً يجب أن يكون هذان القطران متساويان تماماً ، وإن فرق احدهما عن الآخر بميلي متر فلن يكون هذا الجسم متماثلاً كروياً.

3.1.2. الكرة الجوفاء: هي عبارة عن كرة فارغة من الداخل.

3.1.3. القشرة الكروية: هي تعميم للحلقة على ثلاثة أبعاد، إنها منطقة الكرة الواقعة بين كرتين متحدة المركز من أنصاف أقطار مختلفة.

3.2. معادلة بيسل الكروية [4]:

تعطى معادلة بيسل الكروية بالشكل:

$$x^2 z'' + 2xz' + (x^2 - l(l+1))z = 0 \quad \dots (3,2,1)$$

وهي عبارة عن معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية، ناتجة عن فصل المتغيرات لمؤثر لابلاس في إحداثيات كروية، والحل العام غير الشاذ هو دوال بيسل الكروية من النوع الأول والترتيب l وهي $z(x) = j_l(x)$ حيث $l = 0,1 \dots$

حيث:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x) \quad ; l = 0,1,2, \dots$$

حيث: $J_{l+\frac{1}{2}}(x)$ دوال بيسل الاسطوانية من النوع الأول والرتبة $l + \frac{1}{2}$

3.3. مؤثر بيسل التفاضلي الكروي:

يعطى مؤثر بيسل الكروي بالشكل:

$$\Delta_l = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 z'(r)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2} z(r) \quad \dots (3,3,1)$$

3.4. علاقات تكرار دوال بيسل الكروية [4]:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{l+1} j_l(x)\right) = x^{l+1} j_{l-1}(x) \quad \dots (3,4,1)$$

3.5. تعريف متسلسلة فورييه – بيسل المعدلة (بالإحداثيات الكروية) على المجال $[0,a]$ [3]

$$z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n j_l(k_n x)$$

$$c_n = \frac{\int_0^a x^2 z(x) j_l(k_n x)\, dx}{\|j_l(k_n x)\|^2} \; ; \; \|j_l(k_n x)\|^2 = \int_0^a x^2 \left(j_l(k_n x)\right)^2 dx$$

حيث $\|j_l(k_n x)\|^2$ علاقة تعامد دوال بيسل الكروية على المجال $[0,a]$.

3.6. تعريف تحويل هانكل الكروي المنتهي $FSHT$ [3]:

لتكن $f(r)$ دالة محدودة ومستمرة قطعياً على المجال $[0,a]$ عندئذٍ يُعرَّف تحويل هانكل الكروي المنتهي بالشكل:

$$\tilde{F}_l(k_i) = FSH_l\{f(r)\} = \int_0^a r^2 f(r) j_l(rk_i)\, dr \quad ; \quad l = 0,1 \quad \ldots (3,6,1)$$

حيث $r^2 j_l(rk_i)$ نواة تحويل هانكل الكروي المنتهي، $j_l(rk_i)$ دالة بيسل الكروية من النوع الأول والرتبة l.

ملاحظة:

إذا كانت $l = 0$ نقول أنَّ $FSH_0\{f(r)\}$ تحويل هانكل الكروي المنتهي من الرتبة الصفرية وهكذا...

3.7. تعريف تحويل ZZ [1]

لتكن لدينا الدالة $t \geq 0 \;\; ; \;\; f(t)$ معرفة على المجال $[0,\infty[$ عندئذٍ يعرَّف تحويل ZZ بالشكل:

$$ZZ\{f(t)\} = \frac{s}{v} \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{s}{v}t}\, dt \quad \ldots (3,7,1)$$

إنَّ تحويل ZZ موجود لأجل الدوال التي تنتمي للمجموعة A حيث:

$$A = \left\{ f(t) / \exists M \,,\, \beta_1, \beta_2 > 0 \,, |f(t)| < \alpha e^{\frac{|t|}{\beta_i}} \,; j \in (-1)^j \times [0,\infty[\right\}$$

ويعرَّف التحويل العكسي بالشكل:

$$f(t) = ZZ^{-1}\{f(t)\} \qquad \ldots (3,7,2)$$

3.8. خاصة المشتق[1] :

تعطى خاصة المشتق الأول:

$$ZZ\{f'(t)\} = \frac{s}{v} Z(v,s) - \frac{s}{v} f(0) \quad \dots (3,8,1)$$

3.9. مبرهنة التلاف [6]:

لتكن لدينا الدالتين $g_2(t), g_1(t)$ دالتين و $Z_2(v,s), Z_1(v,s)$ تحويلي ZZ للدالتين $g_2(t), g_1(t)$ على الترتيب عندئذٍ علاقة التلاف للدالتين $g_2(t), g_1(t)$ تعطى بالشكل التالي:

$$g_1(t) * g_2(t) = \frac{s}{v} ZZ^{-1}\{Z_1(v,s) \times Z_2(v,s)\} \quad \dots (3,9,1)$$

حيث:

$$g_1(t) * g_2(t) = \int_0^t g_1(\tau) g_2(t-\tau)\, d\tau \quad \dots (3,9,2)$$

3.10. تحويل ZZ لبعض الدوال الأساسية [1]:

$$ZZ\{1\} = 1 \quad \dots (3,10,1)$$

$$ZZ\{e^{at}\} = \frac{s}{s - va} \quad \Rightarrow$$

$$ZZ\{e^{-at}\} = \frac{s}{s + va} \quad \Rightarrow \quad ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s + va}\right) = e^{-at} \quad \dots (3,10,2)$$

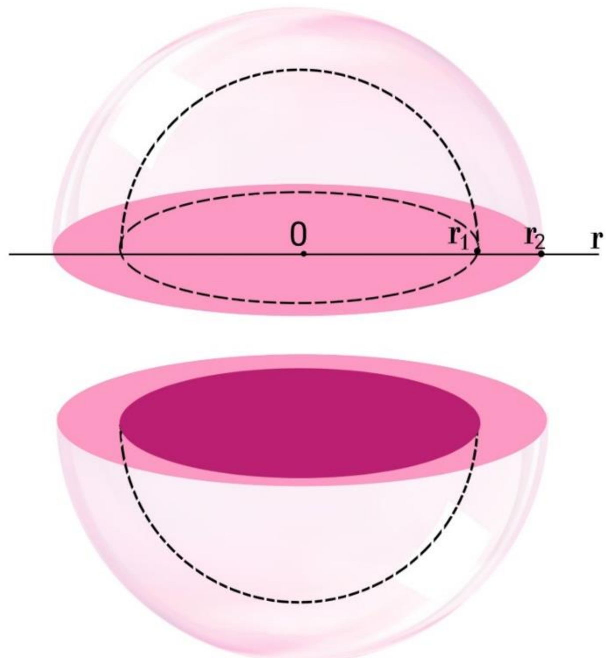
$$ZZ\{1 - e^{-at}\} = ZZ\{1\} - ZZ\{e^{-at}\} = 1 - \frac{s}{s + va}$$

$$= \frac{s + va - s}{s + va} = a \frac{v}{s + va}$$

$$\Rightarrow \quad ZZ^{-1}\left(\frac{av}{s + va}\right) = a(1 - e^{-at}) \quad \dots (3,10,3)$$

4.النتائج ومناقشتها:

4.1. تحويل هانكل الكروي المنتهي المعرَّف على قشرة كروية $FSHTA$



الشكل 1:عبارة عن رسم توضيحي للقشرة الكروية (أو ما يسمى مجال حلقي ثلاثي البعد)

4.1.1. مسألة شتورم ليوفيل:

لتكن لدينا معادلة بيسل الكروية:

$$(r^2 z')' + \left({k_n}^2 r^2 - l(l+1)\right) z = 0 \qquad ; \; r \in [r_1, r_2]$$

تحقق الشروط الحدية المتجانسة التالية:

$$h_1 j_l(k_n r_1) - k_n {j'}_l(k_n r_1) = 0$$

$$h_2 j_l(k_n r_2) + k_n {j'}_l(k_n r_2) = 0$$

والحل العام غير الشاذ لمعادلة بيسل الكروية يعطى بالشكل: $Z_n(r) = j_l(k_n r)$

حيث $j_l(k_n r)$ دالة بيسل الكروية من النوع الأول والرتبة l وتساوي:

$$j_l(rk_n) = \sqrt{\frac{\pi}{2rk_n}} J_{l+\frac{1}{2}}(rk_n) \quad ; \quad l = 0,1,2,3 \ldots$$

و $J_{l+\frac{1}{2}}(rk_n)$ دالة بيسل الاسطوانية من النوع الأول والرتبة $l + \frac{1}{2}$

كما أنَّ k_n هي القيم الذاتية لمجموعة الدوال الذاتية $\{j_l(k_n r)\}$ المتعامدة في المجال المعرَّف على قشرة كروية مع دالة الوزن r^2، ومنه يمكن تعريف متسلسلة فورييه – بيسل المعدلة على المجال $[r_1,r_2]$ للدالة $z(r)$ بالشكل:

$$z(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Z_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n j_l(k_n r)$$

حيث:

$$c_n = \frac{\int_{r_1}^{r_2} r^2 z(r) j_l(k_n r)\, dr}{\|j_l(k_n r)\|^2} \quad ; \quad \|j_l(k_n r)\|^2 = \int_{r_1}^{r_2} r^2 \left(j_l(k_n r)\right)^2 dr$$

حيث $\|j_l(k_n x)\|^2$ علاقة تعامد دوال بيسل الكروية على المجال $[r_1,r_2]$.

ومنه متسلسلة فورييه – بيسل المعدلة على المجال $[r_1,r_2]$ تصبح

$$z(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{r_1}^{r_2} r^2 z(r) j_l(k_n r)\, dr \right) \frac{j_l(k_n r)}{\|j_l(k_n r)\|^2} \quad \ldots (4,1,1)$$

4.1.2. تعريف *FSHAT*:

لتكن $z(r)$ دالة مستمرة قطعياً ومحدودة في المجال $[r_1,r_2]$ عندئذٍ يُمكن تعريف تحويل هانكل الكروي المنتهي على قشرة كروية الذي سنرمز له بالرمز $\bar{Z}_l(k_n) = R_l\{z(r)\}$ بالشكل:

$$\bar{Z}_l(k_n) = R_l\{z(r)\} = \int_{r_1}^{r_2} r^2 z(r) j_l(rk_n)\, dr \;\; ; \; l = 0,1 \ldots \quad (4,1,2,1)$$

حيث $r^2 j_l(rk_n)$ نواة تحويل هانكل الكروي المنتهي المعرَّف على قشرة كروية و $j_l(rk_n)$ دالة بيسل الكروية من النوع الأول والرتبة l

ملاحظة:

الرمز $R_l\{z(r)\}$ يعبر عن تحويل هانكل الكروي المنتهي المعرَّف على قشرة كروية وهو اختصار للرمز FSHTA

4.1.3. تعريف *IFSHA*:

يمكن تعريف التحويل العكسي لتحويل هانكل الكروي المنتهي المعرَّف على قشرة كروية بالشكل:

$$z(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Z}_l(k_n) \, \frac{j_l(k_n r)}{\|j_l(k_n r)\|^2}$$

الإثبات:

لتكن $z(r)$ دالة حقيقة لـِ r ، من متسلسلة فورييه – بيسل المعدلة بالإحداثيات الكروية لـِ $z(r)$:

$$z(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, j_l(k_n r) \qquad \ldots (4,1,3,1)$$

بضرب $(4,1,3,1)$ بِ $r^2 j_l(k_n r)$ ثمَّ بمكاملة الطرفين من $r_1 \leftarrow r_2$ نحصل على:

$$\int_{r_1}^{r_2} r^2 j_l(k_n r) z(r)\, dr = \int_{r_1}^{r_2} r^2 j_l(r k_i) \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, j_l(k_n r)\, dr$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} c_n \int_{r_1}^{r_2} r^2 j_l(r k_n) j_l(r k_n)\, dr$$

$$\int_{r_1}^{r_2} r^2 j_l(k_n r) z(r)\, dr = c_n \int_{r_1}^{r_2} r^2 j_l(r k_n) j_l(r k_n)\, dr$$

من خاصية التعامد لدوال بيسل الكروية المعرَّف على قشرة كروية

$$\int_{r_1}^{r_2} r^2 j_l(k_n r) z(r)\, dr = c_n \| j_l(k_n r) \|^2 \quad \Rightarrow$$

$$c_n = \frac{\int_{r_1}^{r_2} r^2 z(r) j_l(k_n r)\, dr}{\| j_l(k_n r) \|^2} \qquad \ldots (4,1,3,2)$$

بتعويض العلاقة $(4,1,3,2)$ في $(4,1,3,1)$ نحصل على:

$$z(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{r_1}^{r_2} r^2 z(r) j_l(k_n r)\, dr}{\| j_l(k_n r) \|^2} j_l(k_n r)$$

$$z(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Z}_l(k_n)\, \frac{j_l(k_n r)}{\| j_l(k_n r) \|^2} \qquad \ldots (4,1,3,3)$$

4.1.4. الشروط الحدية المتجانسة على قشرة كروية:

بما أنَّ الدوال الذاتية $\{j_l(k_n r)\}$ هي حلول مسألة شتورم ليوفيل عندئذٍ فإنَّ حلول معادلة بيسل الكروية

$$(r^2 Z'_n(r))' + \left(k_n{}^2 r^2 - l(l+1)\right) Z_n(r) = 0$$

تحقق أحد الشروط الحدية المتجانسة على قشرة كروية التالية:

1- شرط ديرخليه (Dirichlet):

$$j_l(k_n r_1) = 0 \qquad , \quad j_l(k_n r_2) = 0$$

2- شرط نيومان (Neumann):

$$j'_l(k_n r_1) = 0 \qquad , \quad j'_l(k_n r_2) = 0$$

3- شرط روبين (Robin):

$$h_1 j_l(k_n r_1) - k_n j'_l(k_n r_1) = 0 \,,\; h_2 j_l(k_n r_2) + k_n j'_l(k_n r_2) = 0$$

4.1.5. خاصة مؤثر بيسل الكروي على قشرة كروية:

إذا كان $\bar{Z}_l(k_n) = R_l\{z(r)\}$ تحويل هانكل الكروي المنتهي على قشرة كروية للدالة $z(r)$ عندئذٍ:

$$R_l\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 z'(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} z(r)\right\} =$$

$$\int_{r_1}^{r_2} r^2\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 z'(r)\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}z(r)\right)j_l(rk_n)\,dr$$

$$=\int_{r_1}^{r_2}\frac{d}{dr}\left(r^2 z'(r)\right)j_l(rk_n)\,dr-l(l+1)\int_{r_1}^{r_2} z(r)j_l(rk_n)dr$$

باستخدام التكامل بالتجزئة مرتين نجد:

$$=r^2 z'(r)j_l(rk_n)\big|_{r_1}^{r_2}-r^2k_n z(r){j'}_l(rk_n)\big|_{r_1}^{r_2}-{k_n}^2\bar{Z}_l(k_n)$$

$$={r_2}^2 z'(r_2)j_l(k_nr_2)-{r_1}^2 z'(r_1)j_l(k_nr_1)$$

$$-{r_2}^2k_n z(r_2){j'}_l(k_nr_2)+{r_1}^2k_n z(r_1){j'}_l(k_nr_1)$$

$$-{k_n}^2\bar{Z}_l(k_n)\qquad \ldots(4,1,5,1)$$

4.1.6. مناقشة شرط ديرخليه – ديرخليه على قشرة كروية:

1– ديرخليه – ديرخليه

$$j_l(k_nr_1)=0\qquad,\quad z(r_1)=f_1(t)$$

$$j_l(k_nr_2)=0\qquad,\quad z(r_2)=f_2(t)$$

ومنه تصبح العلاقة (4,1,5,1) بالشكل:

$$R_l\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 z'^{(r)}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}z(r)\right\}=$$

$$=-{r_2}^2 f_2(t)k_n{j'}_l(k_nr_2)+{r_1}^2 f_1(t)k_n{j'}_l(k_nr_1)$$

$$-{k_n}^2\bar{Z}_l(k_n)\qquad \ldots(4,1,6,1)$$

4.2. تعريف تحويل هانكل الكروي المنتهي− ZZ المشترك المعرَّف على قشرة كروية (FSHAZZT):

لتكن $u(r,t)$ معرَّفة، محدودة، مستمرة قطعياً، وقابلة للمكاملة على $[0,a] \times [0,\infty[$، عندئذٍ تحويل هانكل الكروي المنتهي − ZZ المشترك المعرَّف على قشرة كروية الذي سنرمز له بالرمز $\breve{\tilde{u}}(k_n,v,s) = RZ_l\{u(r,t)\}$ يمكن تعريفه بالشكل:

$$\breve{\tilde{u}}(k_n,v,s) = RZ_l\{u(r,t)\} = \frac{s}{v}\int_0^\infty \int_{r_1}^{r_2} r^2 u(r,t) j_l(rk_n) e^{-\frac{s}{v}t}\, drdt \quad \dots (4,2,1)$$

علماً أنَّ هذه التكاملات موجودة.

حيث $r^2 j_l(rk_n)e^{-\frac{s}{v}t}$ نواة تحويل هانكل الكروي المنتهي من الرتبة l − ZZ المشترك المعرَّف على قشرة كروية، حيث $j_l(rk_n)$ دالة بيسل الكروية من النوع الأول والترتيب l.

ملاحظة 2: إذا كانت $l = 0$ عندئذٍ $\breve{\tilde{u}}(k_n,v,s)$ يسمى تحويل هانكل الكروي المنتهي من الرتبة الصفرية− ZZ المشترك المعرّف على قشرة كروية.

4.3. تعريف التحويل العكسي لتحويل هانكل الكروي− ZZ المشترك المعرَّف على قشرة كروية (IFSHAZZT):

يمكن تعريف التحويل العكسي لتحويل هانكل الكروي المنتهي −ZZ المشترك المعرَّف على قشرة كروية والذي سنرمز له بالرمز $RZ_l^{-1}\{\hat{\tilde{u}}(k_n, v,s)\} = u(r,t)$ يمكن تعريفه بالشكل:

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} ZZ^{-1}\left(\hat{\hat{u}}(k_n, v,s)\right)\frac{j_l(k_n r)}{\|j_l(k_n r)\|^2} \qquad \dots (4,3,1)$$

ملاحظة 3: سوف يتم تطبيق خواص تحويل هانكل الكروي المنتهي المعرَّف على قشرة كروية وخواص تحويل ZZ بشكل مباشر على المسألة بدلاً من استنتاج الشرط المشترك لأن الطريقتين سوف تؤدي إلى نفس النتيجة.

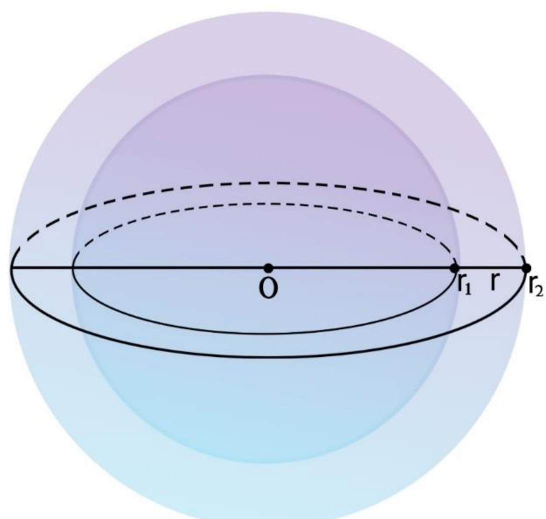
4.4. تطبيقات:

سوف نقوم بحل مسألة دير خليه المطبقة على كرة جوفاء باستخدام تحويل هانكل الكروي المنتهي− ZZ المشترك على قشرة كروية

مسألة ديرخليه: انتقال الحرارة من خلال قشرة كروية

سوف نناقش المسألة في عدِّة حالات:

4.4.1. <u>الحالة الأولى</u>: حل مسألة ديرخليه بشروط ابتدائية وحدية غير ثابتة (متغيرة)



الشكل 2:عبارة عن رسم توضيحي للقشرة الكروية التي سوف يتم فيها انتقال الحرارة

لتكن لدينا معادلة الحرارة التالية المعرَّفة على قشرة كروية

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} \quad ; \quad r_1\le r\le r_2 \quad \dots(4{,}4{,}1{,}1)$$

الثابت a^2 ثابت انتشار الحرارة.

بالشرط الابتدائي:

$$u(r,t)|_{t=0}=u_0(r) \qquad \dots(4{,}4{,}1{,}2)$$

والشروط الحدية:

$$\begin{cases}u(r_1,t)=f_1(t)\\ u(r_2,t)=f_2(t)\end{cases} \quad ; \quad t>0 \qquad \dots(4{,}4{,}1{,}3)$$

الحل:

إنَّ الدالة $u(r,t)$ تعبر عن الطاقة الحرارية (كمية الحرارة)، حيث إنَّ هذه الدالة تمثل انتقال تدريجي للطاقة الحرارية ضمن القشرة الكروية (الوسط الحلقي) انطلاقاً من بداية جدار الكرة الداخلي وانتهاءً بجدار الكرة الخارجي الشكل 3، الشكل 4، الشكل 5، خلال الزمن $t>0$ حيث أنه كلما زاد الزمن زادت المسافة r، أي تبدأ الحرارة بالانتقال من أول طبقة ملاصقة لجدار الكرة الداخلية وهكذا تدريجياً حتى تصل ملاصقة للجدار الداخلي للكرة الخارجية.

بالنسبة للشروط المعطاة:

الشرط الابتدائي يمثل بداية الزمن عند اللحظة $t=0$ (هنا لا يوجد انتشار للحرارة بعد)

بينما الشروط الحدية: عند $r=r_1$ فإن الدالة $f_1(t)$ تمثل بداية انتقال الطاقة الحرارية بالقرب من جدار الكرة الأولى (الداخلية) أما عند $r=r_2$ فإن الدالة $f_2(t)$ تمثل نهاية

انتقال الطاقة الحرارية عند الجدار الداخلي للكرة الثانية (الخارجية)، والمتغير $t > 0$ يمثل انتشار الحرارة مع الزمن.

الآن:

نلاحظ من الشروط الحدية أنَّ هذه المسألة عبارة عن مسألة ديرخليه – ديرخليه

لنعرِّف أولاً تحويل هانكل الكروي المنتهي من الرتبة الصفرية– ZZ المشترك بالنسبة للدالة $u(r,t)$ بالشكل:

$$\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = \frac{s}{v}\int_0^\infty \int_{r_1}^{r_2} r^2 u(r,t) j_0(rk_n) e^{-\frac{s}{v}t}\, dr dt \qquad \ldots (4,4,1,4)$$

بتطبيق (4,4,1,4) على المعادلة (4,4,1,1) مع تطبيق شرط ديرخليه– ديرخليه (4,1,6,1) نجد:

$$\frac{s}{v}\int_0^\infty \left(r_1{}^2 f_1(t) k_n j'_0(k_n r_1) - r_2{}^2 f_2(t) k_n j'_0(k_n r_2) - k_n{}^2 \bar{u}(k_n,t)\right) e^{-\frac{s}{v}t} dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{s}{v}\int_0^\infty \bar{u}_t(k_n,t) e^{-\frac{s}{v}t} dt \qquad \ldots (4,4,1,5)$$

بتطبيق تحويل ZZ على (4,4,1,5) نجد:

$$a^2 r_1{}^2 \check{f}_1(v,s) k_n j'_0(k_n r_1) - a^2 \check{f}_2(v,s) k_n j'_0(k_n r_2) - a^2 k_n{}^2 \breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = \breve{\bar{u}}_t(k_n,v,s) \qquad \ldots (4,4,1,6)$$

بتطبيق (3,8,1) على (4,4,1,6) في الطرف الثاني:

$$a^2 r_1{}^2 \check{f}_1(v,s) k_n j'_0(k_n r_1) - a^2 r_2{}^2 \check{f}_2(v,s) k_n j'_0(k_n r_2) - a^2 k_n{}^2 \breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = \frac{s}{v}\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) - \frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0) \quad \Rightarrow$$

$$a^2{r_1}^2\check{f}_1(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_1)-a^2{r_2}^2\check{f}_2(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_2)+\frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0)$$

$$=\frac{s}{v}\check{\bar{u}}(k_n,v,s)+a^2{k_n}^2\check{\bar{u}}(k_n,v,s)$$

$$\left(\frac{s+va^2{k_n}^2}{v}\right)\check{\bar{u}}(k_n,v,s)=a^2{r_1}^2\check{f}_1(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_1)$$

$$-a^2{r_2}^2\check{f}_2(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_2)+\frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0)\qquad \dots(4,4,1,7)$$

بتطبيق (4,1,2,1) من الرتبة الصفرية على (4,4,1,2)

$$\bar{u}(k_n,0)=\int_{r_1}^{r_2} r^2u(r,0)j_0(rk_n)\,dr=\bar{u}_0(k_n)\quad \dots(4,4,1,8)$$

بتعويض (4,4,1,8) في (4,4,1,7) نجد:

$$\left(\frac{s+va^2{k_n}^2}{v}\right)\check{\bar{u}}(k_n,v,s)=a^2{r_1}^2\check{f}_1(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_1)$$

$$-a^2{r_2}^2\check{f}_2(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_2)+\frac{s}{v}\bar{u}_0(k_n)$$

$$\check{\bar{u}}(k_n,v,s)=\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}a^2{r_1}^2\check{f}_1(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_1)-$$

$$\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}a^2{r_2}^2\check{f}_2(v,s)k_n{j'}_0(k_nr_2)$$

$$+\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\bar{u}_0(k_n)\qquad \cdots(4,4,1,9)$$

وهي معادلة جبرية.

بأخذ التحويل العكسي لتحويل ZZ للمعادلة (4,4,1,9) وذلك بتطبيق العلاقة (3,7,2)

$$ZZ^{-1}\left(\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)\right) = ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_1(v,s)\right)a^2{r_1}^2k_n{j'}_0(k_nr_1)$$

$$-ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_2(v,s)\right)a^2{r_2}^2k_n{j'}_0(k_nr_2)$$

$$+ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\right)\bar{u}_0(k_n) \qquad \dots(4,4,1,10)$$

باستخدام العلاقة (3,9,1) نجد:

$$\frac{v}{s}g_1(t)*g_2(t) = ZZ^{-1}\{Z_1(v,s)\times Z_2(v,s)\}$$

$$= ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_1(v,s)\right) = \frac{s}{v}ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_1(v,s)\right)$$

$$= g_1(t)*g_2(t) \Rightarrow$$

$$ZZ^{-1}\left(\frac{s}{v}\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_1(v,s)\right) = g_1(t)*g_2(t) \quad \Rightarrow$$

$$ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_1(v,s)\right) = \int_0^t g_1(\tau)g_2(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-a^2{k_n}^2\tau}f_1(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{-a^2{k_n}^2(t-\tau)}f_1(\tau)\,d\tau$$

حيث:

$$g_1(\tau) = e^{-a^2{k_n}^2\tau}\ ,\ g_2(t-\tau) = f_1(t-\tau)$$

كما أنَّ:

$$ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\check{f}_2(v,s)\right)=\int_0^t e^{-a^2{k_n}^2(t-\tau)}f_2(\tau)\,d\tau$$

ومنه نعوض في العلاقة $(4,4,1,10)$ نجد:

$$\bar{u}(k_n,t)=a^2{r_1}^2k_n{j'}_0(k_nr_1)\int_0^t e^{-a^2{k_n}^2(t-\tau)}f_1(\tau)\,d\tau$$

$$-a^2{r_2}^2k_n{j'}_0(k_nr_2)\int_0^t e^{-a^2{k_n}^2(t-\tau)}f_2(\tau)\,d\tau+e^{-a^2{k_n}^2t}\bar{u}_0(k_n)$$

ومنه بتطبيق العلاقة $(4,1,3,3)$ علماً أنَّ $l=0$:

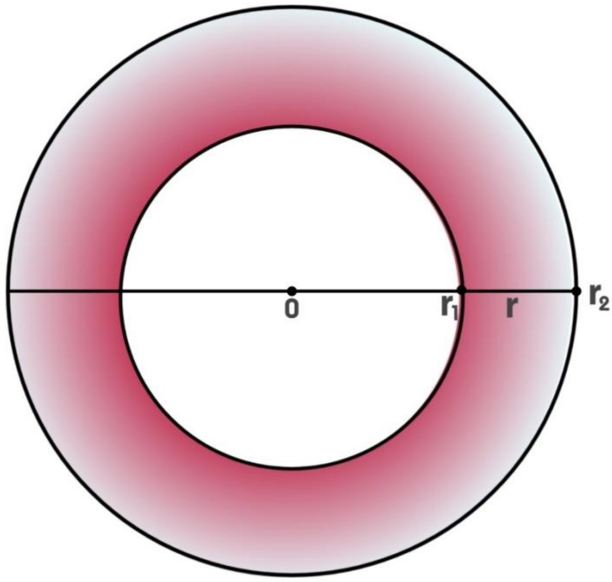
$$u(r,t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}(k_n,t)\frac{j_0(k_nr)}{\|j_0(k_nr)\|^2}$$

وهو الحل العام.

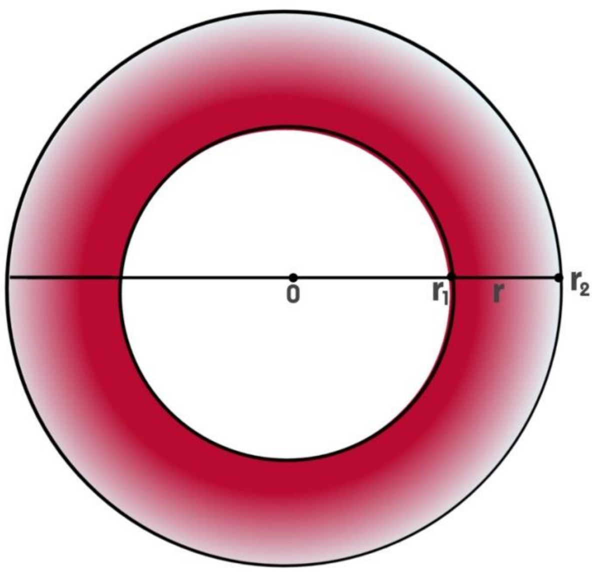
نلاحظ أنَّ انتقال الحرارة متناقص كون المجموع مضروب بإشارة ناقص، مثلاً في بداية المجال عندما $r=r_1$ انتقال الحرارة كان سريعاً بدأ يتناقص تدريجياً باتجاه نهاية المجال $r=r_2$ حتى يصل لحالة توازن أي تصبح درجة الحرارة ثابتة أي يتوقف الانتقال بنهاية الزمن.

أي أنَّ دالة انتقال الطاقة الحرارية هي دالة متناقصة تدريجياً انطلاقاً من r_1 باتجاه نهاية المجال r_2، كما أن الدالة الأسية أيضاً تعبر عن انتقال الحرارة بشكل متناقص.

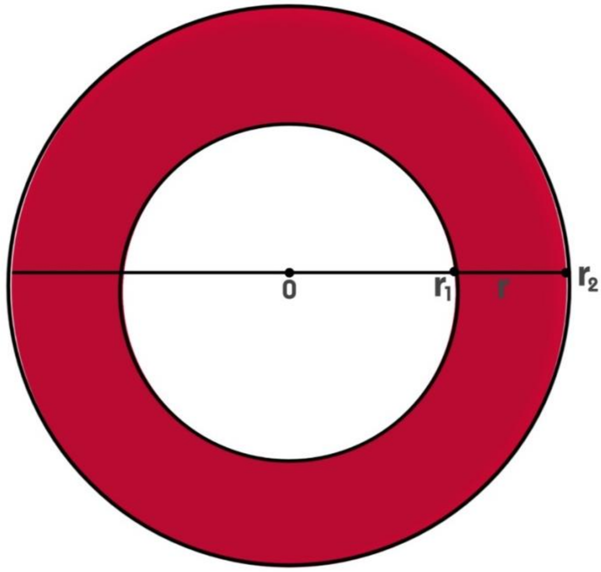
4.4.1.1. رسم توضيحي لشرح فكرة انتقال الحرارة بين الجدارين:



الشكل 3: يعبر عن بداية انتقال الحرارة ابتداءً من الجدار الداخلي عند الحد $r = r_1$



الشكل 4:عبارة عن ازدياد انتقال الحرارة على المجال الحلقي



الشكل 5: وصول الحرارة إلى الجدار الثاني عند الحد $r = r_2$

4.4.2. <u>الحالة الثانية:</u> حل مسألة دير خليه بشروط ابتدائية وحدية ثابتة

لتكن لدينا معادلة الحرارة التالية المعرَّفة على قشرة كروية

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} \qquad ; r_1 \le r \le r_2 \quad \ldots (4,4,2,1)$$

بالشرط الابتدائي: $\ldots (4,4,2,2)$ $\quad u(r,t)|_{t=0} = u_0(r) = T_0$

والشروط الحدية:

$$\begin{cases} u(r_1,t) = f_1(t) = T_1 \\ u(r_2,t) = f_2(t) = T_2 \end{cases} \quad ; \quad t > 0 \quad \ldots (4,4,2,3)$$

حيث T_0,T_1,T_2 ثوابت

الحل:

تقتصر الدراسة هنا فقط على كمية الطاقة الحرارية المنتقلة بلحظة معينة (أي من أجل شروط ثابتة) أي لأجل لحظة t ثابتة، أي تقتصر الدراسة هنا على دراسة كمية الطاقة الحرارية عند الحدين r_1 و r_2 أي بلحظة معينة وبموضعين فقط.

نلاحظ من الشروط الحدية أنَّ هذه المسألة عبارة عن مسألة ديرخليه – ديرخليه

بتطبيق (4,4,1,4) على المعادلة (4,4,2,1) مع تطبيق الشرط (4,1,6,1) نجد:

$$\frac{s}{v}\int_0^\infty \left({r_1}^2 f_1(t) k_n j'_0(k_n r_1) - {r_2}^2 f_2(t) k_n j'_0(k_n r_2) - {k_n}^2 \bar{u}(k_n,t)\right) e^{-\frac{s}{v}t} dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{s}{v}\int_0^\infty \bar{u}_t(k_n,t) e^{-\frac{s}{v}t} dt \qquad \dots (4,4,2,4)$$

بتعويض الشروط الحدية (4,4,2,3) في (4,4,2,4)

$$\frac{s}{v}\int_0^\infty \left({r_1}^2 T_1 k_n j'_0(k_n r_1) - {r_2}^2 T_2 k_n j'_0(k_n r_2) - {k_n}^2 \bar{u}(k_n,t)\right) e^{-\frac{s}{v}t} dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{s}{v}\int_0^\infty \bar{u}_t(k_n,t) e^{-\frac{s}{v}t} dt \qquad \dots (4,4,2,5)$$

بتطبيق تحويل ZZ على (4,4,2,5) مع تطبيق الخاصة (3,8,1) على الطرف الثاني وتطبيق (3,10,1) على الطرف الأول نجد:

$$a^2 {r_1}^2 T_1 k_n j'_0(k_n r_1) - a^2 {r_2}^2 T_2 k_n j'_0(k_n r_2) - a^2 {k_n}^2 \breve{\bar{u}}(k_n,v,s)$$
$$= \frac{s}{v}\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) - \frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0) \qquad \dots (4,4,2,6)$$

$$a^2{r_1}^2T_1k_nj'_0(k_nr_1) - a^2{r_2}^2T_2k_nj'_0(k_nr_2) + \frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0)$$

$$= \frac{s}{v}\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) + a^2{k_n}^2\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)$$

$$\left(\frac{s + va^2{k_n}^2}{v}\right)\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = a^2{r_1}^2T_1k_nj'_0(k_nr_1)$$

$$-a^2{r_2}^2T_2k_nj'_0(k_nr_2) + \frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0) \qquad \dots (4,4,2,7)$$

بتطبيق تحويل هانكل الكروي المنتهي من الرتبة الصفرية المعرَّف على قشرة كروية على الشرط الابتدائي (4,4,2,2) مع تطبيق العلاقة (3,4,1)

$$\bar{u}(k_n,0) = \bar{u}_0(k_n) = T_0\int_{r_1}^{r_2} r^2\, j_0(rk_n)dr$$

$$= \frac{T_0}{k_n}\int_{r_1}^{r_2} \frac{d}{dr}\left(r^2j_1(rk_n)\right)dr = \frac{T_0}{k_n}r^2j_1(rk_n)\Big|_{r_1}^{r_2}$$

$$= \frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n) - {r_1}^2j_1(r_1k_n)\right) \qquad \dots (4,4,2,8)$$

بتعويض (4,4,2,8) في (4,4,2,7) نجد:

$$\left(\frac{s + va^2{k_n}^2}{v}\right)\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = a^2{r_1}^2T_1k_nj'_0(k_nr_1)$$

$$-a^2{r_2}^2T_2k_nj'_0(k_nr_2) + \frac{s}{v}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n) - {r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)$$

$$\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = \frac{v}{s + va^2{k_n}^2}a^2{r_1}^2T_1k_nj'_0(k_nr_1) -$$

$$\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}a^2{r_2}^2T_2k_n{j'}_0(k_nr_2)$$
$$+\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)\cdots(4,4,2,9)$$

وهي معادلة جبرية.

بأخذ التحويل العكسي لتحويل ZZ للمعادلة (4,4,2,9) وذلك بتطبيق العلاقة (3,7,2)

$$ZZ^{-1}\left(\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)\right)=ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\right)a^2{r_1}^2T_1k_n{j'}_0(k_nr_1)$$
$$-ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\right)a^2{r_2}^2T_2k_n{j'}_0(k_nr_2)$$
$$+ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\right)\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right).(4,4,2,10)$$

بتطبيق (3,10,2) و (3,10,3) على (4,4,2,10)

$$\bar{u}(k_n,t)=a^2{k_n}^2\left(1-e^{-a^2{k_n}^2t}\right)a^2{r_1}^2T_1k_n{j'}_0(k_nr_1)$$
$$-a^2{k_n}^2\left(1-e^{-a^2{k_n}^2t}\right)a^2{r_2}^2T_2k_n{j'}_0(k_nr_2)$$
$$+e^{-a^2{k_n}^2t}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)$$

$$\bar{u}(k_n,t)=a^4{k_n}^3\left({r_1}^2T_1{j'}_0(k_nr_1)-{r_2}^2T_2{j'}_0(k_nr_2)\right)\left(1-e^{-a^2{k_n}^2t}\right)$$
$$+e^{-a^2{k_n}^2t}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)$$

ومنه بتطبيق العلاقة (4,1,3,3) علماً أنَّ $l=0$:

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^4{k_n}^3\left({r_1}^2T_1{j'}_0(k_nr_1)-{r_2}^2T_2{j'}_0(k_nr_2)\right)\left(1-e^{-a^2{k_n}^2t}\right)\right.$$
$$\left.+e^{-a^2{k_n}^2t}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)\right)\frac{j_0(k_nr)}{\|j_0(k_nr)\|^2}$$

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}-\left(a^4{k_n}^3\left({r_2}^2T_2{j'}_0(k_nr_2)-{r_1}^2T_1{j'}_0(k_nr_1)\right)\left(1-e^{-a^2{k_n}^2t}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)e^{-a^2{k_n}^2t}\right)\frac{j_0(k_nr)}{\|j_0(k_nr)\|^2}$$

وهو الحل العام.

مقارنة بين الحالتين الأولى والثانية فيزيائياً:

في الحالة الأولى كانت الدراسة تعتمد على دراسة التغير بين موضعين هما r_1 و r_2 (الشرطين الحديين) من أجل زمن t متغير، حيث الدراسة هنا تتم على كامل المجال ابتداءً من r_1 تنتقل الطاقة الحرارية تدريجياً حتى تصل لِ r_2 وذلك في كل مرة يتغير فيه الزمن يأخذ قيمة متغيرة يمكن أن تتزايد درجة الحرارة ويمكن أن تتناقص بين الحدين r_1 و r_2، بينما بالحالة الثانية بلحظة ثابتة (حالة الثبات) الدراسة تتم من أجل قيم ثابتة لِ r_1 و r_2 بلحظة معينة ثابتة.

4.4.3. <u>**الحالـة الثالثـة:**</u> حل مسألة دير خليه غير المتجانسة بشروط ابتدائية وحدية ثابتة

لتكن لدينا معادلة الحرارة التالية المعرَّفة على قشرة كروية

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right)+S(r,t)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u(r,t)}{\partial t};r_1\le r\le r_2\ \dots(4,4,3,1)$$

بالشرط الابتدائي:

$$u(r,t)|_{t=0} = u_0(r) = T_0 \qquad \dots (4,4,3,2)$$

والشروط الحدية:

$$\begin{cases} u(r_1,t) = f_1(t) = T_1 \\ u(r_2,t) = f_2(t) = T_2 \end{cases} \qquad t > 0 \qquad \dots (4,4,3,3)$$

حيث T_0,T_1,T_2 ثوابت

الحل:

بتطبيق (4,4,1,4) على المعادلة (4,4,3,1) مع تطبيق الشرط (4,1,6,1) نجد:

$$\frac{s}{v}\int_0^\infty \left(r_1{}^2 f_1(t) k_n j'_0(k_n r_1) - r_2{}^2 f_2(t) k_n j'_0(k_n r_2) - k_n{}^2 \bar{u}(k_n,t)\right) e^{-\frac{s}{v}t} dt$$

$$+\frac{s}{v}\int_0^\infty \bar{S}(k_n,t) e^{-\frac{s}{v}t} dt = \frac{1}{a^2}\frac{s}{v}\int_0^\infty \bar{u}_t(k_n,t) e^{-\frac{s}{v}t} dt \qquad \dots (4,4,3,4)$$

بتعويض الشروط الحدية (4,4,3,3) في (4,4,3,4) وبتطبيق تحويل ZZ مع تطبيق الخاصة (3,8,1) على الطرف الثاني وتطبيق (3,10,1) على الطرف الأول نجد:

$$a^2 r_1{}^2 T_1 k_n j'_0(k_n r_1) - a^2 r_2{}^2 T_2 k_n j'_0(k_n r_2) - a^2 k_n{}^2 \breve{\bar{u}}(k_n,v,s)$$

$$+a^2\, \breve{\bar{S}}(k_n,v,s) = \frac{s}{v}\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) - \frac{s}{v}\bar{u}(k_n,0) \quad \Rightarrow$$

ومنه بتعويض (4,4,2,9) نجد:

$$\left(\frac{s + v a^2 k_n{}^2}{v}\right)\breve{\bar{u}}(k_n,v,s) = a^2 r_1{}^2 T_1 k_n j'_0(k_n r_1)$$

$$-a^2 r_2{}^2 T_2 k_n j'_0(k_n r_2) + a^2 \breve{\bar{S}}(k_n,v,s)$$

$$+\frac{s}{v}\frac{T_0}{k_n}\left(r_2{}^2 j_1(r_2 k_n) - r_1{}^2 j_1(r_1 k_n)\right) \quad \Rightarrow$$

$$\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)=\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}a^2{r_1}^2T_1k_nj'_0(k_nr_1)-$$

$$\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}a^2{r_2}^2T_2k_nj'_0(k_nr_2)+\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}a^2\breve{\bar{S}}(k_n,v,s)$$

$$+\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)\cdots(4,4,3,5)$$

وهي معادلة جبرية.

بأخذ التحويل العكسي لتحويل ZZ للمعادلة (4,4,3,5) وذلك بتطبيق العلاقة (3,7,2)

$$ZZ^{-1}\left(\breve{\bar{u}}(k_n,v,s)\right)=ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\right)a^2{r_1}^2T_1k_nj'_0(k_nr_1)$$

$$-ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\right)a^2{r_2}^2T_2k_nj'_0(k_nr_2)+a^2ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\right)\breve{\bar{S}}(k_n,v,s)$$

$$+ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\right)\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)\bar{u}(k_n,t)\ \Rightarrow$$

$$\bar{u}(k_n,t)=a^4{k_n}^3\left({r_1}^2T_1j'_0(k_nr_1)-{r_2}^2T_2j'_0(k_nr_2)\right)\left(1-e^{-a^2{k_n}^2t}\right)+$$

$$a^2ZZ^{-1}\left(\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\breve{\bar{S}}(k_n,v,s)\right)+e^{-a^2{k_n}^2t}\frac{T_0}{k_n}\left({r_2}^2j_1(r_2k_n)-{r_1}^2j_1(r_1k_n)\right)$$

نلاحظ أنَّ:

$$ZZ^{-1}\left(\frac{s}{v}\frac{v}{s+va^2{k_n}^2}\breve{\bar{S}}(k_n,v,s)\right)=g_1(t)*g_2(t)\quad\Rightarrow$$

$$ZZ^{-1}\left(\frac{s}{s+va^2{k_n}^2}\breve{\bar{S}}(k_n,v,s)\right)=\int_0^t g_1(\tau)g_2(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-a^2 k_n{}^2 \tau}\,\overline{S}(k_n,t-\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{-a^2 k_n{}^2 (t-\tau)}\overline{S}(k_n,\tau)\,d\tau$$

ومنه:

$$\bar{u}(k_n,t) = a^4 k_n{}^3 \left(r_1{}^2 T_1 j'_0(k_n r_1) - r_2{}^2 T_2 j'_0(k_n r_2)\right)\left(1 - e^{-a^2 k_n{}^2 t}\right) +$$

$$a^2 \int_0^t e^{-a^2 k_n{}^2 (t-\tau)}\overline{S}(k_n,\tau)\,d\tau + e^{-a^2 k_n{}^2 t}\frac{T_0}{k_n}\left(r_2{}^2 j_1(r_2 k_n) - r_1{}^2 j_1(r_1 k_n)\right)$$

$$\bar{u}(k_n,t) = -a^4 k_n{}^3 \left(r_2{}^2 T_2 j'_0(k_n r_2) - r_1{}^2 T_1 j'_0(k_n r_1)\right)\left(1 - e^{-a^2 k_n{}^2 t}\right) +$$

$$a^2 \int_0^t e^{-a^2 k_n{}^2 (t-\tau)}\overline{S}(k_n,\tau)\,d\tau + e^{-a^2 k_n{}^2 t}\frac{T_0}{k_n}\left(r_2{}^2 j_1(r_2 k_n) - r_1{}^2 j_1(r_1 k_n)\right)$$

ومنه بتطبيق العلاقة (4,1,3,3) علماً أنَّ $l = 0$:

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}(k_n,t)\,\frac{j_0(k_n r)}{\|j_0(k_n r)\|^2}$$

وهو الحل العام.

5 . الاستنتاجات والتوصيات

قمنا بحل مسألة ديرخليه – ديرخليه من خلال قشرة كروية نوصي بحل مسائل أخرى رياضية فيزيائية على هذا الشرط.

جدول الرموز:

$\bar{u}$	يرمز لتحويل هانكل الكروي المنتهي على مجال حلقي
$\check{u}$	يرمز لتحويل ZZ
$\tilde{F}$	يرمز لتحوي هانكل الكروي المنتهي

6- المراجع

[1]- ALSHIKH, A.& MAHGOB, M. 2016, **ON THE RELATIONSHIP BETWEEN ELZAKI TRANSFORM AND NEW INTEGRAL TRANSFORM "ZZ TRANSFORM",** International Journal of Development Research, ISSN:2230-9926, vol. 06, Issue, 08, pp.9264-9270.

[2]- BADDOUR, N. 2010, **Operational and convolution properties of three-dimensional Fourier transforms in spherical polar coordinates**, J. Opt. Soc. Am. A, vol.27, NO. 10, pp. 2144-2155.

[3]- CHEN, I. 1982, **Modified Fourier-Bessel series and finite spherical Hankel transform**, Int. J. Math. Educ. Sci. Technology vol. 13, Issue. 3, pp. 282-283. This article was downloaded by: [Linnaeus University] On: 17 October 2014, Publisher: Taylor & Francis, DOI: 10.1080/0020739820130307.

[4]- MOLOI, A.T. 2022 **Spherical Bessel Functions**, Department of Physics, Nelson Mandela University, Port Elizabeth, 6031, South Africa.

[5]- PANCHAL, S.K. 2013, **Orthonormal series expansion and finite spherical Hankel transform of generalized functions**, MJM, vol. 2, Issue. 1, pp. 77-82.

[6]- UPENDER, G.R. & NARESH, P. 2019 **ZZ TRANSFORM METHOD TO SOLUTION OF INTEGRAL EQUATION AND ABEL'S EQUATION**, Journal of Applied Science and Computations, vol. VI, Issue. IV, Page NO: 2412-2418.

[7]- ZAFAR, Z. K. 2016 **ZZ Transform Method**, International journal of advanced engineering and technology, vol. 4, Issue. 01.

تقييم الفعالية البيولوجية للمستخلصات المختلفة من نبات الأذينة السورية على بعض العوامل الممرضة المعزولة من اللحوم الحمراء المحلية

الباحثة: د. زينب حسان الحلواني
كلية العلوم - جامعة البعث

الملخص

تستأثر المستخلصات النباتية بأهمية متزايدة كمضافات مهمة في صناعة المواد الغذائية بسبب مقدرتها المضادة للجراثيم في منتجات اللحوم الجاهزة للطعام، فهي مرشحة ممتازة لتحل محل الجزيئات الصنعية ذات التأثير السام والمسرطن عموماً، وكان الاستخراج الفعال لهذه الجزيئات المضادة للجراثيم من مصادرها الطبيعية إلى جانب تحديد نشاطها في المنتجات التجارية يمثّل تحدّياً كبيراً للباحثين والمساهمين في التصنيع الغذائي. ولهذا كان هدف هذا البحث تسليط الضوء على تطبيق المستخلصات النباتية لتحسين مدة الصلاحية والخصائص الغذائية والصحية لمنتجات اللحوم الحمراء.

أظهرت النتائج فعالية المستخلصات المائية والإيتانولية والكلوروفورمية لنبات الأذينة السورية *Phlomis syriaca* البرية على الجراثيم المعزولة من اللحوم، حيث أبدت الخلاصة المائية لنبات الأذينة بتركيز 1% نتائج إيجابية على الجراثيم، حيث تراوحت أقطار التثبيط بين (12-21) ملم، وأبدت السلمونيلة حساسية عالية للمستخلص مقارنة بالسلالات الجرثومية الأخرى إذ بلغ قطر هالة

التثبيط 21 ملم، كما بلغ قطر هالة التثبيط 20 مم عند الزائفة الزنجارية والسلمونيلة، كما أبدت العنقوديات الذهبية حساسية عالية للمستخلص الكلوروفورمي مقارنة بالسلالات الجرثومية الأخرى وبلغ قطر هالة التثبيط 20 ملم، كما بلغ 19 ملم عند الشيغلة، و17 ملم عند الإشريكية القولونية ، ولوحظ بعد الخزن المجمّد بالمستخلص المائي للأذينة السورية بتركيز 1% انخفاض حاد بعدد الجراثيم بعد 48 ساعة من الحفظ عند درجة حرارة (−4) م° إذ انخفّضت الكثافة الجرثومية على سطح شرائح اللحم الحمراء على نحو يتناسب مع طول فترة التجميد.

الكلمات المفتاحية: الأذينة السورية، المستخلصات النباتية، اللحوم الحمراء، الجراثيم.

Evaluation of the Bioactivities of Plant Phlomis syriaca on Extractions from some Pathogenic Microorganisms isolated from local fresh Red meat

Abstract

Plant extracts have become increasingly important additives in the food industry because of their antimicrobial activity in processed meat products due to their natural origin. They are an excellent candidate to replace synthetic molecules which are generally considered to have toxic and carcinogenic effects. The effective extraction of these antioxidant molecules from their natural sources As well as identifying their activity in commercial products is a major challenge for researchers and contributors to the Food processing.

The aim of this research was to highlight the application of plant extracts to improve shelf life and nutritional and health characteristics of red meat products.

The results showed the effectiveness of the aqueous, ethanolic and chloroform extracts of the wild *Phlomis syriaca* plant on the bacteria isolated from meat, where the aqueous extract of the plant Atrium with a concentration of 1% showed positive results on the bacteria, as the inhibition diameters ranged between (12-21) mm, and *Salmonella* showed high sensitivity to the extract compared to the bacterial strains The diameter of the inhibition halo reached 21 mm, and the sensitivity of *Listeria* appeared to be high to the ethanolic extract of the auricle, as the diameter of the inhibition halo reached 23 mm, and the diameter of the inhibition halo reached 20 mm in *Pseudomonas aeruginosa* and *Salmonella*, and *Staphylococcus aureus* showed high sensitivity to the chloroform extract compared to other bacterial strains. The inhibition halo is 20 mm, as it reached 19 mm in *Shigella*, and 17 mm in *Escherichia coli*, and it was observed after the frozen storage of the aqueous extract of the Syrian auricle at a concentration of 1%, a sharp decrease in the number of germs after 48 hours of preservation at a temperature of (-4) °C, as the bacterial density decreased on the surface of the red meat slices in a manner commensurate with the length of the freezing period.

Keywords: *Phlomis syriaca*, Plant extracts, red meat, pathogenic microbes.

المقدمة

يُعدّ التسمُّم الغذائي أحد أكثر مسببات المرض والموت في البلدان النامية (Doughari and Pukuma 2007; Pirbalouti *et al*., 2010, Sapkota *et al*., 2012)، ويمكن أن يعود ذلك للتلوث بالجراثيم سلبية الغرام، مثل: السَّلمونيلّة التيفيّة *Salmonella typhi* والإشريكيّة القولونيّة *Escherichia coli* والزائفة الزنجارية *Pseudomonas aeruginosa* (Solomakos *et al*., 2008, Pandey and Singh, 2011)، والجراثيم إيجابية الغرام، مثل: المكورات العنقودية الذهبية *Staphylococcus aureus* والعصوية الشمعية *Bacillus cereus*.

يمكن استعمال المواد الكيميائية الحافظة لمنع حدوث فساد المواد الغذائية وحفظ تخزينها (Yamamura *et al*., 2000)، ويتطلّب التحكُّم في العوامل الممرضة المنقولة بالأغذية استعمال تقنيات حفظ عديدة عند تصنيع المنتجات الغذائية وتخزينها؛ لذلك هناك حاجة متزايدة لمواد حافظة نشطة يمكنها إطالة العمر الافتراضي للمنتَج الغذائي بتثبيط النمو الجرثومي دون استخدام الملح والسكر التي يميل المستهلك نحو تفضيل النسب المنخفضة منها (Zink, 1997)، بالإضافة الدور السلبي للإضافات الغذائية الصنعية وظهور تأثيراتها الجانبية السلبية في الصحة ما دفع إلى تطوير بدائل طبيعية واستعمال المستخلصات والزيوت النباتية والزيوت كعوامل مضادة للجراثيم والتي هي أكثر أماناً ونشاطاً (لايقة وآخرون، 2015، Bialonska *et al*., 2010, Tajkarimi *et al*., 2010; Hussain *et al*., 2018)، فللزيوت الأساسية أو مكوناتها خواص مضادة للجراثيم (Oussalah *et al*., 2007) وللطفيليات (George *et al*., 2009) وللحمات (Astani *et al*., 2011) وللفطريات (Silva *et al*., 2011; Tserennadmid *et al*., 2011) ومضادة للأكسدة (Brenes and Roura, 2010)،

مع ذلك فاستعمال الزيوت والمستخلصات النباتية كمواد حافظة للأغذية يتطلّب معرفة التركيز المثبط الأدنى Minimal Inhibition Concentration(MIC) لها.

تتعرّض منتَجات اللحوم للأكسدة لاسيما عند التخزين، ويسهّل الفرم تفاعل المؤكسدات مع الحموض الدهنية غير المشبعة وتكوين الجذور الحرة (Ibrahim *et al*., 2010; Yogesh and Ali, 2014)، وهو ما يترك أثراً سيئاً في اللون والنكهة والملمس وجودة الأغذية (Ripoll *et al*., 2011; Trefan *et al*., 2011; Vaithiyanathan *et al*., 2011)، ولحسْن الحظ فإن تطبيق مضادات الأكسدة يمنع أكسدة الدهون (Martinez-Tome *et al*., 2001)، وتستأثر النباتات بأهمية كبيرة كمضافات طبيعية (Lindberg and Bertelsen, 1995; Zheng and Wang, 2001).

تأتي المكورات العنقودية الذهبية والإشريكية القولونية في مقدمة مسببات الأخماج الأكثر انتشاراً (Layqa *et al*., 2015; Ali Nizam and Hussain 2016)، فالذهبيّة تسبّب الإصابات الجلدية والتسمم الغذائي والالتهابات الحادة في الدم، والقولونية تسبب التهابات المسالك البولية والأمعاء والقولون، ووفقاً لبيانات معهد Broad (2010) كانت القولونية مسؤولة عن 17.3% وكانت الذهبية مسؤولة عن 18.8% من الإصابات السريرية التي تتطلب دخول المستشفى (Tiemersma *et al*., 2004).

مبررات البحث وأهدافه

بسبب انتشار عدد كبير من هذه النباتات في البيئة السورية، ولما كانت الأحياء الدقيقة عوامل تُتلِف الأغذية ومُمرِضات تنتقل بالغذاء وكانت البدائل الطبيعية مسألة مهمة فإن المستخلصات النباتية والزيوت الأساسية بما تمتلكه من خصائص ومكوّنات، فإن دراسة تأثير الأذينة، كمواد حافظة للحوم ومنع فسادها بالأحياء الدقيقة أو نقلها للعوامل الممرضة وإطالة مدة حفظها، تستأثر بأهمية كبيرة، **لذلك هدف هذا البحث** إلى تحديد الفعالية المضادة للمستخلصات المائية والإيتانولية والكلوروفورمية لنبات الأذينة

السورية على بعض الجراثيم المعزولة من اللحوم الحمراء وحفظها بوصفها مواد فعالة حيوياً ويمكن أن تكون بديلة للصادات والمواد الكيميائية الصنعية.

المواد وطرائق العمل Materials and Methods

1. العينات النباتية Plant Materials

جُمع الجزء الخضري من نبات الأذينة السورية *Phlomis syriaca* في أيار عام 2020 من مواقع على جبل النبي هابيل المطلّ على سهل الزبداني، على ارتفاع نحو 1300 م عن سطح البحر، ونُقلت العينات إلى المختبر وغسلت بالماء المقطّر المعقّم، ثم جُفّفتْ على أوراق ترشيح بدرجة حرارة المختبر 25 م°.

ينتمي نبات الأذينة السورية *Phlomis syriaca* أو العيزارة أو السراجية (الشكل 1) إلى الفصيلة الشفوية *Lamiaceae*، وهو أعشاب دائمة الخضرة صغيرة، يصل طولها إلى متر واحد وعرضها 1.5 م، الأوراق بيضوية ومغطاة بأوبار ناعمة، الأزهار أنبوبية طولها 3 سم بلون أصفر أو بنفسجي، وتزهر خلال الفترة من نيسان حتى حزيران، وتنمو في الصيف مقاومة للجفاف، دائمة الخضرة، سهلة النمو، جيدة الإزهار (Pottier, 1981)، موطن هذا النوع في بلاد الشام وتركيا وينتشر في غابات عجلون والكرك والسلط وفي بعض المناطق الصحراوية.

يُستعمل لعلاج أمراض المعدة والأمعاء ولحماية الكبد والكلى والقلب والأوردة والعظام، وهنالك أنواع منه لعلاج الحمى والسعال والبرد، ولعلاج الحروق والتهابات الجلد والحساسية ولشفاء قرحة المعدة
(Vazquez *et al.*, 1997; Tardio *et al.*, 2006).

الشكل 1. النبات المختار للدراسة في البحث: الأذينة السورية *Phlomis syriaca*.

2. تحضير المستخلصات النباتية Preparation of Plant Extracts

المستخلصات المائية aqueous extracts

وُضعت كمية من الأوراق المجفّفة سابقاً في الحاضنة مدة ساعتين بدرجة حرارة 37 م° للتخلص من أي رطوبة في العينة لسهولة طحن الأوراق (Blazekovic *et al.*, 2011). طُحنت الأوراق الجافة وأُخذت كمية 25 غ من المسحوق ونُقعت في حوجلة سعة 500 مل بإضافة 250 مل من الماء المقطر (Khayyat *et al.*, 2018)، وضعت العينات في الرجاج على سرعة 170 دورة/ د في درجة حرارة المختبر 25 °م، بعيداً عن الضوء مدة 48 ساعة (Mahmoudi *et al.*, 2014). رُشِّح المستخلص وجُفِّف في حاضنة هوائية لا تتجاوز حرارتها 40 م°.

المستخلصات الإيتانولية والكلوروفورمية Ethanol and chlorophormic extracts

نُقعت كمية 25 غ من المسحوق النباتي في حوجلة سعة 500 مل بإضافة 250 مل من أحد المذيبات العضوية (الإيتانول بتركيز 95% – الكلوروفورم) إليها كل مرة، ووضعت في الرجّاج على سرعة 125 دورة/ د في درجة حرارة المختبر 25 °م (Hamad ,*et al*, 2013)، ورُشِّح المستخلص باستعمال ورق ترشيح واتمان لمدة ساعة ثم جرى استعمال المبخّر الدوار Rotary Evaporator تحت ضغط منخفض للتخلص من المذيب العضوي عند درجة 45 م° (Khayyat, *et al*., 2018). أُعيدت الخطوات السابقة للمستخلصات المائية والعضوية بواقع ثلاثة مكررات لكل منها، وحُسب مردود المستخلصات الجافة المائية والعضوية وفق العلاقة (Chanthaphon *et al*., 2008):

$$\text{المردود \%} = \frac{\text{وزن المستخلص الجاف بعد التبخير}}{\text{وزن مسحوق الأوراق الجافة}} \times 100$$

3. عزل الأحياء الدقيقة الممرضة Isolation of Pathogens

عُزلت الأحياء الدقيقة الممرضة من عينات لحوم من السوق المحلية، واستُعملت مجموعة من الأوساط الصلبة الانتقائية للجراثيم، مثل: وسط إيوزين زرقة المِتلين EMB Agar لتنمية الأمعائيات، وسط شابمان آغار Chapman Agar لتنمية العنقوديات، وسط سيتراميد آغار Cetramide Agar لعزل الزائفة الزنجارية *Pseudomonas aeruginosa* القادرة على تحرير الأمونيا، إضافة إلى وسط الآغار المغذي والمرق المغذي (APHA, 2000). تم تشخيص الجراثيم المعزولة من العينات بعد إجراء الاختبارات الحيوية الكيميائية اللازمة (الأُكسيداز، الكَتالاز، الإندول، أحمر المِتيل،

تخمير السِّترات، فوجس بروسكاور، تحرير H_2S) اعتماداً على دليل بيرجي (Garrity *et al.*, 2005).

اختُبِرت حساسية الجراثيم المعزولة ومقاومتها بطريقة الانتشار القرصي، وحُدّدت الحساسية والمقاومة لبعض الصادات بقياس هالات التثبيط على وسط مولر هنتون آغار Mueller Hinton Agar (Barker and Kehoe 1995)، واستُعملت مجموعة من الصادات (الجدول 1).

الجدول1: الصادات المستعملة، mcg.

Antibiotic	Code	Antibiotic	Code
Ampicillin/ Cioxacillin	APX: 25/5	Cefaclor	CEC: 30
Tobramycin	TOB: 10	Lincomycin	L:2
Erythromycin	E:15	Pipemidic	PI:20

4. تحضير اللقاح الجرثومي Preparation of bacterial Inoculum

أُجريت عملية تنمية الجراثيم المعزولة على وسط الآغار المغذي Nutrient Agar (NA) وحضنها في الدرجة 37 °م مدة 24 ساعة، ثم أُخذ جزء من مستعمرة بواسطة اللاقحة الجرثومية من كل نوع من الجراثيم، في ظروف عقيمة، إلى أنبوبة اختبار تحتوي 5 مل من المرق المغذي Nutrient Broth، وحُضنت في درجة حرارة 37 °م مدة 4 ساعات، ثم أُجريت التخفيفات المناسبة لكل نوع من الجراثيم بحيث يكون العدد الكلي للخلايا بحدود 1.5×10^8 خلية/مل والذي يكافئ هذا العدد 0,5 McFarland (Anandi and Juan 2009).

5. اختبار فعالية المستخلصات النباتية
Test Bioactivity of Plant Extraction

حُضّرت المستخلصات المائية والإيتانولية والكلوروفورمية بتراكيز 0.25، 0.5، 0.75، 1.0%، ونقل 0.5 مل من المعلق الجرثومي وفرش فوق وسط الاستزراع بماسحة قطنية،

بعد 15 دقيقة وُزِّعت المستخلصات في حفر ضمن الآغار ووضع في كل حفرة 80 ميكروليتراً من المستخلص ووضعت في البراد مدة ساعتين لانتشار المادة الفعالة، ثم حُضنت في الدرجة 37 °م مدة 24 ساعة، إن ظهور هالات التثبيط inhibition zones دليل على تثبيط النمو الجرثومي، وتُقاس أقطارها بعد انتهاء عملية الحضن بأداة مسطرة مليمترية، أُجريت التجربة بواقع ثلاثة مكررات (Kelmanson *et al*., 2000).

6. **قياس التركيز المثبط الأصغري** Measurement of Minimal Inhibition Concentration MIC

أُجري تحضير المرق المغذي Nutrient Broth ووضع 5 مل منه في أنابيب اختبار من النوع نفسه والحجم نفسه ثم أضيف 0.1 مل من المعلق الجرثومي 0,5 McFarland المخفّف إلى الأنابيب و 1 مل من التراكيز المختلفة للمستخلصات النباتية المستعملة 1.0، 0.75، 0.5، 0.25 % ما عدا أنبوبة واحدة عُدَّت كشاهد control، ثم حُضنت الأنابيب في درجة حرارة 37 °م مدة 24 ساعة. لوحظ التعكير في كل الأنابيب بالعين المجردة وقُورن بالشاهد، ثم أُجري ضبط المطيافية الضوئية Spectrophotometer عند 100% عن طريق الوسط الغذائي المستعمل Nutrient Broth والخالي من المعلق الجرثومي والمستخلص بعد وضعه في الأنبوبة الخاصة بالجهاز عند طول موجة 600 نانومتر، ثم قُيس الشاهد وسُجّلت القراءة من الجهاز، وقُيست جميع العينات بعد وضعها في الأنابيب الخاصة بالجهاز المستعمل وقُورنت بالشاهد (Wan ,*et al*,1998).

7. **تحضير أقراص اللحم الأحمر المفروم** Preparation of pieces minced red meat

أُجريت عملية فرم عينات اللحوم الحمراء البالغ عددها (10) عينات، وقُسمت كل عينة إلى معاملتين: الأولى: الشاهد بدون إضافة مستخلصات والأخرى بإضافة المستخلص المائي للأذينة بتركيز 1%. أُجريت عملية تحضير أقراص اللحم ثم وُضعت

في أكياس مفرغة من الهواء، وأغلقت الأكياس جيّداً وحفظت في البراد بدرجة حرارة 4– °م مدة 48 ساعة جرت خلالها متابعة التغييرات الحاصلة على التعداد العام للجراثيم (الموسوي والعذاري 2017).

النتائج والمناقشة Results and Discussion

1. مردود المستخلصات الجافة لنبات الأذينة السورية *Phlomis syriaca*

أظهرت النتائج الممثلة بالجدول 2 أن نبات الأذينة يحتوي كمية من المستخلص الصافي 2.96% من المستخلص المائي، وبلغ مردود المستخلص الإيتانولي 2.62% وكان أقل مردود للمستخلص الكلوروفورمي إذ بلغ 1.7%، فقد ازداد مردود المستخلص النباتي مع ازدياد قطبية المذيب المستعمل في عملية الاستخلاص، ويتعلق ذلك بالوزن الجزيئي للمواد التي يمكن أن يستخلصها كل مذيب، وتتباين المذيبات المستعملة لاستخلاص المكونات النباتية الفعالة (Cowan 1999)، إذ يستخلص الكلوروفورم التريبنوئيدات والفلافونوئيدات، ويستخلص الإيتانول التانينات والبولي فينولات والبولي أستيلينات والفلافونول والتريبنوئيدات والستيرولات والقلويدات، أما الماء فيستخلص الأنتوسيانينات والنشويات والتانينات والصابونينات والتريبنوئيدات وعديدات الببتيد والليستينات، حيث يزداد مردود المستخلص مع ازدياد قطبية المذيب المستعمل (Osadebe and Akabogu 2006).

الجدول 2. مردود المستخلصات النباتية للأذينة السورية *Phlomis syriaca* .

مردود المستخلص%	المائي			الإيتانولي			الكلوروفورمي		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
	2.73	3.20	2,96	2,88	2,36	2,62	1,56	1,72	1,82
المتوسط	2.96 ± 0,22			2.62 ± 0,26			1.7 ± 0,1		

2. الأنواع والأجناس الجرثومية المعزولة من اللحوم

يبين الجدول 3 الأنواع والأجناس الجرثومية الستة التي تم عزلها عند اختبار اللحوم الحمراء ميكروبيولوجياً، إذ عُزلت من عينات لحوم الأغنام والعجل المحلية الأجناس والأنواع الآتية: السلمونيلة *Salmonella*، والإشريكية القولونية *Escherichia coli*، والمكورات العنقودية الذهبية *Staphylococcus aureus*، والزائفة الزنجارية *Pseudomonas aeruginosa*، والكلبسيلة *Klebsiella*، والشيغلة *Shigella*.

الجدول 3. الأجناس الجرثومية المعزولة من اللحوم الحمراء من مناطق مختلفة في حمص.

أنواع وأجناس الأحياء الدقيقة المختبرة	عدد العينات الإيجابية في اللحم %	
	لحم غنم	لحم عجل
E. coli	85.71	66.66
Pseudomonas aeruginosa	57.14	33.33
Klebsiella sp.	42.85	16.66
Shigella sp.	28.57	50.00
Salmonella sp.	42.85	33.33
Staphylococcus aureus	14.28	66.66

كما جرى تحديد الجراثيم المعزولة بإجراء بعض الاختبارات الحيوية الكيميائية المحددة للأجناس يمكن تلخيصها في الجدول (4) إذ يُلاحظ امتلاك جميع العزلات لإنزيم الكَتلاز من خلال تكوين فقاعات غاز الأكسجين والماء عند تحلل بيروكسيد الهيدروجين H_2O_2، كما بينت نتائج الفحص الكيميائية سلبية جميع العزلات لاختبار الأكسيداز باستثناء الزائفة الزنجارية التي أعطت نتيجة إيجابية لاختبار الأكسيداز من خلال تكوين اللون البنفسجي عند إضافة المستعمرات إلى ورق ترشيح مشبع بكاشف الأكسيداز. ولم تتمكن العزلات من إنتاج الإندول من التربتوفان لعدم امتلاكها التربتوفيناز ، إذ يمكن التحري عن الإندول بإضافة قطرات من كاشف كوفاكس Kovacs reagent فيما عدا الإشريكية القولونية التي كانت إيجابية لاختبار الإندول (Harley, 2005).

الجدول4. نتائج تصنيف العزلات السلبية والإيجابية الغرام تبعاً للاختبارات الحيوية الكيميائية.

SAC	***Glu***	***LAC***	***c***	***U***	***MR***	***I***	***VP***	***o***	***K***	
متغير	+	+	_	_	+	+	_	_	+	*E.coli*
_	+	_	_	_	+	_	_	_	+	*Salmonella*
_	**-**	_	+	_	_	_	_	+	+	*p.aeruginosa*
+	+	+	+	+	+	_	+	_	+	*s.aureus*
_	+	_	_	_	+		_	_	+	*shigella*
+	+	+	+	+	_	_	+	_	+	*Klebsiella*

, يوريا (U) , أحمر الميتيل (MR) , إندول(I), فوجس بروسكوير(VP) , أكسيداز(O) , كتلاز(k)
سكروز (SAC) ,غلوكوز(Glu) ,لاكتوز(L) , سيترات سيمون(c)

3. فعالية مستخلصات نبات الأذينة السورية على الأحياء الدقيقة الممرضة

يبيّن الجدول 5 نتائج دراسة تأثير فعالية المستخلص المائي للأذينة السورية البرية تجاه الجراثيم المعزولة.

الجدول5. قطر هالة التثبيط للمستخلص المائي لنبات الأذينة السورية *Phlomis syriaca* البرية على الجراثيم المختبرة ، (الواحدة ملم).

متوسط قطر هالة التثبيط، ملم				الأحياء الدقيقة المختبرة
%1.0	%0.75	%0.5	%0.25	
1.0 ± 13	1.52 ±10	0.57 ± 7	-	*E. coli*
0.0 ± **20**	1.0 ± 15	± 10 0.57	0.0 ± 7	*Pseudomonas aeruginosa*
± 17 1.52	0.0 ± 13	1.0 ± 10	0.0 ± 7	*Klebsiella*
1.0 ± 15	0.0 ± 10	0.57 ± 8	-	*Shigella*
± **21** 1.52	1.0 ± 14	0.0 ± 10	0.0 ± 7	*Salmonella*
0.0 ± 12	0.0 ± 10	0.0 ± 9	-	*Staphylococcus aureus*

يبيّن الجدول نتائج دراسة تأثير النشاط الحيوي للمستخلص المائي للأذينة السورية البرية ضد الجراثيم

حيث أبدى التركيز 1.0% فعالية ضد الجراثيم المختبرة، حيث تراوحت أقطار التثبيط بين 12 و 21 ملم ، وأبدت السالمونيلة حساسية عالية للمستخلص مقارنة بالسلالات الجرثومية الأخرى إذ بلغ قطر هالة التثبيط 21 مم، كما بلغ قطر هالة التثبيط للزائفة الزنجارية 20 مم .حيث تعود الفعالية المضادة للجراثيم والفطريات إلى الجليكوسيدات phenylethanoid glycosides المعزولة من نبات *P. syriaca* (Aldaba,R,2017).

يبيّن الجدول 6 نتائج دراسة النشاط الحيوي للمستخلص الإتانولي لنبات الأذينة السورية البرية ضد الأحياء الدقيقة.

الجدول6. قطر هالة التثبيط للمستخلص الإيتانولي لنبات الأذينة السورية *Phlomis syriaca* البرية تجاه الجراثيم المختبرة، (الواحدة ملم).

الجراثيم الممرضة المختبرة	متوسط قطر هالة التثبيط ، %			
	0.25	0.5	0.75	1.0
E. coli	0.0 ±13	1.0 ±15	0.0 ±16	0.5 ±19
P. aeruginosa	1.52 ±11	0.0 ±13	1.0 ±16	0.0 ±**20**
Klebsiella sp.	0.3 ± 09	0.0 ±11	0.7 ±15	1.0 ±17
Shigella sp.	-	1.52 ±11	0.5 ±13	0.0 ±15
Salmonella sp.	1.52 ±11	0.5 ±15	0.57 ±19	1.0 ±**20**
S. aureus	0.0 ±10	0.0 ±11	0.0 ±13	0.0 ±15

يبين الجدول (6) فعالية المستخلص الإتانولي لنبات الأذينة السورية على الأحياء الدقيقة، حيث أبدى فعالية جيدة ضد السلالات المعزولة بأقطار تثبيط تراوحت بين 9 و 23 مم، حيث بدت حساسية الليستيرية عالية للمستخلص حيث بلغ قطر هالة التثبيط 23 مم، كما بلغ قطر هالة التثبيط 20 مم عند كل من الزائفة الزنجارية، والسالمونيلة.

أشار الباحثون أن هناك علاقة بين الهياكل الكيميائية للمركبات الأكثر وفرة في المستخلصات أو الزيوت الأساسية للنباتات والنشاط المضاد للأحياء الدقيقة (Farag et al., 1989; Deans and Svoboda, 1989).

كشفت الدراسات أن iridoids, flavonoids, phenylpropanoids, phenylethanoids lignans, neolignans diterpenoids, alkaloids, βcaryophyllene, α-pinene germacrene D and limonene, linalool. هي المكونات الرئيسية للأذينة السورية (Kamel et al., 2000; Couladis et al., 2000; Saracoglu et al., 2003; Celik et al., 2005; Zhang and Wang, 2008, 2009)

الجدول7. قطر هالة التثبيط للمستخلص الكلوروفورمي لنبات الأذينة السورية *Phlomis syriaca* ضد الجراثيم المختبرة، الواحدة ملم.

الجراثيم الممرضة المختبرة	متوسط قطر هالة التثبيط ، %			
	0.25	0.5	0.75	1.0
E. coli	0.0 ±10	1 ±13	0±15	1 ±17
P. aeruginosa	1.52 ±8	0.0 ±12	1±14	0.0±15
Klebsiella sp.	0.57 ±10	1.52 ±12	1 ±13	1±15
Shigella sp.	0.0 ±11	0.57 ±14	0±16	0.0 ±19
Salmonella sp.	1 ±10	0.0 ±11	1 ±13	0.0 ±16
S.aureus	0.0 ±12	1±13	1.52±15	**0.0 ±20**

يبين الجدول (7) فعالية المستخلص الكلوروفورمي لنبات الأذينة السورية على الأحياء الدقيقة، حيث أبدت العنقوديات الذهبية حساسية عالية مقارنة بالسلالات الجرثومية الأخرى حيث بلغ قطر هالة التثبيط 20ملم ، في حين بلغ 19ملم عند الشيغلة الصورة ، و 17ملم عند الإشريكية القولونية.

الجدول8. نتائج حساسية ومقاومة الأنواع والأجناس الجرثومية المدروسة تجاه الصادات الحيوية، (الواحدة ملم).

E	L	PI	TOB	APX	CEC	Abbrev.
15	2	20	10	30	30	Conc.
R	R	6	9	R	R	*E. coli*
R	R	9	13	R	R	*Pseudomonas aeruginosa*
R	R	9	11	R	R	*Klebsiella* sp.
R	R	9	10	R	R	*Shigella* sp.
R	R	8	13	R	R	*Salmonella* sp.
R	R	9	10	R	R	*Staphylococcus aureus*

E: Erythromycin ,L: Lincomycin, PI: Pipemidic, TOB: Tobramycin, APX: Ampicillin/ Cioxacillin, CEC: Cefaclor.

يبين الجدول 8 نتائج حساسية الجراثيم الممرضة المعزولة وكذلك المبيضات البيض ومقاومتها تجاه الصادات الحيوية المستعملة، ويتضح أن جميع الجراثيم الخاضعة للدراسة مقاومة للأمبيسيلين Ampicillin والسيفاكلور Cefaclor واللينكوميسين Lincomycin والإرثروميسين Erythromycin.

أبدت الزائفة الزنجارية سلبية الغرام حساسية جيدة تجاه هذين الصادين، إذ بلغت أقطار هالة التثبيط 13 و 9 ملم على التوالي، كما أبدت المبيضات البيض حساسية تجاه التوبراميسين Tobramycin والبيبميديك Pipemidic إذ بلغت أقطار هالة التثبيط 10 و 9 ملم على التوالي.

تبيّن نتائج البحث أن أقطار هالة تثبيط المستخلصات المائية والإيتانولية والكلوروفورمية كان أكبر عموماً من أقطار هالة التثبيط للصادات الحيوية المستعملة؛ ما يؤكد أهمية نتائج استعمال نبات الأذينة السورية ***Phlomis syriaca*** كمادة صادة للأحياء الدقيقة الممرضة.

يبيّن الجدول 9 تأثير الخزن في تعداد الجراثيم الموجود في 1 سم^3 من شرائح اللحم الحمراء المفرومة.

الجدول9. تأثير مدة التخزين في تغيير تعداد الجراثيم الموجودة في 1 سم3 من شرائح اللحم الحمراء، العدد × 1000

عينات اللحوم الحمراء		وجود الجراثيم، $\times 10^{-3}$						
		قبل الخزن	بعد الخزن					
			ساعة		24 ساعة		48 ساعة	
		العدد	العدد	المعدل %	العدد	المعدل %	العدد	المعدل %
لحم بقر	1	75	73	97.33	69	92	61	81.33
	2	43	43	100	39	90.69	32	74.41
	3	66	64	96.96	55	83.33	50	75.75
	4	50	48	96	44	88	30	60
	5	65	63	96.92	57	87.69	50	76.92
لحم غنم	6	110	108	98.18	100	90.90	90	81.81
	7	80	78	97.5	75	93.75	70	87.5
	8	53	50	94.33	45	84.90	35	66.03
	9	70	68	97.14	65	92.85	60	85.71
	10	83	80	96.38	78	93.97	75	90.36

يبين الجدول (9) عدد الجراثيم الموجودة على سطح اللحوم الحمراء قبل وبعد الخزن المجمد بالمستخلص المائي للأذينة بتركيز 1%، ويُلاحظ الانخفاض الحاد بعدد الجراثيم بعد 48 ساعة من الحفظ عند درجة حرارة −4 °م قد خفض الكثافة الجرثومية على سطح شرائح اللحوم الحمراء على نحو يتناسب مع طول فترة التجميد. ويعود تأثير التجمد في تثبيط النمو الجرثومي إلى دوره في تجمد جزء من الماء المتوافر لنشاط الجراثيم وبذلك تنخفض قيمة النشاط المائي في المادة الغذائية، وهذا بدوره يؤدي إلى كبح نشاط الأحياء الدقيقة.

الإستنتاجات Conclusions

1- ازدياد مردود المستخلص النباتي مع ازدياد قطبية المذيب المستعمل في عملية الاستخلاص.

2- المستخلصات المائية والإيتانولية والكلوروفورمية لنبات الأذينة هي عوامل مضادة للأحياء الدقيقة.

3- أقطار هالة تثبيط المستخلصات المائية والإيتانولية والكلوروفورمية كان أكبر عموماً من أقطار هالة التثبيط للصادات الحيوية المستعملة.

4- التركيز العالي من الأذينة 1% تميّز بتأثير كابح للتعداد الكلي للجراثيم في اللحوم.

5- إن إضافة المستخلصات المائية لنبات الأذينة إلى اللحوم الحمراء تعطي دعماً لآلية الحفظ المجمد.

6- إن استخدام المستخلصات النباتية يمكن أن تكون طريقة وتقنية صحية في حفظ اللحوم.

7- المستخلصات النباتية تعدّ مغذّيات مفيدة للصحة لما تحتويه من مركبات طبية.

التوصيات Recommendations

1- استعمال نبات الأذينة السورية ***Phlomis syriaca*** البرية كمادة صادة للأحياء الدقيقة الممرضة.

2- استخدام نبات الأذينة لتنكيه اللحوم والخضراوات.

3- دمج المستخلصات والزيوت النباتية في نظام التعبئة والتغليف.

References المراجع

1) لايقة، ميسون؛ علي نظام، عدنان؛ القاضي، عماد (2015). فاعلية مستخلصات أجزاء الآس المزروع تجاه بعض الجراثيم الممرضة. مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية، 31 (1). 377-394.

2) الموسوي، أم البشر حميد جابر، العذاري، رسل علي عدنان (2017). تحضير بعض المستخلصات النباتية ودراسة تأثيرها في المؤشرات الكيميائية لأقراص اللحم المفروم والمخزنة بالتبريد والتجميد، مجلة الكوفة للعلوم الزراعية، 9 (4). 221-241.

1. Ali Nizam A., Hussain M. (2016). Prevalence, Antibiotic resistance of *Staphylococcus aureus*, CNS and determination of MRSA, MRCNS strains in clinical samples. Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Biological Sciences Series 38(1): 167-180.
2. Anandi M., Juan C. (2009). Drug susceptibility testing for *Mycobacterium tuberculosis*. Journal of Antimicrobial Chemotherapy. 54:130-133.
3. APHA, AWWA and WEF (2000). Standard Methods for Examination of water and wastewater. 20th edition. American Public Health Association, Inc., Baltimore, M. D. USA.
4. Astani A., Reichling J., Schnitzler P. (2011). Screening for antiviral activities of isolated compounds from essential oils. Evidence-based complementary and alternative medicine.
5. Barker G. A.; Kehoe E. (1995). Assessment of disc diffusion methods for susceptibility testing of Aeromonas salmonicida. Aquaculture,. 134:1-8.
6. Bialonska D., Ramnani P., Kasimsetty S., Muntha K., Gibson G., Ferreira D. (2010). The influence of pomegranate by-product and punicalagins on

selected groups of human intestinal microbiota. Int. J. Food Microbiol. 140:175-182.

7. Blazekovic B., Stanic G., Pepeljnjak S., Vladimir-Knezevic S. (2011). In vitro antibacterialand antifungal activity of Lavandula × intermedia Emeric ex Loisel. 'Budrovka'. Molecules, 16: 4241-4253.
8. Brenes A., Roura E. (2010). Essential oils in poultry nutrition: main effects and modes of action. Anim. Feed Sci. Technol. 158, 1-1410.1016/j.anifeedsci.2010.03.007.
9. Celik, S., Gokturk, R.S., Flamini, G., Cioni, P.L., Morelli, I., (2005). Essential oils of *Phlomis leucophracta*, *Phlomis chimerae* and *Phlomis grandiflora* var. *grandiflora* from Turkey. Biochemical and Systematic Ecology 33: 617–623.
10. Chanthaphon S.; Chanthachum S., Hongpattarakere T. (2008). Antimicrobial activities of essential oils and crude extracts from tropical Citrus spp. against food-related microorganisms. Songklanakarin J. Sci. Technol., Vol.30:125-131.
11. Couladis, M., Tanimanidis, A., Tzakou, O., Chinou, I.B. and HarvalaA, C., (2000). Essential oil of Phlomis lanata growing in Greece: Chemical composition and antimicrobial activity. Planta Medica, 66: 670–672.
12. Cowan M. M. (1999) Plant Products as antimicrobial agents clinical microbiology reviews,12 (4), 564-582.
13. Deans, S.G., Svoboda, K.P., (1989). Antimicrobial activity of summer savory (Satureja hortensis L.) essential oil and its constituents. J. Horticul. Sci., 88: 308-316.
14. Doughari J. H., Pukuma M., D. N. (2007). Antibacterial effects of Balanites aegyptiaca L. Drel.

and Moringa oleifera Lam. on Salmonella typhi. African Journal Biotechnology. 6(19): 2212-2215.

15. Farag, R.S., Daw, Z.Y., Hewedi, F.M., G.S.A. Elbaroty. (1989). Antimicrobial activity of some Egyptian spice essential oils. J. Fd. Prod., 52: 665-667.

16. Garrity G. M.; Brenner D.; Krieg N., Staley J. (2005). Bergey's Manual of Systematic Bacteriology. Springer, USA, 2nd Ed.,. 2: 1-1135.

17. George D. R., Smith T., Shiel R., Sparagano O., Guy J. (2009). Mode of action and variability in efficacy of plant essential oils showing toxicity against the poultry red mite, *Dermanyssus gallinae*. Vet. Parasitol. 161, 276-282.

18. Hamad K. J., Al-Shaheen S., Kaskoos R., Ahamad J., Jameel M., Mir S. (2013). Essential oil composition and antioxidant activity of Lavandula angustifolia from Iraq. Int. Res. J. Pharm., 4: 117-120.

19. **Harley, J. P.,** (2005). Laboratory exercises in microbiology, 6th ed. McGraw Hill, New York, NY.

20. Hussain M., Ali Nizam A., Abou-Isba S., Abou-Younes A., Khaddour W. (2018). A Broad-Spectrum Antibacterial Activity of Lyophilized Crude Extracts of Bacillus subtilis against Clinical and Food-Borne Pathogens, International Research Journal of Pharmacy and Medical Sciences (IRJPMS), Volume 1, Issue 3, pp. 15-21, 2018.

21. Ibrahim H. M., Abou-arab A., Abu Salam F. (2010). Addition of some natural plant extracts and their effects on lamb patties quality. J. Food Technol., 8:134-142.

22. Kamel, M.S., Mohamed, K.M., Hassanean, H.A., Ohtani, K., Kasai, R., and Yamasaki, K.,

(2000). Iridoid and megastigmane glycosides from Phlomis aurea. Phytochemistry, 55: 353–357.

23. Kelmanson J., Jager A., Standen J. (2000). Zulu medicinal plants with antibacterial activity. J. Ethnopharmacol., 69:241-246.

24. Khayyat S., Al-Kattan M., Basudan N. (2018). Phytochemical Screening and Antidermatophytic Activity of Lavender Essential Oil from Saudi Arabia. International Journal of Pharmacology Volume 14 (6): 802-810.

25. Layqa M., Ali Nizam A., Alqadi I. (2015). Antibacterial Activity of White and Blue Wild Myrtle Parts Extracts Against Staphylococcus aureus and Staphylococcus epidermidis. Egypt. J. Microbiol. 50: 17- 29.

26. Lindberg M. H., Bertelsen G. (1995). Spices as antioxidants. Trends Food Sci. Technol., 6: 271-277.

27. Mahmoudi R., Zare P., Hassanzadeh P., Nosratpour S. (2014). Effect of Teucrium polium essential oil on the physicochemical and sensory properties of probiotic yoghurt. J Food Process Pres. 38:880–888.

28. Martinez-Tome M., Jimenez A., Ruggieri S., Frega N., Strabbioli R., Murcia M. (2001). Antioxidant properties of Mediterranean spices compared with common food additives. J. Food Prot., 64,1412-1419.

29. Osadebe PO, Akabogu IC (2006) Antimicrobial activity of Loranthus micranthus harvested from kola nut tree.Fitoterapia 77:54-56.

30. Oussalah M., Caillet S., Saucier L., Lacroix M. (2007). Inhibitory effects of selected plant essential oils on the growth of four pathogenic bacteria: *E. coli* O157:H7, *Salmonella*

typhimurium, *Staphylococcus aureus* and *Listeria monocytogenes*. Food Control 18: 414–420.

31. Pandey A., Singh P. (2011). Antibacterial activity of Syzygium aromaticum (Clove) with metal ion effect against food borne pathogens. Asian J. Plant Sci. Res. 1(2): 69-80.
32. Pirbalouti A. G., Jahanbazi P., Enteshari S., Malekpoor F., Hamedi B. (2010). Antimicrobial activity of some Iranian medicinal plants. Arch. Biol. Sci. Belgrade. 62(3): 633-642.
33. Pottier-Alapetite, G., (1981). Flore de la Tunisie. Ed. Imprimerie officielle de la republique Tunisienne, Tunis.
34. Ripoll G., Joy M., Muñoz F. (2011). Use of dietary vitamin E and selenium (Se) to increase the shelf life of modified atmosphere packaged light lamb meat. Meat Sci., 87, 88-93.
35. Sapkota R., Dasgupta R., Rawat D. (2012). Antibacterial effects of plants extracts on human microbial pathogens and microbial limit tests. Int. J. Res Pharm. & Chem., 2(4): 926-936.
36. Saracoglu, I., Varel, M. and Calis, I., (2003). Flavonoid, phenylethanoid and iridoid glycosides from Phlomis integrifolia. Turk. J. Chem., 27: 739–747.
37. Silva F., Ferreira S., Duarte A., Mendonça D., Domingues F. (2011). Antifungal activity of *Coriandrum sativum* essential oil, its mode of action against Candida species and potential synergism with amphotericin B. Phytomedicine 19, 42-47.
38. Solomakos N., Govaris A., Koidis P., Botsoglou N. (2008). The antimicrobial effect of thyme essential oil, nisin and their combination against

Escherichia coli O157:H7 in minced beef during refrigerated storage. Meat Science. 80, 159-166.

39. Tajkarimi M. M., Ibrahim S., Cliver D. (2010). Antimicrobial herb and spice compounds in food. Food Control 21, 1199-1218.

40. Tardio et al., 2006Verdrengh, M.; Collins, L.V.; Bergin, P.; Tarkowski, A. (2004).Phytoestrogen genistein as an anti-staphylococcal agent. Microb. Infect. 6, 86–92.

41. Tiemersma E.W., Bronzwaers S., Lyytikäinen O., Degener J., Schrijnemakers P., Bruinsma N., Monen J., Witte W., Grundman H. (2004). European antimicrobial resistance surveillance system participants: Methicillin-resistant Staphylococcus aureus in Europe. Emerg. Infect. Dis. 10:1627–1634.

42. Trefan L., Bürger L., Bloom-Hansen J., Rooke J., Salmi B., Larzul C., Terlouw C., Doeschl W. (2011). Meta-analysis of the effects of dietary vitamin E supplementation on α-tocopherol concentration and lipid oxidation in pork. Meat Sci., 87, 305-314.

43. Tserennadmid R., Takó M., Galgóczy L., Papp T., Pesti M., Vágvölgyi C., Almássy K., Krisch J. (2011). Anti- yeast activities of some essential oils in growth medium, fruit juices and milk. Int. J. Food Microbiol. 144, 480-486.

44. Vaithiyanathan S., Naveena B., Muthukumar M., Girish P., Kondaiah N. (2011). Effect of dipping in pomegranate (Punica granatum) fruit juice phenolic solution on the shelf life of chicken meat under refrigerated storage (4 °C). Meat Sci., 88, 409-414.

45. Vazquez, F.M., Suarez, M.A., Perez, A., (1997). Medicinal plants used in the Barros Area, Badajoz

Province (Spain). Journal of Ethnopharmacology 55, 81–85.

46. Wan J., Wilcock A., Coventry M. (1998). The effect of essential oil of basil on the growth of Hydrophlia and Pseudomonas fluorescens. J. App. Mic. 84:152-158.
47. Yamamura A., Murai A., Takamatsu H., Watabe K. (2000). Antimicrobial effect of chemical preservatives on enterohemorrhagic Escherichia coli O157:H7. J. Health Sci. 46: 204-208.
48. Yogesh K., Ali J. (2014). Antioxidant potential of thuja (Thuja occidentalis) cones and peach (Prunus persia) seeds in raw chicken ground meat during refrigerated (4±1°C) storage. J Food Sci. Technol., 51, 1547-1553.
49. **Zhang, Y., and Wang, Z.Z.,** (2009). Phenolic composition and antioxidant activities of two Phlomis species: A correlation study. Comp. Rend.Biol., 332: 816–826.
50. Zhang, Y., Wong, Z.Z., (2008). Comparative analysis of essential oil components of three *Phlomis* species in Qinling Mountains of China. Journal of Pharmaceutical and Biomedical Anals 47, 213–217.
51. Zheng W., Wang S. (2001). Antioxidant activity and phenolic compounds in selected herbs. J. Agric. Food Chem., 49, 5165-5170.
52. Zink D. L. (1997). The impact of consumer demands and trends on food processing. Emerging Infect. Dis. 3, 467-469.