

مجلة جامعة البعث

سلسلة العلوم الأساسية



مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 45 . العدد 9

1444 هـ - 2023 م

الأستاذ الدكتور عبد الباسط الخطيب

رئيس جامعة البعث

المدير المسؤول عن المجلة

رئيس هيئة التحرير	أ. د. محمود حديد
رئيس التحرير	أ. د. درغام سلوم

مديرة مكتب مجلة جامعة البعث

بشرى مصطفى

عضو هيئة التحرير	د. محمد هلال
عضو هيئة التحرير	د. فهد شريباتي
عضو هيئة التحرير	د. معن سلامة
عضو هيئة التحرير	د. جمال العلي
عضو هيئة التحرير	د. عباد كاسوحة
عضو هيئة التحرير	د. محمود عامر
عضو هيئة التحرير	د. أحمد الحسن
عضو هيئة التحرير	د. سونيا عطية
عضو هيئة التحرير	د. ريم ديب
عضو هيئة التحرير	د. حسن مشرقي
عضو هيئة التحرير	د. هيثم حسن
عضو هيئة التحرير	د. نزار عبشي

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها

الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة البعث

سورية . حمص . جامعة البعث . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : ++ 963 31 2138071

. موقع الإنترنت : www.albaath-univ.edu.sy

. البريد الإلكتروني : [magazine@ albaath-univ.edu.sy](mailto:magazine@albaath-univ.edu.sy)

ISSN: 1022-467X

شروط النشر في مجلة جامعة البعث

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
 - طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
 - إذا كان الباحث طالب دراسات عليا:
يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقة على النشر في المجلة.
 - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:
يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.
 - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :
يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.
 - إذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :
يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.
 - يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):
عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1- مقدمة
 - 2- هدف البحث
 - 3- مواد وطرق البحث
 - 4- النتائج ومناقشتها .
 - 5- الاستنتاجات والتوصيات .
 - 6- المراجع.

- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (الآداب - الاقتصاد - التربية - الحقوق - السياحة - التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):
- عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1. مقدمة.
- 2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
- 3. أهداف البحث و أسئلته.
- 4. فرضيات البحث و حدوده.
- 5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
- 6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
- 7. منهج البحث و إجراءاته.
- 8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
- 9. نتائج البحث.
- 10. مقترحات البحث إن وجدت.
- 11. قائمة المصادر والمراجع.
- 7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:
 - أ- قياس الورق 25×17.5 B5.
 - ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 - يمين 2.5- يسار 2.5 سم
 - ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8
 - ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20
- . كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي . العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.
- ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.
- 8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.
- 9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.
- 10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة . الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة . سنة النشر . وتتبعها معترضة (-) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة . دار النشر وتتبعها فاصلة . الطبعة (ثانية . ثالثة) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة . وفيما يلي مثال على ذلك:

-MAVRODEANUS, R1986- Flame Spectroscopy. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

. بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة . المجلد والعدد (كتابة مختزلة) وبعدها فاصلة . أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة . مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases Clinical Psychiatry News , Vol. 4. 20 – 60

ج . إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد

بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: (المراجع In Arabic)

رسوم النشر في مجلة جامعة البعث

1. دفع رسم نشر (40000) ل.س أربعون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (100000) ل.س مئة الف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (6000) ل.س ستة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

المحتوى

الصفحة	اسم الباحث	اسم البحث
28-11	حنان ابراهيم د. عصام ديبان	التموضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي التناظر الأربعة، والمتقاطعة بأربعة مستقيمات شكلت مستقيمين مضاعفين (II)
52-29	د. رشا يوسف د. عبلة الزعبي د.ناصر سعد الدين	اصطناع المركب السيراميكي $CaCu_3Ti_4O_{12}$ ودراسة خصائصه البنوية
76-53	علي وطفة د. محمد عامر	الحدوديات المتعمدة في فضاءات سوبوليف
96-77	محمد فاضل د. محمود مصطفى	دراسة بتروغرافية للصخور البازلتية في مواقع باروحة، المحطة، القرية منطقة تللكح غرب سورية

116-97	وليد الديوب د. وليد صهيوني د. علاء ناصيف	تصميم نظري لجهاز بلازما محرقية كثيفة بهدف زيادة مردود الأشعة السينية اللينة الصادرة
140-117	بشرى جاد الله د. شوقي الراشد	تطابقات الامتصاص

التموضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناخي التناظر الأربعة، والمتقاطعة بأربعة مستقيمات شكلت مستقيمين مضاعفين (II)

د. عصام ديبان: أستاذ مساعد في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث.

حنان ابراهيم: طالبة دكتوراه في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث.

ملخص البحث:

ندرس في هذا البحث إحدى حالات تقاطع الأغلفة الخطية لمدارات مناخي تناظر السطوح الجبرية F_n المعطاة بالمعادلة:

$$R \left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i Z_i \right) + S \left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu-1} \zeta_{\lambda+j} Z_{\lambda+j} \right) + T \left(y_3^2 + \sum_{k=1}^{g-2} \chi_{r_1+k} Z_{r_1+k} \right) + P \left(y_4^2 + \sum_{\ell=1}^{v-1} \psi_{r+\ell} Z_{r+\ell} \right) = c$$

عندما تتقاطع هذه الأغلفة بأربعة مستقيمات، وينطبق بعضها لتشكّل مستقيمين مضاعفين. ونوجد العلاقات التي تربط بين الدوال ξ, ζ, χ, ψ وكثيرات الحدود R, S, T, P ، ونحدد المترابطة الهندسية الواجب تحققها، حتى يكون تموضع الغلاف الرابع عشوائياً.

كلمات مفتاحية: سطح جبري، غلاف خطي، منحنى تناظر، مستوي تناظر، زمرة تامة.

Mutual arrangement of linear envelopes of the four orbits of symmetry directions, intersecting by four straights which form two multiple straights (II)

Abstract:

In this research, we study one of the cases of intersection of linear envelopes for the orbits of symmetry directions of algebraic surfaces F_n , given by the equation:

$$R \left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i Z_i \right) + S \left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu-1} \zeta_{\lambda+j} Z_{\lambda+j} \right) + \\ + T \left(y_3^2 + \sum_{k=1}^{g-2} \chi_{r_1+k} Z_{r_1+k} \right) + P \left(y_4^2 + \sum_{\ell=1}^{v-1} \psi_{r+\ell} Z_{r+\ell} \right) = c$$

when these envelopes intersect by four straights (in this case, two multiple straights). And we find the relationships between the functions ξ, ζ, χ, ψ , and the polynomials R, S, T, P , then we define the geometric inequality, which makes the position of the fourth envelope random.

Keywords: Algebraic surface, linear envelope, symmetry direction, symmetry plane, complete group.

1. مقدمة:

أصبحت دراسة التموضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي تناظر السطوح الجبرية F_n في الفضاء الإقليدي E^m ، من أهم القضايا العلمية، وهذا ما اتضح بمتابعة دراسة النظرية الهندسية للامتغيرات للزمر.

وتمت دراسة هذه القضية بشكل كامل، من أجل ثلاثة مدارات [6], [7]، وأربعة مدارات غير متقاطعة، والمتقاطعة بمستقيم واحد [5], [8]، والمتقاطعة بمستقيمين مختلفين، وبثلاثة مستقيمية مختلفة، وبثلاثة مستقيمية عندما ينطبق اثنان منها [1], [2], [3], [9], [10], [11], [12]، وتتم حالياً دراسة حالة تقاطع الأغلفة الخطية بأربعة مستقيمية مختلفة، وذلك ضمن أطروحة دكتوراه مسجلة في جامعة البعث للباحثة زينة جبر، أما في حال انطباق بعض هذه المستقيمية الأربعة فقد تشكل مستقيمين مضاعفين، وقد تم دراسة إحدى هذه الحالات [4]، وفي هذا البحث سوف ندرس حالة أخرى من هذه التقاطعات.

2. هدف البحث:

نهدف للحصول على المترجمات الهندسية، التي تعين الشرط النهائي للتموضع المتبادل لتلك الأغلفة الخطية، ويتم في هذا السياق إيجاد المعادلة القانونية للسطوح الجبرية الخاصة F_n ، اللامتغيرة بالنسبة للزمر التامة G ، وإيجاد معادلات مستويات تناظر هذه السطوح.

ويأتي هذا البحث كمتابعة لدراسة حالة تقاطع الأغلفة الخطية بأربعة مستقيمية شكلت مستقيمين مضاعفين، بتفصيل إحدى حالات التقاطع، ومقارنة النتائج مع نتائج بحثنا السابق.

3. المناقشة والنتائج:

قبل البدء بدراسة معادلة السطح F_n لابدّ من إدخال بعض الرموز والمصطلحات اللازمة للدراسة:

Π^λ : الغلاف الأول، Π^μ : الغلاف الثاني، Π^ν : الغلاف الثالث، Π^ν : الغلاف الرابع

λ : بُعد الغلاف الأول ، μ : بُعد الغلاف الثاني

ν : بُعد الغلاف الثالث ، ν : بُعد الغلاف الرابع

ويتحقق:

$$\lambda \geq \mu \geq \nu \geq \nu$$

$$\Pi^{r_1} = \Pi^\lambda + \Pi^\mu , \quad \Pi^r = \Pi^{r_1} + \Pi^\nu$$

$$\Pi^{r_2} = \Pi^\lambda + \Pi^\nu , \quad \Pi^{r_3} = \Pi^\mu + \Pi^\nu$$

$$\Pi^g = \Pi^\nu \cap \Pi^{r_1} , \quad \Pi^{v_t} = \Pi^\nu \cap \Pi^{r_t} ; (t = 1, 2, 3)$$

ليكن السطح F_n ($n > 2$) غير الإسطواني، نو زمرة التناظر التامة G ، معطى في جملة الإحداثيات الديكارتيّة بالمعادلة:

$$R \left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i Z_i \right) + S \left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu-1} \zeta_{\lambda+j} Z_{\lambda+j} \right) + \quad (1)$$

$$+ T \left(y_3^2 + \sum_{k=1}^{g-2} \chi_{r_1+k} Z_{r_1+k} \right) + P \left(y_4^2 + \sum_{\ell=1}^{v-1} \psi_{r+\ell} Z_{r+\ell} \right) = c$$

حيث تتعلق كثيرات الحدود R, S, T, P والدوال الخطية $\xi_i, \zeta_{\lambda+j}, \chi_{r_1+k}, \psi_{r+\ell}$ بالمتحولات $x_\tau(\tau = \overline{1, \rho})$ [5]

لندرس إحدى حالات تقاطع الأغلفة الخطية الأربعة بأربعة مستقيمت، في حال انطباق هذه المستقيمت وتحولها إلى مستقيمين مضاعفين، وهي الحالة التالية:

$$\Pi^\lambda \cap \Pi^\mu \cap \Pi^\nu = OZ_1$$

$$\Pi^\lambda \cap \Pi^\nu \cap \Pi^\nu = OZ_\lambda$$

يتأثر التموضع المتبادل للأغلفة الخطية بتقاطع المستوي Π^ν مع المستويات Π^{r_2} ، وبالتالي لإيجاد الشروط العامة لهذا التموضع، لا بدّ من دراسة ثلاث حالات أساسية

$$v_3 = 0, v \geq v_1 > 0 \quad (1) \text{ مختلفة وهي:}$$

$$v_1 = v_3 = 0, v \geq v_2 > 0 \quad (2)$$

$$v_1 = 0, v \geq v_3 > 0 \quad (3)$$

وفي حالة التقاطع المدروسة، ولكون مستقيم التقاطع بين Π^ν و Π^{r_2} موجود بشكل صريح، ما يجعل الحالة الثانية هي الأبرز، فقد اخترنا في هذا البحث دراستها بالتفصيل.

أولاً: دراسة حالة $v_1 = v_3 = 0, v \geq v_2 > 0$

في هذه الحالة تتحقق العلاقات:

$$\begin{aligned} R &= R_0 \cdot \zeta_{\lambda+1} & , & & S &= R_0 \cdot \xi_\lambda \\ R &= T_0 \cdot \chi_{r_1+1} & , & & T &= T_0 \cdot \xi_\lambda \\ T &= T_0 \cdot \psi_{r+1} & , & & P &= T_0 \cdot \chi_{r_1+2} \end{aligned} \quad (2)$$

$$R = P_0 \cdot \psi_{r+1} \quad , \quad P = P_0 \cdot \xi_{\lambda-1}$$

حيث:

$$\zeta_{\lambda+1} \neq c\xi_{\lambda} \quad , \quad \chi_{r_1+1} \neq c\xi_{\lambda} \quad , \quad \psi_{r+1} \neq c\xi_{\lambda-1} \quad , \quad \psi_{r+1} \neq c\chi_{r_1+2}$$

من (2) نجد:

$$R_0 \cdot \zeta_{\lambda+1} = T_0 \cdot \chi_{r_1+1} \Rightarrow R_0 = \frac{T_0}{\zeta_{\lambda+1}} \chi_{r_1+1}$$

بوضع $R_1 = \frac{T_0}{\zeta_{\lambda+1}}$ نجد:

$$R_0 = R_1 \chi_{r_1+1} \quad \& \quad T_0 = R_1 \zeta_{\lambda+1}$$

$$R_0 \cdot \zeta_{\lambda+1} = P_0 \cdot \psi_{r+1} \Rightarrow R_0 = \frac{P_0}{\zeta_{\lambda+1}} \psi_{r+1}$$

بوضع $P_1 = \frac{P_0}{\zeta_{\lambda+1}}$ نجد:

$$R_0 = P_1 \psi_{r+1} \quad \& \quad P_0 = P_1 \zeta_{\lambda+1}$$

ومنه فإن كثيرات الحدود R, S, T, P تأخذ الشكل:

$$R = R_1 \chi_{r_1+1} \zeta_{\lambda+1} \quad , \quad S = R_1 \chi_{r_1+1} \xi_{\lambda} \quad (3)$$

$$T = R_1 \zeta_{\lambda+1} \xi_{\lambda} \quad , \quad P = R_1 \zeta_{\lambda+1} \chi_{r_1+2}$$

وينتج من (2) أيضاً أن:

$$\zeta_{\lambda+1} = c_1 \cdot \chi_{r_1+1} \quad , \quad \xi_{\lambda} = c_2 \psi_{r+1} \quad , \quad \xi_{\lambda-1} = c_3 \cdot \chi_{r_1+2} \quad (4)$$

نتيجة (1): تحقق الدوال ξ_λ , $\zeta_{\lambda+1}$, χ_{r+1} , ψ_{r+1} العلاقات (4)، ويمكن أن تعطى كثيرات الحدود R, S, T, P بالعلاقات (3).

الآن، لمزيد من الدراسة ويهدف تحديد المتراجحات الهندسية نفرض أن:

$$\Pi^g = \Pi^h \oplus \Pi^2(OZ_1, OZ_\lambda)$$

يمكن تعيين المستوي Π^h في المستوي Π^{r_1} بالمعادلات الآتية: [6]

$$Z_{h+\varepsilon} = \sum_{p=1}^h a_{\varepsilon p} Z_p \quad ; \quad \varepsilon = \overline{1, \lambda - h} \quad (5)$$

$$Z_{\lambda+j} = \sum_{p=1}^h b_{jp} Z_p \quad ; \quad j = \overline{1, \mu - 1}$$

$$\text{rang} \|b_{jp}\| = h \quad , \quad \sum_j b_{jp}^2 > 0 \quad \text{حيث أن:}$$

لنأخذ في المستوي Π^h محاور إحداثية جديدة OZ'_p ، عندها، واستناداً إلى ماسبق، يمكن اعتماد دساتير التحويل:

$$Z_p = Z'_p \quad ; \quad p = \overline{1, h}$$

$$Z_{h+\varepsilon} = Z'_{h+\varepsilon} + \sum_{p=1}^h a_{\varepsilon p} Z'_p \quad ; \quad \varepsilon = \overline{1, \lambda - h} \quad (6)$$

$$Z_{\lambda+j} = Z'_{\lambda+j} + \sum_{p=1}^h b_{jp} Z'_p \quad ; \quad j = \overline{1, \mu - 1}$$

فتأخذ معادلة السطح في F_n الجملة الجديدة الشكل:

$$\begin{aligned}
 R \left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda-h} \xi_{h+i} Z'_{h+i} \right) + S \left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu-1} \zeta_{\lambda+j} Z'_{\lambda+j} \right) + \\
 + T \left(y_3^2 + \sum_{p=1}^h \chi_p Z'_p + \sum_{k=1}^{g-2} \chi_{r_1+k} Z'_{r_1+k} \right) + \\
 + P \left(y_4^2 + \sum_{\ell=1}^{v-1} \psi_{r+\ell} Z'_{r+\ell} \right) = c \quad (7)
 \end{aligned}$$

حيث χ_p دوال خطية في المتحولات $(\omega = \overline{1, \rho} \geq 2)$ ، كما أن χ_p و χ_{r_1+k} تشكل جملة مستقلة خطياً، كون السطح F_n ليس أسطوانياً، ويمكن أن تعطى بالشكل:

$$\begin{aligned}
 \chi_p &= \lambda_0^{-1} \left(\xi_p + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-h} a_{\varepsilon p} \xi_{h+\varepsilon} \right) \\
 &= \lambda_1^{-1} \sum_{j=1}^{\mu-1} b_{jp} \zeta_j \quad ; p = \overline{1, h} \quad (8)
 \end{aligned}$$

كما أن:

$$\begin{aligned}
 \psi_\ell &= \mu_0^{-1} \left(\xi_{p-1} + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-h-1} a_{\varepsilon p} \xi_{h+\varepsilon} \right) \\
 &= \mu_1^{-1} \sum_{j=1}^{\mu-1} b_{jp-1} \zeta_j \quad , \quad \ell = \overline{1, v-1} \quad (9)
 \end{aligned}$$

حيث μ_0 ، μ_1 ، λ_0 و λ_1 وسطاء حقيقية اختيارية.

بتعويض قيم Z' في المعادلة الجديدة للسطح، والاستفادة من تعريف ψ_ℓ و χ_p نجد أن:

$$T = \lambda_0 R + \lambda_1 S \quad (10)$$

$$P = \mu_0 R + \mu_1 T \quad (11)$$

بالاستفادة من (2) و (10) نجد أن:

$$T_0 \xi_\lambda = \lambda_0 R_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 R_0 \xi_\lambda$$

$$T_0 \xi_\lambda = R_0 (\lambda_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 \xi_\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{R_0}{T_0} = \frac{\xi_\lambda}{\lambda_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 \xi_\lambda}$$

وأيضاً من جهة أخرى:

$$T_0 \xi_\lambda = \lambda_0 T_0 \chi_{r_1+1} + \lambda_1 R_0 \xi_\lambda$$

$$T_0 (\xi_\lambda - \lambda_0 \chi_{r_1+1}) = \lambda_1 R_0 \xi_\lambda$$

$$\Rightarrow \frac{R_0}{T_0} = \frac{\xi_\lambda - \lambda_0 \chi_{r_1+1}}{\lambda_1 \xi_\lambda}$$

ومنه:

$$\frac{R_0}{T_0} = \frac{\xi_\lambda}{\lambda_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 \xi_\lambda} = \frac{\xi_\lambda - \lambda_0 \chi_{r_1+1}}{\lambda_1 \xi_\lambda} = \frac{\chi_{r_1+1}}{\zeta_{\lambda+1}} \quad (12)$$

نستنتج:

$$\xi_\lambda = a_1 (\lambda_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 \xi_\lambda) \Rightarrow$$

$$\xi_\lambda = \frac{a_1 \lambda_0}{1 - a_1 \lambda_1} \zeta_{\lambda+1}; \quad a_1 = \frac{\chi_{r_1+1}}{\zeta_{\lambda+1}} \quad (13)$$

$$\xi_\lambda - \lambda_0 \chi_{r_1+1} = a_1 \lambda_1 \xi_\lambda \Rightarrow$$

$$\xi_\lambda = \frac{\lambda_0}{1 - a_1 \lambda_1} \chi_{r_1+1} \quad (14)$$

$$\chi_{r_1+1} = a_1 \zeta_{\lambda+1} \quad (15)$$

نتيجة (2): تحقق الدالتان χ_{r_1+1} و $\zeta_{\lambda+1}$ العلاقة (15) ، وترتبطان خطياً مع الدالة ξ_λ بالعلاقين (13) و (14).

بالعودة إلى (11) والاستفادة من (2) نجد:

$$P_0 \xi_{\lambda-1} = \mu_0 P_0 \psi_{r+1} + \mu_1 T_0 \psi_{r+1}$$

$$P_0 (\xi_{\lambda-1} - \mu_0 \psi_{r+1}) = \mu_1 T_0 \psi_{r+1}$$

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{\mu_1 \psi_{r+1}}{\xi_{\lambda-1} - \mu_0 \psi_{r+1}}$$

ومن جهة أخرى:

$$T_0 \chi_{r_1+2} = \mu_0 P_0 \psi_{r+1} + \mu_1 T_0 \psi_{r+1}$$

$$T_0 (\chi_{r_1+2} - \mu_1 \psi_{r+1}) = \mu_0 P_0 \psi_{r+1}$$

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{\chi_{r_1+2} - \mu_1 \psi_{r+1}}{\mu_0 \psi_{r+1}}$$

ومنه:

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{\mu_1 \psi_{r+1}}{\xi_{\lambda-1} - \mu_0 \psi_{r+1}} = \frac{\chi_{r_1+2} - \mu_1 \psi_{r+1}}{\mu_0 \psi_{r+1}} = \frac{\chi_{r_1+2}}{\xi_{\lambda-1}} \quad (16)$$

نستنتج بعد وضع $a_2 = \frac{\chi_{r_1+2}}{\xi_{\lambda-1}}$

$$\mu_1 \psi_{r+1} = a_2 (\xi_{\lambda-1} - \mu_0 \psi_{r+1})$$

$$\psi_{r+1} (\mu_1 + a_2 \mu_0) = a_2 \xi_{\lambda-1}$$

$$\psi_{r+1} = \frac{a_2}{\mu_1 + a_2 \mu_0} \xi_{\lambda-1} \quad (17)$$

$$\chi_{r_1+2} - \mu_1 \psi_{r+1} = a_2 \mu_0 \psi_{r+1}$$

$$\chi_{r_1+2} = (\mu_1 + a_2 \mu_0) \psi_{r+1}$$

$$\psi_{r+1} = \frac{1}{\mu_1 + a_2 \mu_0} \chi_{r_1+2} \quad (18)$$

$$\chi_{r_1+2} = a_2 \xi_{\lambda-1} \quad (19)$$

نتيجة (3): تحقق الدالتان χ_{r_1+2} و $\xi_{\lambda-1}$ العلاقة (19)، وترتيباً خطياً مع الدالة ψ_{r+1} بالعلاقتين (17) و (18).

لإيجاد علاقات كثيرات الحدود بالدوال الخطية ننتقل من (12)، فنجد:

$$R_0 = R_1 \xi_\lambda$$

$$T_0 = R_1 (\lambda_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 \xi_\lambda) \quad ; \quad R_1 = \frac{T_0}{\lambda_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 \xi_\lambda}$$

نعوض في (2) نجد:

$$R = R_1 \xi_\lambda \zeta_{\lambda+1}$$

$$S = R_1 \xi_\lambda^2$$

$$T = R_1 (\lambda_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 \xi_\lambda) \xi_\lambda$$

$$P = R_1 (\lambda_0 \zeta_{\lambda+1} + \lambda_1 \xi_\lambda) \chi_{r_1+2}$$

(20)

مبرهنة 1: عندما تتقاطع الأغلفة الخطية الأربعة وفق الآتي:

$$\Pi^\lambda \cap \Pi^\mu \cap \Pi^\nu = OZ_1$$

$$\Pi^\lambda \cap \Pi^\nu \cap \Pi^\nu = OZ_\lambda$$

وبفرض أن $v \geq v_2 > 0$ ($v_1 = v_3 = 0$) فإن السطح F_n يتعين بالمعادلة (7)، وعندها تعطى الدوال الخطية ψ_ℓ, χ_p بالعلاقين (8) و (9)، وتحقق كثيرات الحدود R, S, T, P العلاقات (20).

ثانياً: دراسة حالة $v = v_2$

بفرض أن $v = v_2$ ($\Pi^\nu \subset \Pi^{r_2}$)، وباختيار مناسب للجملة الإحداثية $OZ_i (i = \overline{1, \lambda - 2})$ يمكن تعيين المستوي Π^ν في Π^{r_1} بالعلاقات:

$$Z'_p = 0 \quad ; \quad p = \overline{1, h - 1}$$

$$Z'_{h+v-1+\sigma} = \sum_{q=1}^{v-1} C_{\sigma q} Z'_{h+q} \quad ; \quad \sigma = \overline{1, \lambda - h + 1 - v} \quad (21)$$

$$Z'_{\lambda+j} = \sum_{q=1}^{v-1} d_{jq} Z'_{h+q} \quad ; \quad j = \overline{1, \mu - 1}$$

$$\text{rang} \|d_{jq}\| = v - 1 \quad , \quad \sum_j d_{jq}^2 > 0$$

إذا ما اخترنا في المستوي Π^ν محاور إحداثية جديدة OZ''_{h+q} ، يمكن الحصول على دساتير تحويل الإحداثيات في المستوي Π^{r_1} بالعلاقات:

$$\begin{aligned}
 Z'_p &= 0 \quad ; \quad p = \overline{1, h-1} \\
 Z'_{h+q} &= Z''_{h+q} \quad ; \quad q = \overline{1, v-1} \\
 Z'_{h+v-1+\sigma} &= Z''_{h+v-1+\sigma} + \sum_{q=1}^{v-1} C_{\sigma q} Z''_{h+q} \quad ; \quad \sigma = \overline{1, \lambda - h - v + 2} \\
 Z'_{\lambda+j} &= Z''_{\lambda+j} + \sum_{q=1}^{v-1} d_{jq} Z''_{h+q} \quad ; \quad j = \overline{1, \mu - 1}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

فتأخذ معادلة السطح في F_n الجملة الجديدة الشكل:

$$\begin{aligned}
 R \left(y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda-h-v+2} \xi_{h+v-2+i} Z''_{h+v-2+i} \right) &+ S \left(y_2^2 + \sum_{j=1}^{\mu-1} \zeta_{\lambda+j} Z''_{\lambda+j} \right) + \\
 + T \left(y_3^2 + \sum_{p=1}^{h-1} \chi_p Z''_p + \sum_{k=1}^{g-1} \chi_{r_1+k} Z_{r_1+k} \right) &+ \\
 + P \left(y_4^2 + \sum_{q=1}^{v-1} \psi_{r+q} Z''_{r+q} \right) &= c
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

حيث ψ_q دوال خطية في المتحولات x_ω ، ويمكن تعيينها بالعلاقات:

$$\begin{aligned}
 \psi_q &= h_0^{-1} \left(\xi_{h+q} + \sum_{\sigma=1}^{\lambda-h-v} C_{\sigma q} \xi_{h+v-2+\sigma} \right) \\
 &= h_1^{-1} \sum_{j=1}^{\mu-1} d_{jq} \zeta_j \quad ; \quad q = \overline{1, v-1}
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

حيث h_0 و h_1 وسيطان حقيقيان، وبالتالي:

$$P = h_0R + h_1S \quad (25)$$

يتعلق اختيار الدوال ψ_q ، إلى حدّ ما، بالدوال χ_p ، ولا تتحقق المساواتان

$$h_0 = c\lambda_0 , \quad h_1 = c\lambda_1$$

في آن معاً، مما يفرض شروطاً إضافية على اختيار مجموعة مستويات تناظر السطح F_n ، الموافقة لمناحي المستوي Π^v .

إن إيجاد الدوال χ_p و ψ_q بالعلاقات (8) و (24) ، يفرض شرطاً إضافياً إلى الشرط

$$h + v \leq \lambda$$

وهو أن يكون

$$h + v \leq \mu$$

بهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة 2: إذا كان $v = v_2$ وكانت الدوال χ_p و ψ_q معرفة بالعلاقات (8) و (24) ، فإن تموضع الغلاف Π^{v-1} يكون عشوائياً $(\Pi^{v-1} = F\Pi^{v-1})$ إذا تحققت المتراحة الهندسية

$$h + v \leq \mu \leq \lambda$$

حين يتعين السطح F_n بالمعادلة (23).

التوصيات:

وفقاً لهذا السياق، نوصي بدراسة باقي حالات تشكل مستقيمات التقاطع المضاعفة، من أجل استنتاج المتراجحات الهندسية الموافقة، وتعيين معادلات السطوح الجبرية في كل حالة على حدة، بُغية استنتاج الشروط النهائية للتموضع المتبادل لهذه الأغلفة الخطية.

المراجع

1. د. عصام ديبان - التموضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي التناظر الأربعة، 1999، مجلة جامعة البعث، المجلد (21) العدد (3).
2. د. عصام ديبان - تناظر السطوح الجبرية ذات مدارات مناحي التناظر الأربعة في الفضاء الإقليدي E^m (I)، 2007، مجلة جامعة البعث، المجلد (29) العدد (9).
3. د. عصام ديبان - تناظر السطوح الجبرية ذات مدارات مناحي التناظر الأربعة في الفضاء الإقليدي E^m (II)، 2011، مجلة جامعة البعث، المجلد (33).
4. د. عصام ديبان، حنان ابراهيم- التموضع المتبادل للأغلفة الخطية لمدارات مناحي التناظر الأربعة، والمتقاطعة بأربعة مستقيمات شكلت مستقيمين مضاعفين (I)، 2022، مجلة جامعة البعث، المجلد (44) (قيد النشر).

5. Игнатенко В.Ф.,1989– Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. I // Симфероп.ун-т; Симферополь,32с.–Библ.4 назв.– Рус.– Деп. в УкрНИИНТИ 31.10.89.№ 2373 –Ук.89.
6. ИгнатенкоВ.Ф.,1980–геометрия алгебраических поверхностей с симметриями. // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники.–М.: Наука,Т.11,с.203–240
7. ИгнатенкоВ.Ф.,1984–Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями (ортогональными и косыми)// Проблемы геометрии / Итоги науки и техники.,–М.: Наука,Т.16.– с.915–229.
8. Игнатенко В.Ф.,1989– Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии.II// Симфероп. ун-т; Симферополь,34с.–Библ.5 назв.– Рус.– Деп. вУкрНИИНТИ 19.02.90.№ 224 –Ук.90.
9. Дибан Иссам, 1991– Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии.IV// Симфероп. ун-т; Симферополь,22с.–Библ.3 назв.– Рус.– Деп. в УкрНИИНТИ 17.02.92.№ 192 –Ук.92.

10. Дибан Иссам, 1992–Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. V//

Симфероп. ун-т; Симферополь, ббс.–Библ.4 назв.– Рус.–

Деп. в УкрИНТЭИ 17.09.92.№224–Ук.92.

11. Дибан Иссам. Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. // Международная научная конференция "Лобачевский и современная геометрия"; Казань, август, 1992. –С.35.

12. Дибан Иссам. Бесконечные группы, порождённых косыми отражениями. Взаимное расположение линейных оболочек четырех орбит направлений симметрии. // Динам. Системы.– 1993. Вып.

اصطناع المركب السيراميكي $CaCu_3Ti_4O_{12}$ ودراسة

خصائصه البنيوية

د. رشا يوسف¹ د. عبلة الزعبي² أ. د. ناصر سعد الدين³

¹ دكتور في فيزياء المادة الكثيفة-قائم بالأعمال في قسم العلوم الأساسية-كلية

الهندسة الكهربائية والميكانيكية-جامعة البعث

² أستاذ مساعد في قسم الفيزياء-كلية العلوم-جامعة البعث

³ أستاذ في قسم الفيزياء-كلية العلوم-جامعة البعث

ملخص :

تم تحضير المركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ (CCTO) انطلاقاً من الأكسجين و CaO و TiO_2 وثنائي أكسيد التيتانيوم باستخدام طريقة الاصطناع الصلب. تم دراسة الخصائص البنيوية للأكاسيد الأولية وللمركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ باستخدام تقنية انعراج الأشعة السينية. تم تحديد درجة حرارة الاصطناع عند الدرجة $1100^{\circ}C$. بينت دراسات مخططات انعراج الأشعة السينية XRD حصول تحوّل بلوري لثنائي أكسيد التيتانيوم من طور anatase إلى طور rutile. ينتمي المركب ذو البنية المكعبية إلى مجموعة التناظر الفراغية $Im - 3$. تم حساب ثابت الشبكة البلورية للمركب CCTO وكان $a = 7.3428 \text{ \AA}$. ووجد أيضاً أن حجم الخلية $V = 395.9026(\text{ \AA}^3)$ للبنية المكعبية. تم حساب حجم الحبيبات للمركب المملن عند الدرجة $1100^{\circ}C$ وكانت قيمته 35.6 nm .

كلمات مفتاحية : الاصطناع الصلب - البرفسكايت - $CaCu_3Ti_4O_{12}$ - حجم الحبيبات.

SYNTHESIS OF $CaCu_3Ti_4O_{12}$ CERAMIC COMPOUND AND STUDY ITS STRUCTURAL PROPERTIES

Rasha Yousef¹ Abla Al-Zoubi² Nasser Saad Al-Din³

¹Dr. in dense matter at Al-Baath university, Syria.

²Dr. in Optoelectronics-faculty of science at Al-Baath university.

³Pro.Dr. in Solid state electronics-faculty of science at Al-Baath university.

Abstract:

The $CaCu_3Ti_4O_{12}$ ceramic compound was prepared started of TiO_2 , CaO, and CuO by the conventional solid state reaction method. The compositional properties of raw and synthesis compounds were studied by X-ray diffraction (XRD) technique. Optimum synthesis temperature of $CaCu_3Ti_4O_{12}$ was determined at 1100°C. X-ray diffraction patterns showed crystalline transformation of TiO_2 from anatase to rutile phase. The cubic compound belongs to $Im - 3$ space group. The lattice constant of CCTO compound was determined and it was $a = 7.3428 \text{ \AA}$. The size of cubic unit cell was $V = 395.9026(\text{ \AA})^3$. The grain size of the compound that annealed at 1100°C was calculated and it was about 35.6nm.

Key words: Solid state reaction- Perovskite- $CaCu_3Ti_4O_{12}$ - grain size.

1 - مقدمة:

تتميز المواد السيراميكية ذات بنية البروفسكايت بأنها تملك ثابت عزل كهربائي عالي، مما أدى إلى استخدام هذا الصنف من المواد في الكثير من التطبيقات التقنية.

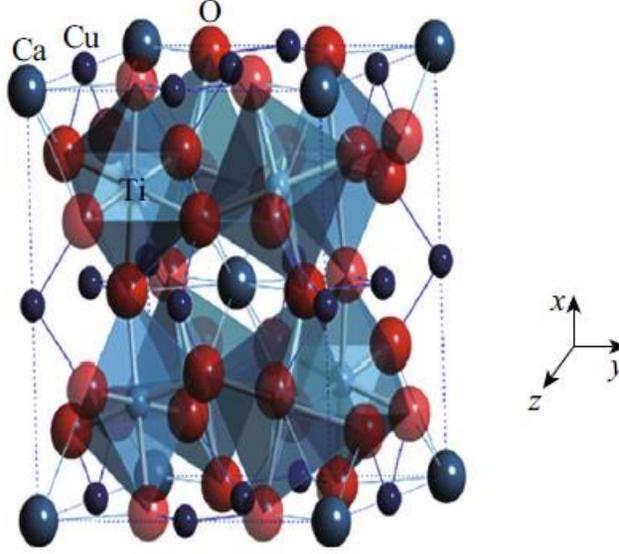
في السنوات الأخيرة، تلقى المركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ ($CCTO$) السيراميكي المكعبي ذو بنية البروفسكايت الكثير من الاهتمام بسبب خصائصه المميزة وتطبيقاته الكامنة [1].

يملك المركب $CCTO$ ثابت عزل كهربائي مرتفع ($10^4 - 10^5 \approx \epsilon$) و مستقل تقريباً عن التردد ومعامل حراري منخفض على مجال واسع من درجات الحرارة، أي أنه مستقر حرارياً [1,2,3]. لذلك، تعتبر هذه المادة واعدة للتطبيقات الإلكترونية الدقيقة في مجال الترددات المنخفضة [1,2].

يستخدم المركب $CCTO$ في صناعة المكثفات السيراميكية التي تتميز بمعدلات شحن وتفريغ عالية مقارنة مع أجهزة تخزين الطاقة الأخرى، كما يستخدم في صناعة الأجهزة الميكروية وذواكر الحواسيب [4,5]. وأكثر من ذلك بينت الدراسات البنيوية أن المركب $CCTO$ لا يملك أية تحولات طورية حتى درجة الحرارة $35^\circ K$ [6].

يتبلور المركب $CCTO$ وفق بنية البروفسكايت المكعبي المثالي ABO_3 حيث تتوضع شوارد الكالسيوم Ca^{2+} والنحاس Cu^{2+} معاً في الموقع A وتتوضع شوارد التيتانيوم Ti^{4+} في الموقع B محاطة بست ذرات اوكسجين مشكلة ثمانيات وجوه TiO_6 . إذاً يمكن القول أن شوارد التيتانيوم تتوضع في مراكز ثمانيات الوجوه، بينما تتواجد شوارد النحاس في منتصفات الأضلاع محاطة بأربع ذرات اوكسجين مشكلة مستوي مربع وتتوضع ذرات الكالسيوم الكبيرة الحجم في رؤوس ومركز وحدة الخلية محاطة باثنتي عشرة ذرة اوكسجين. بسبب اختلاف أنصاف أقطار الشوارد Ca^{2+}

و Cu^{2+} ميلان ملحوظ في ثمانيات الوجوه TiO_6 وهذا يؤدي إلى بنية مكعبية متمركزة الحجم بمجموعة التناظر $Im3$ [7,8]. يوضّح الشكل (1) البنية البلورية للمركب $CCTO$.



الشكل(1): البنية البلورية للمركب $CCTO$

تمّ تحضير المركب $CCTO$ بعدة طرائق مثل "طريقة الاصطناع الصلب، الترسيب المشترك، Sol-Gel،" [2,9,10,11].

تعدّ طريقة الاصطناع الصلب "Solid State Reaction" من أهم طرائق الحصول على هذه المركبات لما تتمتع به من سهولة في العمل حيث لا تتطلب مهارات خاصة. بما أن بعض المواد صعبة الانحلال في الماء فإن هذه الطريقة توفر حلاً لهذه المشكلة من ناحية تحضير المركبات المرغوبة بدون الحاجة إلى حلها في أي محل وهذا من ناحية أخرى يشكل جدوى اقتصادية عالية لطريقة الحالة الصلبة، حيث أن المادة

الوحيدة المستخدمة في أغلب تفاعلاتها هي الأسيتون الذي يستعمل للمساعدة على تمازج المركبات الصلبة أثناء عملية تحضير العينات وبكميات صغيرة نسبياً. تتميز هذه الطريقة بإعطائها مزيجاً عالي النقاوة لما تطلبه من أكاسيد ذات نقاوة عالية بدون وجود أي شوائب من مواد مختلفة للاصطناع عند الخلط بالمقارنة مع طرائق الاصطناع الأخرى، يتم أخذ نسب استيكمترية من المواد الأولية بصورتها النقية لضمان اكتمال التفاعل والحصول على طور واحد للمادة الجديدة نقية بدون وجود أطوار أخرى لشوائب أو للمواد الأولية [12,13].

2 - أهداف البحث:

يهدف البحث إلى :

- 1- تحضير المركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ انطلاقاً من الأكاسيد الثنائية CuO و CaO وأكسيد التيتانيوم رباعي التكافؤ TiO_2 باستخدام طريقة الاصطناع الصلب.
- 2- تحديد درجة حرارة الاصطناع المثلى للمركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ والتحول البلوري لثنائي أكسيد التيتانيوم من طور Anatase إلى الروتيل Rutile.
- 3- دراسة الخصائص البنيوية للمركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$.

3 - مواد وطرائق البحث :

1-3 الأجهزة والمواد المستخدمة :

- 1- ميزان تحليلي حساس بدقة 0.0001gr.
- 2- هاون عقيق لطحن العينات وبوتقات خزفية تتحمل درجات حرارة عالية تصل إلى 1200°C .
- 3- فرن حراري لتلدين العينات من شركة (Carbolite) يصل قيمة عظمى إلى 1100°C .
- 4- أداة ضغط ميكانيكية لكبس العينات على شكل أقراص بحدود 5000kg/cm^2 .
- 5- جهاز انعراج الأشعة السينية X-Ray Powder Diffractometer (PW 1840) ذو مصعد من الكوبالت Co بطول موجة $\lambda = 1.7889\text{\AA}$ إنتاج شركة (PHILIPS).
- 6- مواد كيميائية نقية : ثنائي أكسيد التيتانيوم TiO_2 نقاوته 99.9% وأكسيد النحاس CuO نقاوته 99.3% وأكسيد الكالسيوم CaO بنقاوة 99.5% وأسيتون (Extra Pure) نقاوته 99.0%.

3-2 تحضير العينات :

تم تحضير عينات $CaCu_3Ti_4O_{12}$ بطريقة الاصطناع الصلب Solid State Reaction على شكل مساحيق بخلط كميات مناسبة من ثنائي أكسيد التيتانيوم TiO_2 وأكسيد الكالسيوم CaO وأكسيد النحاس CuO من أجل نسب الكاتيونات الآتية $Ca:Cu:Ti = 1:3:4$ بوجود كمية من الهواء. تم طحن المواد السابقة وخلطها بواسطة هاون عقيق لضمان الحصول على خليط متجانس بعد إضافة كمية من الأسيتون بهدف تحسين عملية الخلط المتجانس لها و لمدة 15 دقيقة تقريباً حتى جفاف الأسيتون، أعيدت

هذه العملية ثلاث مرات متتالية لكل عينة من العينات. بعد ذلك تم تجفيف الخليط الناتج بتسخينه إلى درجة الحرارة 100°C لفترة زمنية كافية لضمان التخلص من الرطوبة. تم كبس المسحوق على شكل أقراص بقطر 1cm وسماكة 2mm بهدف تقريب الجسيمات المتفاعلة من بعضها البعض وزيادة إمكانية التفاعل و التأثير المتبادل بين الجسيمات، و تم اصطناع من (4 - 5) أقراص مضغوطة للعينة المحضرة.

تم حساب كتل المواد الداخلة في تشكيل المركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ من خلال التفاعل الآتي [14]:



يبين الجدول (1) كتل الأكاسيد الداخلة في تشكيل المركب المطلوب اصطناعه من أجل

كمية مقدارها 10g من العينة المدروسة و فق النسب المولية المطلوبة.

الجدول (1)

Ca:Cu:Ti	1:3:4			
المادة الأولية	الكتلة المولية (g/mol)	الكتلة المستخدمة (g)	النقاوة	الشركة المصدر
TiO_2	79.85	5.2012	99.9%	Sigma-Aldrich
CaO	56.07	0.9131	99.5%	Titan Biotech
CuO	79.54	3.8858	99.3%	Surchem Products. Ltd

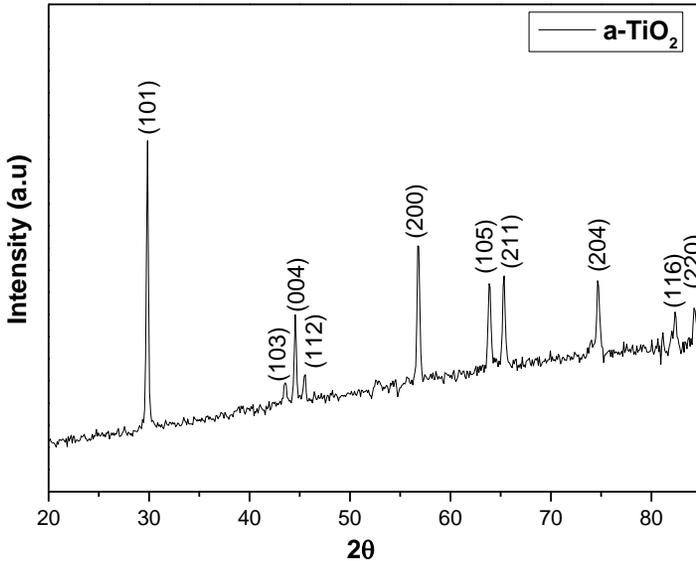
وضعت الأقراص المضغوطة في بوتقات خزفية وتم تلدينها بالتدرج في مجال من درجات حرارة تتراوح بين (700 – 1100) °C ولفترة زمنية حوالي 6 ساعات. ومن ثم تم تبريد العينات تدريجياً إلى درجة حرارة الغرفة بمعدل 1°C/min. إن عملية التبريد البطيء هذه تضمن الحصول على نسبة الأكسجين الإستيكيومتريّة المطلوبة في المركب والمساوية تقريباً للعدد 12. يستدل على انتهاء التفاعل وتشكل المركب المطلوب من خلال الحصول على طور وحيد في كل عينة. إن الاستدلال على تشكل طور وحيد هو

أن تكون قيم d للمخططات الطيفية بالأشعة السينية متطابقة جميعها أو أكثر من 95% من قرائن ميلر المقترحة والموافقة لنمط التبلور المقترح أثناء الحسابات الرياضية لإيجاد ثوابت الشبكة البلورية. في حال عدم تطابق عدد معين من الخطوط يجب استبدال الفرض بفرض آخر من التبلور حيث دائماً نبدأ بفرض التبلور الأعلى تناظراً (المكعبة).

4 - النتائج والمناقشة

4 - 1 - الخصائص البنيوية للأكاسيد الأولية

تمت دراسة البنية البلورية للأكاسيد الأولية المستخدمة في اصطناع المركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ باستخدام تقنية انعراج الأشعة السينية XRD . يبين الشكل (2) طيف انعراج الأشعة السينية لثنائي أكسيد التيتانيوم طور anatase المستخدم في عملية الاصطناع.



الشكل (2) طيف انعراج الأشعة السينية لثنائي أكسيد التيتانيوم طور anatase.

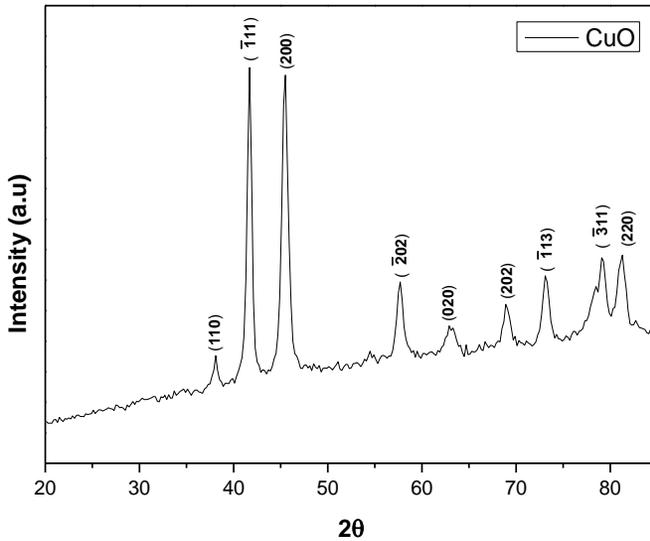
تمّ تحديد قرائن ميلر لأكسيد التيتانيوم بمقارنة الطيف في الشكل (2) مع البطاقة المرجعية رقم (1272 – 21) العائدة لثنائي أكسيد التيتانيوم في بنك المعلومات *JCPDS*. تبين أنّ ثنائي أكسيد التيتانيوم يتبلور وفق البنية البلورية الرباعية وينتمي إلى المجموعة الفراغية ($I4_1\backslash amd$) وثابت الشبكة البلورية المرجعية له $a = b = 3.785^\circ A$ و $c = 9.513^\circ A$.

تم حساب ثوابت الشبكة البلورية لثنائي أكسيد التيتانيوم بالاستفادة من قانون براغ $n\lambda = 2d \sin \theta$ ، حيث $\lambda = 1.7889\text{\AA}$ طول موجة الأشعة السينية و θ زاوية الانعراج، وعلاقة البعد بين المستويات البلورية في حالة البنية الرباعية [15]:

$$\frac{1}{d^2} = \frac{h^2 + k^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2} \quad (1)$$

كانت قيم ثوابت الشبكة البلورية المحسوبة لثنائي أكسيد التيتانيوم: $a = b = 3.764^\circ A$
 $c = 9.448^\circ A$

يبين الشكل (3) طيف انعراج الأشعة السينية لمسحوق أكسيد النحاس.



الشكل (3) طيف انعراج الأشعة السينية لأكسيد النحاس.

تمّ تحديد قرائن ميلر لأكسيد النحاس بمقارنة الطيف في الشكل (3) مع البطاقة المرجعية رقم (05-0661) العائدة لأكسيد النحاس في بنك المعلومات *JCPDS*. وتبيّن أنّ أكسيد النحاس يتمتع ببيئة أحادية الميل (Monocline) ومجموعة تناظر فراغية $C2/c$ وثوابت الشبكة المرجعية $a = 4.684 \text{ \AA}$ و $b = 3.425 \text{ \AA}$ و $c = 5.129 \text{ \AA}$.

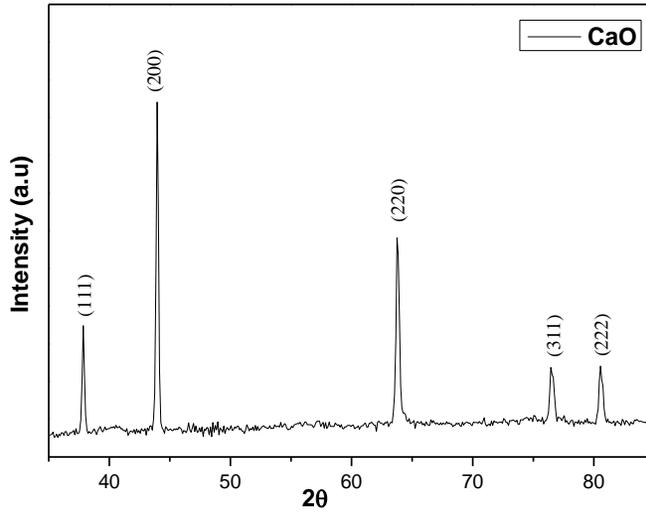
تم تعيين قيم ثوابت الشبكة البلورية a و b و c بالاستفادة من قيم d حيث يعطى البعد بين المستويات البلورية d_{hkl} في حالة البنية البلورية أحادية الميل بالعلاقة الآتية [16]:

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2 \sin^2 \beta}{b^2} + \frac{l^2}{c^2} - \frac{2hl \cdot \cos \beta}{a \cdot c} \right) \cdot \frac{1}{\sin^2 \beta} \quad (2)$$

حيث $\beta = 99.47$.

كانت قيم ثوابت الشبكة البلورية المحسوبة لأكسيد النحاس $a = 4.69 \text{ \AA}$ و $b = 3.41 \text{ \AA}$ و $c = 5.01 \text{ \AA}$.

يبين الشكل (4) طيف انعراج الأشعة السينية لمسحوق أكسيد الكالسيوم.



الشكل (4) طيف انعراج الأشعة السينية لأكسيد الكالسيوم.

تمّ تحديد قرائن ميلر لأكسيد الكالسيوم بمقارنة الطيف في الشكل (4) مع البطاقة المرجعية رقم (37-1497) العائدة لأكسيد الكالسيوم في بنك المعلومات *JCPDS*. تبين أنّ أكسيد الكالسيوم يتمتع ببنية مكعبية (cubic) ومجموعة تناظر فراغية $Fm3m$ وثابت الشبكة البلورية له $a = 4.810\text{Å}$.

تمّ تعيين قيمة ثابت الشبكة البلورية a بالاستفادة من قيم d حيث يعطى البعد بين المستويات البلورية d_{hkl} في حالة البنية البلورية المكعبية بالعلاقة [10,17]:

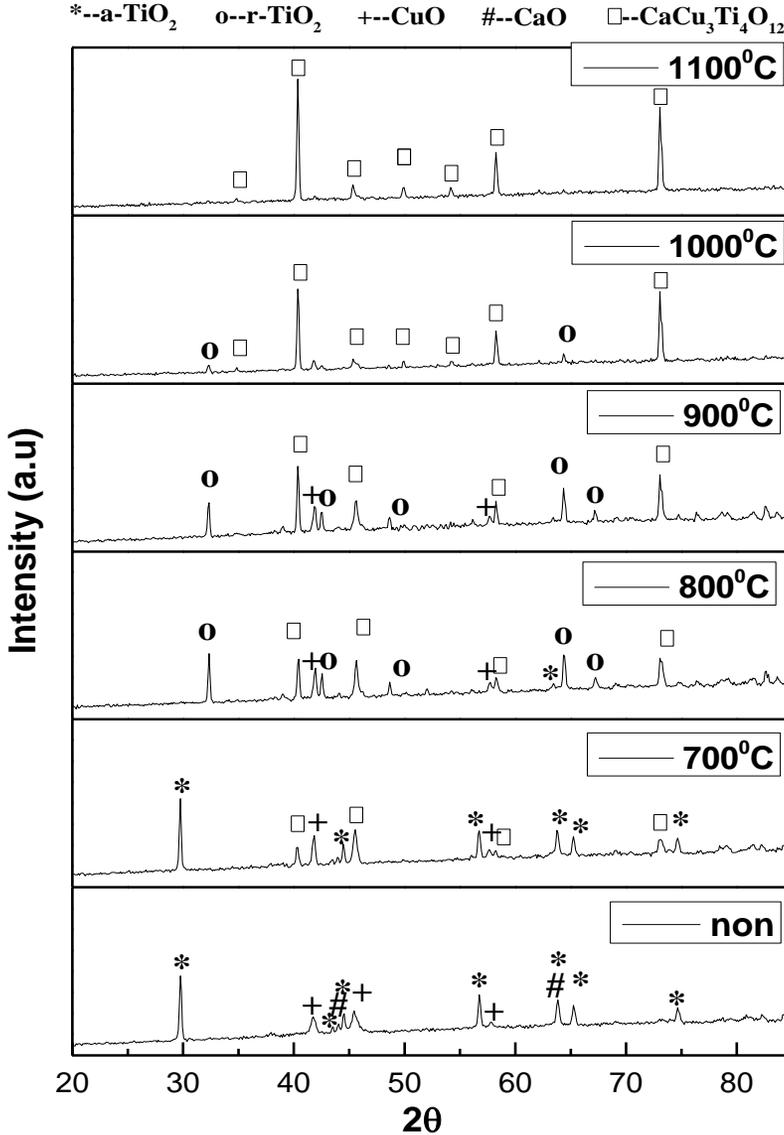
$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2 + k^2 + l^2}{a^2} \quad (3)$$

كانت قيمة ثابت الشبكة البلورية المحسوبة لأكسيد الكالسيوم $a = 4.7844\text{Å}$.

4 - 2 - تحديد درجة الاصطناع المثلى للمركّب $CaCu_3Ti_4O_{12}$

تمّ دراسة الخصائص البنيوية للعينات المحضّرة باستخدام تقنية انعراج الأشعة السينية بغية التحقق من تشكّل المركّب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ وتحديد درجة الحرارة المثلى لاصطناعه ولأجل ذلك تمّ سحب طيف انعراج الأشعة السينية للعينات المحضّرة

والمكبوسة على شكل أقراص قبل التلدين وبعده ضمن مجال حراري (700 – 1100)°C. يبين الشكل (5) مخططات انعراج الأشعة السينية للمركب المحضّر بطريقة الاصطناع الصلب.

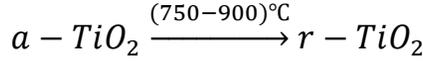


الشكل (5) أطيف انعراج الأشعة السينية للمركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ عند درجات حرارة مختلفة.

بمقارنة شدّات ومواقع قمم الانعراج التي تمّ الحصول عليها مع البطاقات المرجعية الموجودة في بنك المعلومات *JCPDS* تبين أنّ المركّب المطلوب بدأ بالتشكّل عند الدرجة 700°C واكتمل تشكّله عند الدرجة 1100°C حيث اختفت جميع القمم العائدة إلى المواد الأولية. كما بينت نتائج انعراج الأشعة السينية ظهور طور الروتيل لأكسيد التيتانيوم عند الدرجة 800°C وهذا الطور ناتج عن تحول أكسيد التيتانيوم من طور الأناتاس إلى طور الروتيل. إن ظهور طور الروتيل لأكسيد التيتانيوم لن يؤثر على تشكل الطور المطلوب $\text{CaCu}_3\text{Ti}_4\text{O}_{12}$ كمركب وسطي خلال عملية الاصطناع. نلاحظ من الشكل (5) قبل عملية التلدين أنّ كل القمم تعود إلى الأكاسيد الأولية والمسحوق عبارة عن خليط من المواد غير المتفاعلة. بتلدين المركّب عند الدرجة 700°C لوحظ ظهور قمم تعود إلى المركّب المراد تحضيره بشدّات ضعيفة عند الزوايا ($2\theta = 40.33, 45.52, 58.25, 73.08$) مقارنة مع القمم التي تعود للأكاسيد الأولية إلا أنّ المسحوق لا يزال يحتوي على العديد من الأطوار الأخرى مما يشير إلى عدم اكتمال اتحاد الأكاسيد حرارياً عند هذه الدرجة وهذا مادفع إلى رفع درجة حرارة التلدين إلى درجات حرارة أعلى من 700°C .

عندما تمّ تلدين المركّب عند الدرجة 800°C لمُدّة ست ساعات لوحظ تناقص في شدّات القمم التي تعود إلى الأكاسيد الأولية وظهور قمم انعراج عند المواقع ($2\theta = 32.34, 42.55, 48.67, 64.42, 67.25$)° أكسيد التيتانيوم من طور anatase إلى طور rutile ، كما لوحظ أيضاً زيادة في شدّات القمم التي تعود للمركب $\text{CaCu}_3\text{Ti}_4\text{O}_{12}$. نلاحظ أنّه لم يكتمل اصطناع المركّب $\text{CaCu}_3\text{Ti}_4\text{O}_{12}$ عند درجة الحرارة 800°C وزمن تلدين 6h. عند زيادة درجة حرارة التلدين إلى الدرجة 900°C نلاحظ تناقص في شدّات قمم الأكاسيد الأولية واختفاء كل القمم العائدة لثنائي أكسيد التيتانيوم طور anatase وبدء تناقص شدّات القمم العائدة

طور روتيل، وهذا يعني أن التحول الطوري من اناتاس إلى روتيل انتهى عند حوالي الدرجة $900^{\circ}C$ ويتوافق هذا مع العمل العلمي [18]، حيث أن التحول الطوري هذا تم في المجال الحراري وفق المعادلة الآتية [18,14]:



لوحظ أيضاً عند درجة الحرارة هذه زيادة في شدات القمم المميزة للمركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$.

عند زيادة درجة حرارة التلدين إلى الدرجة $1000^{\circ}C$ تبين من الشكل (5) اختفاء أغلب القمم التي تعود إلى الأكاسيد الأولية والطور الغالب عند درجة الحرارة هذه هو الطور المكعبي للمركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$.

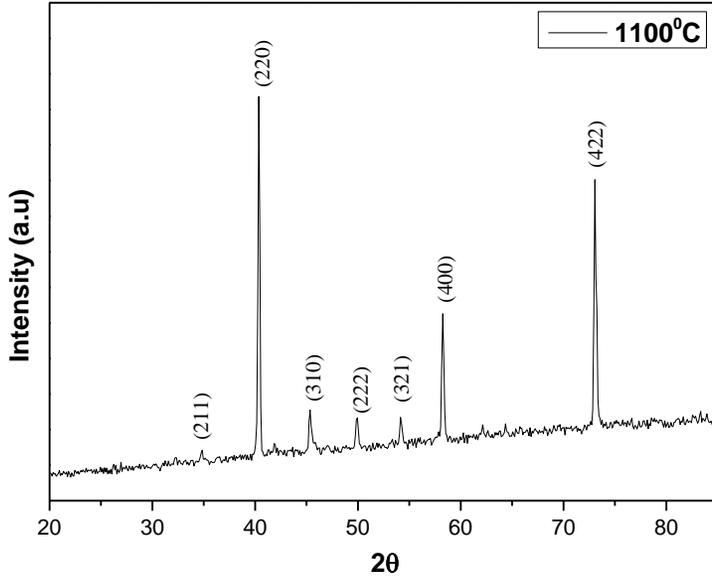
عند رفع درجة حرارة التلدين إلى الدرجة $1100^{\circ}C$ لوحظ اكتمال تشكل المركب حرارياً وبشدات عالية أي تم الحصول على طور وحيد عائد للمركب المراد اصطناعه. لم يلاحظ عند هذه الدرجة وجود أية قمم تعود للأكاسيد الأولية، مما يدل على أن الدرجة $1100^{\circ}C$ هي درجة الحرارة المثلى لاصطناع المركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$.

لم يتم زيادة درجة الحرارة أعلى من $1100^{\circ}C$ لأنه بناءً على الدراسات المرجعية فإن المركب غير مستقر عند الدرجة $1200^{\circ}C$ ويتفكك إلى $CaTiO_3$ و CuO و $r - TiO_2$ وفق المعادلة الآتية [18]:



4 - 3 - دراسة الخصائص البنيوية للمركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$

يبين الشكل (6) طيف انعراج الأشعة السينية للمركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ المحضر بطريقة الاصطناع الصلب والمملن عند درجة الحرارة $1100^{\circ}C$ مدة ست ساعات.



الشكل (6) طيف انعراج الأشعة السينية للمركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ المحضّر بطريقة الاصطناع الصلب والمُلدّن عند الدرجة 1100°C .

تمّ تحديد قرائن ميلر للمركب المحضّر بمقارنة طيف الانعراج في الشكل (6) الذي تمّ الحصول عليه مع البطاقة المرجعية رقم (1360) في قاعدة البيانات ICSD وتبيّن أن المركب يتبلور وفق البنية البلورية المكعبية وينتمي إلى مجموعة التناظر الفراغية Im-3.

تم حساب البعد بين المستويات البلورية d من زوايا الانعراج عند كل خط طيفي باستخدام قانون براغ. ومن ثم تمّ تعيين قيم ثابت الشبكة البلورية a بالاستفادة من قيم d حيث يعطى البعد بين المستويات البلورية d_{hkl} في حالة البنية البلورية المكعبية بالعلاقة (3).

تم حساب حجم وحدة الخلية أيضاً الذي يعطى بالعلاقة:

$$V = a^3 \quad (4)$$

يبين الجدول (2) قيم كل من 2θ و d_{hkl} وقرائن ميلر للمركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$.

الجدول (2)

$2\theta^\circ$	$d_{exp}(A^\circ)$	$a (A^\circ)$	(hkl)
34.7734	2.9933	7.3320	(211)
40.3637	2.5926	7.3330	(220)
45.3631	2.3196	7.3351	(310)
49.9076	2.1201	7.3443	(222)
54.1939	1.9637	7.3474	(321)
58.2651	1.8373	7.3492	(400)
73.0921	1.5021	7.3587	(422)

كانت قيمة ثابت الشبكة البلورية المحسوبة للمركب المحضر $a = 7.3428^\circ A$ وهي قريبة من البطاقة المرجعية وبعض الأعمال العلمية [17]. تم حساب حجم وحدة الخلية الأساسية وكانت قيمته مساوية لـ $V = 395.9026^\circ A^3$.

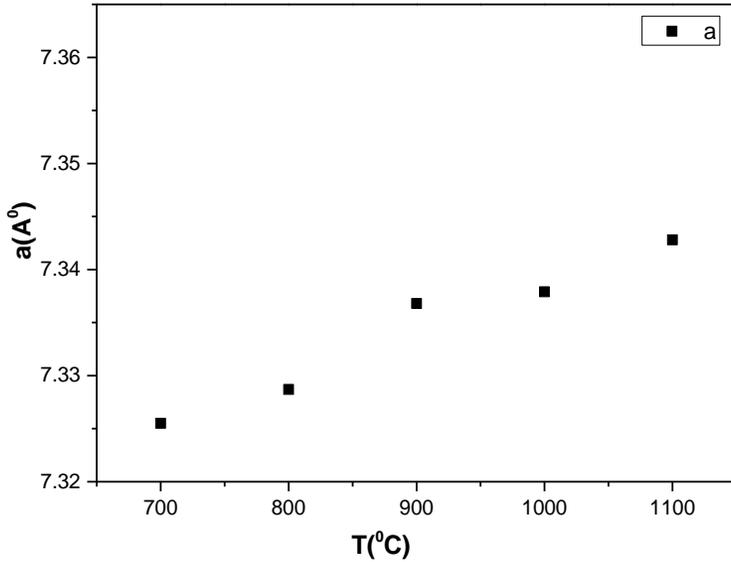
تم حساب قيم ثوابت الشبكة البلورية وحجم وحدة الخلية الأساسية للمركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ بدءاً من بداية تشكله عند الدرجة $700^\circ C$ وحتى اكتمال اصطناعه عند الدرجة $1100^\circ C$.

يبين الجدول (3) ثوابت الشبكة البلورية وحجم وحدة الخلية للمركب المحضر عند درجات حرارة مختلفة.

الجدول (3)

$T(^\circ C)$	$a (A^\circ)$	$V(^\circ A^3)$
700	7.3255	393.1147
800	7.3287	393.6234
900	7.3368	394.9256
1000	7.3379	395.1003
1100	7.3428	395.9026

يبين الشكل (7) تغيرات ثابت الشبكة البلورية a بدلالة درجة حرارة التلدين للمركب $.CaCu_3Ti_4O_{12}$.



الشكل (7) تغيرات ثابت الشبكة البلورية a بدلالة درجة حرارة التلدين للمركب $.CaCu_3Ti_4O_{12}$.

نلاحظ من الشكل (7) أن قيم ثابت الشبكة البلورية تزداد بشكل طفيف مع زيادة درجة حرارة التلدين ويمكن أن يعود ذلك إلى تحسن البنية البلورية واكتمال اصطناع المركب $.CaCu_3Ti_4O_{12}$ عند الدرجة $1100^{\circ}C$ ، حيث عند هذه الدرجة كانت قيمة ثابت الشبكة البلورية أقرب إلى البطاقة المرجعية.

تم حساب عرض قمم الانعراج عند منتصف شدتها العظمى (FWHM) من أجل حساب حجم الحبيبات البلورية والانفعال في المادة [19,20,21]، حيث يرجع تعريض القمة إلى عاملين مختلفين هما: حجم الحبيبات البلورية والانفعال الشبكي. يتم تحديد تأثيرات حجم الحبيبات البلورية والانفعال الشبكي في أطراف الانعراج للعينات التجريبية. يكون للقمة الملاحظة في طيف انعراج الأشعة السينية عرضاً β مساوياً ل:

$$\beta = \beta_{crystallite} + \beta_{strain} \quad (5)$$

حيث $\beta_{crystallite}$ و β_{strain} هي التعريض الناتج عن حجم الحبيبات البلورية والانفعال الشبكي على الترتيب [20].

يعطى التعريض الناتج عن حجم الحبيبات البلورية الصغير $\beta_{crystallite}$ بمعادلة Scherrer على النحو:

$$\beta_{crystallite} = \frac{k\lambda}{D\cos\theta} \quad (6)$$

حيث θ زاوية انعراج براغ و D الحجم الوسطي للحبيبات البلورية (حجم التبلور) و λ طول موجة الأشعة السينية و k ثابت يساوي تقريباً الواحد.

بينما يعطى التعريض الناتج عن الانفعال الشبكي بالعلاقة:

$$\beta_{strain} = 4\varepsilon \tan\theta \quad (7)$$

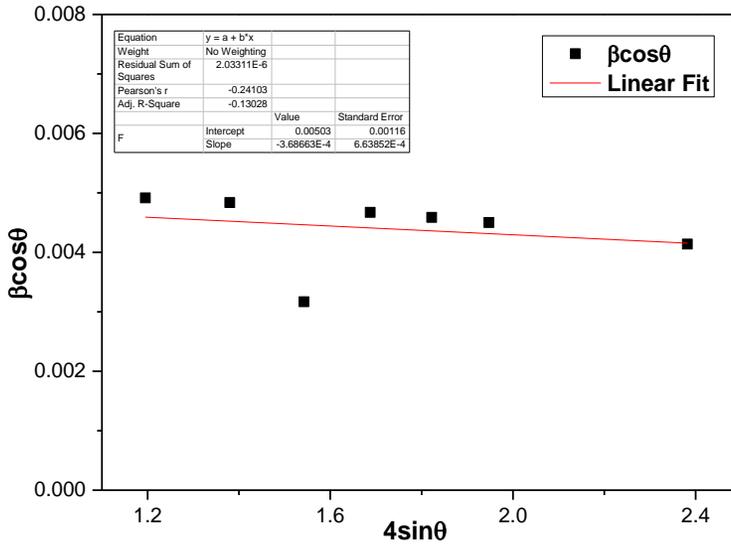
حيث ε الانفعال في العينة المدروسة.

وبالتالي يمكن الحصول على العلاقة الخطية التي تحتوي على حجم التبلور والانفعال على النحو الآتي:

$$\beta\cos\theta = \frac{\lambda}{D} + 4\varepsilon\sin\theta \quad (8)$$

تم تحديد حجم التبلور والانفعال في العينات المحضرة باستخدام معطيات انعراج الأشعة السينية حيث تم رسم المنحنيات البيانية لتغيرات $\beta\cos\theta$ بدلالة $4\sin\theta$.

يبين الشكل (8) تغيّرات $\beta\cos\theta$ بدلالة $4\sin\theta$ للمركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ المدن عند الدرجة 1100°C .



الشكل (8) تغيّرات $\beta\cos\theta$ بدلالة $4\sin\theta$ للمركب *CCTO* الملدن عند الدرجة 1100°C .

تمّ حساب الانفعال من ميل الخط البياني السابق وكان مساوياً $\varepsilon = -3.69 \times 10^{-4}$ ومن نقطة التقاطع مع المحور $\beta\cos\theta$ تمّ حساب حجم الحبيبات وكانت قيمتها مساوية $D = 35.6\text{nm}$. تدل الإشارة السالبة إلى أن الانفعال الحاصل هو انفعال انضغاطي.

الاستنتاجات:

- 1- تم اصطناع المركب $CaCu_3Ti_4O_{12}$ انطلاقاً من الأملاح والأكاسيد الأولية بطريقة الاصطناع الصلب ذات الكلفة الاقتصادية المنخفضة بالمقارنة مع الطرائق الأخرى المستخدمة في تحضير الأكاسيد المختلطة.
- 2- بينت دراسة XRD أن ثنائي أكسيد التيتانيوم يتبلور وفق البنية الرباعية وينتمي للمجموعة الفراغية ($I4_1\amd$) ويتبلور أكسيد النحاس وفق البنية البلورية أحادية الميل وينتمي إلى المجموعة الفراغية $C2/c$ ، بينما يتبلور أكسيد الكالسيوم وفق بنية مكعبية وينتمي للمجموعة الفراغية ($Fm3m$).
- 3- بينت الدراسات البنيوية حدوث تحول طوري لثنائي أكسيد التيتانيوم من طور الاناتاس إلى طور الروتيل في المجال الحراري $(800 - 900)^\circ C$.
- 4- وجد أن درجة الحرارة المثلى لتشكيل المركب $CCTO$ هي $1100^\circ C$.
- 5- وجد أن المركب $CCTO$ يتمتع ببنية مكعبية متمركزة الحجم ومستقرة على مجال واسع من درجات الحرارة.
- 6- تم حساب ثابت الشبكة البلورية وحجم الحبيبات للمركب $CCTO$ وتبين وجود انفعال انضغاطي في البنية.

التوصيات:

- 1- دراسة الخصائص الكهربائية للمركب المحضر
- 2- دراسة تأثير استبدال الكالسيوم والنحاس بعناصر أخرى على خصائص المركب
- 3- استخدام المركب المحضر في التطبيقات الالكترونية.

References:

- [1] Yanyan He, Ting Liu, Yebin Xu, Jingyuan Zhao, Zeming Du, Synthesis of the giant dielectric constant oxide $\text{CaCu}_3\text{Ti}_4\text{O}_{12}$ via ethylenediaminetetraacetic acid precursor, *Materials Research Bulletin* **47** (2012) 1181–1184.
- [2] Dun-Lu Sun, Ai-Ying W and Shao-Tang Yin, (2008) Structure, Properties, and Impedance Spectroscopy of $\text{CaCu}_3\text{Ti}_4\text{O}_{12}$ Ceramics Prepared by Sol–Gel Process, *J. Am. Ceram. Soc.*, **91** 169-173.
- [3] Chao Xu, Xuotong Zhao, Lulu Ren, Jianjie Sun, Lijun Yang, Jing Guo, Ruijin Liao, (2019) Enhanced electrical properties of $\text{CaCu}_3\text{Ti}_4\text{O}_{12}$ ceramics by spark plasma sintering: Role of Zn and Al co-doping, *Journal of Alloys and Compounds* **792** 1079-1087.
- [4] Chih-Ming Wang, Kuo-Sheng Kao, Shih-Yuan Lin, Ying-Chung Chen, Shang-Chih Weng, (2008) Processing and properties of $\text{CaCu}_3\text{Ti}_4\text{O}_{12}$ ceramics, *Journal of Physics and Chemistry of Solids* **69** 608–610.
- [5] R. M. Ramadan, Ahmad M. Labeeb, Azza A. Ward, Ahmed M. H. Ibrahim, (2020) New approach for synthesis of nano- sized $\text{CaCu}_3\text{Ti}_4\text{O}_{12}$ powder by economic and innovative method, *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*, <https://doi.org/10.1007/s10854-020-03490-9>.
- [6] Tao Li, Renzhong Xue, Junhong Hao, Yuncai Xue, Zhenping Chen, (2011) The effect of calcining temperatures on the phase

purity and electric properties of $CaCu_3Ti_4O_{12}$ ceramics, *Journal of Alloys and Compounds* **509** 1025–1028.

[7] Mohsen Ahmadipour, Mohd Fadzil Ain, Zainal Arifin Ahmad, (2016) A Short Review on Copper Calcium Titanate (CCTO) Electroceramic: Synthesis, Dielectric Properties, Film Deposition, and Sensing Application, *Nano-Micro Lett.* DOI 10.1007/s40820-016-0089-1.

[8] Sara Kawrani, Madona Boulos, David Cornu, and Mikhael Bechelany (2019) From Synthesis to Applications: Copper Calcium Titanate (CCTO) and its Magnetic and Photocatalytic Properties, *ChemistryOpen* **8** 922–950.

[9] X. W. Wang, P. B. Jia, X. E. Wang, B. H. Zhang, L. Y. Sun, Q. B. Liu, (2016) Calcining temperature dependence on structure and dielectric properties of $CaCu_3Ti_4O_{12}$ ceramics, *J Mater Sci: Mater Electron* DOI 10.1007/s10854-016-5366-8.

[10] Chih-Ming Wang, Shih-Yuan Lin, Kuo-Sheng Kao, Ying-Chung Chen, Shang-Chih Weng (2010) Microstructural and electrical properties of $CaTiO_3$ – $CaCu_3Ti_4O_{12}$ ceramics, *Journal of Alloys and Compounds* **491** 423–430.

[11] Seunghwa Kwon, Chien-Chih Huang, M.A. Subramanian, David P. Cann, (2009) Effects of cation stoichiometry on the dielectric properties of $CaCu_3Ti_4O_{12}$, *Journal of Alloys and Compounds* **473** 433–436.

[12] Smart LE, Moore EA. Solid state chemistry: an introduction. CRC press; 2012 May 29.

[13] West AR. Solid state chemistry and its applications. John Wiley & Sons; 2014 Mar 17.

[14] Lucas Lion Kozlinskei, Alisson T. de Andrade Paes, Edson Cezar Grzebielucka, Christiane Philippini F. Borges, André Vitor Chaves de Andrade, Eder Carlos F. de Souza, Sandra Regina M. Antunes, (2020) Processing influence in the $\text{CaCu}_3\text{Ti}_4\text{O}_{12}$ electrical properties, *Applied Physics A* 126:447
<https://doi.org/10.1007/s00339-020-03629-9>.

[15] Gaurav K. Upadhyay, Jeevitesh K. Rajput, Trilok K. Pathak, Vinod Kumara,c, L.P. Purohit, (2018) Synthesis of $\text{ZnO}:\text{TiO}_2$ nanocomposites for photocatalyst application in visible light, *Vacuum* doi: <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2018.11.026>.

[16] Hassan Zare Asl, Seyed Mohammad Rozati, (2018) Spray Deposited Nanostructured CuO Thin Films: Influence of Substrate Temperature and Annealing Process, *Materials Research*. **21**.

[17] A. Rajabtabar-Darvishi, LI Wei-li, O. Sheikhejad-Bishe, WANG Li-dong¹, LI Xiao-liang¹, LI Na¹, FEI Wei-dong, (2011) Effects of synthesis technique on dielectric properties of $\text{CaCu}_3\text{Ti}_4\text{O}_{12}$ ceramic, *Trans. Nonferrous Met. Soc. China* **21** 400-404.

[18] - X. H. Zheng, J. Xiao, X. Huang, D. P. Tang, X. L. Liu, (2011) Formation behavior of $\text{CaCu}_3\text{Ti}_4\text{O}_{12}$ from CaTiO_3 , CuO and TiO_2 , *J Mater Sci: Mater Electron* 22:1116–1119 DOI 10.1007/s10854-010-0269-6.

- [19]- Speakman SA. "Estimating crystallite size using XRD". MIT Center for Materials Science and Engineering. 2014.
- [20]- Prabhu, Y. T., Rao, K. V., Kumar, V. S. S., & Kumari, B. S. (2014). X-ray analysis by Williamson-Hall and size-strain plot methods of ZnO nanoparticles with fuel variation. *World Journal of Nano Science and Engineering*, 2014.
- [21]- Nath, D., Singh, F., & Das, R. (2020). X-ray diffraction analysis by Williamson-Hall, Halder-Wagner and size-strain plot methods of CdSe nanoparticles-a comparative study. *Materials Chemistry and Physics*, 239, 122021.

الحدوديات المتعامدة في فضاءات سوبوليف

طالب الدراسات العليا: علي وطفة

قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث

الدكتور المشرف: محمد عامر

الملخص:

في هذا البحث سنقوم بتعميم وتطبيق بعض الخوارزميات لبناء الحدوديات في فضاء سوبوليف باستخدام العلاقات العودية وهاتين الخوارزميتين هما خوارزمية ستيلجس وخوارزمية تشبيشبف المعدلة وسنقارن بينهما من حيث سرعة التنفيذ وسوف نستخدم طريقة غرام شميدث لجعل هذه الحدوديات متعامدة ومنظمة وإيجاد اصفار هذه الحدوديات وسنقوم أيضا بتطبيق هذه الحدوديات في تربيعيات غاوص وكتابة الاكواد اللازمة للحسابات الرقمية باستخدام برنامج **MATHEMATICA**.

كلمات مفتاحية:

الجداء الداخلي ، الحدوديات المتعامدة ، فضاء سوبوليف .

Orthogonal Polynomials in Sobolev Spaces

Summary :

In this paper, we will generalize some algorithms for building polynomials in Sobolev space using recurrence relations, Steljes, and the modified Chebshev, and we will implement the orthogonization method of the Gram-Schmidt method to make these polynomials and search for the zeros or roots of these polynomials and implement Gauss quadrature to approximate integrals and find solutions and write codes for calculations digital, using MATHEMATICA software.

Key words : orthogonal polynomial, inner product ,Sobolev spaces

مقدمة:

تعتبر نظرية التقريب والتحليل العددي من المجالات وثيقة الصلة في الرياضيات أو توأم الرياضيات على حد تعبير العالم أورزالك (Orzalk) [1] في الحقيقة تقع نظرية التقريب على مفترق الطرق بين الرياضيات البحتة والتطبيقية. وهي تشمل مجموعة واسعة من المجالات التي تمتد من المشكلات المجردة في التحليل الحقيقي والتابعي إلى التطبيقات المباشرة في الهندسة والصناعة. لذلك ، تستخدم نظرية التقريب مجموعة كبيرة ومتنوعة من الطرائق ، والتي تنشأ في التحليل ، و التحليل العددي ، وحساب التفاضل والتكامل ، والخوارزميات ، ومجالات أخرى من الرياضيات.

والحدوديات المتعامدة بمثابة قلب نظرية التقريب لعدة أسباب أهمها القدرة العالية على نشر التوابع باستخدام هذه الحدوديات بالإضافة انها تقوم بتسهيل الحسابات العددية في التكامل باستخدام تربيعيات غاوص .

1- تعاريف ومفاهيم أساسية :

تعريف (1) [1] [7] : نقول عن التابع $w(x)$ انه تابع وزن اذا حقق :

$$w - 1 \text{ تابع مستمر على المجال } [a, b]$$

$$w(x) > 0, \forall x \in [a, b] - 2$$

$$\forall x \in [a, b], n \in \mathbb{N}, \int_a^b w \cdot |x|^n dx < \infty - 3$$

تعريف (2) [1] [7] : فضاء ليبيغ الموزون $(L^p(w, [a, b]))$: هو صف كل التوابع

القيوسة على المجال $[a, b]$ التي تحقق :

$$\|f\|_{L^p(w, [a, b])} := \left(\int_a^b |f(x)|^p \cdot w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

من أجل $p = 2$ نحصل على حالة خاصة الفضاء : $L^2(w, [a, b])$

تعريف (3) [1][7] : (الجداء الداخلي في الفضاء $L^2(w, [a, b])$ بفرض التابعين

$f(x), g(x) \in C[a, b]$ عندئذ سنعرف الجداء الموزون بالشكل :

$$\langle f, g \rangle_w := \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot d\mu$$

حيث $d\mu = w(x)dx$

تعريف (4) [5][1] : (فضاء سوبوليف $(W^{k,p}([a, b], \mu))$: هو فضاء التتابع

التي تنتمي هي ومشتقاتها لفضاء ليبيغ $L^2(w, [a, b])$ وتحقق :

$$\|f\|_{W^{k,p}([a,b],\mu)}^p = \sum_{j=0}^k \int |f^{(j)}|^p d\mu_j < \infty$$

حيث $1 \leq p < \infty$ و $w = (w_0, w_1, \dots, w_k)$ و $d\mu_i = w_i dx$

ملاحظة (1): الجداء الداخلي في فضاء سوبوليف من أجل $p = 2$ له الشكل :

$$\langle f, g \rangle_{w_{(\mu_0, \dots, \mu_k)}, [a, b]}^{k,2} :=$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) d\mu_0 + \int_a^b f'(x) \cdot g'(x) \cdot d\mu_1 + \dots + \int_a^b f^{(k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) \cdot d\mu_k$$

حيث : $i = 0, \dots, k$ $d\mu_i = w_i(x)dx$

من أجل الحالة الخاصة $k = 1$ سنرمز للجداء بالشكل :

$$\langle f, g \rangle_{w_{(\mu_0, \mu_1)}, [a, b]}^{1,2} = \langle f, g \rangle_s$$

2- الحدوديات المتعامدة الكلاسيكية في الفضاء $L^2(w, [a, b])$ [7]:

إن من أهم الطرق لبناء الحدوديات هي العلاقات العودية وذلك لعدة أسباب أهمها سهولة كتابة البرامج والمرونة في التعامل مع الكثير من الفضاءات وتعتبر الطريقة المفضلة لدى مبرمجي الرياضيات المحوسبة والباحثين في التحليل العددي

العلاقة العودية في بناء الحدوديات المتعامدة في الفضاء $L^2(w, [a, b])$

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_{-1} = 0 \\ p_{n+1} = (x - a_n)p_n(x) - b_n p_{n-1}(x) \end{cases}$$

حيث :

$$a_n = \frac{\langle x \cdot p_n, p_n \rangle_w}{\langle p_n, p_n \rangle_w}$$

$$b_n = \frac{\langle p_n, p_n \rangle_w}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle_w}$$

طريقة غرام شميث لبناء الحدوديات المتعامدة [7]: من أجل أية أسرة من الحدوديات $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ يمكن بناء الحدوديات المتعامدة $\{u_1, \dots, u_n\}$ كما يأتي :

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle u_1, v_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, v_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

وبشكل عام :

$$u_k = v_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle u_j, v_k \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j$$

والجملة النظامية تكون :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}, \dots, e_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

3- الحدوديات المتعامدة في الفضاء $W^{1,2}(w, [a, b])$

بالاعتماد على المرجع [4] و [6] سنقوم بتعميم بعض المبرهنات

طريقة ستيلجس:

مبرهنة (1): العلاقة العودية لبناء حدوديات في فضاءات سوبوليف تعطى بالشكل :

$$p_{k+1}(t) = t \cdot p_k(t) - \sum_{j=0}^k \beta_j^k \cdot p_{k-j}(t) \dots \dots \dots (1)$$

حيث إن:

$$p_0(t) = 1$$

$$\beta_j^k = \frac{\langle t \cdot p_k, p_{k-j} \rangle_s}{\langle p_{k-j}, p_{k-j} \rangle_s} \quad j = 0, \dots, k, k = 0, \dots, n-1$$

حيث :

$$\langle \dots \rangle_{W^{1,2}_{(\mu_0, \mu_1), [a, b]}} = \langle \dots \rangle_s$$

الاثبات :

من أجل أي كثيرة حدود واحدة p_{k+1} (أمثال أعلى حد فيها هو 1) من الدرجة $k+1$ يمكن كتابتها بشكل تركيب خطي من الشكل :

$$p_{k+1} = t.p_k + \underbrace{(-\beta_0^k)p_k + \dots + (-\beta_0^0)p_0}_{\text{تركيب خطي}}$$

$$\text{ولنضع } q_k = p_{k+1} - tp_k$$

عندئذ يمكن التعبير عن q_k بشكل تركيب خطي بالشكل :

$$q_k = p_{k+1} - tp_k = - \sum_{j=0}^k \beta_j^k p_{k-j}(t)$$

حيث β_j^k ثوابت يطلب تعيينها

لنضرب طرفي العلاقة السابقة بـ p_{k-j}

$$\langle p_{k+1}, p_{k-j} \rangle - \langle tp_k, p_{k-j} \rangle = -\beta_j^k \langle p_{k-j}, p_{k-j} \rangle$$

حيث $j = 0, 1, \dots, k$ ومنه :

$$\beta_j^k = \frac{\langle tp_k, p_{k-j} \rangle_s}{\langle p_{k-j}, p_{k-j} \rangle_s}$$

طريقة تشبيثيف المعدلة :

تسهيلا للكتابة سنضع :

$$\sigma_{k,l} = \langle \pi_k, p_l \rangle_s$$

حيث p_l كثيرة حدود كلاسيكية و π_k كثيرة الحدود في فضاء سوبوليف

مبرهنة (2) : المعاملات في بناء كثيرات حدود لها الشكل :

$$-1 \text{ من أجل } k = j = 0$$

$$\beta_0^0 := \frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,0}} + a_0$$

$$-2 \text{ من أجل } k = 1, 2, \dots, n-1 \text{ و } j = k-1, k-2, \dots, 1$$

$$\beta_0^k := \frac{\sigma_{k,k+1}}{\sigma_{k,k}} + a_k - \frac{\sigma_{k-1,k}}{\sigma_{k-1,k-1}}$$

$$\beta_{k-j}^k := \frac{\sigma_{j,k+1}}{\sigma_{j,j}} + a_k \frac{\sigma_{j,k}}{\sigma_{j,j}} + b_k \frac{\sigma_{j,k-1}}{\sigma_{j,j}} - \frac{\sigma_{j-1,k}}{\sigma_{j-1,j-1}} - \sum_{l=j}^{k-1} \beta_{l-j}^k \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}}$$

$$\beta_k^k := \frac{\sigma_{0,k+1}}{\sigma_{0,0}} + a_k \frac{\sigma_{0,k}}{\sigma_{0,0}} + b_k \frac{\sigma_{0,k-1}}{\sigma_{0,0}} - \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l^k \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}}$$

الاثبات :

$$\langle \pi_j, \pi_j \rangle = \langle \pi_j, p_j \rangle = \sigma_{j,j} \text{ لدينا}$$

$$\text{ولدينا أيضاً: } p_k = \pi_k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\sigma_{j,k}}{\sigma_{j,j}} \pi_j \text{ من أجل } k = 0, 1, \dots$$

عندئذ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{j,k+1} &= \langle \pi_j, p_{k+1} \rangle = \langle \pi_j, tp_k - a_k p_k - b_k p_{k-1} \rangle \\
&= \langle \pi_j, tp_k \rangle - a_k \langle \pi_j, p_k \rangle - b_k \langle \pi_j, p_{k-1} \rangle \\
&= \langle \pi_j, t \left(\pi_k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\sigma_{j,k}}{\sigma_{j,j}} \pi_j \right) \rangle - a_k \langle \pi_j, p_k \rangle - b_k \\
&\quad \langle \pi_j, p_{k-1} \rangle \\
&= \langle \pi_j, t(\pi_k) \rangle + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}} \langle \pi_j, t\pi_l \rangle - a_k \sigma_{j,k} - b_k \sigma_{j,k-1}
\end{aligned}$$

لكن :

$$\begin{aligned}
\beta_{k-j}^k &= \frac{\langle \pi_k, t\pi_k \rangle}{\langle \pi_j, \pi_j \rangle} \Rightarrow \langle \pi_k, t\pi_k \rangle = \beta_{k-j}^k \sigma_{j,j} \\
&= \beta_{k-j}^k \sigma_{j,j} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}} \langle \pi_j, t\pi_l \rangle - a_k \sigma_{j,k} - b_k \sigma_{j,k-1}
\end{aligned}$$

بوضع $\sigma_{0,-1} = 0$ و $j = k = 0$

$$\sigma_{0,1} = \beta_0^0 \sigma_{0,0} - a_0 \sigma_{0,0}$$

ومنه :

$$\beta_0^0 = \frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,0}} + a_0$$

من أجل $j = 0$

$$\langle \pi_0, t.\pi_l \rangle = \beta_l^l \sigma_{0,0}$$

عندها :

$$\beta_k^k := \frac{\sigma_{0,k+1}}{\sigma_{0,0}} + a_k \frac{\sigma_{0,k}}{\sigma_{0,0}} + b_k \frac{\sigma_{0,k-1}}{\sigma_{0,0}} - \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l^l \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}}$$

من أجل $l < j - 1$ يكون : $\langle \pi_j, t\pi_l \rangle = 0$

ويكون أيضاً : $\langle \pi_j, t\pi_{j-1} \rangle = \langle \pi_j, \pi_j \rangle = \sigma_{j,j}$

$$\begin{aligned} \sigma_{j,k+1} &= \beta_{k-j}^k \sigma_{j,j} + \frac{\sigma_{j-1,k}}{\sigma_{j-1,j-1}} \sigma_{j,j} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}} \langle \pi_j, t\pi_l \rangle \\ &> -a_k \sigma_{j,k} - b_k \sigma_{j,k-1} \end{aligned}$$

بعزل β_{k-j}^k

$$\beta_{k-j}^k := \frac{\sigma_{j,k+1}}{\sigma_{j,j}} + a_k \frac{\sigma_{j,k}}{\sigma_{j,j}} + b_k \frac{\sigma_{j,k-1}}{\sigma_{j,j}} - \frac{\sigma_{j-1,k}}{\sigma_{j-1,j-1}} - \sum_{l=j}^{k-1} \beta_{l-j}^k \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}}$$

انطلاقاً من الخوارزميتين السابقتين سنقوم ببناء حدوديات سوبوليف في الحالات الآتية أو الجداءات الآتية علماً أن هذه التطبيقات العددية قمنا بكتابة برامج لحسابها باستخدام برنامج MATHEMATICA من أجل $n=5$ اما من أجل $n>5$ تحتاج لحواسيب عملاقة بقدرات عالية جداً :

الحالة الأولى : (وزن ليجنדר)

$$\langle f, g \rangle_{w_{((w_0, w_1), [a, b])}^{2,1}} := \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \cdot 1 dx + \int_{-1}^1 f'(x) \cdot g'(x) \cdot 1 dx$$

الحالة الثانية : (وزن تشبييف)

$$\langle f, g \rangle_{w_{((w_0, w_1), [a, b])}^{2,1}} := \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx + \int_{-1}^1 f'(x) \cdot g'(x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

الحالة الثالثة : (وزن لاجير)

$$\langle f, g \rangle_{w_{((w_0, w_1), [a, b])}^{2,1}} := \int_0^\infty f(x) \cdot g(x) e^{-x} dx + \int_0^\infty f'(x) \cdot g'(x) \cdot e^{-x} dx$$

الحالة الرابعة : (وزن هرميت)

$$\langle f, g \rangle_{w_{((w_0, w_1), [a, b])}^{2,1}} := \int_{-\infty}^\infty f(x) \cdot g(x) e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^\infty f'(x) \cdot g'(x) \cdot e^{-x^2} dx$$

تطبيقات :

الحالة الأولى : لئأخذ $w = \{w_1(x) = 1, w_2(x) = 1\}$ والمجال $[a, b] = [-1, 1]$

عندها باستخدام الكود (1) ومن أجل $n=5$ تكون الحدوديات هي :

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = -0.33333333333333 + t$$

$$P_2(t) = -0.461538461536 + 0.05128205128t + t^2$$

$$P_3(t) = 0.1487369587145 - 0.865905467017t - 0.018559768t^2 + t^3$$

$$P_4(t) = 0.290108334474 - 0.040358744923t \\ - 1.18903517452t^2 + 0.016340616t^3 + t^4$$

$$P_5(t) = -0.011353885158 + 0.4150105t - 0.0009992t^2 \\ - 1.4141345t^3 + 0.0083963t^4 + t^5$$

وباستخدام طريقة غرام شميدث للتعامد نجد الحدوديات المتعامدة المنظمة هي :

$$P'_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

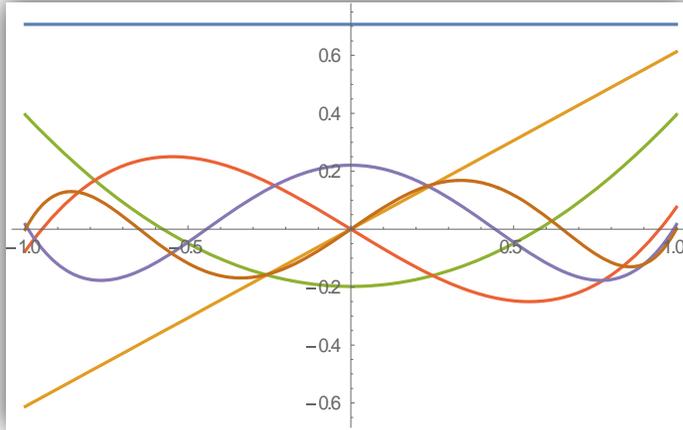
$$P'_1(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} t$$

$$P'_2(t) = -\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{8} + \frac{3}{8} \sqrt{\frac{5}{2}} t^2$$

$$P'_3(t) = -\frac{9}{2} \sqrt{\frac{7}{302}} t + 5 \sqrt{\frac{7}{302}} t^3$$

$$P'_4(t) = \frac{81}{8\sqrt{2102}} - \frac{495t^2}{8\sqrt{2102}} + \frac{105t^4}{2\sqrt{2102}}$$

$$P_5(t) = \frac{4005}{8} \sqrt{\frac{11}{4629962}} t - \frac{6755}{4} \sqrt{\frac{11}{4629962}} t^3 \\ + \frac{63}{8} \sqrt{\frac{1661}{30662}} t^5$$



الشكل (1)

وباستخدام الكود (1) نجد أن اصفار هذه الحدوديات هي :

كثيرة الحدود	الاصفار
p'_0	Non
p'_1	0
p'_2	-0.5773, 0.5773
p'_3	0, -0.9487, 0.9487
p'_4	-0.4431, 0.4431, -0.9911, 0.9911
p'_5	0, -0.6493, 0.6493, -0.9993, 0.9993

ملاحظة :

نلاحظ أن اصفار الحدوديات حقيقية ومتناظرة وتموضعة ضمن المجال $[-1,1]$

ملاحظة:

باستخدام تعليمة AbslutTiming في ماثماتيكا قمنا بالمقارنة بين زمن تنفيذ الخوارزمية الأولى والخوارزمية الثانية ووجدنا أن الخوارزمية الأولى اسرع من الخوارزمية الثانية

n	زمن التنفيذ بالثانية من أجل الخوارزمية الأولى (بالثانية)	زمن التنفيذ بالثانية من أجل الخوارزمية الثانية (بالثانية)
2	0.4 sec	1 sec
3	0.6 sec	3 sec
4	0.7 sec	5 sec
5	0.9 sec	9 sec

الحالة الثانية :

لنأخذ $[a, b] = [-1, 1]$ والمجال $w = \{w_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, w_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\}$

عندها باستخدام الكود (2) ومن أجل $n=5$ تكون الحدوديات هي :

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = -0.5 + t$$

$$P_2(t) = -0.461 + 0.0513t + t^2$$

$$P_3(t) = 0.345 - 1.13t - 0.0288t^2 + t^3$$

$$P_4(t) = 0.29 - 0.0403t - 1.18t^2 + 0.0163t^3 + t^4$$

$$P_5(t) = -0.0113 + 0.415t - 0.001t^2 - 1.41t^3 + 0.000465t^4 + t^5$$

وباستخدام طريقة غرام شميدت للتعامد نجد الحدوديات المتعامدة و المنظمة هي :

$$P'_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

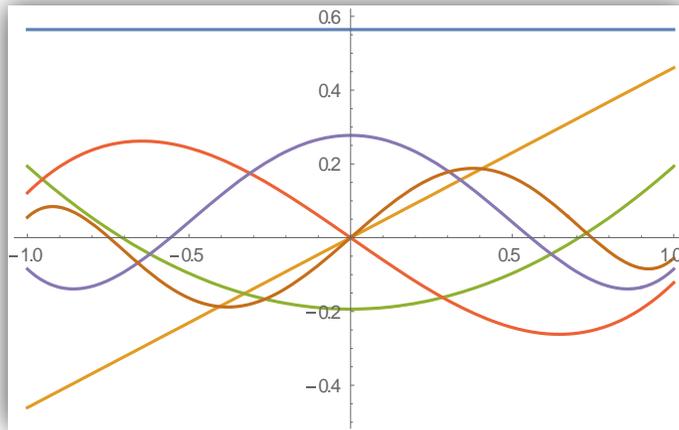
$$P_1'(t) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} t$$

$$P_2'(t) = -\sqrt{\frac{2}{17\pi}} + 2\sqrt{\frac{2}{17\pi}} t^2$$

$$P_3'(t) = -5\sqrt{\frac{2}{43\pi}} t + 4\sqrt{\frac{2}{43\pi}} t^3$$

$$P_4'(t) = 7\sqrt{\frac{14}{2839\pi}} - 200\sqrt{\frac{2}{19873\pi}} t^2 + 8\sqrt{\frac{34}{1169\pi}} t^4$$

$$P_5'(t) = 1265\sqrt{\frac{2}{1725891\pi}} t - 1140\sqrt{\frac{6}{575297\pi}} t^3 + 16\sqrt{\frac{258}{13379\pi}} t^5$$



الشكل (2)

وباستخدام الكود (2) نجد أن اصفار هذه الحدوديات هي :

كثيرة الحدود	الاصفار
p'_0	non
p'_1	0
p'_2	-0.7071 , 0.7071
p'_3	0
p'_4	-0.5573 , 0.5573
p'_5	0 , -0.7466 , 0.7466

ملاحظة : نلاحظ أن أصفار الحدوديات حقيقية ومتناظرة ومتموضعة ضمن

المجال $[-1,1]$

الحالة الثالثة :

لنأخذ $w = \{w_1(t) = e^{-t}, w_2(x) = e^{-t}\}$ والمجال $[0, +\infty[$

عندها باستخدام الكود (3) ومن أجل $n=5$ تكون الحدوديات هي:

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = -2.0 + t$$

$$P_2(t) = 1.33 - 2.66t + t^2$$

$$P_3(t) = -2.5 + 11.0t - 7.38t^2 + t^3$$

$$P_4(t) = 8.26 - 48.3t + 46.8t^2 - 13.3t^3 + t^4$$

$$P_5(t) = -33.4 + 230.t - 311.t^2 + 139.t^3 - 21.5t^4 + t^5$$

وباستخدام طريقة غرام شميث للتعامل نجد الحدوديات المتعامدة و المنظمة هي :

$$P'_0(t) = 1$$

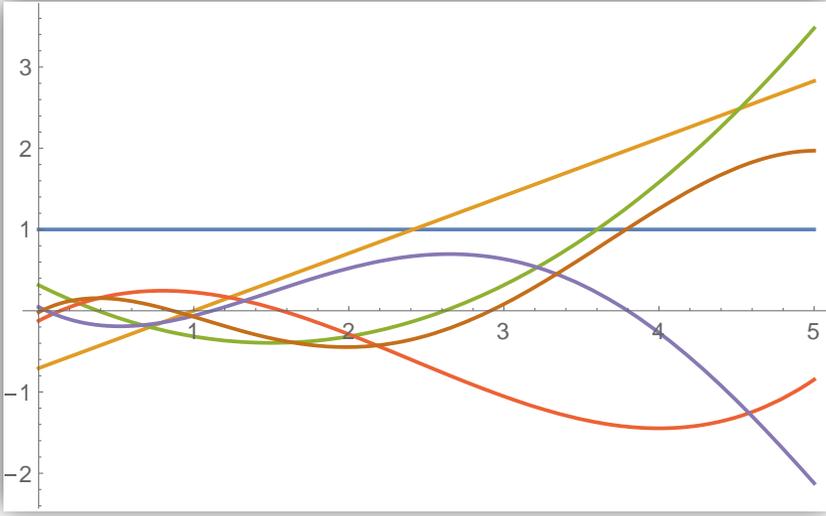
$$P'_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$P'_2(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3t}{\sqrt{10}} + \frac{t^2}{\sqrt{10}}$$

$$P'_3(t) = -\frac{1}{\sqrt{65}} + \frac{8t}{\sqrt{65}} - \frac{6t^2}{\sqrt{65}} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{13}}t^3$$

$$P'_4(t) = \frac{1}{\sqrt{442}} - \frac{21t}{\sqrt{442}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{17}{26}}t^2 - \frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{221}}t^3 + \frac{1}{24}\sqrt{\frac{13}{34}}t^4$$

$$P'_5(t) = -\frac{1}{\sqrt{3026}} + \frac{55t}{\sqrt{3026}} - \frac{11}{2}\sqrt{\frac{17}{178}}t^2 + \frac{62}{3}\sqrt{\frac{2}{1513}}t^3 - \frac{149t^4}{24\sqrt{3026}} + \frac{1}{60}\sqrt{\frac{17}{178}}t^5$$



الشكل (3)

وباستخدام الكود (3) نجد أن اصفار هذه الحدوديات هي :

كثيرة الحدود	الاصفار
p'_0	non
p'_1	0
p'_2	-0.7071 , 0.7071
p'_3	0, -1.118, 1.118
p'_4	-0.5573, 0.5573, -1.077, 1.077
p'_5	0, -0.7466, 0.7466, -1.048, 1.048

ملاحظة : نلاحظ أن أصفار الحدوديات حقيقية ومتناظرة

الحالة الرابعة :

لنأخذ $w = \{w_1(x) = e^{-t^2}, w_2(x) = e^{-t^2}\}$ والمجال $[a, b] =]-\infty, +\infty[$

عندها باستخدام الكود (4) ومن أجل $n=5$ تكون الحدوديات هي :

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = -0.5 + t$$

$$P_2(t) = -0.7857 + 0.07143t + t^2$$

$$P_3(t) = 0.3396 - 1.394t - 0.02315t^2 + t^3$$

$$P_4(t) = 1.303 - 0.05649t - 2.952t^2 + 0.004552t^3 + t^4$$

$$P_4(t) = -0.4031 + 3.574t + 0.01244t^2 - 4.969t^3 + 0.001345t^4 + t^5$$

وباستخدام طريقة غرام شميدث للتعامل نجد الحدوديات المتعامدة و المنظمة هي :

$$P'_0(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}}$$

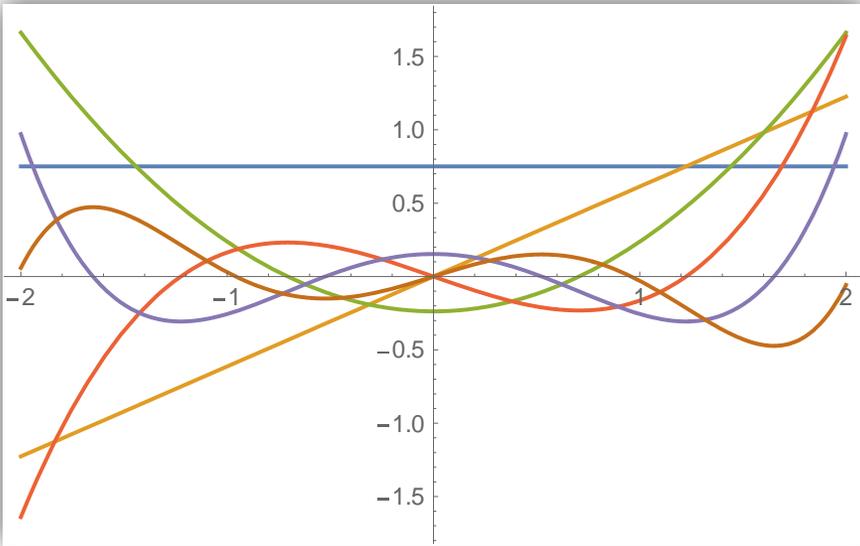
$$P'_1(t) = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}t}{\pi^{1/4}}$$

$$P'_2(t) = \frac{1}{\sqrt{10}\pi^{1/4}} + \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}t^2}{\pi^{1/4}}$$

$$P_3'(t) = -\frac{\sqrt{\frac{3}{7}}t}{\pi^{1/4}} + \frac{2t^3}{\sqrt{21}\pi^{1/4}}$$

$$P_4'(t) = \frac{1}{2\sqrt{6}\pi^{1/4}} - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}t^2}{\pi^{1/4}} + \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}t^4}{3\pi^{1/4}}$$

$$P_5'(t) = \frac{\sqrt{15}t}{2\sqrt{11}\pi^{1/4}} - \frac{2\sqrt{\frac{5}{33}}t^3}{\pi^{1/4}} + \frac{2t^5}{\sqrt{165}\pi^{1/4}}$$



الشكل (4)

وباستخدام الكود (4) نجد أن اصفار هذه الحدوديات هي :

كثيرة الحدود	الاصفار
p'_0	non
p'_1	1.0
p'_2	0.382 , 2.61
p'_3	$5.49 + 10^{-4}i$, $0.1393 + 0.0i$, $1.56 + 10^{-4}i$
p'_4	$0.0507 + 10^{-5}i$, $1.119 + 10^{-5}i$, $3.8 + 10^{-5}i$, $8.57 + 10^{-5}i$
p'_5	0.0187, 0.866, 2.91 , 6.31 , 11.8

ملاحظة : نلاحظ أن الاصفار غير متناظرة وهناك أصفار عقدية

في هذه الفقرة سنستخدم كثيرة حدود لوجندر التي قمنا ببنائها في إيجاد القيمة التقريبية للتكاملات باستخدام طريقة غاوص التربيعية

تربيعات غاوص [8] : تستخدم هذه الطريقة لإيجاد قيمة تقريبية للتكاملات بدقة عالية

ويعطى الشكل العالم لعلاقة غاوص التربيعية :

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x)dx \cong \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

تسمى x_i عقد العلاقة التربيعية وهي اصفار لكثيرات حدود متعامدة (قد تكون لوجندر أو تشبشيف أو غيرها) و c_i الثوابت الموافقة لهذه النقاط و(التي علينا ايجادها حتى تكون المساواة السابقة مضبوطة) ، تتحول العلاقة السابقة الى مساواة صحيحة من أجل كل كثيرة حدود درجتها لا تتجاوز $2n - 1$

أي ان الشرط اللازم والكافي لتكون المساواة السابقة صحيحة هو أن يكون :

$$f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$$

الآن سنقوم بإيجاد القيمة التقريبية للتكامل:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + e^{2x}} dx$$

وسنستخدم كثيرة حدود لوجندر التي قمنا ببنائها في فضاء سوبوليف السابق من الدرجة $n = 5$ أي:

$$P_5(t) = -0.011353885158 + 0.4150105t - 0.0009992t^2 - 1.4141345t^3 + 0.0083963t^4 + t^5$$

وأصفارها هي:

$$x_1 = 0, x_2 = -0.6493, x_3 = 0.6493, x_4 = -0.9993, x_5 = 0.9993$$

ومنه:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^1 1 dx = \sum_{i=1}^5 c_i \cdot 1$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 2 \dots (1)$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^1 x dx = \sum_{i=1}^5 c_i \cdot x_i$$

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 + x_4 c_4 + x_5 c_5 = 0 \dots (2)$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^1 x^2 dx = \sum_{i=1}^5 c_i \cdot (x_i)^2$$

$$x_1^2 c_1 + x_2^2 c_2 + x_3^2 c_3 + x_4^2 c_4 + x_5^2 c_5 = \frac{2}{3} \dots (3)$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^1 x^3 dx = \sum_{i=1}^5 c_i \cdot (x_i)^3$$

$$x_1^3 c_1 + x_2^3 c_2 + x_3^3 c_3 + x_4^3 c_4 + x_5^3 c_5 = 0 \dots (4)$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow \int_{-1}^1 x^4 dx = \sum_{i=1}^5 c_i \cdot (x_i)^4$$

$$x_1^4 c_1 + x_2^4 c_2 + x_3^4 c_3 + x_4^4 c_4 + x_5^4 c_5 = \frac{2}{5} \dots (5)$$

بحل جملة المعادلات السابقة نجد :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + e^{2x}} dx \cong \sum_{i=1}^5 c_i f(x_i) = 1.002$$

والقيمة الحقيقية له هي 1

توصيات ومقترحات :

من النتائج السابقة نوصي بكتابة علاقات عودية لبناء حدوديات سوبوليف في الفضاء $W^{k,2}(w, [a, b])$ حيث $k > 1$ وتعميم على اوزان كوزن جاكوبي ودراسة اصفار هذه الحدوديات

المراجع :

[1] Zagorodnyuk, S. M. (2021). **On some Sobolev spaces with matrix weights and classical type Sobolev orthogonal polynomials.** *Journal of Difference Equations and Applications*, 27(2), 261–283.

[2] Rodriguez, J. M., & Sigarreta, J. M. (2008). **Sobolev spaces with respect to measures in curves and zeros of Sobolev orthogonal polynomials.** *Acta applicandae mathematicae*, 104(3), 325–353.

[3] Kendall Atkinson • Weimin Han , (2012) **Theoretical Numerical**

Analysis A Functional Analysis Framework , Springer

[4] Walter Gautschi , (2005), **Orthogonal Polynomials (in Matlab)** , Journal of Computational Mathematics

[5] Figueroa, L. E. (2017). **Orthogonal polynomial projection error measured in Sobolev norms in the unit ball.** *Journal of Approximation Theory*, 220, 31–43..

[6] Marcellán, F., & Xu, Y. (2015). **On Sobolev orthogonal polynomials.** *Expositiones Mathematicae*, 33(3), 308–352.

[7] Leoni, G. (2017). **A first course in Sobolev spaces.** American Mathematical Soc.

[8] James F. Epperson (2017). **An introduction to numerical methods and analysis** American Mathematical Soc.

دراسة بتروغرافية للصخور البازلتية في مواقع باروحة، المحطة، القريبات منطقة تلكلخ غرب سورية

د. محمود مصطفى

**محمد فاضل

الملخص:

يقدم هذا البحث دراسة بتروغرافية للصخور البازلتية في منطقة تلكلخ ظهرت التوضعات البركانية في رقعة تلكلخ ضمن التوضعات الكريتاسي الأسفل على شكل سوية متوافقة مع الطبقات الرسوبية ، وخاصة على طرفي الانهدام وذلك في الجزء اللبناني من الرقعة . أن أشد الاندفاعات البركانية ظهرت في دور النيوجين اعتباراً من عَصْرِي الميوسين الأعلى - البليوسين ، انتشرت اللافا البازلتية في منخفض حمص و أجزاء من السلسلة الساحلية، واللبنانية بشكل أعطية متفاوتة السماكة، حيث تم التعرف على الأنواع، والأنماط البتروغرافية للصخور البازلتية في منطقة الدراسة من خلال دراستها بالمجهر الاستقطابي، وهي صخور بازلتية رمادية فاتحة مؤلفة من الأنواع البتروغرافية الآتية : بازلت ذو أوليفين مصمت - بازلت ذو أوليفين فراغي - بازلت فراغي .

الكلمات المفتاحية : الصخور البازلتية - دراسة بتروغرافية - رقعة تلكلخ .

*أستاذ دكتور - قسم الجيولوجيا - كلية العلوم - جامعة تشرين - سورية

** طالب ماجستير - قسم الجيولوجيا - كلية العلوم - جامعة تشرين - سورية

A petrographic study of basaltic rocks at the sites of Baruhah , Al Mahatta, and AlQurayyat , Tal Kalakh region, western Syria.

***Mahmoud Mustafa**

****Mohammed Fadel**

□ Summary

This research presents a petrographic study of the basaltic rocks in the area of Tell Kalakh. The most severe volcanic eruptions appeared in the Neogene period, starting from the Upper Miocene - Pliocene eras. The basaltic lava spread in the Homs depression and parts of the coastal and Lebanese chains in the form of coverings of varying thickness. The types and petrographic patterns of basaltic rocks in the study area were identified through their study with a polarizing microscope, and they are gray basaltic rocks. A chapeau composed of the following petrographic types: solid olivine basalt - interstitial olivine basalt - interstitial basalt.

Keywords: basalt rocks , petrographic study , Tal Kalakh sheet.

***Professor, Department of Geology, Faculty of Science, Tishreen University, Syria**

****Master Student - Department of Geology - Faculty of Science - Tishreen University - Syria**

❖ المقدمة:

تنتشر الصخور البازلتية في المنطقة الساحلية من القطر في طبقات الكريتاسي الأسفل خاصة في الألبان الأعلى صخور اندفاعية انتشرت في منطقة شين إلى الغرب من طرابلس - حمص، وغطت مساحات واسعة في هذه المناطق كما انتشرت الصخور البركانية السينوزوية في شمال - غرب السطيحة العربية. يبدو من دراسة هذه الاندفاعات أن لها علاقة مع الفوالق الموجودة شرق المتوسط، والتي تميز البنية التكتونية في المنطقة.

غطت هذه الاندفاعات الجزء الشمالي من القسم المستقر للركيزة العربية، وانحصرت تقريبا في منطقة ما قبل الطيات التدمرية، أي في القسم الجنوبي، والجنوبي الغربي من سورية، والقسم الشمالي من الأردن. كما تتميز الخارطة الجيولوجية السورية بالانتشار الواسع للنشاطات البركانية والحركات التكتونية التي حدثت خلال الأزمنة الجيولوجية المختلفة وذلك منذ الجوراسي الأوسط وحتى الرباعي . حيث شهدت سورية نشاطا بركانيا كبيرا خلال الأزمنة الجيولوجية المختلفة. بلغ ذروته خلال النيوجين / عصر البليوسين/ وانتشرت النواتج البركانية بشكل واسع في سورية . كما هو الحال في السلسلة الساحلية حيث ادت هذه الاندفاعات إلى حركات تكتونية عنيفة أثرت على البنية الجيولوجية للمنطقة وكانت النشاطات البركانية التي حدثت خلال البليوسين من النوع الشقي ضعيف التمايز. (2)

❖ أهمية وأهداف البحث:

1. تحديد أماكن انتشار الصخور البازلتية في المواقع المدروسة وتحديد تنوعاتها البتروغرافية اعتمادا على التركيب الفلزي نظرا لعدم توفر التحاليل الجيوكيميائية.
2. إجراء دراسة بتروغرافية تفصيلية للصخور البازلتية في المواقع المدروسة بغية تحديد تنوعاتها وانتشار كل منها .

❖ موقع منطقة الدراسة:

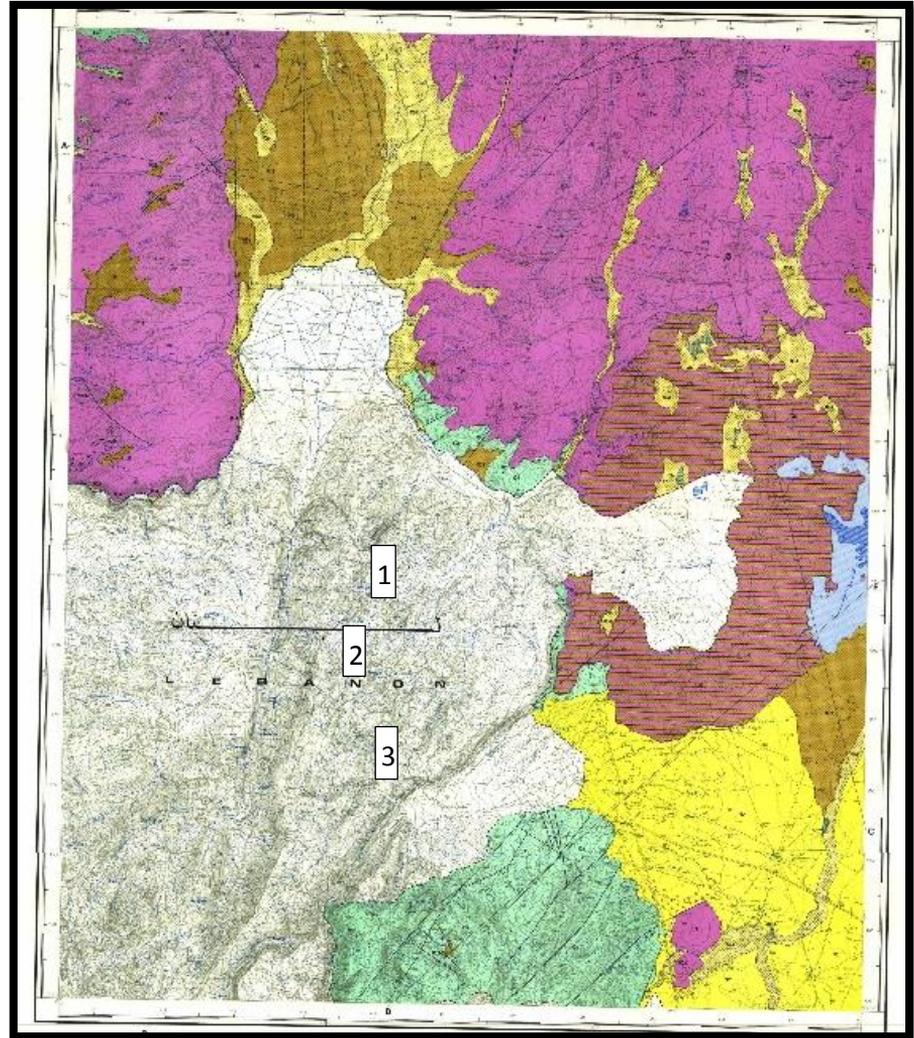
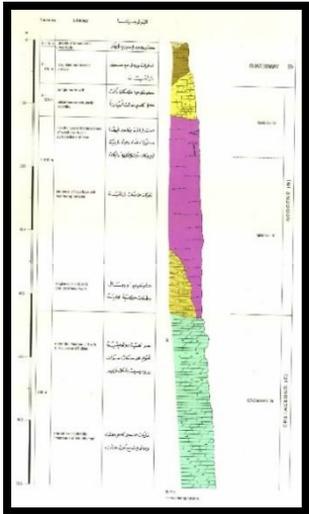
تغطي المنطقة المدروسة جزء من رقعة تلكخ الجيولوجية بمقياس 1:50000 و بمساحة 650 كم² تقريبا ، (الشكل: 1)، حيث تم دراسة ثلاثة مواقع (باروحة، المحطة، القريات)، وتمتد ضمن الاحداثيات الجغرافية الآتية :

E: 36° 15' 00" N: 34° 30' 00"

E: 36° 30' 00" N: 34° 45' 00"

طرائق البحث و مواده:

1. الاطلاع على الدراسات السابقة
2. الاطلاع على الخرائط الجيولوجية والطبوغرافية للمنطقة بغية معرفة العناصر الطبوغرافية للمنطقة و التوضعات و التكتونيات الصخرية وطبيعة الصخور المنتشرة والوضع التكتوني في المنطقة .
3. جولات حقلية تم من خلالها جمع العينات من مواقع مختلفة وذلك باستخدام البوصلة الجيولوجية والمطرقة الجيولوجية وعدسة مكبرة زجاجية وآلة تصوير ،ودفتر حقلي، وأكياس جمع العينات ومحفظة لحمل الادوات ونقل العينات المأخوذة من الحقل .
4. تحضير الشرائح الصخرية ودراستها بالمجهر المستقطب المجهز بكاميرا ديجتال في مخبر الفلزات والبلورات بجامعة تشرين حيث جمعت 18 عينة موزعة على ثلاث مواقع (المحطة، قريات، باروحة) كما تم تحضير 18 شريحة صخرية منها وتم اختيار الشرائح النموذجية منها والتي عددها 10 شريحة ودرست بالمجهر المستقطب بشكل تفصيلي لتحديد التركيب الفلزي وبالتالي تحديد النوع البتروغرافي في المواقع المدروسة .



(الشكل:1)-خارطة رقعة تالكخ ، بمقياس 1:50000 ، وعمود طبقي [1].

بالإضافة إلى مواقع مناطق الدراسة حيث يمثل الرقم (1) منطقة باروحة و رقم (2) منطقة المحطة و رقم (3) منطقة القريات

❖ -النتائج والمناقشة:

○ الوضع الجيولوجي والستراتيغرافي والبنوي لمنطقة الدراسة :

● الوضع الجيولوجي والستراتيغرافي والبركنة :

تعود أقدم الصخور الرسوبية المتكشفة في خارطة تكلخ إلى عمر الجوراسي الأوسط (باتونيان - كالفويان أسفل) وذلك في الجزء اللبناني من خارطة ، تتألف من حجر كلسي وحجر كلسي مدلمت ودولوميت وهي تدل على بيئة بحرية. حدث نهوض عام للمنطقة في الجوراسي الأعلى (اكسفورديان- كمريدجيان) ، حيث هيمنت بيئة بحرية شاطئية أدت إلى توضعات مؤلفة من مارل وكلس مارلي وحجر كلسي حطامي يحتوي على جيودات ليمونيتية . حدث تجاوز بحري كبير في قاعدة الكريتاسي (أسفل الألبان) حيث غطت المياه التضاريس الكارستية البسيطة للجوراسي الأعلى (السلسلة اللبنانية) ، أدى ذلك إلى توضع خامات حديدية بسيطة ورمال وحجر كلسي عضوي ومارل غلوكونيتي، [2,3,4,5] وكلها تشير إلى البيئة الشاطئية التي سادت في تلك الفترة . حصلت في قمة الإسيان اندفاعات بركانية تحت بحري ذات بنية وسائدية على شكل عدسات حيث سالت اللابا المتدفقة في المياه الضحلة وامتزجت مع الرسوبيات الطينية ، مشكلة عدسات متوافقة بشكل عام مع التطبيق . ترسبت في أعمار الألبان والسينومانيان والتورونيان تناوبات من مارل وحجر كلسي وكلسي دولوميتي ، إن هذه التناوبات تشير إلى التموجات الصغيرة الحاصلة في الحوض الترسيبي والناجمة عن حركات الصعود والهبوط المؤثرة على السطحية.

● الوضع البنيوي:

تقع خارطة تكلخ على الحافة الشمالية الغربية للسطحية العربية ، ويخترقها الامتداد الجنوبي لإنهدام مصيف - الغاب (القسم الشمالي من الانهدام العربي - الإفريقي والممتد من البحر الأحمر في الجنوب حتى بحيرة العمق في الشمال ، عبر خليج العقبة ، البحر الميت ، سهل البقاع ، سهل البقيعة وانهدام مصيف - الغاب). يحد خارطة من الشمال هضبة شين البركانية ومن الغرب النهاية الجنوبية للسلسلة الساحلية ومن الجنوب النهاية الشمالية لسلسلة لبنان الغربية وهضبة تكلخ البركانية والنهاية الشمالية

الشرقية لمنخفض البقاع ومن الشرق منخفض حمص النيوجيني يلاحظ في خارطة تكلخ اتجاهات تكتونية محددة :

- فوالق شمال - جنوب
- فوالق شمال شمال شرق - جنوب جنوب غرب
- فوالق شمال شرق - جنوب غرب
- فوالق شمال غرب - جنوب شرق

❖ الدراسات السابقة:

● مرحلة الدراسات الوطنية : بدأت عام 1971 بمجموعة من الجيولوجيين السوريين أعمال المسح الجيولوجي التفصيلي للسلسلة الساحلية

بمقياس 1/50000 ، حيث استخدمت التقسيمات الليتوستراتيغرافية للكريتاسي الموضوعية من قبل د0م معطي (1967).

- قام الباحثون (رقية و حبيب) في الاستشعار عن بعد عام (2004) بدراسة تكتونية الانهدام، وظواهر البركنة في جنوب السلسلة الساحلية {19}، حيث تم دراسة ظواهر البركنة على طرفي الانهدام السوري في الجزء الجنوبي من السلسلة الساحلية.

- قام حبيب في (2005) بدراسة التوضعات البازلتية المنتشرة ضمن رقعتي غرب حماه والرسنن (بتوغرافياً وكيمايياً) [20,21].

- أجريت دراسة بتروولوجية للصخور البازلتية في منطقة بانياس، في عام (2010) حيث تطرقت إلى إجراء دراسة تفصيلية للصخور البازلتية المنتشرة في منطقة بانياس [25].

- أجرى حبيب عام (2012)، دراسة جيوكيميائية ومنشئية للصخور البازلتية في منطقتي الرسنن وجرجناز (وسط وشمال غرب سورية)، وحدد الصفات الجيوكيميائية المنشئية

للصخور البازلتية، وما يميزها عن غيرها من المناطق ذات الصخور البازلتية في سورية {21}.

- أجرى حبيب في عام (2015) إعادة تقويم الصخور البازلتية في الجبال الساحلية السورية (مثال جوية الريند) توصل فيها إلى أن البازلت الموجود في هذه الجويات يعود عمره إلى زمنين مختلفين: الأول هو حدود الجوراسي مع الكريتاسي، أي أسفل الكريتاسي الأعلى خلال النيوكوميان والثاني: خلال دور النيوجين، لاسيما عصر البليوسين مرافقاً لزمن تشكل انهزام الغاب {22}.

- كما أنجزت رامية وردة دراسة بتروغرافية للصخور البازلتية في كل من السفرقية، وخربة السنديان، وجوبة برغال في عام (2016) ، حددت من خلالها الأنواع البتروغرافية الموجودة في المناطق المدروسة (26,27).

- وأنهت أطروحة دراسة عام (2017) حول: دراسة الخصائص البترولوجية للصخور البترولوجية في منطقة القرداحة {25}.

- نشر محسن (2017) مقال بعنوان دراسة جيولوجية للصخور البترولوجية في هضبة شين حيث تم تمييز ست أنواع للصخور البازلتية في المنطقة المدروسة (بازلت كتلي، بازلت فراغي، بازلت فاسد، بازلت كروي تقشيري، جدر ودايكات، وبازلت ذو حشوات)، كما أوضحت الدراسة الجيوكيميائية إلى وجود تفاضل مهلي غير كامل للصبغات البازلتية والتي تنتهي في المرحلة الأولى للتفاضل (بازلت أوليفيني قلوي) وبعضها إلى المراحل المتوسطة {23}.

- كما أنجز إبراهيم (2019) دراسة حول ربط الخصائص الفلزية، الكيميائية والفيزيائية للتوضعات البازلتية المنتشرة في جنوب هضبة شين وبأهميتها التطبيقية {30}.

- أنجزت خدام مقال (2019) دراسة بتروغرافية للصخور البازلتية في بستان الحمام (رقعة القدموس) شمال غرب سورية عام (2019)، حددت من خلالها الأنواع البتروغرافية للصخور البازلتية الموجودة في بستان الحمام {28}.

-الدراسة الحقلية للصخور البازلتية :

تمت الدراسة الحقلية لثلاث مواقع من رقعة تلكلخ (باروحة، المحطة، القرية)، وتم أخذ عدد من العينات البازلتية من كل موقع كما هو موضح في (الجدول:1)

(الجدول:1)-يبيّن أسماء المواقع وعدد الشرائح الصخرية المدروسة والوصف الحقلّي والملاحظات الحقلية.

باروحة	BH	7	3	بازلت (ذو أوليفين) مصمت فاسد يظهر باللون الرمادي الفاتح إلى الرمادي الغامق بالإضافة لوجود كتل متفرقة صخرية قاسية تظهر باللون الرمادي
المحطة	MH	6	3	بازلت ذو أوليفين مصمت فاسد بشدة يظهر باللون الرمادي الفاتح نتيجة عمليات التجوية بالإضافة لوجود كتل صخرية قاسية تظهر باللون الرمادي
القرية	QT	5	3	بازلت مصمت متوسط الفساد يظهر بلون رمادي فاتح إلى رمادي غامق مع وجود كتل صخرية مصمتة قاسية وتظهر بلون رمادي غامق

. الموقع الاول مقطع باروحة :

تبلغ سماكة جبهة التكشف بين 2 و 3.5 م و امتداده بين 35 و 40 م ،
بينما يكون الإرتفاع الطبوغرافي 320 م، المقطع ذو اتجاه شمال شرق - جنوب
غرب و يقع عند الإحداثيات التالية :

34° , 41' , 43" N ، 36° , 16' , 56" E

يتألف من الأسفل إلى الأعلى :

- بازلت كتلي بسماكة 1 m .

- طبقة بازلتية مكسرة و فاسدة جزئياً نتيجة لعمليات التجوية بالإضافة إلى بعض الكتل البازلتية بسماكة 1 m

- تربة زراعية ذو لون بني بسماكة 1 m ناتجة عن عمليات التجوية للصخور البازلتية الواقعة تحتها .

SW

NE



(الشكل:2)- جبهة تكشف في موقع باروحة .

الموقع الثاني المحطة :

تبلغ سماكة جبهة التكشف بين 2.5 و 3 م و امتداده حوالي 25 م ،
يكون الإرتفاع الطبوغرافي 265 م ، المقطع ذو اتجاه شمال شرق جنوب غرب
و يقع عند الإحداثيات التالية :

$34^{\circ} , 40' , 17'' \text{ N}$

$36^{\circ} , 15' , 37'' \text{ E}$

و يتألف من الأسفل إلى الأعلى :

- بازلت فاسد ذو لون مصفر ومشقق بدرجة كبيرة نتيجة لعمليات التجوية التي تعرض لها البازلت بسماكة 1-1.5 م
- تربة زراعية وقطع بازلتية فاسدة تظهر بلون بني غامق بسماكة 1-1.5 م نتيجة التجوية المتقدمة للصخور البازلتية .

NE



(الشكل:3)- جبهة تكشف الصخور البازلتية في موقع المحطة.

الموقع الثالث القريات :

تبلغ سماكة جبهة التكشف بين 2.5 و 3 م و امتداده حوالي 25-35m، بينما يكون الإرتفاع الطبوغرافي 347 م ، المقطع ذو اتجاه شرق غرب و يقع عند الإحداثيات التالية:

$34^{\circ}, 38', 19'' N$

$36^{\circ}, 15', 52'' E$

و يتألف من الأسفل إلى الأعلى:

- طبقة بازلتية متعرضة لعملية تجوية متوسطة نتيجة لعمليات التجوية بسماكة 1 m مع بعض الكتل البازلتية
- تربة زراعية رقيقة بسماكة 2m ناتجة عن التجوية المتوسطة إلى كبيرة للصخور البازلتية .



W

E

(الشكل:4) -جبهة تكشف الصخور البازلتية في موقع القريات.

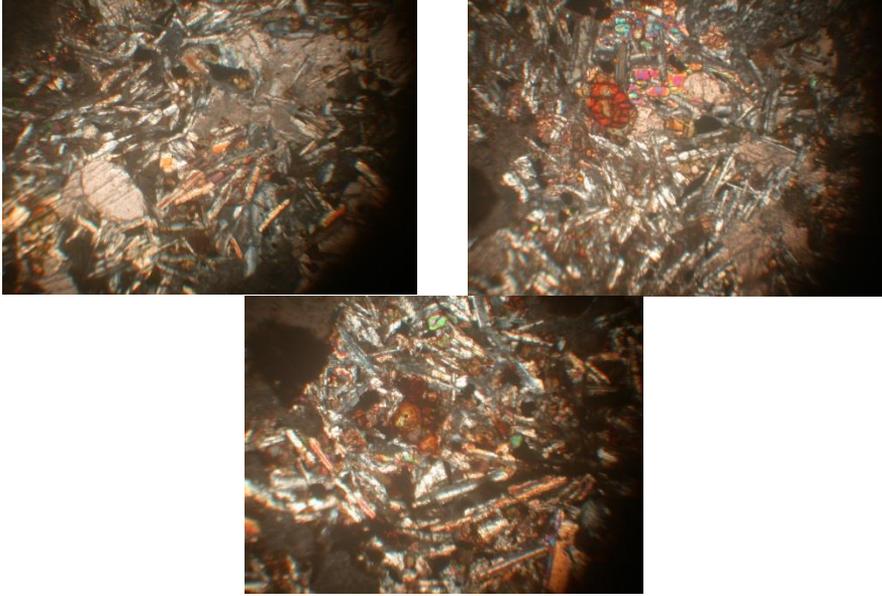
-الدراسة البتروغرافية للصخور البازلتية:

الموقع الأول باروحة بازلت ذو أوليفين :

النسيج العام للصخر وبنيته: نسيج سيلاني وبنية بورفيرية الى مكرو بورفيرية يتألف من بلورات فينوكريست من الأوليفين ومكرو فينوكريست من البلاجيوكلاز ضمن أرضية ناعمة لبلورات الأوليفين والبلاجيوكلاز والبيروكسين ،والصخر معرض لدرجة كبيرة من الفساد. **الفينوكريست:** يتألف من بلورات كبيرة الحجم من الأوليفين بأبعاد 0.5- 0.7 ونسبتها 40-50% معرضة للفساد في بعض الحبات وتحولت لأيدنغسيت بلون أحمر صدأي ، بالإضافة لوجود البلاجيوكلاز ببنية إبرية ولون اصفر باهت حباته محطمة ومهشمة نتيجة الفساد.(الشكل: 5).

الأرضية: ناعمة التبلور (ميكروليتية) مؤلفة من البلاجيوكلاز والبيروكسين والأوليفين وتشكل الأرضية حوالي 17% من حجم الصخر بالإضافة لوجود الفراغات الغير ممثلة ذات حجوم مختلفة وتتراوح نسبة الفراغات 1-2%، وتركيب الأرضية كما يلي :

الأوليفين: بلورات ذات حجوم من 0.01-0.05 مم، **البلاجيوكلاز:** بلورات إبرية ذات توأمية وبأبعاد 0.01-0.05 مم، **البيروكسين:** بلورات غير منتظمة الشكل ذات أبعاد 0.01-0.03 مم، **الفلزات المعدنية:** المغنيتيت والإيليمينيت والتي تظهر بلون أسود إلى بني تتراوح نسبتها 1-2% بالإضافة إلى الفراغات العشوائية والتي تكون غير ممثلة .



(الشكل:5) - صور مجهرية للصخور البازلتية في موقع باروحة.

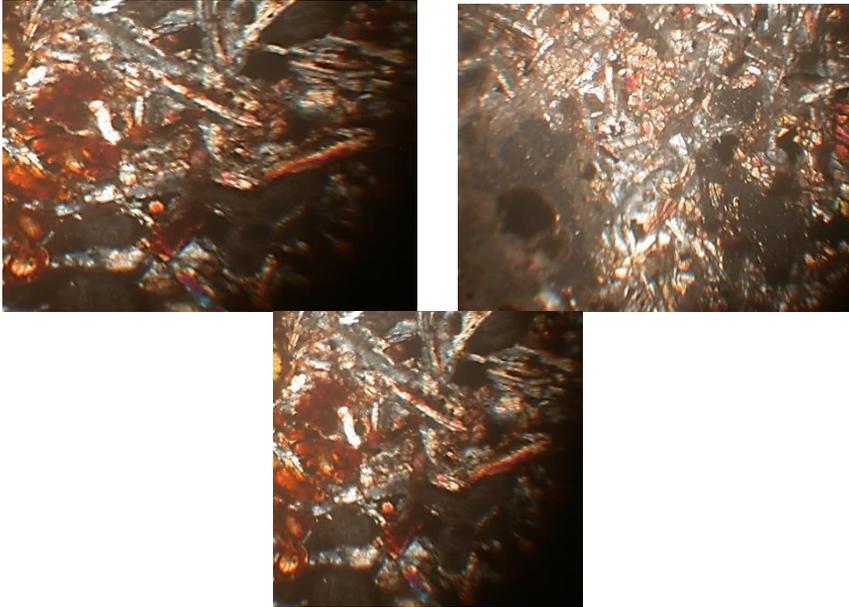
- الصورة (1) بازلت ذو أوليفين حيث نلاحظ الأوليفين بشكل حبات كبيرة وبلون بني محمر متعرض للفساد في بعض الحبات لأيدينغسيت بلون أحمر صدأي رقم الشريحة (f1) تكبير (10*4)
- الصورة (2) بازلت ذو أوليفين بشكل حبات كبيرة متعرضة للفساد ومتحولة لأيدينغسيت بلون احمر صدأي كما نلاحظ وجود الفراغات غير الممتلئة رقم الشريحة (f3) تكبير(10*4)
- الصورة (3) بازلت ذو أوليفين بشكل حبات متوسطة الحجم معرضة للفساد متحولة لأيدينغسيت وبللاجيوكلاز بلون اصفر باهت محطم ومهشم نتيجة الفساد ويظهر البنية السيلانية للصخر رقم الشريحة (f4) تكبير (10*4)

الموقع الثاني المحطة البازلت ذو الأوليفين:

النسيج العام للصخر وبنيته: نسيج سيلاني وبنية بورفيرية الى مكرو بورفيرية يتألف من بلورات فينوكريست من الأوليفين ومكرو فينوكريست من البلاجيو كلاز ضمن أرضية ناعمة لبلورات الالوليفين والبلاجيو كلاز والبيبروكسين والصخر معرض لدرجة كبيرة من الفساد. **الفينوكريست:** يتألف من بلورات كبيرة الحجم من الأوليفين بأبعاد 0.5-0.7 ونسبتها 60-70 % معرضة للفساد في بعض الحبات وتحولت لأيدينغسيت بلون أحمر صدأي، بالإضافة لوجود البلاجيوكلاز ببنية إبرية ولون اصفر باهت حباته محطمة ومهشمة نتيجة الفساد.(الشكل:6).

الأرضية: ناعمة التبلور (ميكروليتية) مؤلفة من البلاجيوكلاز والبيروكسين والأوليفين وتشكل الأرضية حوالي 17% من حجم الصخر بالإضافة لوجود الفراغات الغير ممثلة ذات حجوم مختلفة وتتراوح نسبة الفراغات 1-2%، وتركيب الأرضية كما يلي : **الأوليفين:** بلورات ذات حجوم من 0.01-0.05 مم، **البلاجيوكلاز:** بلورات إبرية ذات توأمية وبأبعاد 0.01-0.05 مم، **البيروكسين:** بلورات غير منتظمة الشكل ذات أبعاد 0.01-0.03 مم، **الزجاج البركاني:** تتراوح نسبته 5-7 % وهو نتاج المصهور المتبقي بعد تبلور

جميع أنواع الميكروليتات ،**الفلزات المعدنية:** المغنيتيت و الإليمينيت والتي تظهر بلون أسود إلى بني تتراوح نسبتها 1-2% بالإضافة إلى الفراغات العشوائية والتي تكون غير ممثلة .



(الشكل:6) صور مجهرية للصخور البازلتية في موقع المحطة

الصورة رقم(4) بازلت ذو أوليفين يظهر الأوليفين بلون بني محمر نتيجة الفساد وبشكل تجمعات بلورية كما تظهر بلورة بيروكسين بشكل

صندوق رقم الشريحة (md1) تكبير (10*4)

الصورة رقم (5) بازلت ذو أوليفين يظهر الأوليفين بشكل حبات كبير بلون بني محمر والبلاجيوكلاز بشكل ابري ويظهر البنية السيلانة

وحبات ميكروليتية من المغنيتيت بلون الاسود رقم الشريحة (md4) تكبير (10*4)

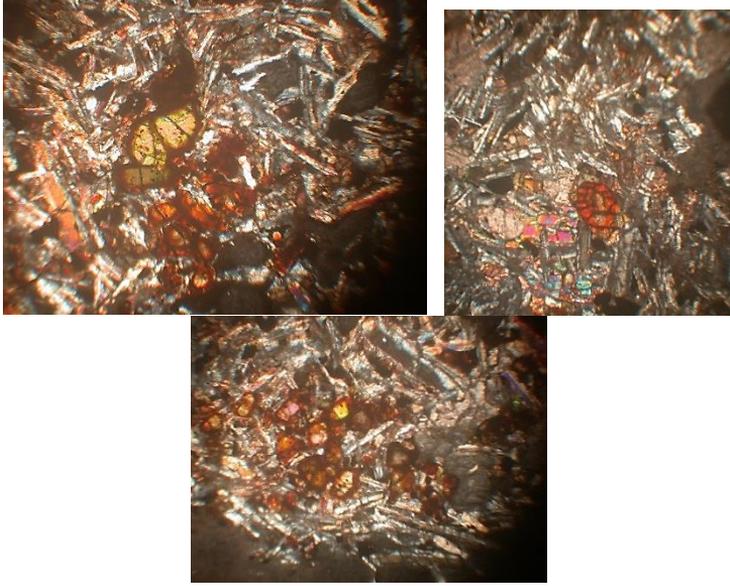
الصورة رقم(6) بازلت ذو أوليفين يظهر الأوليفين بلون بني محمر وحبات كبير والبلاجيو كلاز بشكل ابري ذات توأمية بسيطة رقم الشريحة

(md3) تكبير (10*4)

❖ الموقع الثالث القريات:

النسيج العام للصخر وبنيته: نسيج سيلاني وبنية بورفيرية إلى ميكروبورفيرية تتألف من بلورات فينوكريست من الأوليفين والبلاجيوكلاز والبيروكسين (الشكل:7).
الفينوكريست: تتألف من بلورات إبرية من البلاجيوكلاز تظهر بلون ابيض مصفر ذات توأمية بسيطة بنسبة 60-70% بأبعاد 0.2-0.8 مم وبلورات ير منتظمة الشكل من الأوليفين يظهر بلون بني محمر بنسبة 2-5% وبأبعاد 2-6 مم وبلورات البيروكسين (أرتو - كلينوبيروكسين) بأبعاد 0.2-0.5 وبنسبة تتراوح ما بين 4-7%
الأرضية: ناعمة إلى مهيبة التبلور (ميكروليتية) مما يعطي دليل على ان التبلور حدث بشكل سريع وهي مؤلفة من البلاجيوكلاز والبيروكسين والأوليفين وتشكل الأرضية حوالي 15-21% تقريبا من حجم الصخر بالإضافة الى وجود فراغات غير ممثلة ذات حجوم مختلفة وموزعة بشكل عشوائي وبنسبة 2-5%
تركيب الأرضية:

الأوليفين: بلورات غير منتظمة الشكل ذات حجوم من 0.01-0.05 مم، البلاجيوكلاز: بلورات إبرية موشورية ذات توأمية بسيطة وبأبعاد 0.01-0.05 مم، البيروكسين (أرتو - كلينو) : تظهر بلورات الأورتوبيروكسين بلون أصفر ذات اشكال غير منتظمة بينما بلورات الكلينوبيروكسين ذات اشكال صندوقية وتظهر بلون الازرق او اخضر وبأبعاد 0.01-0.03 مم، **الزجاج البركاني:** يظهر بلون عسلي بدون محلل والتي تراوح نسبته بين 3-5% وهو نتاج المصهور المتبقي بعد التبلور جميع الميكروليتات ، **الفلزات المعدنية:** المغنيتيت والتي تظهر بلون أسود إلى بني تتراوح نسبتها بين 2-3% .



الصورة رقم (7) بازلت ذو أوليفين يظهر الأوليفين بلون بني محمر وحببات متوسطة الحجم ويظهر البلاجيوكلاز

البنية السيلانية للصخر وحببات من المغنيتيت رقم الشريحة (md5) تكبير (10*4)

الصورة رقم (8) بازلت مصمت ذو نسيج سيلاني البلاجيوكلاز بشكل ابري ويلاحظ بلورات صغيرة من المغنيتيت

رقم الشريحة (m1) تكبير (10*4)

الصورة رقم (9) بازلت كتلي ويلاحظ وجود من بلورة الأوليفين وبنية بورفيرية رقم الشريحة (m3) تكبير

(10*4)

❖ الاستنتاجات و التوصيات:

من خلال الدراسة الحقلية والبتروغرافية يمكننا التأكيد على النتائج الآتية:

- 1- الصخور المدروسة ذات ألوان فاتحة ناعمة الحبيبات وفينوكريست من الأوليفين والبلاجيوكلاز وبدرجة أقل بيروكسين، ونسيج سيلاني وبنية بورفيرية إلى ميكروبورفيرية .
- 2- الأنواع البتروغرافية المحددة في المواقع المدروسة / باروحة - المحطة - القرينات / عبارة عن بازلت ذو أوليفين مصمت .
3. أغلب تنوعات الصخور البركانية من النوع مجهري البنية ولا يمكن تمييزه الا بالدراسة المجهرية.

❖ التوصيات :

❖ 1-توسيع هذه الدراسة لتشمل جميع المناطق التي تحوي الصخور البازلتية وعزلها وتصنيفها لضمان الاستثمار الأمثل لهذه الخامات البازلتية التي تتمتع بتطبيقات صناعية كبيرة نحتاجها في مرحلة إعادة الإعمار.

❖ 2-متابعة مخرجات هذا البحث في الكليات التطبيقية، وإجراء التطبيقات المخبرية والعملية لمعرفة الخصائص الفيزيائية والكيميائية للبازلت على الأراضي السورية بهدف فتح مجالات صناعية أخرى وعدم الاقتصار على أهميتها في صناعة الإسمنت.

❖ 3-إجراء المزيد من الدراسات الجيوكيميائية على مستوى العناصر الأرضية النادرة والنظائر المشعة والمستقرة لتحديد أعمار ومصدر هذه الصخور بدقة وربطها بالتطور الجيوديناميكي للمنطقة.

❖ المراجع المستخدمة :References

- 1- Syria's geological map, Tell Kalakh sheet., at a scale of 1:50000, Directorate of Geological Survey and Studies, 1982.
- 2- 2-SHAPO, YOUSEF, the explanatory note for the Kadmuo and baniyas sheet.
- 3-BELAL AHMADH, Atiqi MOSTAFA, SEDA GHALIB. Geological and geophysical study report. Preparation of the professional work unit at Damascus University,56,1983.
- 4-General Institution of Geology, a report on the geological studies and the preliminary exploration of the deposits of raw materials for the cement industry in the country.123,1991.
- 5-Blankhorn , KOBER. General tectonic frameworks for the coastal region. Published report,1980.
- 6-DUBRTRUET.L, Geological map of Syria of 1/1000000.
- 7-DUBRTRUET.L, Report on volcanic eruptions in Syria- Geological map of the southern part of the coastal chain scale of 1/5000,1954.
- 8-DUBRTRUET.L, Les grandesnappes basaltiques syriennes: Âge et relations avec la tectonique. C.R. Soc. Géol. Fr.Vol. 3, 1933, 178-180.
- 9-DUBERTRET,L. Les formes structurales de la syrie et de la palestine ; leurorigine C.r.acad.sci.No 195, paris,1932,66-68.
- 10-DUBERTRET,L. Sur le pliocènemarin des environsd' Antioche(Syrie). C.r.Acad .Sci, paris, 1937, 205,p1247.
- 11-DUBERTRET,L .VAUTRIN,H.&KELLER. La stratigraphie du pliocèneet du Quaternaire marins de la côte Syrienne notes et mém, 1937.
- 12-DUBERTRET, L.Carte lithologique de la bordure orientale de la méditerranée au 1/50000. Sect. geol. Beyrouth 1942.
- 13-DUBERTRET, L. Géologie des roches vertes du Nord – Ouest de la Syrie et du Hatay. Note etmém, Moyen Orient.6. 1953, p179.
- 14-PONIKAROV, P., KARSANOV, A. A., KAZMIN,V. G. KULAKOV, V. The Geological maps of Syria, Scale 1:200000. Sheets: I-36-VI, I-37-II. 1966.
- 15-PONIKAROV.P.Tectonic Map of Syria, scale: 1:1000000. Moscow.1963.
- 16-SHARKOV, E.V., CHERNYSHEV, I.V. &DEVYTKIN, YE. V. Geochronology of plateau basalt of Syria and their relationship with sedimentary complexes. Stratigraphy,1993, p.70 - 76.
- 17-SHARKOVE, E. V.and LUSTRINO, M. Neogen volcanic activity of western Syria and its relationship with Arabian plate kinematics. Journal

- of Geodynamics. 2006. 18-**MOUTY**, M. Presence du lias dans le massif laouite, Syrie. C.R.SOMM.SOC. Geol.Fr. Paris, 3, 1976, 104-105.
- 19-**RAQIA**, MOHAMMAD; **HABIB**, BASAM. Remote sensing and study of collapse tectonics and volcanic phenomena in the southern coastal chain. Journal Of Remote Sensing. No.7, Damascus, December, 2004, 4-17.
- 20-**HABIB**, MOUSTAFA. study of the basalt deposits spread within the western Hama and Rastan Sheets. Internal report, 2005.
- 21-**HABIB**. MOUSTAF. Geochemistry and Petrogenesis of Basaltic Rocks in the ALRASTAN & JARJANAZ region (Center and North-Western Syria). Tikrit Journal of Pure Science, 2012.
- 22-**HABIB**, MOSTAFA. Re-evaluation of basalt deposits in the Syrian coastal mountains. case study (Jaubet Al-Raband). tishreen university journal, vol. 37, No.2, 2015.
- 23-**RAFEE**, MOUHSEN. Geological study of Basaltic Rocks in SHEEN Hill. ALBath university journal, vol.39, No.15, 2017.
- 24-**WARDA**, RAMIA. Petrology Study of Basalt Rocks in Banyas Area. MASTER dissertation, 2010.
- 25-**WARDA**, RAMIA. Studying of petrological properties of basaltic rocks in qerdaha area. Doctorate thesis, 2017.
- 26- **MOSTAFA**, Mahmoud, **WARDHA**, RAMIA. Petrographic Study of the basaltic rocks in sfrkia North-west Syria. Tishreen university journal, vol.38, No.5, 2016.
- 27- **MOSTAFA**, Mahmoud, **WARDHA**, RAMIA. Petrographic Study of the basaltic rocks in Jaubet Bourkal North-west Syria. Tishreen university journal, vol.38, No.4, 2016.
- 28- **MOSTAFA**, Mahmoud, **KHADDAM**, RASHA. petrographical study of Basaltic rocks in Bostan Al Hammam – Al Kadmous sheet- NW Syria. Tishreen university journal. vol.41, No.4, 2019.
- 29-**MOSTAFA**, Mahmoud, **GHANEM**, Ashraf (2021). A petrographic study of basalt rocks at the sites of Damascene, Tarakab, Ras al-Deir (Raq'at Safita)/Northwest of Syria. Tishreen University Journal, Volume 42, Issue 1.
- 30- **IBRHIM**, ALI. Relation of mineralogical, chemical and physical properties of basalt deposits in southern part of Sheen Hill to their application interest. 2019.

تصميم نظري لجهاز بلازما محرقية كثيفة بهدف

زيادة مردود الأشعة السينية اللينة الصادرة

طالب الماجستير وليد رياض الديوب كلية العلوم جامعة البعث

بإشراف

الأستاذ الدكتور وليد مصطفى صهيوني

الدكتور علاء ناصيف

كلية العلوم - جامعة البعث

كلية الهندسة - الجامعة الوطنية الخاصة

ملخص

تمّ في هذا البحث إجراء دراسة نظرية لتصميم جهاز بلازما محرقية كثيفة بالاستناد إلى نموذج Lee. حيث تمّ تحديد طاقة تشغيل الجهاز وبارامترات بنك المكثفات (السعة، التحريض، الكمون) والأبعاد الهندسية للأقطاب الكهربائية، ثم إدخال بارامترات الجهاز المصمم في برنامج Lee لإختبار إمكانية تحقيقه لعملية تمحرق البلازما والحصول على كل من مسار تيار التفريغ الكلي لبنك المكثفات وكمون حجرة التفريغ ومقارنتها مع مقابلاتها في جهاز البلازما المحرقية الكثيفة UNU ICTP/ PFF وذلك عند استخدام غاز النيون كغاز للتشغيل والذي تمّ اختياره نظراً لقيمة مردود الأشعة السينية اللينة العالية التي يعطيها مقارنة بالغازات الأخرى. تمّ إجراء مقارنة بين درجات حرارة البلازما وعمليات اكتساب الطاقة وفقدانها بواسطة عمليات الكبح وإعادة الاتحاد والإصدار الخطي بين الجهازين المصمم والقياسي. كما تمّ إجراء مقارنة بين مردود الأشعة السينية اللينة بين الجهازين حيث كانت أعلى قيمة للمردود في الجهاز المصمم (2.58 J) بينما في الجهاز القياسي (2.11 J) وذلك بسبب التغيير الهندسي لأبعاد الأقطاب الكهربائية وبارامترات الدارة الكهربائية.

الكلمات المفتاحية: البلازما المحرقية الكثيفة، برنامج Lee، الأشعة السينية اللينة.

Theoretical Design of a Dense Plasma Focus Device to Increase Soft X-rays Yield

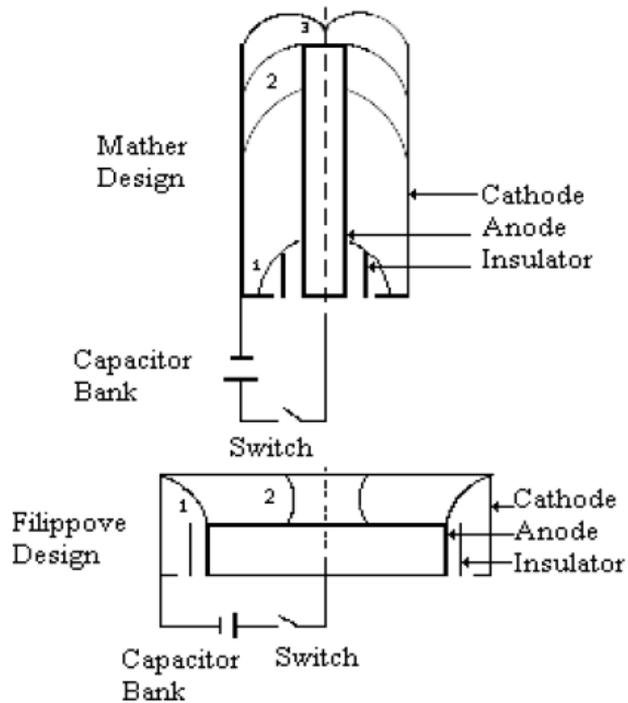
Abstract

In this research, a theoretical study was conducted to design a dense plasma focus device based on the Lee model. Where the operating energy of the device and the parameters of the capacitor bank (capacitance, inductance, voltage) and the geometric dimensions of the electrodes were determined, then the parameters of the designed device were entered into the Lee code to test the possibility of achieving the process of plasma focus and obtaining both the waveform of the total discharge current of the capacitor bank and the vacuum chamber voltage and its comparison with its counterparts in the UNU ICTP/ PFF dense plasma focus device when using neon gas as the operating gas, which was chosen due to its high soft X-ray yield value compared to other gases. Plasma temperatures and energy gain and loss by bremsstrahlung, recombination and linear emission were compared between the designed and standard devices. A comparison was also made of soft X-rays yield between the two devices, where the highest value of the yield was in the designed device (2.58 J), while in the standard device (2.11 J) due to the geometrical change of the electrodes dimensions and electrical circuit parameters .

Keywords: dense plasma focus, Lee code, soft X-ray.

مقدمة:

تم اكتشاف ظاهرة البلازما المحرقة الكثيفة من قبل العالمين **Filippov** في عام 1954 [1] **Mather** في عام 1961 [2] ، اللذان وضعوا تصميمين لجهازي بلازما محرقة كثيفة مختلفين من الناحية الهندسية (أبعاد حجرة التفريغ) كما هو مبين في الشكل (1)، لكنهما متشابهان من حيث آلية تكوين وحركة طبقة البلازما حتى الوصول إلى مرحلة التمرق وهذا التصميمان متشابهان أيضًا في قوانين القياس التي تعطي المردود النيوتروني ومردود الأشعة السينية اللينة، وبعد ذلك تم تصنيع وتركيب عدد كبير من أجهزة البلازما المحرقة الكثيفة في العديد من المختبرات حول العالم ، مع طاقات تشغيل تتراوح من عدة جول إلى ميغا جول [3]



الشكل (1) : مخطط يوضح هندسة نموذج **Mather** (من الأعلى) ونموذج **Filippov** (من الأسفل)

[3]

تصدر الأشعة السينية اللينة من البلازما المحرقية الكثيفة وفقاً لآليتين: الاصدار الخطي والاصدار المستمر (إعادة الاتحاد والكبح) [4] [5] [6] ، والأشعة السينية القاسية تنتج أيضاً من تصادم الحزم الإلكترونية الناتجة عن انهيار قبضة البلازما بالمصعد [7] [8] [9].

نظراً لتمييز هذه الظاهرة من حيث الحصول على بلازما شديدة الحرارة والكثافة العالية جداً من خلال تفريغ بسيط لبنك مشحون مكثفات بكمون عشرات الكيلو فولط داخل حجرة تفريغ تحتوي على غاز تحت ضغط معين ونوعية الإصدارات التي تشمل الأشعة السينية بجميع أنواعها (لينة ، متوسطة الطاقة القاسية) ، حزم الأيونات والإلكترونات ، فقد أجريت العديد من التجارب والدراسات والبحوث النظرية لهذه الظاهرة ، حيث أجرى Roomi وآخرون في [2011] دراسة تجريبية لدراسة تأثير كل من الجهد وضغط التشغيل على إصدار الأشعة السينية اللينة من جهاز البلازما المحرقية APF عند استخدام غاز النيتروجين، حيث وجد أن أفضل جهد تشغيل يقع ضمن النطاق (10-13 كيلو فولط) ، وأن أعلى إصدار للأشعة السينية اللينة SXR كان عند ضغط 2.5 Torr ، بينما أعلى إصدار لأشعة X القاسية (HXR) كانت عند ضغط 3.5 Torr [10] ، ووجد P. Lee [2017] أن البلازما المحرقية مصدر كثيف للجسيمات عالية السرعة والاصدارات الإشعاعية عند استخدام الجهاز بطاقة تشغيل منخفضة مثل 3KJ ، في البلازما المحرقية الصادرة من غاز النيون ، الحد الأقصى لإصدار الأشعة السينية هو $10^{19}W$ لفترة زمنية تبلغ عدة نانوثانية. أما عند استخدام غاز الديوتيريوم ، فإن الاندماج النووي ينتج بمعدل 10^{15} نيوترون في الثانية وفترة الاصدار هي بضع عشرات من النانو ثانية مما يجعل هذه الأجهزة واحدة من أقوى مصادر الإشعاع النبضية في المختبر ، وتعتمد هذه المصادر على البلازما [11]. كما درس W. Sahyouni و A. Nassif [2018] اصدار الأشعة السينية اللينة من جهاز البلازما المحرقية NX2 عند استخدام غاز النيون باستخدام برنامج Lee ووجدوا أن القيمة القصوى لمردود الأشعة السينية اللينة باستخدام البارامترات الأساسية للجهاز هي ($Y_{SXR} = 22.6$) عند ضغط (2.9Torr) ، وبتقليل طول المصعد وزيادة نصف قطره ، يزداد إنتاج الأشعة السينية اللينة إلى (26.01J) . بكفاءة (1.53%) [12]. في عام 2019 ، أجرى Walid Sahyouni

وأخرون تجارب عديدة باستخدام برنامج Lee لدراسة خصائص الحزمة الأيونية التي ينتجها جهاز البلازما المحرقة الكثيفة NX2 عند استخدام غاز الهيليوم وغاز النيتروجين مع تغيير الضغط ، وأظهرت النتائج أن في حالة غاز الهيليوم ، كان تدفق الحزمة أعلى ، بينما كانت طاقة الحزمة الأيونية أعلى في حالة الغاز الثقيل لأن الشحنة الفعالة لأيون النيتروجين أكبر وكان جهد انهيار القبضة أعلى [13]. في عام 2021، أجرى Walid Sahyouni وآخرون سلسلة من التجارب العددية لدراسة تأثير الفرق في طول المصعد بين جهازي البلازما NX2 و PF400. أظهرت هذه الدراسة أن القيمة المنخفضة لطول المصعد في جهاز NX2 أثرت على السرعة المحورية ووصلت بالتالي قيمة أكبر من الطاقة المخزنة في بنك المكثفات وكانت أعلى قيمة لمردود الأشعة السينية $y_{sxr} = 4.5$ لجهاز NX2 و $y_{sxr} = 0.2$ لجهاز PF400 [14].

جعلت المحاكاة العددية لظاهرة البلازما المحرقة باستخدام برنامج Lee من الممكن إجراء بحث على الأجهزة الفعلية ، بالإضافة إلى استخدامها في تصميم واختبار أجهزة البلازما الجديدة لما يتمتع به من مزايا كبيرة من خلال ربط بارامترات الدارة الكهربائية بديناميك وترموديناميك البلازما والإصدارات الإشعاعية من البلازما المحرقة وتوفير محاكاة واقعية للخصائص الكلية في جميع مراحل تطوير البلازما المحرقة بدءاً من لحظة تفريغ بنك المكثفات ولذلك تم استخدامه في هذا إجراء البحث.

النتائج والمناقشة:

يعد تصميم جهاز بلازما محرقة كثيفة إجراءً معقداً لأنه يتضمن عدداً من المشكلات المترابطة مثل بارامترات الدارة الكهربائية المتعلقة ببنك المكثفات بالإضافة إلى هندسة الأقطاب الكهربائية. لذلك اخترنا في البداية طاقة بنك المكثفات وحددنا قيم كل من السعة والتحريض والجهد والمقاومة الداخلية للدارة وأبعاد الأقطاب، ثم أدخلنا هذه البارامترات في برنامج Lee لاختبار صحة هذه البارامترات في عملية تشكيل البلازما المحرقة. ثم تمت مقارنة النتائج مع جهاز البلازما المحرقة UNU ICTP/ PFF لعدد من خصائص البلازما المحرقة عند قيمتين لضغط غاز النيون. أخيراً ، تمت مقارنة مردود الأشعة السينية اللينة عندما تغير ضغط غاز النيون بين الجهاز المصمم والجهاز القياسي وفقاً للمنهج الآتي:

تحديد بارامترات الدارة الكهربائية:

يعتمد تحديد قيمة الطاقة التشغيلية للجهاز وبارامترات بنك المكثفات بشكل أساسي على الملاحظات التجريبية. لذلك، اخترنا طاقة تشغيل الجهاز (3 KJ) بحيث يكون الجهاز المصمم في فئة أجهزة البلازما المحرقية متوسطة الطاقة، وسعة بنك المكثفات $C_0 = 30 \times 10^{-6} F$ وقيمة التحريض $L_0 = 110 \times 10^{-9} H$.

وبالتالي، يتم حساب جهد التشغيل من خلال:

$$E = \frac{1}{2} C_0 V^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2E}{C_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 3000}{30 \times 10^{-6}}} = 14 \text{ KV}$$

وتيار التفريغ الكلي:

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} = \frac{14000}{0.06} = 231 \text{ KA}$$

والمقاومة الداخلية:

$$r_0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{110 \times 10^{-9}}{30 \times 10^{-6}}} = 0.015 \Omega$$

تحديد أبعاد أقطاب حجرة التفريغ:

نختار طول المصعد $z=15 \text{ cm}$ ، ونصف قطره $a=1 \text{ cm}$ ، ونسبة نصف قطر المهبط إلى المصعد $c = \frac{b}{a} = 3.37$ ، لذلك يكون نصف قطر المهبط $b = 3.37 \text{ cm}$. تم إدخال هذه البيانات في برنامج Lee وتم الحصول على النتائج التالية:

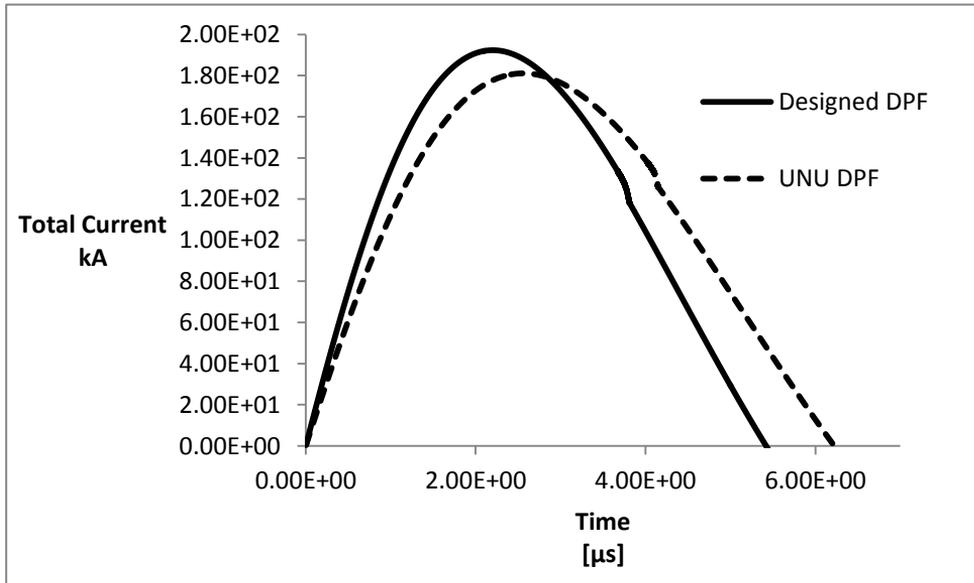
مقارنة نتائج الجهاز المصمم مع جهاز البلازما المحرقية الكثيفة UNU / ICTP PFF:

تتم مقارنة الجهاز المصمم بجهاز البلازما المحرقية UNU/ICTP PFF والذي يتضمن البارامترات الآتية [15]:

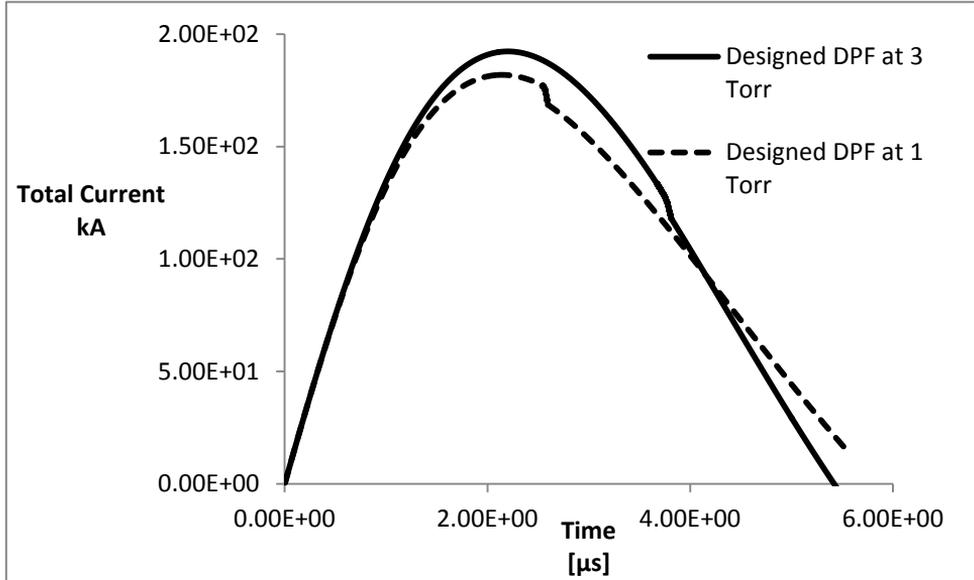
طاقة التشغيل (2.7 KJ) ونفس سعة بنك المكثفات والتحريض، وطول المصعد $z=16 \text{ cm}$ ، ونصف قطره $a=0.95 \text{ cm}$ ونسبة نصف قطر المهبط إلى المصعد $c = \frac{b}{a} = 3.37$.

(a) تيار التفريغ:

يعتبر مسار تيار التفريغ الكلي هو المؤشر الأكثر أهمية عن الأداء العام للبلازما المحرقة حيث يقوم بتقديم الطاقة لمجمل العمليات الديناميكية والترموديناميكية والالكتروديناميكية وعمليات الإصدار الإشعاعي في المراحل المختلفة للبلازما المحرقة، حيث يحتوي التابع الموجي لتيار التفريغ على معلومات عن جميع العمليات السابقة. كما أن الشكل العام لمسار تيار التفريغ محكوم ببارامترات بنك المكثفات وأبعاد أقطاب حجرة التفريغ لذلك فإن الخطوة الأولى عند دراسة البلازما المحرقة هي دراسة تيار التفريغ بدءاً من لحظة إغلاق بنك المكثفات وحتى انتهاء عملية التفريغ. لذلك تم أولاً مقارنة مسار تيار التفريغ الكلي للجهاز المصمم مع جهاز البلازما المحرقة الكثيفة UNU/ICTP PFF عند قيمة ضغط غاز النيون (3 Torr).



الشكل (2) التابع الموجي لتيار التفريغ الكلي للجهاز المصمم مع جهاز UNU / ICTP PFF



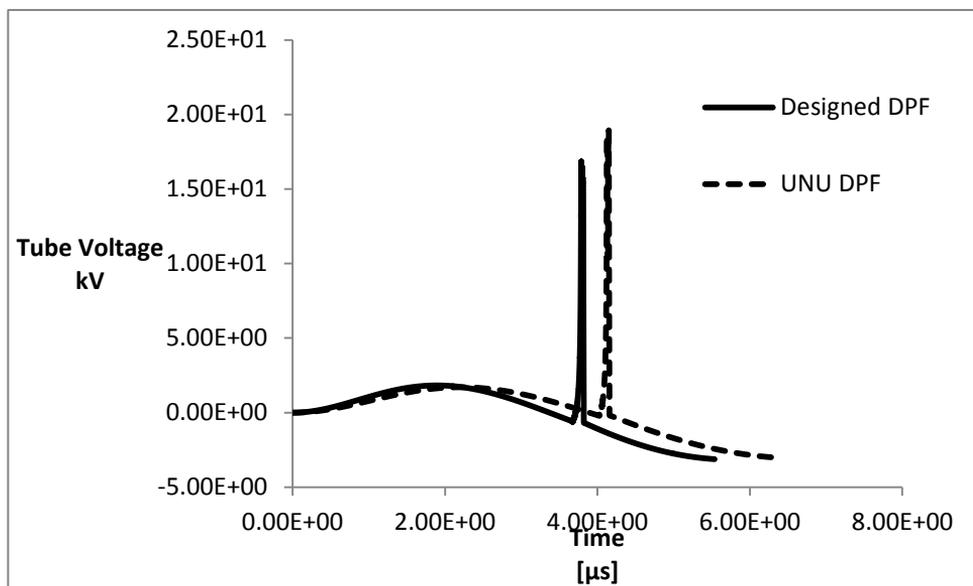
الشكل (3) مسار تيار التفريغ للجهاز المصمم عند قيمتي الضغط (1 Torr) و (3 Torr)

حيث نلاحظ من الشكل (2) توافق مساري التيارين مع ملاحظة أن مسار التيار في الجهاز المصمم أعلى قليلاً بسبب الاختلاف في الأبعاد الهندسية للجهازين، كما أن القيمة العظمى لتيار التفريغ في الجهاز المصمم أعلى من قيمتها في جهاز UNU/ICTP PFF لأن طاقة التشغيل في الجهاز المصمم أعلى.

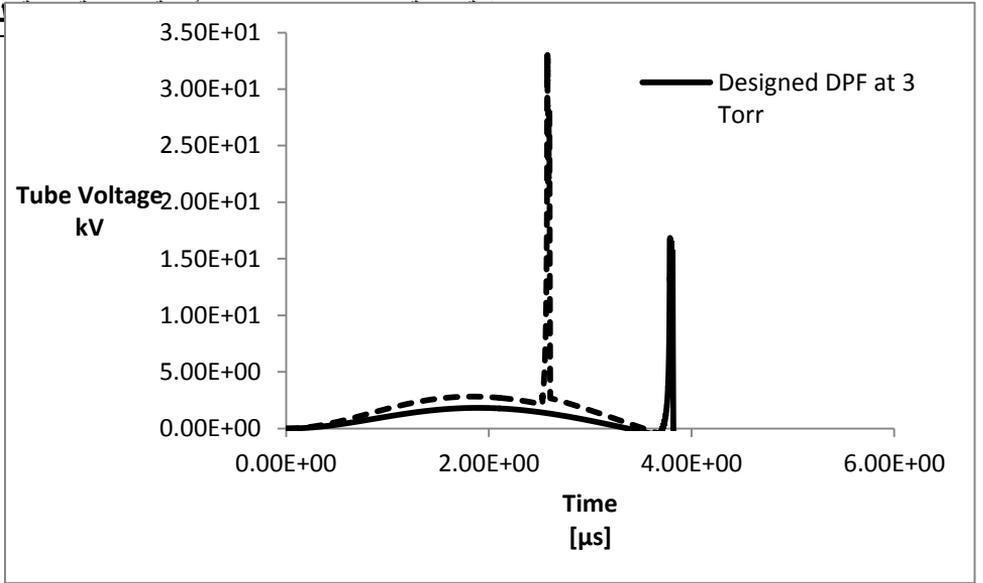
كما نلاحظ من الشكل (3) مسار تيار التفريغ للجهاز المصمم عند قيمتي الضغط (1 Torr) و (3 Torr). نلاحظ التوافق في شكل مساري التيارين والتطابق بينهما في المرحلة الأولى من عملية التفريغ وبيتعدان في القمة مع ملاحظة انخفاض القمة في حالة الضغط المنخفض بالإضافة إلى انتهاء عملية التفريغ باكراً. من شكل مسار التيار يمكن ملاحظة عملية الانتقال إلى المرحلة القطرية من مراحل تطور البلازما المحرقية التي تحتوي ضمنها مرحلة تشكل قبضة البلازما حيث تحدث في هذه المرحلة معظم عمليات الإصدار الإشعاعي من البلازما المحرقية الكثيفة.

في حالة الضغط (1 Torr) نجد أن أعلى قيمة لتيار التفريغ هي (182 kA) وتبدأ المرحلة القطرية عند (2.55 μ s) وتنتهي عند (2.60 μ s) وتستغرق قبضة البلازما (0.05 ns) تقريباً. أما عند قيمة الضغط (3 Torr) نجد أن أعلى قيمة لتيار التفريغ هي (192 kA) وتبدأ المرحلة القطرية عند (3.7 μ s) وتنتهي عند (3.8 μ s) وتستغرق قبضة البلازما (0.1 ns) تقريباً حيث يؤدي زيادة قيمة ضغط الغاز إلى زيادة مدة المرحلة القطرية ومرحلة القبضة.

(b) **جهد حجرة التفريغ:** تم مقارنة تغيرات جهد حجرة التفريغ مع زمن التفريغ في الجهاز المصمم مع جهاز UNU/ICTP PFF كما هو مبين في الشكل (4).

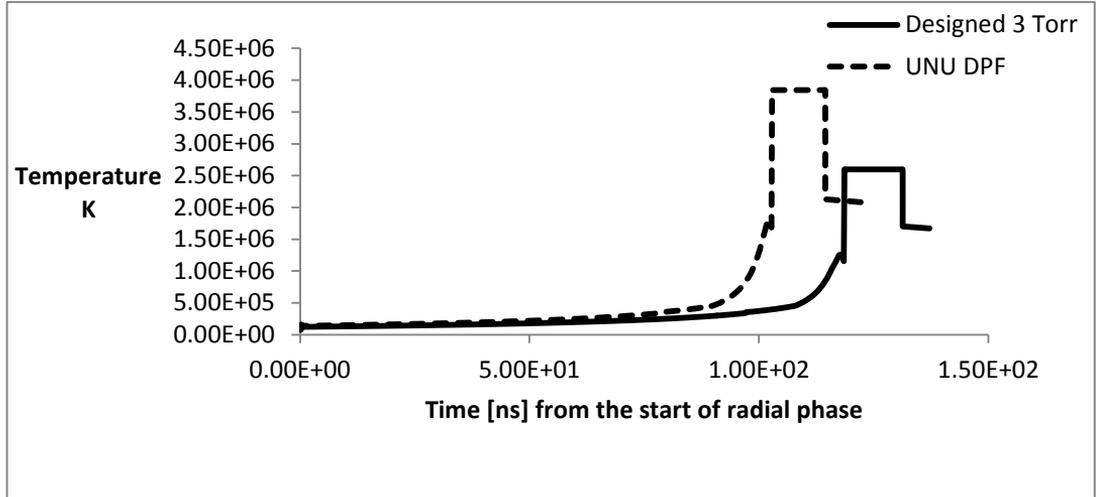


الشكل (4) تغيرات جهد حجرة التفريغ مع زمن التفريغ في UNU/ICTP PFF

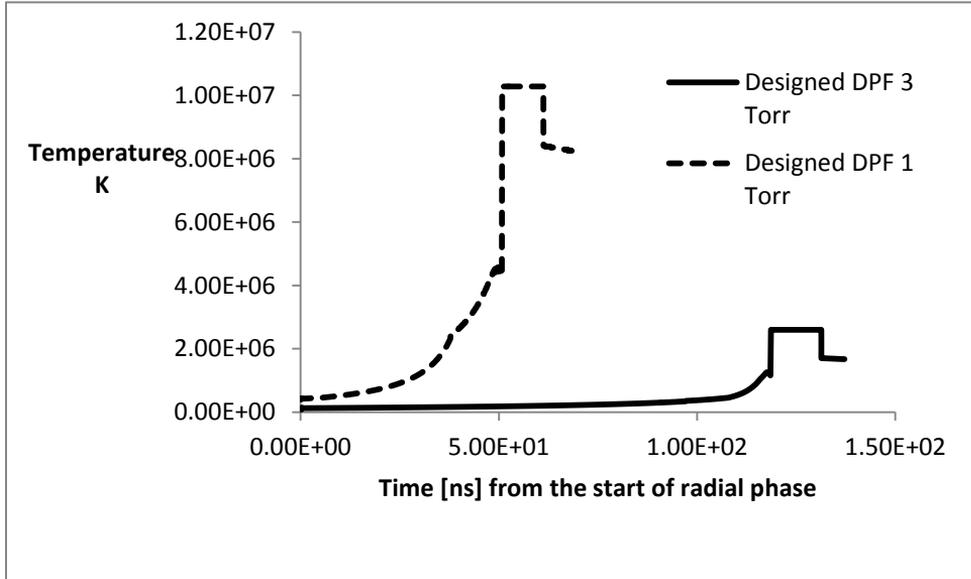


الشكل (5) تغيرات جهد حجرة التفريغ بدلالة زمن التفريغ عند قيمتي الضغط (1 Torr) و (3 Torr) بمقارنة الشكلين نلاحظ من الشكل (4) تطابق شكل التابع المعبر عن جهد حجرة التفريغ في كلا الجهازين والاختلاف في ذروة الجهد بسبب الاختلاف الهندسي بين الجهازين. ومن الشكل (5) نلاحظ دراسة تغيرات جهد حجرة التفريغ بدلالة زمن التفريغ عند قيمتي الضغط (1 Torr) و (3 Torr) حيث تدل بداية القمة إلى نهاية المرحلة المحورية وبداية مرحلة الانضغاط القطري والتي تتضمن بداخلها مرحلة تشكل قبضة البلازما حيث يشير الانحدار الحاد للقمة إلى تشكلها. يتضح من الشكل أن أعلى قيمة لجهد الحجرة عند الضغط (3 Torr) هي (1.62 kV) بينما عند الضغط (1 Torr) فإن أعلى قيمة للجهد هي (3.3 kV) حيث أن انخفاض قيمة ضغط غاز النيون أدى إلى ازدياد قيمة كمون الحجرة.

(c) درجة الحرارة:



الشكل (6) درجة حرارة البلازما بين الجهاز المصمم وجهاز UNU/ICTP



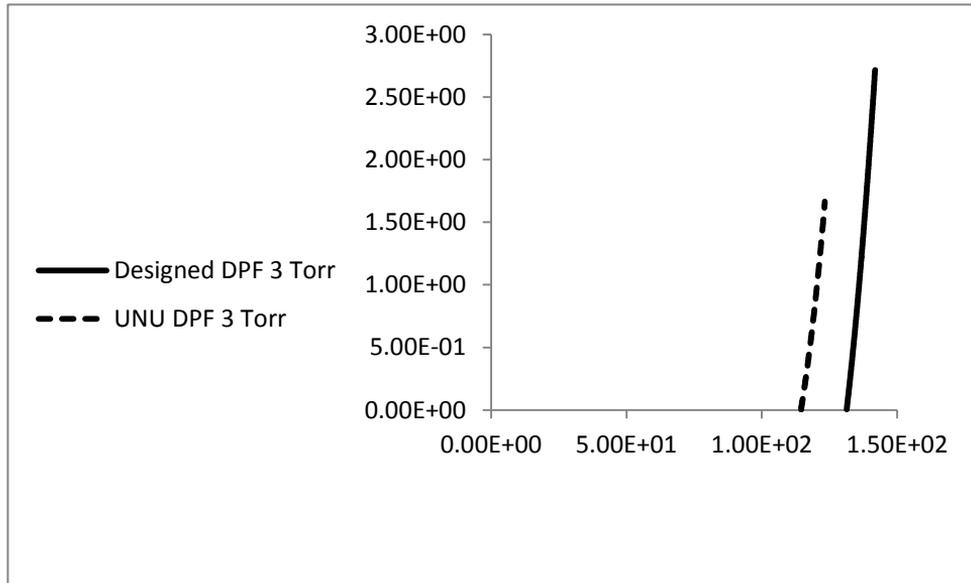
الشكل (7) تغير درجة الحرارة في الجهاز المصمم عند قيمتين لضغط النيون 1Torr و 3Torr كما يظهر الشكل (6) وجود تشابه في الشكل العام للمنحنيين حيث نلاحظ زيادة أسية ثم استقرار في درجة الحرارة ثم تناقص خطي مع تقدم الزمن مع الإشارة إلى حصول

ارتفاع حاد في درجة الحرارة في حالة الضغط المنخفض خلال زمن أقل من حالة الضغط المرتفع.

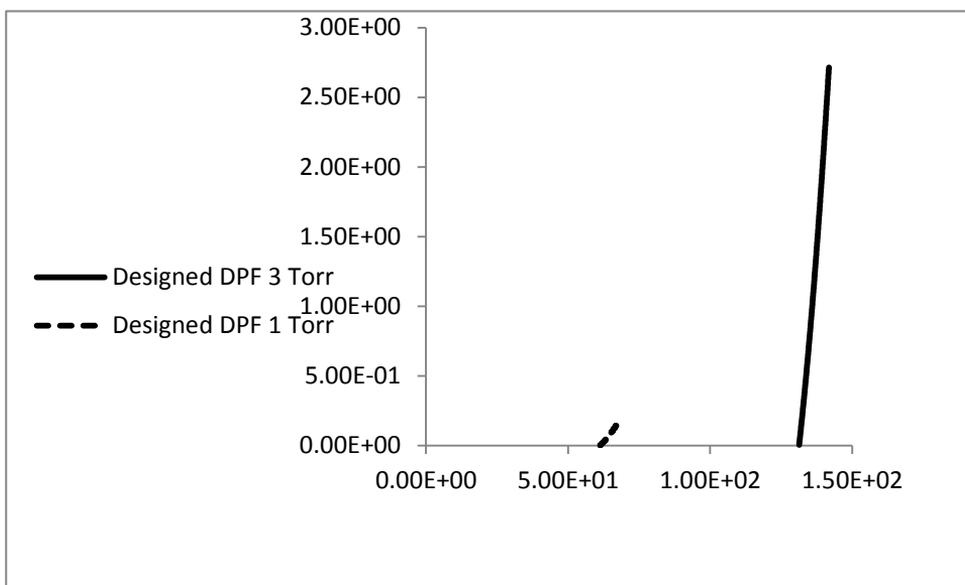
يعود الثبات في درجة الحرارة في الجزء العلوي من المنحنيين إلى ثبات سرعة موجة صدمة البلازما، والانخفاض الذي يحصل بعد هذا الاستقرار يعود إلى انخفاض قيمة تيار التفريغ أي انخفاض قيمة الطاقة الواصلة من بنك المكثفات إلى هذه المرحلة من مراحل تطور البلازما المحرقية.

(d) اكتساب الطاقة:

يعبّر التسخين الجولي عن العملية التي تحدث عند مرور تيار كهربائي ضمن ناقل مما يؤدي إلى إصدار حرارة، وفي البلازما المحرقية ينتج التسخين الجولي عن مرور التيار ضمن البلازما (ناقل) مما يؤدي إلى رفع درجة حرارتها وهذا ما يعتبر كسب حراري (اكتساب طاقة) للبلازما بواسطة هذه العملية.



الشكل (8) قيمة التسخين الجولي بين الجهاز المصمم وجهاز (UNU/ICTP)



الشكل (9) قيمة التسخين الجولي عند قيمتين للضغط (3Torr و 1Torr)

تمت مقارنة قيمة التسخين الجولي بين الجهاز المصمم وجهاز (UNU/ICTP) كما هو مبين في الشكل (8) خلال المرحلة القطرية عند قيمة ضغط غاز النيون (3Torr) حيث نلاحظ التوافق بين المنحنيين مع ملاحظة أن الجهاز المصمم يكتسب طاقة (تسخين جولي) أعلى حيث تصل أعلى قيمة لهذه الطاقة (2.72 J) بينما في جهاز (UNU/ICTP) (1.67 J) وذلك بسبب الاختلاف في الأبعاد الهندسية بين الجهازين. كما نلاحظ من الشكل (9) قيمة التسخين الجولي عند قيمتين للضغط (1Torr و 3Torr) على التوالي للجهاز المصمم حيث نلاحظ ازدياد عملية اكتساب الطاقة مع ازدياد قيمة ضغط غاز النيون.

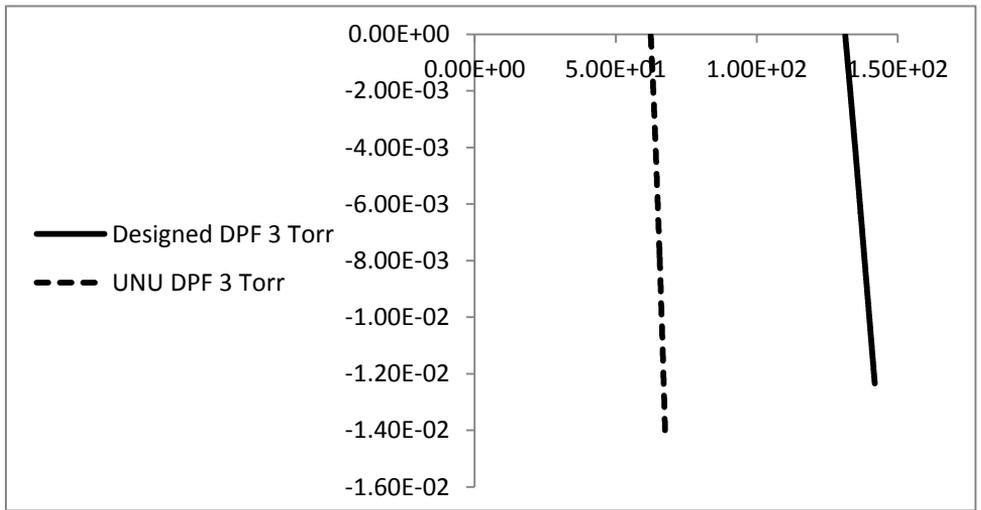
(e) خسارة الطاقة:

تتم عملية خسارة الطاقة في البلازما المحرقة من خلال ثلاث عمليات وهي: الكبح - إعادة الاتحاد - الإصدار الخطي.

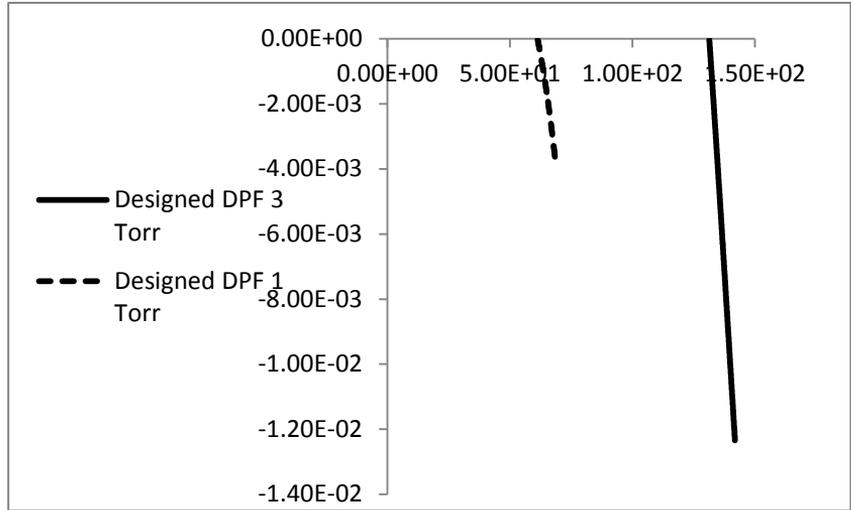
1- الكبح:

يتم فقدان الطاقة بالكبح نتيجة تفاعل كولون بين الالكترونات والأيونات الذي يعرف بالانتقال (حر- حر) للالكترون.

وبمقارنة عملية فقدان الطاقة بالكبح بين الجهاز المصمم وجهاز (UNU/ICTP) عند قيمة واحدة للضغط (3Torr) نلاحظ أن فقدان الطاقة بالكبح في الجهاز المصمم أقل من جهاز كما أن هذه الخسارة في الطاقة تزداد مع ازدياد ضغط غاز النيون في الجهاز المصمم كما في الشكل (10).

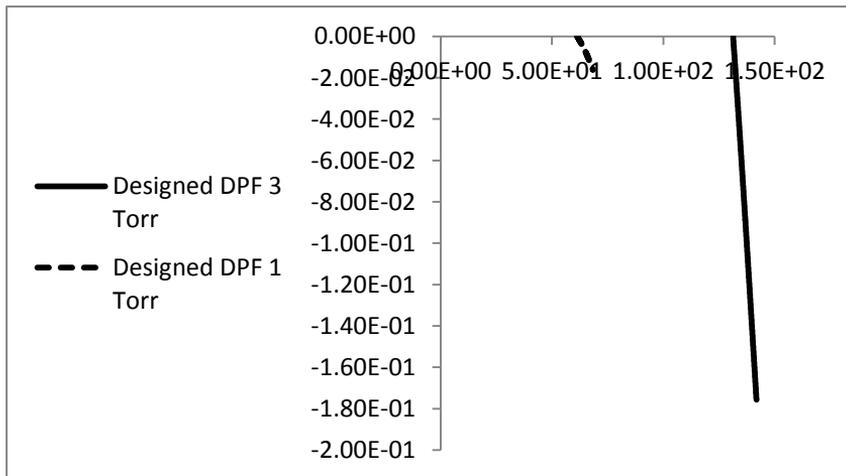


الشكل (10) عملية فقدان الطاقة بالكبح بين الجهاز المصمم وجهاز (UNU/ICTP)

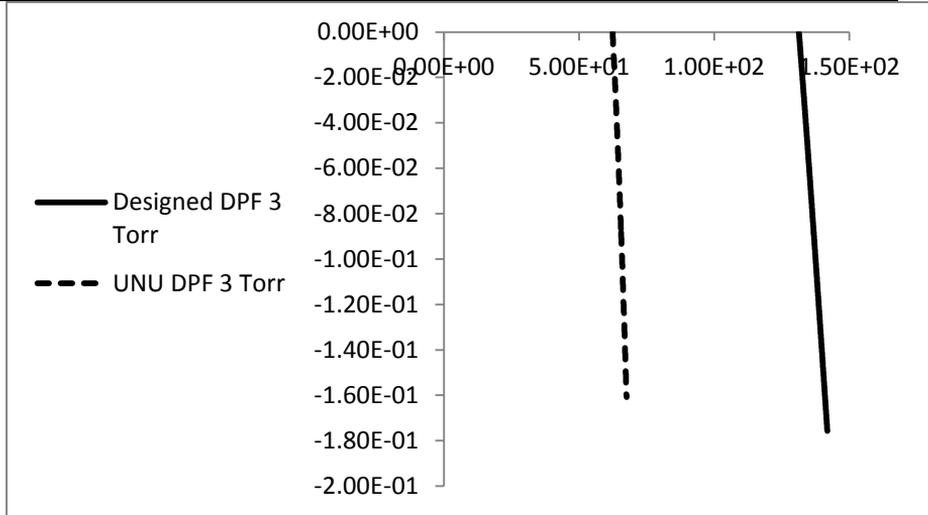


الشكل (11) عملية فقدان الطاقة بالكبح عند قيمتين للضغط (3Torr و 1Torr) للجهاز المصمم
2- إعادة الاتحاد:

يتم خسارة الطاقة في هذه العملية من خلال اتحاد الكترون مع أيون أو ما يعرف بالانتقال (حر - مقيد). يتضح من الشكلين (12) و (13) أن الجهاز المصمم يفقد طاقة بهذه العملية أكبر قليلاً من جهاز (UNU/ICTP) وأيضاً تزداد خسارة الطاقة بواسطة إعادة الاتحاد في الجهاز المصمم مع ازدياد ضغط الغاز المطبق.



الشكل (12) خسارة الطاقة بواسطة إعادة الاتحاد في الجهاز المصمم عند قيمتين للضغط (3Torr و 1Torr)

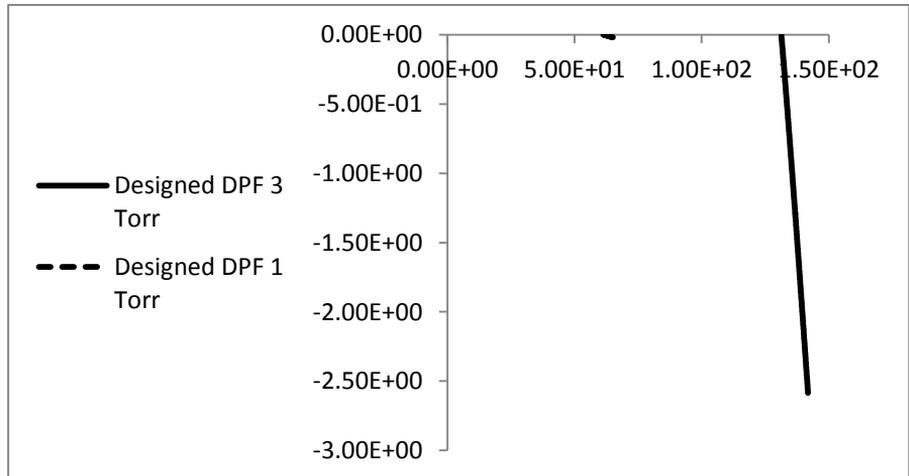


الشكل (13) خسارة الطاقة بواسطة إعادة الاتحاد بين الجهاز المصمم وجهاز (UNU/ICTP)

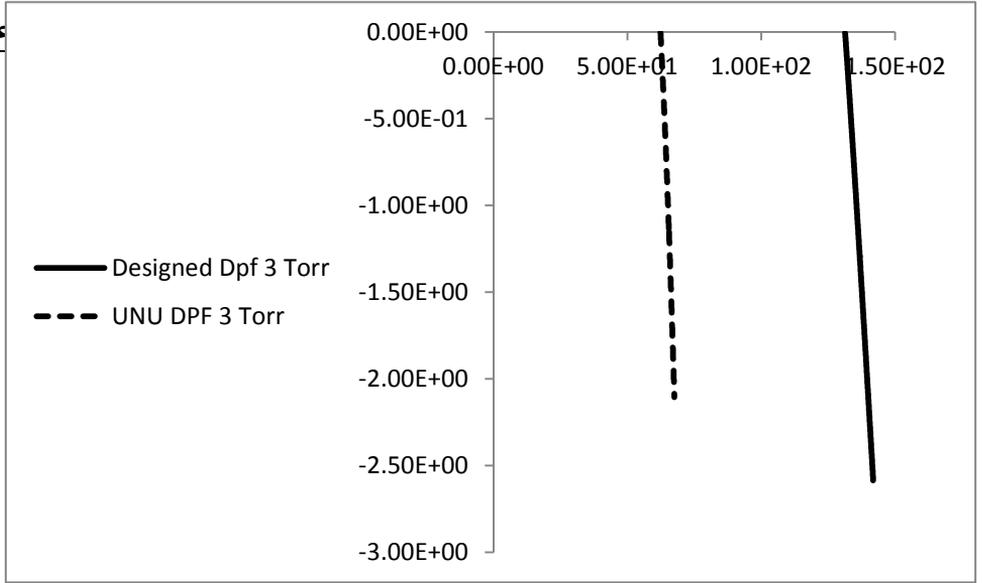
3- الإصدار الخطي:

يتم فقدان الطاقة بالإصدار الخطي في البلازما المحرقية من خلال انتقال الإلكترون إلى سويات أيونية أخفض أو ما يسمى بالانتقال (مقيد - مقيد).

نلاحظ من الشكلين (14) و(15) أن فقدان الطاقة بالإصدار الخطي في الجهاز المصمم أعلى قليلاً من جهاز (UNU/ICTP) كما يؤدي ازدياد الضغط في الجهاز المصمم إلى ازدياد فقدان الطاقة من خلال هذه الآلية.



الشكل (14) فقدان الطاقة بالإصدار الخطي في الجهاز المصمم عند قيمتين للضغط (3Torr و 1Torr)



الشكل (15) فقدان الطاقة بالاصدار الخطي بين الجهاز المصمم وجهاز (UNU/ICTP)

(f) إيجاد مردود الأشعة السينية اللينة للجهاز المصمم:

تم إيجاد مردود الأشعة السينية اللينة لكل من الجهاز المصمم وجهاز UNU DPF عند

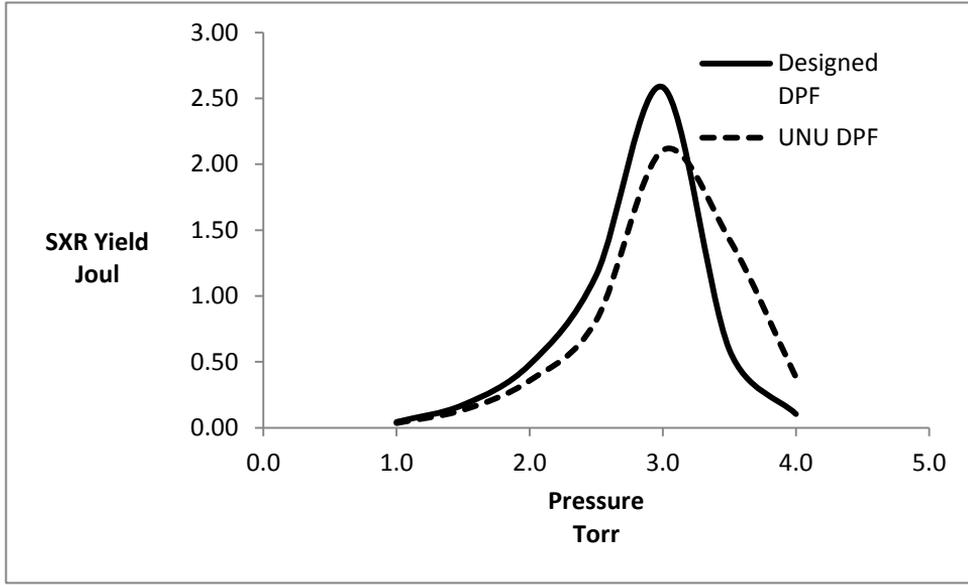
تغير ضغط غاز النيون وكانت النتائج المبينة في الجدول (1):

الجدول (1) مردود الأشعة السينية اللينة لكل من الجهاز المصمم وجهاز UNU DPF

Pressure Torr	UNU DPF SXR Yield Joul	Designed DPF SXR Yield Joul
1.0	0.04	0.04
1.5	0.14	0.17
2.0	0.36	0.48
2.5	0.81	1.16
3.0	2.11	2.58
3.5	1.43	0.59
4.0	0.38	0.10

وللمقارنة قمنا برسم تغيرات مردود الأشعة السينية مع تغيرات ضغط الغاز النيون كما هو

مبيّن في الشكل (16):



الشكل (16) مردود الأشعة السينية مع تغيرات ضغط الغاز النيون بين الجهاز المصمم وجهاز (UNU/ICTP)

الاستنتاجات:

طور هذا البحث مفهوماً نظرياً لتصميم جهاز بلازما محرقية كثيفة يعمل بغاز النيون، من أجل زيادة مردود الأشعة السينية اللينة. تمت مقارنة بارامترات الجهاز المصمم بجهاز البلازما المحرقية UNU ICTP / PFF، حيث تمت زيادة طاقة التشغيل في الجهاز المصمم إلى 3 KJ، وتم تقليل طول المصعد إلى 15 cm، وزيادة نصف قطر المصعد إلى 1 cm. أظهرت النتائج توافقاً في الميزات المدروسة بين الجهازين، ولوحظ أن مردود الأشعة السينية في الجهاز المصمم ازداد إلى 2.58 J مقارنة بـ 2.11 J في جهاز UNU ICTP / PFF. هذه الدراسة والنتائج التي تم الحصول عليها مفيدة لتطوير تصميمات جديدة لأجهزة البلازما المحرقية الكثيفة لأغراض عملية، كما أكدت النتائج أهمية برنامج Lee كأحد أفضل أدوات التجارب العددية لدراسة البلازما المحرقية.

References

1. Mather, J. W. (1965). **Formation of a high- density deuterium plasma focus**. *The Physics of Fluids*, 8(2), 366-377.
2. Filippov, N. V., Filippova, T. I., & Vinogradov, V. P. (1962). **Dense high-temperature plasma in a non-cylindrical Z-pinch compression** . *Nucl. Fusion, Suppl.*
3. Talebitaher, A., Springham, S. V., Shutler, P. M. E., Lee, P., & Rawat, R. S. (2012). Imaging of plasma focus fusion by proton coded aperture technique. *Journal of fusion energy*, 31(3), 234-241.
- 4- Akel, M., & Lee, S. (2012). **Dependence of plasma focus argon soft X-ray yield on storage energy, total and pinch currents**. *Journal of fusion energy*, 31(2), 143-150.
- 5- Lee, S., Saw, S. H., Rawat, R. S., Lee, P., Talebitaher, A., Abdou, A. E., ... & Devi, K. (2011). **Correlation of measured soft X-ray pulses with modeled dynamics of the plasma focus**. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 39(11), 3196-3202.
- 6-Akel, M., Al-Hawat, S., & Lee, S. (2009). **Numerical experiments on soft X-ray emission optimization of nitrogen plasma in 3 kJ plasma focus SY-1 using modified lee model**. *Journal of fusion energy*, 28(4), 355.
- 7- Mahtab, M., Taghipour, M., Roshani, G. H., & Habibi, M. (2014). **Approach to the Highest HXR Yield in Plasma Focus Device Using Adaptive Neuro fuzzy Inference System to Optimize Anode Configuration**. *Journal of Experimental Physics*, 2014.
- 8- Di Lorenzo, F., Raspa, V., Knoblauch, P., Lazarte, A., Moreno, C., & Clause, A. (2007). **Hard x-ray source for flash radiography based on a 2.5 kJ plasma focus**. *Journal of Applied Physics*, 102(3), 033304.
- 9- Fogliatto, E., González, J., Barbaglia, M., & Clause, A. (2014, May). **A model of hard X-rays emission from free expanding Plasma-Focus discharges**. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 511, p. 012036).
10. Roomi, A., Saion, E., Habibi, M., Amrollahi, R., Baghdadi, R., Etaati, G. R., ... & Iqbal, M. (2011). **The Effect of Applied Voltage and Operating Pressure on Emitted X-Ray from Nitrogen (N 2)**

Gas in APF Plasma Focus Device. Journal of fusion energy, 30(5), 413-420.

11. Syahputra, R. F., Farma, R., Nawi, N. D., Rashid, N. A., Ismail, F. D., & Ali, J. (2018, September). **Influence of Electrical Properties on Radiation and Emission to Pinch Radius Thermal Plasma Device.** In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1090, No. 1, p. 012058). IOP Publishing.

12. Sahyouni, W., & Nassif, A. (2020). **Nitrogen Soft X-Ray Yield Optimization from UNU/ICTP PFF Plasma Focus Device.** Am J Mod Phys, 8(6), 86.

13. Walid, S., & Alaa, N. (2019). **Ions beam properties produced by NX2 plasma focus device with helium and nitrogen gas.** American Journal of Modern Physics, 8(1), 1-4.

14. Walid Sahyouni, Alaa Nassifm and Rasha Yousef.(2021) .**Study The Effect of Anode Length on Nitrogen Plasma Pinch Dimensions in NX2 and UNU / ICTP PFF Dense Plasma Focus Devices. EME.000573. 3(5).2021**

15. Lee, S., & Saw, S. H. (2010). **Generation of Soft X-Ray (SXR) from Plasma Focus.** International Journal of Engineering and Technology, Issue 1, Volume 1, December 2010 ISSN: 2180-3633 Electronic Version.

تطابقات الامتصاص

طالبة الدراسات العليا : بشري جاد الله كلية العلوم / جامعة دمشق

الدكتور المشرف : شوقي الراشد

ملخص:

نقوم في هذه الورقة بنقل مفهوم الـ n امتصاص (وبشكل خاص ثنائية الامتصاص) إلى تطابقات أنصاف الحلقات، حيث نُعرّف التّطابق ثنائي الامتصاص وتعميمه (n تطابق امتصاص) ونُعرّف التّطابق ثنائي الامتصاص الإبتدائي في نصف الحلقة، وندرس بعض القضايا المتعلقة بتلك المفاهيم.

الكلمات المفتاحية : أنصاف الحلقات، التّطابقات، المثالي ثنائي الامتصاص .

Absorbing Congruences

Abstract:

In this paper we convey a concept of n -absorbing (particularly 2 -absorbing) to semiring congruences. We define 2 -absorbing congruence and its Generalization (n -absorbing congruence), we define Primary 2 -absorbing congruence. Then we study some issues related to these concepts.

Key Words: Semirings, Congruences, Absorbing Ideals.

1. مُقَدِّمَةٌ:

تلعب التَّطابِقَاتُ دوراً هاماً في أنصاف الحلقات بشكل عام وفي نصف الحلقة المدارية بشكل خاص، لا يوجد تقابل بين المثاليَّات والتَّطابِقَاتُ كما في نظرية الحلقات، ويتناسب مفهوم التَّطابِقَاتُ مع أنصاف الحلقات بشكل أفضل من المثاليَّات (تتحدَّد بنية حلقة خارج القسمة بواسطة المثاليَّات، وهذا غير ممكن في أنصاف الحلقات، وفقاً للعلاقة التَّالِيَّة: $[a + I = b + I \Leftrightarrow a - b \in I]$ حيثُ a, b عناصر من الحلقة، و I مثالي. المُشكلة في أنصاف الحلقات هي عدم وجود العنصر $-b$ بالضرورة).

فقد تمَّ تعريف الطيف الأوَّلي لأنصاف الحلقات من خلال علاقات التَّطابق وذلك لكون المثاليَّات لاتحتفظ بدورها المُميِّز في أنصاف الحلقات. في عام 2016 قامت Kalina mincheva بتعريف التَّطابق الأوَّلي وتحديد بُعد krull بشكل مشابه لنظرية الحلقات "هو طول أطول سلسلة من التَّطابِقَاتُ الأوَّلية في الجداء الديكارتي لنصف الحلقة $R \times R$ " ([1], p.18). أيضاً قامت بتعريف جذر التَّطابق بأنَّه "تقاطع جميع التَّطابِقَاتُ الأوَّلية التي تحوي التَّطابق" ([1], p.22)، وذلك بهدف دراسة أصفار هلبيرت لكثيرات الحُدود المدارية. ولإثبات عدم وجود تقابل بين التَّطابِقَاتُ والمثاليَّات في أنصاف الحلقات كما هو الحال في الحلقات، قامت بتعريف القوى المُعمَّمة لعناصر تطابق وإعطاء صيغة جبرية من خلالها لجذر التَّطابق.

في عام 2007 قام العالم Badwi بصياغة تعميم للمثالي الأولي في الحلقات التبدليّة [4] ، وذلك نظراً لأهميته، ويدعى (2 – absorbing ideal) المثالي ثنائي الامتصاص. حيثُ يكون المثالي الفعلي I ثنائي امتصاص إذا وفقط إذا حقّق الشرط: من أجل $a, b, c \in R$ إذا كان $abc \in I$ فإمّا $ab \in I$ أو $ac \in I$ أو $bc \in I$. في عام 2011 قام Darni و Soheilnia بتقديم مفهوم المودول الجُرئي ثنائي الامتصاص، أيضاً في عام 2012 قام Tayprakash Ninu chaudhari بتعريف مماثل للمثالي ثنائي الامتصاص في أنصاف الحلقات، وفي عام 2013 قام Darni و Puczyłowski بتعريف نصف الزمرة ثنائية الامتصاص، و في 2016 قام كلاً من Hatic Çay ، Hojjat Mostafanasab و Gulsen ulucak بتعريف المثاليّات ثنائية الامتصاص في أنصاف الزمر التبدليّة.

ونظراً لأهمية التّطابقات والدور الهام الذي تلعبه في الهندسة المداريّة، قمنا بنقل مفهوم ثنائية الامتصاص وتعميمه n -امتصاص إلى التّطابقات بهدف دراسة خواص جبريّة إضافية للتّطابقات.

2. هدف البحث: نقوم في هذا البحث بدراسة تعميم مفهوم التّطابق الأولي، وهو مفهوم الـ n -امتصاص (والحالة الخاصّة منه ثنائية الامتصاص) وإثبات بعض القضايا المتعلّقة به. كما نهدف إلى إثبات أنّ تطابق نصف الحلقة المداريّة $\Omega(\mathbb{T}^n)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص.

3. تعريف ومُبرهنات:

1.3 نصف الحلقة ([8], p.12) ([3], p.4) ([2], p.4) ([1], p.14): تدعى الثلاثية

$(R, +, \cdot)$ ، حيثُ $+$ جمع و \cdot ضرب، نصف حلقة إذا تحققت الشروط الآتية:

(1) الثنائية $(R, +)$ هي مونويد تبديلي (الصفر 0 هو عنصر حيادي).

(2) الثنائية (R, \cdot) هي مونويد (الواحد 1 هو عنصر حيادي).

(3) الضرب توزيعي على الجمع.

(4) العنصر الحيادي الجمعي ماص $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ من أجل $a \in R$.

إذا كانت R نصف حلقة بحيث (R, \cdot) تبديلية، عندئذ يُقال عن R إنها تبديلية. وإذا

كانت R نصف حلقة بحيث يوجد لكل عنصر غير صفري في R معاكس ضربي،

عندئذ فإن R تُدعى نصف حقل. في هذه الحالة تكون الثنائية $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ هي زمرة.

إحدى أهم أنصاف الحلقات هي نصف الحلقة المدارية، المُعرّفة بالشكل الآتي:

2.3 تعريف ([8], p.14) ([2], p.5) ([1], p.15): يُقال عن $(R, \oplus, \odot, -\infty, 0)$

بأنها نصف حلقة مدارية إذا حققت الشروط الآتية:

(1) $(R, \oplus, -\infty)$ نصف زمرة مدارية.

(2) (R, \odot) نصف زمرة.

(3) $a \odot b = b \odot a$

(4) $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$

$$.a \odot 0 = a \quad (5)$$

$$.a \odot -\infty = -\infty \quad (6)$$

يُدعى العنصر $-\infty$ العنصر الصفري لـ R ، و 0 العنصر الواحدي لـ R . ويُعطى جمع عنصرين بالشكل $(x \oplus y = \max\{x, y\})$ ، كما يُعطى جداء عنصرين بالشكل $(x \odot y = x + y)$. حيثُ تُعرَّف نصف الزمرة (M, \oplus) بأنَّها مجموعة غير خالية M مُعرَّف عليها العملية التجميعية \oplus .

ويقال عن $(M, \oplus, -\infty)$ بأنَّها نصف زمرة مدارية إذا حَقَّت الشروط الآتية:

$$(M, \oplus) \text{ نصف زمرة.} \quad (1)$$

$$.v \oplus w = w \oplus v \quad (2)$$

$$.v \oplus -\infty = v \quad (3)$$

$$v \oplus v = v \quad (4)$$

بفرض لدينا $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ نصف حلقة مدارية حقيقية، تكون المجموعة الأساسية لها $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. ويُعطى جمع عنصرين بالشكل $(x \oplus y = \max\{x, y\})$ بالترتيب المُعتاد للأعداد الحقيقية، العنصر الأصغر هو $-\infty$. كما يُعطى جداء عنصرين بالشكل $(x \odot y = x + y)$ حيثُ $+$ هو الجمع المُعتاد للأعداد الحقيقية

$$\text{وينحَقُّ: } [(-\infty) \odot a = a \odot (-\infty) = -\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}_{\max}]$$

وهي تشكِّل نصف حقل. كما أنَّ كلاً من \mathbb{Q}_{\max} و \mathbb{Z}_{\max} هي أنصاف حقول جزئية من \mathbb{R}_{\max} وتملك المجموعات الأساسية $\mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ و $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ على الترتيب.

وبشكل مُناظر يُمكن أن تكون المجموعة الأساسية لـ \mathbb{T} هي $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. ويُعطى جمع عنصرين بالشكل $(x \oplus y = \min\{x, y\})$ بالترتيب المُعتاد للأعداد الحقيقية، العنصر الأكبر هو ∞ . ويفرض \mathbb{B} نصف الحقل البوليني $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ فإن $\mathbb{B} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ بالنسبة لـ \min و $\mathbb{B} = \{-\infty, 0\}$ بالنسبة لـ \max و $\mathbb{B} = \{0, \infty\} \in \mathbb{T}$ و $\mathbb{B} = \{-\infty, 0\} \in \mathbb{T}$.

3.3 تعريف ([8], p.14) ([2], p.4) ([1], p.15): إذا كانت الثنائية $(R, +, \cdot)$ نصف حلقة تبديلية و $S \subset R$. يُقال عن S إنَّها نصف حلقة جزئية من R (Subsemiring) إذا تحقَّق أنَّ:

$$1, 0 \in S, \quad a + b, a \cdot b \in S$$

4.3 تعريف ([8], p.19) ([2], p.5) ([1], p.16): بفرض لدينا R_1, R_2 أنصاف حلقات. يُدعى التطبيق $f: R_1 \rightarrow R_2$ (Semiring homomorphism) تشاكل نصف حلقي إذا تحقَّق مايلي:

$$1) - f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$2) - f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

$$3) - f(0_{R_1}) = 0_{R_2}$$

$$4) - f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$$

وذلك أيًّا كان $a, b \in R_1$.

مثال: إنَّ التَّطبيق الآتي هو تشاكل نصف حلقي:

$$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$a \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } a \neq -\infty \\ 0 & \text{if } a = -\infty \end{cases}$$

أيضاً لدينا التَّطبيق الآتي تشاكل نصف حلقي:

$$g: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{T} \quad ; \quad (g(0) = -\infty, g(1) = 0)$$

5.3 تعريف ([8], p.22) ([2], p.86) ([1], p.15): بفرض $(R, +, \cdot)$ نصف حلقة

تبدليّة واحدية. يُعرّف التّطابق Ω لنصف الحلقة R بأنّه مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي $R \times R$ تُحقّق الشروط الآتية:

- 1)- $(a, a) \in \Omega$, for $a \in R$
- 2)- $(a, b) \in \Omega$, if and only if $(b, a) \in \Omega$
- 3)- if $(a, b) \in \Omega$, and $(b, c) \in \Omega$ then $(a, c) \in \Omega$
- 4)- if $(a, b) \in \Omega$, and $(c, d) \in \Omega$ then $(a + c, b + d) \in \Omega$
- 5)- if $(a, b) \in \Omega$, and $(c, d) \in \Omega$ then $(a \cdot c, b \cdot d) \in \Omega$

حيثُ يكون التّطابق الأصغر الوحيد هو القطر لـ $R \times R$ والذي يُرمز له بـ Δ ، ويُدعى التّطابق التّافه (وهو يُقابل المثالي الصفري). $R \times R$ هو تطابق غير فعلي، أمّا التّطابقات المتبقية فتُدعى فعليّة. إذا كان I مثالي فإتّنا نرّمز إلى التّطابق المولّد بالأزواج $(a, 0)$ من أجل كل $a \in I$ بـ Ω_I .

يُرمز لنصف حلقة القسمة لـ R على التّطابق Ω بـ R/Ω . ونعلم في الجبر التّبادلي أنّه من أجل المثالي I يكون $R/I = R/\Omega_I$.

6.3 تعريف ([1], p.16): تُعرّف نواة التّطابق بأنّها صف التّكافؤ للعنصر الصفري.

أي من أجل التّطابق $\Omega \subseteq R \times R$ لدينا:

$$\text{Ker}(\Omega) = \{a \in R \mid (a, 0) \in \Omega\}$$

نواة التَّطابق دوماً مثالي. ويُقال عن نواة تطابق بأنَّها تافهة إذا كانت مساوية للمجموعة الصفرية $\{0\}$.

في نصف الحلقة الجامعة لدينا:

$$(a + b, 0) \in \Omega \implies (a, 0) \in \Omega$$

ومنه أيّاً كان $(a + b) \in Ker(\Omega)$ فإنَّ $a \in Ker(\Omega)$ و $b \in Ker(\Omega)$ ، وتُدعى المثاليَّات التي تُحقِّق هذه الخاصَّة (Saturated).

7.3 تعريف ([1], p.16): إذا كان $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ شعاع بين أنصاف الحلقات

R_1, R_2 ، و Ω هو تطابق لـ R_2 ، الصورة العكسية لـ Ω هي التَّطابق:

$$\varphi^{-1}(\Omega) = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in R_1 \times R_1 \mid (\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2)) \in \Omega\}$$

8.3 تعريف ([1], p.16): نقصد بنواة شعاع الصورة العكسية للتَّطابق التَّافه

$$Ker(\varphi) \text{ ونرمز لها بـ } \Delta$$

9.3 تعريف ([1], p.16): نقصد بـ (IB_algebra) نصف حلقة تبديليَّة جامعة جمعياً

أي $(a + a = a, \forall a)$ وسنرمز بـ A لـ (IB_algebra) اختياري. نلاحظ أنَّ الجمع الجامد يُعرَّف ترتيب كمايلي:

$$a \geq b \iff a + b = a ; a \oplus b = \sup\{a, b\} , \text{ or } a \oplus b = \inf\{a, b\}$$

تُدعى عناصر $A \times A$ أزواج، والإحداثيات للزوج α هي (α_1, α_2) .

10.3 تعريف ([3], p.8) ([2], p.91) ([1], p.17): يُعرَّف الجداء المُتشابك

(الملفوف) للأزواج $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ و $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ بالشكل الآتي:

$$\beta\alpha = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

نلاحظ أنه تجميعي، وأن مجموعة الأزواج تُشكل مونويد بالنسبة لهذه العملية (العنصر الحيادي هو الزوج $(1,0)$).

يُرمز للقوة $n - th$ لـ α وفق الجداء المُتشابك بـ α^n . كما يُرمز للزوج $(1,0)$ بـ α^0 . ويُعرّف جداء عنصر a بزوج (α_1, α_2) بالشكل $a(\alpha_1, \alpha_2) = (a\alpha_1, a\alpha_2)$ وهو الجداء المُتشابك لـ $(a, 0)(\alpha_1, \alpha_2)$.

11.3 تعريف ([1], p.17): يُعرّف جداء تطابقين $\Omega, \Omega_1 \subseteq A \times A$ بأنه التّطابق المولّد بالمجموعة

$$\{\beta\alpha \mid \alpha \in \Omega, \beta \in \Omega_1\}$$

12.3 تعريف ([1], p.18): من أجل الحلقات التبدليّة، يكون المثالي أوّلي إذا فقط إذا كان التّطابق المُقابل لايحوي جداءات مُتشابكة لأزواج تتوضّع خارج التّطابق. أي بفرض P مثالي لحلقة تبدليّة و Ω_P تطابق بالنّواة P عندئذٍ فإنّ P أوّلي إذا فقط إذا تحقّق مايلي:

إذا كان $\beta\alpha \in \Omega_P$ فإنّه إمّا $\alpha \in \Omega_P$ أو $\beta \in \Omega_P$. ويُمكن التحقق من ذلك

بالشّكل:

$$\begin{aligned} \beta\alpha \in \Omega_P &\Leftrightarrow ((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2), 0) \in \Omega_P \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \in P \end{aligned}$$

13.3 تعريف ([3], p.5) ([1], p.18): يُقال عن التَّطابق Ω لـ $(\mathbb{B_algebra}) A$ بأنه أولي (Prime Congruences) إذا كان فعلي وتحقق مايلي:
 إذا كان $\beta\alpha \in \Omega$ ، عندئذٍ $\alpha \in \Omega$ أو $\beta \in \Omega$ وذلك من أجل $\alpha, \beta \in A \times A$.
 وندعو $(\mathbb{B_algebra})$ منطقة إذا كان التَّطابق التَّافه له أولي.

مثال: بفرض لدينا $\mathbb{B}[x]$ مُرتَّبة كلياً وفقاً لدرجات x (بالنسبة لـ \max) وذلك كون الجمع يُعطي ترتيب كلي). وبفرض لدينا $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ و $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ، بفرض
 أن $\beta_1 \geq \beta_2$ و $\alpha_1 \geq \alpha_2$ و $\alpha_1\beta_2 \geq \alpha_2\beta_1$ عندئذٍ:

$$\beta\alpha = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = (\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2) \in \Delta$$

إذا كان $\beta \notin \Delta$ عندئذٍ فإن $\alpha_1 = 0$ (وذلك حيث $\mathbb{B}[x]$ تُحقق الشرط التالي: إذا كان
 $ab = ac$ فإمّا $a = 0$ أو $b = c$ ((Cancellative)) ومنه $\alpha_2 = 0$ و $\alpha \in \Delta$ ومنه $\mathbb{B}[x]$ هي منطقة.

14.3 تعريف ([1], p.23): بفرض I مثالي في الحلقة R جذره $Rad(I)$ ، وبفرض
 Ω_I و $\Omega_{Rad(I)}$ هي التَّطابقات المُقابلة (حيث I و $Rad(I)$ هي النواة لكل منهما على
 التَّرتيب). عندئذٍ لدينا:

$$(a, b) \in \Omega_{Rad(I)} \Leftrightarrow (a, b)^n \in \Omega_I \text{ for a large enough } n$$

$$(a, b)^n \in \Omega_I \Leftrightarrow ((a - b)^n, 0) \in \Omega_I \quad \text{وذلك وفقاً لـ:}$$

حيث $(a, b)^n$ ترمز إلى القوة $n - th$ بالنسبة للجداء المُتشابك.

أمّا بالنسبة لأنصاف الحلقات فإنَّ الأمر معقد أكثر، كما هو موضَّح فيمايلي.

15.3 تعريف ([3], p.10) ([1], p.22): بفرض Ω تطابق لـ A يُعرّف جذر Ω ويُرْمز له بـ $Rad(\Omega)$ ، بأنه تقاطع جميع التّطابقات الأوّلِيَّة التي تحوي Ω . يُدعى Ω بالتّطابق الجذري إذا تحقّق أنّ $Rad(\Omega) = \Omega$. وهو يُعطى بالصّيغة الآتية:

$$Rad(\Omega) = \{ \alpha \mid GP(\alpha) \cap \Omega \neq \emptyset \}$$

حيثُ:

$$GP(\alpha) = (\alpha^{*k} + (c, 0)) \alpha^l; \alpha^* = (\alpha_1 + \alpha_2, 0), ((\beta\alpha)^* = \alpha^* \beta^*)$$

where k, l are non – negative integers, and $c \in A$

هي مجموعة القوى المُعمّمة للزوج α .

ومنه $Rad(\Delta) = \{ \alpha \mid GP(\alpha) \cap \Delta \neq \emptyset \}$ وهي مجموعة الأزواج عديمة القوى

Nilpotent. حيثُ يكون الزوج α عديم القوى إذا تحقّق أنّ $GP(\alpha) \cap \Delta \neq \emptyset$

16.3 تعريف ([1], p.27): يُدعى التّطابق لـ A ابتدائي إذا تحقّق الشرط الآتي:

$$\{ \alpha \mid \exists \beta \notin \Omega : \alpha\beta \in \Omega \} \subseteq Rad(\Omega)$$

17.3 مُبرهنة ([1], p.27): إنّ جذر التّطابق الابتدائي هو تطابق أوّلي.

نورد فيما يلي من خلال المُبرهنة الآتية بعض الخواص الجبريّة لتطابقات أنصاف

الحلقات:

18.3 مُبرهنة ([2], p.87, p.94): بفرض R نصف حلقة تبديليّة، وبفرض

$\Omega, \Omega_1 \subseteq R \times R$ تطابقات لنصف الحلقة R . عندئذٍ تتحقّق القضايا الآتية:

1- إن $\Omega \cap \Omega_1$ هو تطابق. ومنه فإن تقاطع أسرة من التتابقات لنصف حلقة تبديلية هو أيضاً تطابق.

2- من أجل الزوج $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$ والزوج الإختياري $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ يتحقق مايلي: $\beta\alpha \in \Omega$ ، ومنه $\Omega \subseteq \Omega\Omega_1$.

4. تطابقات الامتصاص: (Absorbing Congruence)

1.4 تعريف التتابق ثنائي الامتصاص: نقول عن التتابق Ω لـ (\mathbb{B}_A) بأنه ثنائي الامتصاص إذا كان فعلي وتحقق مايلي:

إذا كان $\gamma\beta\alpha \in \Omega$ فإنه إما $\alpha\beta \in \Omega$ أو $\beta\gamma \in \Omega$ أو $\alpha\gamma \in \Omega$ ، من أجل كل $\alpha, \beta, \gamma \in A \times A$.

وبحيث يكون $\gamma\beta\alpha$ هو الجداء المتشابه للأزواج الثلاث α, β, γ :

$$\begin{aligned} \gamma\beta\alpha &= (\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2)(\gamma_1, \gamma_2) \\ &= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)(\gamma_1, \gamma_2) \\ &= ((\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\gamma_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\gamma_2, (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\gamma_2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\gamma_1) \\ \gamma\beta\alpha &= (\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\gamma_1 + \alpha_1\beta_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_2, \alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\gamma_2 \\ &\quad + \alpha_1\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_1) \quad (*) \end{aligned}$$

أي يكون Ω ثنائي الامتصاص إذا كانت الثنائية (*) تنتمي إلى Ω عندئذ:

$$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) \in \Omega \quad \text{إمّا}$$

$$(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2, \alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) \in \Omega \quad \text{أو}$$

$$\text{أو } (\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2, \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) \in \Omega$$

مثال: بفرض لدينا التَّطابق $\Omega = \langle (x^2, y^2) \rangle$.

إنَّ $\Omega = \langle (x^2, y^2) \rangle = (x^2, x^2y^2) = (x, 0)(x, xy^2)$ ولكنَّ أيًّا من $(x, 0), (x, xy^2)$ لاينتمي إلى Ω . أيضاً:

$$(x, xy^2)^2 = (x, xy^2)(x, xy^2) = (x^2 + x^2y^4, x^2y^2 + x^2y^2) \in \Omega$$

ولكنَّ أيًّا من $(x, xy^2), (x, xy^2)$ لاينتمي إلى Ω .

ومنه Ω هو تطابق ثنائي الامتصاص وليس أولي.

من أجل الحلقات التبديليَّة، يكون المثالي ثنائي الامتصاص إذا وفقط إذا كان التَّطابق

المُقابل لايعوي جداءات مُتشابكة لأزواج تتوضَّع خارج التَّطابق. أي بفرض I مثالي

لحقة تبديليَّة و Ω_I تطابق بالنَّوَة I عندئذٍ فإنَّ I ثنائي الامتصاص إذا وفقط إذا تحقَّق:

$$\text{إذا كان } \gamma\beta\alpha \in \Omega_I \text{ فإنَّه إما } \alpha\beta \in \Omega_I \text{ أو } \beta\gamma \in \Omega_I \text{ أو } \alpha\gamma \in \Omega_I$$

للتحقَّق من ذلك: لدينا α في Ω_I إذا وفقط إذا تحقَّق $\alpha_1 - \alpha_2 \in I$. ومنه يكون $\alpha\beta$

$$\text{في } \Omega_I \text{ إذا وفقط إذا تحقَّق } (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \in I.$$

I مثالي أولي إذا وفقط إذا تحقَّق مايلي:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) \in I \text{ implies either } (\alpha_1 - \alpha_2) \in I$$

$$\text{or } (\beta_1 - \beta_2) \in I$$

I مثالي ثنائي الامتصاص إذا وفقط إذا تحقَّق مايلي:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \in I \text{ implies either } (\alpha_1 - \alpha_2) \in I$$

$$\text{or } (\beta_1 - \beta_2) \in I \text{ or } (\gamma_1 - \gamma_2) \in I$$

ويُمكن التَّحَقُّق من ذلك بالشَّكل:

$$\begin{aligned} \beta\alpha\gamma \in \Omega_I &\Leftrightarrow ((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2), 0) \in \Omega_I \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2) \in I \end{aligned}$$

اثبات التكافؤ الثنائي يكون حسب التعريف. أمّا من أجل التكافؤ الأوّل:

$$\begin{aligned} \beta\alpha\gamma \in \Omega_I &\Leftrightarrow \alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1 = -\alpha_2\beta_2\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2), 0) &\in \Omega_I \\ &\Leftrightarrow ((\alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2), 0) \in \Omega_I \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1\beta_1\gamma_1 - \alpha_1\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\gamma_1 - \alpha_1\beta_1\gamma_2 \\ &\quad + \alpha_1\beta_2\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_2 - \alpha_2\beta_2\gamma_2, 0) \in \Omega_I \end{aligned}$$

وتعميم ماسبق من أجل n - تطابق امتصاص يكون بالشكل الآتي:

2.4 تعريف: نقول عن التّطابق الفعلي Ω لـ $(\mathbb{B}\text{-algebra})$ A بأنّه n - امتصاص

إذا كان $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1} \in \Omega$ يعني أنّ الجداء المُتشابك لـ n زوج منها ينتمي لـ Ω .

حيثُ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1} \in A$.

3.4 مبرهنة: إذا كان Q, P تطابقين أوّليين غير تافهين لـ A عندئذٍ فإنّ $Q \cap P$ هو

تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات: حسب القضية (1) من المبرهنة (18.3) فإنّ النّقاطع $Q \cap P$ هو تطابق.

نفرض الآن أنّ $(\alpha\beta)\gamma \in Q \cap P$ من أجل $\alpha, \beta, \gamma \in A \times A$ عندئذٍ يتحقّق:

$(\alpha\beta)\gamma \in P$ و $(\alpha\beta)\gamma \in Q$. وبما أنّ P هو تطابق أوّلي عندئذٍ إمّا $(\alpha\beta) \in P$

أو $\gamma \in P$. إذا كان $(\alpha\beta) \in P$ فإمّا $\alpha \in P$ أو $\beta \in P$ وبشكل مُشابه $\alpha \in Q$ أو

$\beta \in Q$ أو $\gamma \in Q$.

بفرض $\alpha \in Q \cap P$ عندئذٍ وبالاعتماد على القضية (2) من المبرهنة (18.3) إمّا
 $\alpha\beta \in Q \cap P$ أو $\beta\gamma \in Q \cap P$ أو $\alpha\gamma \in Q \cap P$ ومنه فإنّ $Q \cap P$ هو تطابق ثنائي
 الامتصاص.

$$\alpha(\beta\gamma) \in I(JK) = \{\alpha(\beta\gamma) \mid \alpha \in I, \beta\gamma \in JK\} \in PQ \subseteq P \cap Q \quad \square$$

4.4 : بفرض لدينا $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ شعاع بين أنصاف الحلقات التبادليّة R_1, R_2 . إذا
 كان Ω_2 هو تطابق ثنائي الامتصاص في R_2 ، فإنّ $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ هو تطابق ثنائي
 الامتصاص في R_1 .

الإثبات: إنّ φ هو تشاكل نصف حلقي، وبحسب التعريف (7.3) يكون $\varphi^{-1}(\Omega_2)$
 تطابق. ليكن $\alpha\beta\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$ بحيث $\alpha, \beta, \gamma \in R_1$. عندئذٍ:

$$\varphi(\alpha\beta\gamma) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \Omega_2$$

وبما أنّ Ω_2 هو تطابق ثنائي الامتصاص عندئذٍ:

$$\text{إمّا } \varphi(\alpha)\varphi(\beta) \in \Omega_2 \text{ أو } \varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \Omega_2 \text{ أو } \varphi(\alpha)\varphi(\gamma) \in \Omega_2 \text{ ومنه:}$$

$$\text{إمّا } \alpha\beta \in \varphi^{-1}(\Omega_2) \text{ أو } \beta\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2) \text{ أو } \alpha\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2) \text{ ومنه}$$

$$\square \quad \varphi^{-1}(\Omega_2) \text{ هو تطابق ثنائي الامتصاص في } R_1.$$

5.4 مبرهنة: في الجبر التبادلي، إذا كانت R حلقة و Ω هو تطابق ثنائي الامتصاص.
 عندئذٍ فإنّ الجذر له هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات: بفرض I مثالي في الحلقة R جذره $Rad(I)$ ، وبفرض Ω_I و $\Omega_{Rad(I)}$ هي
 التّطابقات المُقابلة (حيثُ I و $Rad(I)$ هي النواة لكل منهما على التّرتيب). نعلم أنّ:

$$(a, b) \in \Omega_{Rad(I)} \Leftrightarrow (a, b)^n \in \Omega_I \text{ for a large enough } n$$

$$\Leftrightarrow ((a - b)^n, 0) \in \Omega_I$$

$$\alpha\beta\gamma \in \Omega_{Rad(I)} \Leftrightarrow (\alpha\beta\gamma)^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \alpha^n\beta^n\gamma^n \in \Omega_I \quad \text{ومنهُ:}$$

بما أن Ω_I هو تطابق ثنائي الامتصاص، عندئذٍ:

$$(\alpha\beta)^n \in \Omega_I = \alpha^n\beta^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \alpha\beta \in \Omega_{Rad(I)} \quad \text{إمّا}$$

$$(\beta\gamma)^n \in \Omega_I = \beta^n\gamma^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \beta\gamma \in \Omega_{Rad(I)} \quad \text{أو}$$

$$(\alpha\gamma)^n \in \Omega_I = \alpha^n\gamma^n \in \Omega_I \Leftrightarrow \alpha\gamma \in \Omega_{Rad(I)} \quad \text{أو}$$

□ ومنهُ $\Omega_{Rad(I)}$ هو تطابق ثنائي الامتصاص.

6.4 مبرهنة: بفرض لدينا Ω هو تطابق ثنائي الامتصاص في نصف الحلقة A . عندئذٍ

$Rad(\Omega)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص في نصف الحلقة A ، ومن أجل كل

$\alpha \in Rad(\Omega)$ يكون:

$$(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) = (\alpha_1 + \alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$$

الإثبات: لدينا من أجل كل $\alpha \in Rad(\Omega)$ لدينا، $GP(\alpha) \cap \Omega \neq \emptyset$ أي $\alpha^{*k} +$

$\alpha^l \in \Omega$ ، وبما أن Ω هو تطابق ثنائي الامتصاص في نصف الحلقة A ،

نلاحظ أنَّ:

$$(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) = (\alpha_1 + \alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$$

بفرض لدينا $\alpha, \beta, \gamma \in A$ بحيث $\gamma\beta\alpha \in Rad(\Omega)$ عندئذٍ لدينا:

$$((\gamma\beta\alpha)^*, 0)(\gamma\beta\alpha) \in \Omega$$

ونعلم حسب مبرهنة أنَّ $[(\alpha\beta)^* = \alpha^*\beta^*]$ ، ومنهُ:

$$(\alpha^*\beta^*\gamma^*, 0)(\gamma\beta\alpha) = ((\alpha^*, 0)(\alpha))((\beta^*, 0)(\beta))((\gamma^*, 0)(\gamma)) \in \Omega$$

وكون Ω ثنائي الامتصاص فإنَّ: (الجداء المُتشابك تبديلي)

$$(\alpha^* \beta^*, 0)(\beta \alpha) = ((\alpha^*, 0)(\alpha))((\beta^*, 0)(\beta)) \in \Omega$$

ومنهُ $\beta \alpha \in Rad(\Omega)$.

7.4: إنَّ جذر التَّطابق الابتدائي في A هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات: إنَّ $Rad(\Omega)$ هو تطابق لأنَّ $Rad(\Omega) = \bigcap_{\Omega \subseteq \Omega'} Primes \Omega'$ وتقاطع

عدة تطابقات هو تطابق. نفرض الآن أنَّ $(\alpha\beta)\gamma \in Rad(\Omega)$ وحسب المُبرهنة

(17.3) فإنَّ $Rad(\Omega)$ هو تطابق أولي أي $\alpha\beta \in Rad(\Omega)$ أو $\gamma \in Rad(\Omega)$.

إذا كان $\gamma \in Rad(\Omega)$ وكون $Rad(\Omega)$ هو تطابق يُحقِّق الخاصَّة (2) من المُبرهنة

(18.3) فإنَّ $Rad(\Omega)$ أو $\alpha\gamma \in Rad(\Omega)$ ومنهُ $Rad(\Omega)$ هو تطابق

□

ثنائي الامتصاص.

8.4 نتيجة: كل تطابق أولي هو تطابق ثنائي الامتصاص.

9.4 تعريف: نقول عن التَّطابق الفعلي Ω لـ $(\mathbb{B_algebra}) A$ بأنَّه ثنائي الامتصاص

ابتدائي إذا تحقَّق الشرط الآتي:

$$\{\alpha\gamma \mid \exists \beta \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega\} \cup \{\beta\gamma \mid \exists \alpha \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega\} \\ \subseteq Rad(\Omega)$$

10.4 مُبرهنة: بفرض لدينا $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ شعاع بين أنصاف الحلقات التبديليَّة

R_1, R_2 . إذا كان Ω_2 هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي في R_2 ، فإنَّ $\varphi^{-1}(\Omega_2)$

هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي في R_1 .

الإثبات: إنَّ φ هو تشاكل نصف حلقي، وبحسب التَّعريف (7.3) يكون $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ تطابق، و $\varphi^{-1}(\sqrt{\Omega_2})$ تطابق. ليكن $\alpha\beta\gamma \in \varphi^{-1}(\Omega_2)$ بحيث $\alpha, \beta, \gamma \in R_1$.

$$\varphi(\alpha\beta\gamma) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \Omega_2 \quad \text{عندئذ:}$$

وبما أنَّ Ω_2 هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي عندئذ:

$$\varphi(\alpha)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2} \text{ أو } \varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2}$$

$$\text{إذا كان } \varphi(\beta)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2} \text{ فإن: } \beta\gamma \in \varphi^{-1}(\sqrt{\Omega_2})$$

$$\text{أمَّا إذا كان } \varphi(\alpha)\varphi(\gamma) \in \sqrt{\Omega_2} \text{ فإن: } \alpha\gamma \in \varphi^{-1}(\sqrt{\Omega_2}) \text{ ومنه:}$$

$$\begin{aligned} & \{ \alpha\gamma \mid \exists \beta \notin \Omega_2 : \alpha\beta\gamma \in \Omega_2 \} \cup \{ \beta\gamma \mid \exists \alpha \notin \Omega_2 : \alpha\beta\gamma \in \Omega_2 \} \\ & \subseteq \varphi^{-1}(\text{Rad}(\Omega_2)) = \text{Rad}(\varphi^{-1}(\Omega_2)) \end{aligned}$$

□ ومنه $\varphi^{-1}(\Omega_2)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي في R_1 .

11.4 مبرهنة: كل تطابق ابتدائي هو تطابق ثنائي الامتصاص ابتدائي.

الإثبات: بفرض لدينا $\Omega \in A$ تطابق ابتدائي، و $(\alpha\beta)\gamma \in \Omega$ (حيثُ $\alpha, \beta \in A$)، عندئذ:

$$\{ \gamma : \alpha\beta\gamma \in \Omega \} \subseteq \text{Rad}(\Omega)$$

بما أنَّ $\text{Rad}(\Omega)$ هو تطابق و $\alpha, \beta \in A$ عندئذ لدينا $\alpha\gamma \in \text{Rad}(\Omega)$ أو

$$\beta\gamma \in \text{Rad}(\Omega) \text{ ومنه:}$$

$$\{ \alpha\gamma \mid \exists \beta \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega \} \cup \{ \beta\gamma \mid \exists \alpha \notin \Omega : \alpha\beta\gamma \in \Omega \}$$

$$\subseteq \text{Rad}(\Omega) \quad \square$$

5. تطابقات الامتصاص المدارية: (Tropical Absorbing Congruence)

1.5 نصف حلقة كثيرات الحدود المدارية ([6],P.50)([5],P.3): بفرض لدينا نصف حلقة كثيرات الحدود المدارية $S = \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$ بالمتغيرات $x = (x_1, \dots, x_n)$. عناصر S هي كثيرات حدود بمعاملات في \mathbb{T} حيث تكون جميع العمليات مدارية أي عناصر S لها الشكل:

$$(F(x) = \bigoplus_{u \in \mathbb{Z}^n} a_u \odot x^u = \max_{u \in \mathbb{Z}^n} a_u + x \cdot u)$$

حيث $a_u \in \mathbb{T}$ وجميع a_u مساوية لـ $-\infty$ باستثناء عدد منته. التطابقات على S هي علاقات تكافؤ على S مغلقة تحت الضرب المداري والجمع المداري، أي إذا كان

$$F_1 \sim G_1 \text{ و } F_2 \sim G_2 \text{ عندئذٍ يتحقق أن: } F_1 \oplus F_2 \sim G_1 \oplus G_2 \text{ و } F_1 \odot F_2 \sim G_1 \odot G_2.$$

وإذا كان $\phi: S \rightarrow R$ تشاكل نصف حلقي، عندئذٍ $\{F \sim G : \phi(F) = \phi(G)\}$ هو تطابق، وجميع التطابقات على S تنشأ على هذا النحو. وهذا هو السبب الرئيسي لإعتبار التطابقات بدلاً من المثاليات فقط في أنصاف الحلقات. من أجل المجموعة الجزئية $\{(F_\alpha, G_\alpha) : \alpha \in A\}$ من $S \times S$ يوجد تطابق أصغر على S يحوي $F_\alpha \sim G_\alpha$ من أجل جميع $\alpha \in A$ ، و يُرمز له $\langle F_\alpha \sim G_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$.

ومنهُ، من أجل أي مجموعة جزئية $S \subseteq \mathbb{T}^n$ يُعرّف التطابق $\Omega(S)$ بالشكل الآتي:

$$\Omega(S) = \{(f, g) \mid f(a) = g(a), \forall a \in S\} \subseteq \mathbb{T}[X] \times \mathbb{T}[X]$$

وبالمقابل تُعرّف مُتنوعة التطابق Ω بالشكل:

$$V(\Omega) = \{a \in \mathbb{T}^n \mid f(a) = g(a), \forall (f, g) \in \Omega\} \subseteq \mathbb{T}^n$$

ومن أجل أي تطابق Ω لـ $\mathbb{T}[X]$ يتحقق مايلي:

$$V(\Omega(V(\Omega))) = V(\Omega), \Omega \subseteq \Omega(V(\Omega))$$

2.5 مبرهنة ([6], p.50): من أجل $(f, g), (f', g') \in \mathbb{T}[X] \times \mathbb{T}[X]$ أي عنصرين يتحقق مايلي:

$$V((f, g) \times (f', g')) = V(f, g)UV(f', g')$$

3.5 مبرهنة: إن $\Omega(\mathbb{T}^n)$ هو تطابق ثنائي الامتصاص.

الإثبات:

الحالة الأولى: بفرض لدينا إحدى الثنائيات لها الشكل $(h, 0_{\mathbb{T}})$ ، وبفرض لدينا:

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \times (k, l) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

$$(h \odot (f \odot k \oplus g \odot l), h \odot (f \odot l \oplus g \odot k)) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{أي}$$

وذلك من أجل $f, g, h, k, l \in \mathbb{T}[X]$.

إذا كان h هو كثير الحدود الصفري، فإن h هو الدالة الصفرية على \mathbb{T}^n ومنه فإن

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \in \Omega(\mathbb{T}^n), \text{ وحسب الخاصّة (2) من المبرهنة (18.3) يكون:}$$

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (k, l) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{أو} \quad (h, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

نفرض الآن أن h كثير حدود غير صفري، أي $(h(a) > 0_{\mathbb{T}}, \forall a \in \mathbb{T}^n)$ ، عندئذٍ

فإن $h(a)$ يملك مقلوب ضربي مداري، ومنه إذا كان:

$$(h \odot (f \odot k \oplus g \odot l))(a) = (h \odot (f \odot l \oplus g \odot k))(a)$$

$$(f \odot k \oplus g \odot l)(a) = (f \odot l \oplus g \odot k)(a) \quad \text{فإن}$$

وذلك أيًا كانت $a \in \mathbb{T}^n$ ومنه $(f, g) \times (k, l) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$.

الحالة الثانية: بفرض لدينا إثنان من الثنائيات لها الشكل $(h, 0_{\mathbb{T}}), (k, 0_{\mathbb{T}})$ ، وبفرض

$$(h, 0_{\mathbb{T}}) \times (k, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{لدينا}$$

$$(h \odot k \odot f, h \odot k \odot g) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{أي}$$

وذلك من أجل $f, g, h, k \in \mathbb{T}[X]$.

إذا كان $h \odot k$ هو كثير الحدود الصفري، فإن $h \odot k$ هو الدالة الصفرية على \mathbb{T}^n ومنه

$$\text{فإن } (h, 0_{\mathbb{T}}) \times (k, 0_{\mathbb{T}}) = (h \odot k, 0_{\mathbb{T}}) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

نفرض الآن أن $h \odot k$ كثير حدود غير صفري، $(h \odot k(a) > 0_{\mathbb{T}}, \forall a \in \mathbb{T}^n)$ ،

عندئذٍ فإن $h \odot k(a)$ يملك مقلوب ضربي مداري، ومنه إذا كان:

$$(h \odot k \odot f)(a) = (h \odot k \odot g)(a)$$

فإن:

$$f(a) = g(a)$$

وذلك أيًا كانت $a \in \mathbb{T}^n$ ومنه $(f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$. وحسب الخاصّة (2) من المبرهنة

(18.3) يكون:

$$(k, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n) \quad \text{أو} \quad (h, 0_{\mathbb{T}}) \times (f, g) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

الحالة الثالثة: بفرض لدينا $(f_1, f_2) \times (g_1, g_2) \times (h_1, h_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$

أي: $(f_1 \odot g_1 \oplus f_2 \odot g_2, f_1 \odot g_2 \oplus f_2 \odot g_1) \times (h_1, h_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$

$$(((f_1 \odot g_1 \oplus f_2 \odot g_2) \odot h_1) \oplus ((f_1 \odot g_2 \oplus f_2 \odot g_1) \odot h_2),$$

$$((f_1 \odot g_1 \oplus f_2 \odot g_2) \odot h_2) \oplus ((f_1 \odot g_2 \oplus f_2 \odot g_1) \odot h_1) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$$

نعلم أن الضرب المداري توزيعي على الجمع المداري، ومنه فإن:

$$(f_1 \odot g_1 \odot h_1 \oplus f_2 \odot g_2 \odot h_1 \oplus f_1 \odot g_2 \odot h_2 \oplus f_2 \odot g_1 \odot h_2)(a)$$

$$= (f_1 \odot g_1 \odot h_2 \oplus f_2 \odot g_2 \odot h_2 \oplus f_1 \odot g_2 \odot h_1 \oplus f_2 \odot g_1 \odot h_1)(a)$$

وذلك أيًا كانت $a \in \mathbb{T}^n$.

ونريد إثبات أن إحدى الجداءات الآتية تنتمي إلى $\Omega(\mathbb{T}^n)$.

$$1. (f_1, f_2) \times (g_1, g_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n), \text{ أي:}$$

$$(f_1 \odot g_1 \oplus f_2 \odot g_2)(a) = (f_1 \odot g_2 \oplus f_2 \odot g_1)(a)$$

$$2. (f_1, f_2) \times (h_1, h_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n), \text{ أي:}$$

$$(f_1 \odot h_1 \oplus f_2 \odot h_2)(a) = (f_1 \odot h_2 \oplus f_2 \odot h_1)(a)$$

$$3. (g_1, g_2) \times (h_1, h_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n), \text{ أي:}$$

$$(g_1 \odot h_1 \oplus g_2 \odot h_2)(a) = (g_1 \odot h_2 \oplus g_2 \odot h_1)(a)$$

وذلك أيّاً كانت $a \in \mathbb{T}^n$.

من أجل 1: نريد إثبات أنّ $(f_1, f_2) \times (g_1, g_2) \in \Omega(\mathbb{T}^n)$ ، نريد إثبات أنّ:

$$a \in V((f_1, f_2) \times (g_1, g_2)), \forall a \in \mathbb{T}^n$$

$$a \in V((f_1, f_2) \times (g_1, g_2) \times (h_1, h_2)), \forall a \in \mathbb{T}^n \text{ (فرضاً)}$$

ونعلم أنّ الجداء المُختلط تجميعي، ومنه فإنّ:

$$a \in V(((f_1, f_2) \times (g_1, g_2)) \times (h_1, h_2)), \forall a \in \mathbb{T}^n$$

وحسب المُبرهنة (2.5) فإنّ:

$$a \in [V((f_1, f_2) \times (g_1, g_2))] \cup [V(h_1, h_2)], \forall a \in \mathbb{T}^n$$

إذا كانت $a \in V((f_1, f_2) \times (g_1, g_2))$ فإنّ 1 مُحقّقة.

نفرض الآن أنّ $a \in V(h_1, h_2)$ ، ومنه $h_1(a) = h_2(a)$

وبما أنّ الجمع الجامديعُرف ترتيب كلي، نفرض $(f_1 \geq f_2, g_1 \geq g_2, h_1 \geq h_2)$

نلاحظ الآن أنّ العلاقة 2 تقابل العلاقة الآتية:

$$\max\{f_1(a) + h_1(a), f_2(a) + h_2(a)\}$$

$$= \max\{f_1(a) + h_2(a), f_2(a) + h_1(a)\}$$

$$\max\{f_1(a) + h_1(a), f_2(a) + h_2(a)\} = f_1(a) + h_1(a) \text{ (فرضاً)}$$

$$\max\{f_1(a) + h_2(a), f_2(a) + h_1(a)\} = f_1(a) + h_1(a)$$

ومنه فإنّ العلاقة 2 مُحقّقة. يتم إثبات العلاقة 3 بنفس الأسلوب، ومنه يتم المطلوب. □

- [1]. MINCHEVA.K., 2016. - Semiring Congruences and Tropical Geometry. PhD Thesis. Baltimore (Maryland), Johns Hopkins University,81P.
- [2]. HARSU.M., 2016. - Layered Tropical commutative Algebra. Licentiate thesis. Finland, University Of Tampere,149P.
- [3].QIU.D.,2017. -- On Algebraic Congruences, [arXiv: 1512.08088](https://arxiv.org/abs/1512.08088).
- [4].BADAWI.A., 2007. - On 2-absorbing ideals of commutative rings. Bulletin of the Australian Mathematical Society , Volume 75(Issue 3).. Pages. 417 – 429.
- [5]. MACLCGAN.D., 2017.- Tropical Schemes, Tropical Cycles, and Valuated Matroid, [arXiv: 1401.4654](https://arxiv.org/abs/1401.4654).
- [6]. ESTORM.R., 2017. - The Tropical Nullstelensatz for Congruences, [Advances in Mathematics](#) [Internet], Volume 308.,. Pages.36-82.
- [7]. Mousa M. a Study in Absorbing Ideals. Master Thesis. Damascus: Damascus University; 2019.(In Arabic)
- [8].ROBERT.HSC., 2016.- On the Etale Fundamental Group of Schemes over the Natural Numbers. PhD Thesis. Canberra, Australian National University,124P.