

# مجلة جامعة البعث

سلسلة العلوم الأساسية



مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 45 . العدد 6

1444 هـ - 2023 م

الأستاذ الدكتور عبد الباسط الخطيب

رئيس جامعة البعث

المدير المسؤول عن المجلة

رئيس هيئة التحرير	أ. د. محمود حديد
رئيس التحرير	أ. د. درغام سلوم

مديرة مكتب مجلة جامعة البعث

بشرى مصطفى

عضو هيئة التحرير	د. محمد هلال
عضو هيئة التحرير	د. فهد شريباتي
عضو هيئة التحرير	د. معن سلامة
عضو هيئة التحرير	د. جمال العلي
عضو هيئة التحرير	د. عباد كاسوحة
عضو هيئة التحرير	د. محمود عامر
عضو هيئة التحرير	د. أحمد الحسن
عضو هيئة التحرير	د. سونيا عطية
عضو هيئة التحرير	د. ريم ديب
عضو هيئة التحرير	د. حسن مشرقي
عضو هيئة التحرير	د. هيثم حسن
عضو هيئة التحرير	د. نزار عبشي

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها

الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة البعث

سورية . حمص . جامعة البعث . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : ++ 963 31 2138071

. موقع الإنترنت : [www.albaath-univ.edu.sy](http://www.albaath-univ.edu.sy)

. البريد الإلكتروني : [magazine@ albaath-univ.edu.sy](mailto:magazine@albaath-univ.edu.sy)

**ISSN: 1022-467X**

## شروط النشر في مجلة جامعة البعث

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
  - طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
  - إذا كان الباحث طالب دراسات عليا:  
يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقة على النشر في المجلة.
  - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:  
يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.
  - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :  
يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.
  - إذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :  
يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.
  - يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):  
عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي ( كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1- مقدمة
  - 2- هدف البحث
  - 3- مواد وطرق البحث
  - 4- النتائج ومناقشتها .
  - 5- الاستنتاجات والتوصيات .
  - 6- المراجع.

- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات ( الآداب - الاقتصاد - التربية - الحقوق - السياحة - التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):
- عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي ( كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1. مقدمة.
- 2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
- 3. أهداف البحث و أسئلته.
- 4. فرضيات البحث و حدوده.
- 5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
- 6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
- 7. منهج البحث و إجراءاته.
- 8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
- 9. نتائج البحث.
- 10. مقترحات البحث إن وجدت.
- 11. قائمة المصادر والمراجع.
- 7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:
  - أ- قياس الورق 25×17.5 B5.
  - ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 - يمين 2.5- يسار 2.5 سم
  - ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8
  - ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20
- . كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي . العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.
- ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.
- 8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.
- 9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.
- 10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة . الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة . سنة النشر . وتتبعها معترضة ( - ) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة . دار النشر وتتبعها فاصلة . الطبعة ( ثانية . ثالثة ) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة . وفيما يلي مثال على ذلك:

-MAVRODEANUS, R1986- Flame Spectroscopy. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

. بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة . المجلد والعدد ( كتابة مختزلة ) وبعدها فاصلة . أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة . مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases Clinical Psychiatry News , Vol. 4. 20 – 60

ج . إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد

بالبنود ( أ و ب ) ويكتب في نهاية المراجع العربية: ( المراجع In Arabic )

## رسوم النشر في مجلة جامعة البعث:

1. دفع رسم نشر (20000) ل.س عشرون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (50000) ل.س خمسون ألف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (3000) ل.س ثلاثة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

## المحتوى

الصفحة	اسم الباحث	اسم البحث
44-11	د. نبيل علي	معادلات غرين الدقيقة الصرفة لجسم صلب مرن دقيق الاستقطاب وغير محدود
66-45	عبد القادر دياب د. بشير الياس د. فاطمة الرحال د. علا مصطفى	تحديد الأوندانسيترون هيدروكلورايد في المستحضرات الصيدلانية باستخدام المسرى المحضر من معجونة الكربون المعدلة كيميائياً بمعقد الزوج الأيوني
94-67	علاء جوني د. شوقي الراشد	توصيف جبيري لمسألة نقل المعلومات على شبكات الاتصال التريجيبية
112-95	فادي أبو حرب د. حمزة حاكمي د. نور غازي	حول مسألة غالوا العكسية



132-113	<p>فطمة سلمون  د. عبد الرزاق الصوفي  د. ناصر سعد الدين</p>	<p>دراسة بعض الخصائص الفيزيائية لمزيج  <i>PVA – SiO<sub>2</sub></i></p>
150-133	<p>د. ميشيل حداد</p>	<p>الشكل الجديد في التطبيقات F – السوية بين  الفضاءات المتناظرة</p>



## معادلات غرين الدقيقة الصرفة لجسم صلب مرن دقيق الاستقطاب وغير محدود

نبيل علي<sup>†</sup>

### ملخص البحث

يناقش البحث الجسم الصلب دقيق الاستقطاب ذي ستة ثوابت مادية، والمدروس رياضياً من خلال كلٍ من الباحثين Eringen و Nowacki، والذي يُرمز له اختصاراً بـ (E-N:6) [13-14].

يشكّل هذا المقال الحلقة الأخيرة التي تختم مجموعة المقالات [1-3]، وتم فيه مايلي، لأجل الجسم الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)، غير المحدود (بملاً  $R^3$ )، والذي إجهاداته وحرارته، الخارجية، جميعها معدومة: (I) تم إيجاد سلوك غرين-إغانتشاك، الديناميكي الدقيق الصرف الشاذ والموافق للعزوم الحجمية، فقط، المركزة في نقطة ما  $\mathbb{E}$  من  $R^3$ ، والمتغيرة توافقياً مع الزمن، حيث السلوك التقليدي الصرف هو السلوك الصفري. (II) تم استنتاج صيغ Green-Ignaczak الدقيقة الصرفة في الجسم، المعتبر، بما يتوافق مع العزم الحجمي النظامي والمتغير توافقياً مع الزمن. في النهاية تم اختتام البحث بعدد من المسائل للمناقشة.

<sup>†</sup> أستاذ مساعد في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة طرطوس.  
الكلمات المفتاحية: صيغ Green-Ignaczak الدقيقة الصرفة - الجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب (E-N:6).

# The pure Green equations for unbounded micropolar elastic solid

Nabil Ali <sup>†</sup>

## Abstract

This paper deals with the mathematical model of the micropolar elastic solid of 6 material constants and 6-degrees of freedom, discussed by Eringen and Nowacki [13-14], and shortly demoted by (E-N:6).

This is the end of continuation of the papers [1-3] and contains the following. For the thermodynamical micropolar thermoelastic unbounded (E-N:6) body (occupying  $R^3$ ), which has vanishing external stresses and external temperature, we do the following: I) Finding the singular pure dynamical micropolar Green-Ignaczak behavior of the above mentioned body, corresponding to the only body moments concentrated at a point  $\xi \in R^3$ , and varying harmonically in time, where the pure classical thermodynamical behavior is the zero one, II) Deriving the dynamical, pure microscopic Green-Ignaczak formulae for the above mentioned body, corresponding to regular body moments, which vary harmonically in time. Finally, we end the paper by suggesting several problems for discussing.

---

<sup>†</sup> Associate Professor at Department of Mathematics – Faculty of Science – Tartous University.

**Key words:** The pure microscopic Green-Ignaczak formulae - The (E-N:6) micropolar elastic solid.

## 1. مقدمة:

في [7] تم مناقشة تركيب السلوكيات الترموديناميكية في وصف Ignaczak بالإجهادات والحرارة [4,8,12] من أجل الجسم الصلب دقيق الاستقطاب من نوع Eringen-Nowacki [13,14] والذي يملك 6 درجات حرية و 6 ثوابت مادية [والمسمى اختصاراً: (E-N:6)]، ذلك لأجل الحالة ثلاثية الأبعاد للانفعالات المرنة، اللامتناهية في الصغر، وبوجود حمل ترموميكانيكية. وفي [6]، فقد تم إثبات إيزوتيرمية<sup>1</sup> سلوك Ignaczak الترموديناميكي المتمم في (E-N:6)، الخاضع لحقل حراري، ويملاً  $R^3$ ، والذي كلاً من إجهاداته الخارجية وحرارته الخارجية، معدوم. وفي [5]، تم استنتاج صيغ Fourier التكاملية، التي تعطي سلوكي Ignaczak الترموديناميين، النظاميتين، الهوكي والمتمم، في الجسم (E-N:6)، الخاضع لحرارة، ويشغل كل  $R^3$ ، والذي كلاً من إجهاداته وحرارته، الخارجية، معدومة. وفي [3] تم إيجاد السلوكين الترموديناميين، الشاذين؛ التقليدي والدقيق المتمم للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب، وغير المحدود، وغير المجهد ولا المسخن خارجياً، في حالة خضوعه فقط لقوة حجمية، مركزة في نقطة ما، ومتغيرة توافقياً بالنسبة للزمن. وفي [2] تم اثبات صحة الآتي: لأجل الجسم الترموديناميكي الصلب المرن دقيق الاستقطاب (E-N:6)، غير المحدود (يشغل  $R^3$ )، والذي كلاً من إجهاداته وحرارته، الخارجية، جميعها معدومة، فإن: (I) السلوك الترموديناميكي للجسم، الموافق للمصادر الحرارية، فقط، هو سلوك تقليدي صرف، (II) السلوك الترموديناميكي للجسم، الموافق للعزم الحجمي فقط، هو سلوك دقيق صرف. أخيراً في [1]، من أجل الجسم الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)، وغير المحدود، والذي إجهاداته وحرارته، الخارجية، جميعها معدومة، تم إيجاد السلوك الترموديناميكي الهوكي الصرف، الشاذ، للجسم، والموافق، فقط للمصادر الحرارية، المركزة في نقطة ما  $\in R^3$ ، والمتغيرة توافقياً بالنسبة للزمن، (حيث السلوك الدقيق الصرف يتطابق مع السلوك الصفري [2,9]).

<sup>1</sup> العملية الترموديناميكية الإيزوتيرمية هي العملية متساوية درجات الحرارة.

## 2. هدف البحث:

في البحث، من أجل الجسم الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)، وغير المحدود، والذي إجهاداته وحرارته، الخارجية، جميعها معدومة، سنوجد: I) سلوك Green-Ignaczak الديناميكي، الدقيق الصرف، الشاذ للجسم، والموافق للعزوم الحجمية، فقط، والمركزة في نقطة ما  $\mathbb{E}$  من  $R^3$ ، والمتغيرة توافقياً مع الزمن، حيث السلوك التقليدي الصرف هو السلوك الصفري. II) صيغ Green-Ignaczak الدقيقة الصرفة، في الجسم المعتبر، بما يتوافق مع العزم الحجمي النظامي، والمتغيرة توافقياً مع الزمن.

## 3. طرق البحث:

سنوجد ما تقدم ذكره في هدف البحث باستخدام: أولاً) نتائج الأبحاث [1-3]، ثانياً) طريقة التحويلات التكاملية ([11])؛ المتمثلة بتطبيق تحويل Fourier التكاملي المضاعف من المرتبة الرابعة على المعادلات المستقلة لأجل الإجهادات الدقيقة الصرفة، في الجسم المعتبر، والمتوافقة مع حالة وجود فقط العزم الحجمي، حيث تكون هذه المعادلات المستقلة أبسط من المعادلات المستقلة لأجل حقول الإجهادات الدقيقة غير الصرفة والمستنتجة في [6]، ثالثاً) مبرهنة الطي لـ Fourier، المتعلقة بتحويل Fourier التكاملي المضاعف من المرتبة الرابعة.

إن نتائج البحث تعتمد جزئياً على دمج نتائج الأبحاث [1-3]، ولذلك سنعرض فيما يلي بشكل مختصر ما يهمننا منها. في البحث سنركز اهتمامنا على النموذج الرياضي للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب (E-N:6) [13,14]، الذي في بحثنا يشغل كامل الفضاء الإقليدي  $\Omega = R^3$ ، وحقلاً إجهاداته، وحقلاً حرارته، الخارجية، جميعها معدومة؛ أي أننا سنركز اهتمامنا على بالجسم الصلب المرن، دقيق الاستقطاب، والمتجانس والمتماثل المناحي:  $(\mu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \rho, J, \kappa, \eta_0, \nu_T)$ ، علماً أن الرموز ضمن القوسين تمثل الثوابت الميكانيكية-الحرارية للجسم، وهي حقيقية. كما سنفرض أيضاً أن جميع المقاطع التتسورية، الفيزيائية الممثلة للسلوك الميكانيكي الحراري للجسم الصلب المرن، دقيق الاستقطاب، ملساء بالقدر الكافي، وتتبع للموضع والزمن. في هذه الحالة، تُوصف العملية الترموديناميكية للجسم الصلب المرن، بواسطة مجموعة المقاطع التتسورية:  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \theta, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$ ، حيث:  $\boldsymbol{\varphi}$  و  $\mathbf{u}$  مقطعان متجهيان مستقلان،

على الترتيب يمثلان، مقطع الإزاحات ومقطع التوجهات، و  $\theta := T - T_0$  مقطع سلمي؛ يمثل تغير حقل الحرارة؛ حيث  $T$  مقطع الحرارة المطلقة في الجسم و  $T_0$  هي حرارة الحالة الطبيعية له. إلى ماتقدم ذكره نضيف بأن:  $\sigma, \mu, \gamma, \kappa$  هي مقاطع تنسورية من المرتبة الثانية، على الترتيب هي: مقطع إجهادات القوة، ومقطع إجهادات العزم، ومقطع الانفعالات، ومقطع الانفعالات الانثنائية-الدورانية. فإذا رمزنا بـ  $[0, \infty[$  و  $T^+ := ]0, \infty[$ ، فيمكن أن تُمثَّل هذه المقاطع التيسورية، في  $\Omega \times T^+$ ، وفي النظام الإحداثي الديكارتي العطالي  $Ox_1x_2x_3$ ، الذي قاعدته  $(e_1, e_2, e_3)$  بالشكل:

$$\mathbf{u} = u_i e_i, \quad \varphi = \varphi_i e_i \quad (3.1)$$

$$\sigma = \sigma_{ij} e_i \otimes e_j, \quad \mu = \mu_{ij} e_i \otimes e_j, \quad (3.2)$$

$$\gamma = \gamma_{ij} e_i \otimes e_j, \quad \kappa = \kappa_{ij} e_i \otimes e_j \quad (3.3)$$

واستخدمنا هنا الطريقة التيسورية في الجمع (رموز Einstein)، حيث تأخذ الأدلة اللاتينية...  $k, j, i$  القيم 1, 2, 3، أما المصفوفات الأربع في الأطراف اليمنى للعلاقات (3.2) و (3.3) فهي غير متناظرة.

في وصف Ignaczak للجسم (E-N:6)، تم افتراض أن العملية الترموديناميكية، المرنة، دقيقة الاستقطاب، للجسم تأخذ في  $\Omega \times T^+$  الشكل التالي [7]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}', \quad \varphi = \varphi^0 + \varphi', \quad \theta = \theta^0 + \theta', \quad (3.4)$$

$$\sigma = \sigma^0 + \sigma', \quad \mu = \mu^0 + \mu', \quad \gamma = \gamma^0 + \gamma', \quad \kappa = \kappa^0 + \kappa'$$

حيث المقاطع التيسورية  $(\mathbf{u}^0, \varphi^0, \theta^0, \sigma^0, \mu^0, \gamma^0, \kappa^0)$  تتعلق بجسم Hooke الصلب المرنة:  $\Omega(\mu, \lambda, \rho, \eta_0, \nu_T)$ ، أما  $(\mathbf{u}', \varphi', \theta', \sigma', \mu', \gamma', \kappa')$  فتُمثَّل المقاطع التيسورية الدقيقة، المتممة. إن المقاطع التيسورية، المُمثَّلة لجسم Hooke والمقاطع التيسورية، الدقيقة، المتممة، الموافقة، تُكتب في  $\Omega \times T^+$ ، وفي  $Ox_1x_2x_3$  بالشكل:

$$\mathbf{u}^0 = u_i^0 e_i, \quad \varphi^0 = \varphi_i^0 e_i \quad (3.5)$$

$$\sigma^0 = \sigma_{ij}^0 e_i \otimes e_j, \quad \mu^0 = \mu_{ij}^0 e_i \otimes e_j, \quad (3.6)$$

$$\gamma^0 = \gamma_{ij}^0 e_i \otimes e_j, \quad \kappa^0 = \kappa_{ij}^0 e_i \otimes e_j, \quad (3.7)$$

حيث أن:  $\boldsymbol{\varphi}^0 = \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{u}^0$ ، وعلماً أن المصفوفتين  $\{\sigma_{ij}^0\}_{3 \times 3}$  و  $\{\varepsilon_{ij}^0\}_{3 \times 3}$  متناظرتان، بينما المصفوفتان  $\{\mu_{ij}^0\}_{3 \times 3}$  و  $\{\kappa_{ij}^0\}_{3 \times 3}$  غير متناظرتان؛

$$\mathbf{u}' = u'_i \mathbf{e}_i \quad , \quad \boldsymbol{\varphi}' = \varphi'_i \mathbf{e}_i \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \sigma'_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad , \quad \boldsymbol{\mu}' = \mu'_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad , \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\gamma}' = \gamma'_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad , \quad \boldsymbol{\kappa}' = \kappa'_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad , \quad (3.10)$$

علماً أن المقطعين المتجهيان:  $\mathbf{u}'$  و  $\boldsymbol{\varphi}'$  مستقلان في  $\Omega \times T^+$ ، أما المصفوفات الموجودة في العلاقاتين (3.9) و(3.10) فهي غير متناظرة.

انطلاقاً من نموذج Ignaczak لـ (E-N:6) [8]، ومن أجل (E-N:6) الذي يشغل  $R^3$ ، وإجهاداته وحرارته، الخارجية معدومة جميعها، تم في [7]، تركيب عملية Ignaczak لـ (E-N:6) على شكل مجموع عمليتي Ignaczak؛ العملية الأولى هي عملية Ignaczak لجسم Hooke، وتدعى بسلوك Ignaczak الهوكي (أو التقليدي) للجسم، أما العملية الثانية فهي عملية Ignaczak الدقيقة (المتمة)، الموافقة، وتدعى بسلوك Ignaczak الدقيق (المتمم)، الموافق، للجسم. فيما يلي نعرض كلاً من سلوك Ignaczak الأول (الهوكي)، وسلوك Ignaczak الثاني (الدقيق) لـ (E-N:6)، غير المحدود، والخاضع لحقل حراري، ويملاً  $R^3$ ، والذي كلاً من إجهاداته وحرارته، الخارجية، معدومة جميعها (انظر أيضاً [6])، ذلك لأجل حالة وجود: مقطعي القوة الحجمية، والعزم الحجمي، ومقطع المصادر الحرارية. كما تم في [6] إثبات أن:  $\theta' \equiv 0$ ،  $e' \equiv 0$  (حيث  $e'$  التمدد الحجمي المتمم)، حيث يأخذ كلاً من السلوكين السابقين الشكل التالي [5]:

- سلوك Ignaczak الهوكي:

• معادلات الحقل، المحققة في  $\Omega \times T^+$ :

$$\hat{c}_2^2 (R_{i,j}^0 + R_{j,i}^0) - \ddot{\sigma}_{ij}^0 + (\lambda \ddot{e}^0 - \nu_T \ddot{\theta}^0) \delta_{ij} = 0 \quad (3.11)$$

$$D\theta^0 - \eta_0 \dot{e}^0 = -\frac{Q}{\kappa} \quad (3.12)$$

$$\hat{c}_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad , \quad R_i^0 = \hat{R}_i^0 + X_i \quad , \quad \hat{R}_i^0 = \sigma_{ji,j}^0 \quad \text{حيث:}$$

$$\ddot{e}^0 = \frac{1}{2\mu + 3\lambda} (\ddot{\sigma}_{kk}^0 + 3\nu_T \ddot{\theta}^0) \quad , \quad \dot{e}^0 = \frac{1}{2\mu + 3\lambda} (\dot{\sigma}_{kk}^0 + 3\nu_T \dot{\theta}^0) \quad \text{و:}$$



كما أن:  $\rho$  هي الكتلة الحجمية للجسم دقيق الاستقطاب، و  $(X_1, X_2, X_3)$  متجه القوة الحجمية، المعامل الحراري-الميكانيكي:  $\eta_0 = \frac{v_T T_0}{\lambda_0}$ ، حيث  $v_T = (3\lambda + 2\mu) a_t$ ،

أيضاً:  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$  هما ثابتان ماديان للجسم و  $a_t$  هو معامل التمدد الخطي الحراري له، و  $\lambda_0$  معامل التوصيل الحراري له، كما أن:  $\kappa = \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}$ ،  $Q = \frac{\kappa W}{\lambda_0}$ ، حيث  $c_\varepsilon$  تمثل

الحرارة النوعية للجسم من أجل تشوه ثابت له، و  $W$  كمية الحرارة المُشكَّلة في وحدة الحجم ووحدة الزمن، إلى ما تقدم ذكره نضيف بأن:  $Q$  تمثل المصادر الحرارية في الجسم دقيق الاستقطاب. الفاصلة الدليلية تدل على المشتق الجزئي بالنسبة لمتحولات الموضع، والنقطة تدل على المشتق الجزئي بالنسبة للزمن:  $\dot{f} \equiv \partial f / \partial t \equiv \partial_t f$ . نعلم الطريقة التنسورية في الجمع (رموز Einstein)، حيث الأدلة اللاتينية  $i, j, k, \dots$  تأخذ القيم 1, 2, 3، كما أن:  $D$  يرمز للمؤثر الاشتقاقي، التحريكي الحراري:  $D = \nabla^2 - \frac{1}{\kappa} \partial_t$ ، حيث  $\nabla^2$  هو مؤثر Laplace الاشتقاقي، السلمي؛  $\nabla^2 f = f_{,ii}$ ،

• الشروط الحدية، الهوكية:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \sigma_{ji}^0 = 0 \quad , \quad \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \theta^0 = 0 \quad (3.13)$$

مع العلم أن:  $\|\mathbf{x}\| := (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}$ ،

• الشروط الابتدائية الهوكية، المحققة في  $\Omega \times \{0\}$ :

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{0(0)} \quad , \quad \theta^0 = l \quad , \quad \dot{\sigma}_{ij}^0 = \dot{\sigma}_{ij}^{0(0)} \quad (3.14)$$

$$\sigma_{ij}^{0(0)} = 2\mu \varepsilon_{ij}^{0(0)} + (\lambda e^{0(0)} - v_T l) \delta_{ij} \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_{ij}^{0(0)} = \frac{1}{2} (f_{i,j}^0 + f_{j,i}^0) \quad , \quad e^{0(0)} = f_{k,k}^0$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{0(0)} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}^{0(0)} + [(\lambda + v_T \kappa \eta_0) \dot{e}^{0(0)} - v_T (\kappa l_{,kk} + Q^{(0)})] \delta_{ij} \quad (3.16)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{0(0)} = \frac{1}{2} (g_{i,j}^0 + g_{j,i}^0) \quad , \quad \dot{e}^{0(0)} = g_{k,k}^0$$

حيث  $Q^{(0)}$ ، تمثل القيمة الابتدائية للمصادر الحرارية، والتتابع  $[(f_i^0, l, g_i^0): \Omega \rightarrow R]$  معلومة، فيها  $f_i^0$  و  $g_i^0$ ، على الترتيب، هي الجزء الهوكي لـ  $f_i$  و  $g_i$ ، والتي بدورها معلومة في  $\Omega$ ، وتمثل، على الترتيب، القيم الابتدائية لمركبات مقطع الإزاحة، المتجهي الكلي، والقيم الابتدائية لسرع هذه المركبات في  $\Omega$ ، أما  $l$  فتمثل القيمة الابتدائية لمقطع للحرارة، السلمي، الكلي في  $\Omega$ .

• العلاقات التأسيسية الهوكية، محلولةً بالنسبة للانفعالات الهوكية في  $\Omega \times T$  :

$$2\mu\varepsilon_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 - (\lambda e^0 - \nu_T \theta^0) \delta_{ij} \quad (3.17)$$

$$e^0 = \frac{1}{2\mu + 3\lambda} (\sigma_{kk}^0 + 3\nu_T \theta^0) \quad \text{علماً أن:}$$

• العلاقات التي تعطي الإزاحات الهوكية والدورانات الهوكية والمحققة في  $\Omega \times T$  :

$$u_i^0 = g_i^0 t + f_i^0 + \rho^{-1}(t \widehat{*} R_i^0) \quad (3.18)$$

$$\varphi_i^0 = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} [g_k^0 t + f_k^0 + \rho^{-1}(t \widehat{*} R_k^0)],_j \quad (3.19)$$

حيث رمز النجمة  $\widehat{*}$  يدل على الطي ([11]):

$$t \widehat{*} f(\mathbf{x}; t) = \int_0^t (t - \tau) f(\mathbf{x}; \tau) d\tau$$

• العلاقات التي تعين بقية المقاطع الفيزيائية، الهوكية والمحققة في  $\Omega \times T$  :

$$\kappa_{ji}^0 = \frac{1}{2} \epsilon_{ilk} [g_k^0 t + f_k^0 + \rho^{-1}(t \widehat{*} R_k^0)],_{lj} \quad (3.20)$$

$$\mu_{ji}^0 = \frac{1}{2} \{ (\gamma + \varepsilon) \epsilon_{ilk} [g_k^0 t + f_k^0 + \rho^{-1}(t \widehat{*} R_k^0)],_{lj} + (\gamma - \varepsilon) \epsilon_{jlk} [g_k^0 t + f_k^0 + \rho^{-1}(t \widehat{*} R_k^0)],_{li} \} \quad (3.21)$$

حيث  $\gamma, \varepsilon \in R_+$  ثابتان مادبان آخران للجسم المُعتبر.

$g_i^0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} g_i$  و  $f_i^0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} f_i$  <sup>2</sup> (انظر [9]).

- سلوك Ignaczak الدقيق، المتمم:

- معادلات الحقل، المتممة، بلغة الإجهادات، المتممة، المحققة في  $\Omega \times T^+$ :

$$\square_2^* \rho^{-1} R'_{i,j} - J^{-1} \epsilon_{kji} \mathcal{N}'_k - \square_2^* \left\{ \frac{1}{2\mu} \ddot{\sigma}'_{(ji)} + \frac{1}{2\alpha} \ddot{\sigma}'_{[ji]} \right\} = 0 \quad (3.22)$$

$$J^{-1} \mathcal{N}'_{i,j} - \square_2^* \left\{ \frac{1}{2\gamma} \ddot{\mu}'_{(ji)} + \frac{1}{2\epsilon} \ddot{\mu}'_{[ji]} - \frac{\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)} \ddot{\mu}'_{kk} \delta_{ij} \right\} = 0 \quad (3.23)$$

$$R'_i = \hat{R}'_i + \hat{X}_i, \quad \hat{R}'_i = \sigma'_{ji,j} \quad \text{مع العلم أن:}$$

$$\mathcal{N}'_i = \hat{\mathcal{N}}'_i + \hat{Y}_i, \quad \hat{\mathcal{N}}'_i = \square_2^* \hat{M}'_i, \quad \hat{M}'_i = \epsilon_{ijk} \sigma'_{jk} + \mu'_{ji,j} \quad \text{و}$$

الدليلان: (...), [ ... ], على الترتيب، يدلان على الجزء التناظري، والجزء التناظري العكسي

$$\text{للمصفوفة؛ } \sigma'_{(ji)} := \frac{1}{2} (\sigma'_{ji} + \sigma'_{ij}) \quad \text{و} \quad \sigma'_{[ji]} := \frac{1}{2} (\sigma'_{ji} - \sigma'_{ij})$$

كما أن  $J$  تمثل العطالة الدورانية للجسم المرن دقيق الاستقطاب، والرموز  $\epsilon_{ijk}$  تمثل

المركبات الديكارتيية في الجملة المعتبرة، لتتسور: Levi-Civita، النسبي، بالوزن:  $w = \frac{1}{2}$ ،

$$\text{كما أن: } \hat{Y}_i = \square_2^* Y_i - \frac{1}{2} \square_4^* \epsilon_{ijk} X_{k,j}$$

العزم الحجمي، المتجهي، و  $\hat{X}_i = 0$ ،  $\hat{Q} = 0$ ، كما أن المؤثرات الاشتقاقية، التحريكية:

$$\square_4 = (\gamma + \epsilon) \nabla^2 - 4\alpha - J \partial_t^2 \quad \text{و} \quad \square_2 = (\mu + \alpha) \nabla^2 - \rho \partial_t^2$$

على  $\alpha, \beta \in R_+$  هما الثابتان الماديان الخامس والسادس للجسم، أما:  $\square_2^*$  و  $\square_4^*$ ، على

الترتيب، فينتجان عن  $\square_2$  و  $\square_4$ ، بوضع:  $\alpha = 0$ .

• الشروط الحدية المتممة:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \sigma'_{ji} = 0, \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \mu'_{ji} = 0 \quad (3.24)$$

• الشروط الابتدائية المتممة، بلغة الإجهادات، المتممة في  $\Omega \times \{0\}$ :

$$\begin{aligned} \sigma'_{ji} &= \sigma'_{ji}{}^{(0)}, \quad \mu'_{ji} = \mu'_{ji}{}^{(0)} \\ \dot{\sigma}'_{ji} &= \dot{\sigma}'_{ji}{}^{(0)}, \quad \dot{\mu}'_{ji} = \dot{\mu}'_{ji}{}^{(0)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

وهنا:

$$\begin{aligned} \sigma'_{ji}{}^{(0)} &= 2\mu \varepsilon'_{ij}{}^{(0)} + 2\alpha [\omega'_{ij}{}^{(0)} - \epsilon_{kji} k'_k], \\ \mu'_{ji}{}^{(0)} &= (\gamma + \varepsilon) k'_{i,j} + (\gamma - \varepsilon) k'_{j,i} + \beta k'_{k,k} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.26)$$

و:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ij}{}^{(0)} &= \frac{1}{2}(f'_{i,j} + f'_{j,i}), \quad \omega'_{ij}{}^{(0)} = \frac{1}{2}(f'_{i,j} - f'_{j,i}), \\ f'_i &= f_i - f_i^0, \quad k'_k = k_k - k_k^0, \quad k_i^0 = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} f_{k,j}^0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

إضافةً إلى أن:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}'_{ji}{}^{(0)} &= 2\mu \dot{\varepsilon}'_{ij}{}^{(0)} + 2\alpha [\dot{\omega}'_{ij}{}^{(0)} - \epsilon_{kji} \dot{\chi}'_k], \\ \dot{\mu}'_{ji}{}^{(0)} &= (\gamma + \varepsilon) \dot{\chi}'_{i,j} + (\gamma - \varepsilon) \dot{\chi}'_{j,i} + \beta \dot{\chi}'_{k,k} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\dot{\varepsilon}'_{ij}{}^{(0)} = \frac{1}{2}(g'_{i,j} + g'_{j,i}), \quad \dot{\omega}'_{ij}{}^{(0)} = \frac{1}{2}(g'_{i,j} - g'_{j,i}), \quad (3.29)$$

$$g'_i = g_i - g_i^0, \quad \chi'_k = \chi_k - \chi_k^0, \quad \chi_i^0 = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} g_{k,j}^0$$

في الشروط الابتدائية المتممة، السابقة يجب أن يتحقق:  $f_{k,k} = f_{k,k}^0$

و  $g_{k,k} = g_{k,k}^0$ ؛ أي تحقق  $e^{(0)} = e^{0(0)}$  و  $\dot{e}^{(0)} = \dot{e}^{0(0)}$ .

<sup>3</sup> ينتج ذلك عن المطابقة:  $e \equiv 0$ . أي أن التوسع الحجمي الكلي، الابتدائي، يساوي التوسع الحجمي التقليدي، الابتدائي، والسرعة الابتدائية للتوسع الحجمي الكلي، تساوي السرعة الابتدائية للتوسع الحجمي التقليدي.

- العلاقات التأسيسية المتممة محلولةً بالنسبة للانفعالات المتممة في  $\Omega \times T$ :

$$\begin{aligned} \gamma'_{ji} &= \frac{1}{2\mu} \sigma'_{(ji)} + \frac{1}{2\alpha} \sigma'_{[ji]} , \\ \kappa'_{ji} &= \frac{1}{2\gamma} \mu'_{(ji)} + \frac{1}{2\varepsilon} \mu'_{[ji]} - \frac{\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)} \mu'_{kk} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.30)$$

- العلاقات التي تعطي الإزاحات والدورانات المتممة، بلغة الإجهادات المتممة

في  $\Omega \times T$ :

$$u'_i = g'_i t + f'_i + \rho^{-1}(t \hat{*} R'_i) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \varphi'_i &= \chi'_i t + k'_i + J^{-1}[t \hat{*} (\hat{M}'_i + Y_i)] + J^{-1}(t \hat{*} M_i^0) \\ &\quad - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \rho^{-1}(t \hat{*} R_{k,j}^0) \end{aligned} \quad (3.32)$$

علماً أن:  $M_i^0 = \mu_{ji,j}^0$ .

أيضاً في [5]، تم الوصول إلى النتائج التالية، المتعلقة بالمعادلات المنفصلة لحقول Ignaczak، الهوكية، والمتممة، في الجسم المدروس (E-N:6)، الخاضع لحرارة، ويشغل كامل  $R^3$ :

أولاً: المعادلات المنفصلة من أجل الإجهادات الهوكية  $\sigma_{ij}^0$ ، والحرارة الهوكية  $\theta^0$ ،

والمحققة في  $\Omega \times T^+$ :

$$\begin{aligned} D_2 \square_2^* \sigma_{ij}^0 &= -\mu D_2 (X_{i,j} + X_{j,i}) + \\ &\quad + 2\mu (D_1 X_{k,kij} - \frac{v_T}{\kappa} \square_2^* Q_{,ij}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} -\delta_{ij} \square_2^* [ (D_1 - \mu D) X_{k,k} + \frac{v_T}{\kappa} (\lambda \nabla^2 - \square_1) Q ] \\ D_2 \theta^0 &= -(\eta_0 \partial_t X_{i,i} + \frac{1}{\kappa} \square_1 Q) \end{aligned} \quad (3.34)$$

علماً أن:  $\square_1 = (\lambda + 2\mu)\nabla^2 - \rho\partial_t^2$  ، و  $D_2$  يمثل المؤثر المركزي، وهو يعطى بالصيغة:  $D_2 = D\square_1 - \eta_0\nu_T\partial_t\nabla^2$  ، أما المؤثر الاشتقاقي، التحريكي الحراري:  $D_1 = (\lambda + \mu)D - \eta_0\nu_T\partial_t$

ثانياً: المعادلات المنفصلة لأجل الإجهادات المتممة:  $\sigma'_{ji}$  و  $\mu'_{ji}$  ، والمحققة في  $:\Omega \times T^+$

$$\begin{aligned} \square_2^* \square_3 L \sigma'_{ji} = 2\alpha \{ \square_3 [ (\mu + \alpha) \epsilon_{i s n} \hat{Y}_{n, s j} + \\ + (\mu - \alpha) \epsilon_{j s n} \hat{Y}_{n, s i} ] + \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$+ \epsilon_{i j k} ( L_1 \hat{Y}_{s, s k} - \square_2 \square_3 \hat{Y}_k ) \}$$

$$\square_2^* \square_3 L \mu'_{ji} =$$

$$- \square_2 \square_3 [ (\gamma + \varepsilon) \hat{Y}_{i, j} + (\gamma - \varepsilon) \hat{Y}_{j, i} ] + \quad (3.36)$$

$$+ 2\gamma L_1 \hat{Y}_{s, s i j} - \beta \delta_{ij} L \hat{Y}_{s, s}$$

حيث:  $L = \square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2$  ،  $\square_3 = (\beta + 2\gamma)\nabla^2 - 4\alpha - J\partial_t^2$  و  $L_1 = (\beta + \gamma - \varepsilon)\square_2 - 4\alpha^2$  . وهنا ننوه إلى أن مرتبة المعادلة (3.35) أقل بـ 4 منها فيما لو كان الجسم محدوداً [7].

في [2]، من أجل الحالة الخاصة لـ (E-N:6)، غير المحدود، والخاضع لمؤثرات حرارية، ويملاً كامل  $R^3$ ، والذي إجهاداته وحرارته، الخارجية، جميعها معدومة، والمتمثلة بحالة انعدام مقطع القوة الحجمية، وعندما يكون كلاً من مقطع الإزاحة الهوكي، الابتدائي، وكذلك القيمة الابتدائية لمقطع سرعته، كمونياً، فقد تم اثبات أن:  $(\varphi^0, \mu^0, \kappa^0) = (\mathbf{0})$ ؛ أي أن سلوك Ignaczak الترموديناميكي الهوكي، هو سلوك ترموديناميكي هوكي، صرف، وينفس الوقت سلوك Ignaczak الدقيق المتمم، هو سلوك ديناميكي، دقيق صرف، ويأخذ كلاً من هذين السلوكين الصرفين الشكل التالي [2]:

- سلوك Ignaczak الهوكي الصرف:

• معادلات الحقل، الهوكية، الصرفية، المحققة في  $\Omega \times T^+$ :

$$\hat{c}_2^2(\hat{R}_{i,j}^0 + \hat{R}_{j,i}^0) - \ddot{\sigma}_{ij}^0 + (\lambda \ddot{e}^0 - \nu_T \ddot{\theta}^0) \delta_{ij} = 0 \quad (3.37)$$

$$D\theta^0 - \eta_0 \dot{e}^0 = -\frac{Q}{\kappa} \quad (3.38)$$

• الشروط الحدية، الهوكية، الصرفية:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \sigma_{ji}^0 = 0, \quad \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \theta^0 = 0 \quad (3.39)$$

حيث:  $\|\mathbf{x}\| := (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}$ ;  $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$  ،

• الشروط الابتدائية الهوكية، الصرفية، المحققة في  $\Omega \times \{0\}$ :

$$\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{0(0)}, \quad \theta^0 = l, \quad \dot{\sigma}_{ij}^0 = \dot{\sigma}_{ij}^{0(0)}, \quad (3.40)$$

$$\sigma_{ij}^{0(0)} = 2\mu \varepsilon_{ij}^{0(0)} + (\lambda e^{0(0)} - \nu_T l) \delta_{ij}, \quad (3.41)$$

$$\varepsilon_{ij}^{0(0)} = \frac{1}{2} (f_{i,j}^0 + f_{j,i}^0), \quad e^{0(0)} = f_{k,k}^0$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{0(0)} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}^{0(0)} + [(\lambda + \nu_T \kappa \eta_0) \dot{e}^{0(0)} - \nu_T (\kappa l_{,kk} + Q^{(0)})] \delta_{ij}, \quad (3.42)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{0(0)} = \frac{1}{2} (g_{i,j}^0 + g_{j,i}^0), \quad \dot{e}^{0(0)} = g_{k,k}^0$$

• العلاقات التأسيسية الهوكية، الصرفية، محلولةً بالنسبة للانفعالات الهوكية الصرفية

في  $\Omega \times T$ :

$$2\mu \varepsilon_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 - (\lambda e^0 - \nu_T \theta^0) \delta_{ij} \quad (3.43)$$

• العلاقات التي تعطي الإزاحات الهوكية، الصرفية المحققة في  $\Omega \times T$ :

$$u_i^0 = g_i^0 t + f_i^0 + \rho^{-1} (t * \hat{R}_i^0) \quad (3.44)$$

- سلوك Ignaczak الديناميكي، الدقيق الصرف:

• معادلات الحقل، الدقيقة، الصرفية والمحققة في  $\Omega \times T^+$ :

$$\rho^{-1} \hat{R}'_{i,j} - J^{-1} \varepsilon_{kji} M'_k - \left\{ \frac{1}{2\mu} \ddot{\sigma}'_{(ji)} + \frac{1}{2\alpha} \ddot{\sigma}'_{[ji]} \right\} = 0, \quad (3.45)$$

$$J^{-1} M'_{i,j} - \left\{ \frac{1}{2\gamma} \ddot{\mu}'_{(ji)} + \frac{1}{2\varepsilon} \ddot{\mu}'_{[ji]} - \frac{\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)} \ddot{\mu}'_{kk} \delta_{ij} \right\} = 0 \quad (3.46)$$

وهنا:  $M'_i = \hat{M}'_i + Y_i$

• الشروط الحدية، الدقيقة، الصرفة، بلغة الإجهادات، الدقيقة الصرفة:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \sigma'_{ji} = 0, \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \mu'_{ji} = 0 \quad (3.47)$$

• الشروط الابتدائية، الدقيقة، الصرفة والمحققة في  $\Omega \times \{0\}$ :

$$\begin{aligned} \sigma'_{ji} &= \sigma'_{ji(0)}, \quad \mu'_{ji} = \mu'_{ji(0)} \\ \dot{\sigma}'_{ji} &= \dot{\sigma}'_{ji(0)}, \quad \dot{\mu}'_{ji} = \dot{\mu}'_{ji(0)} \end{aligned} \quad (3.48)$$

حيث:

$$\begin{aligned} \sigma'_{ji(0)} &= 2\mu \varepsilon'_{ij(0)} + 2\alpha [\omega'_{ij(0)} - \epsilon_{kji} k'_k], \\ \mu'_{ji(0)} &= (\gamma + \varepsilon) k'_{i,j} + (\gamma - \varepsilon) k'_{j,i} + \beta k'_{k,k} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ij(0)} &= \frac{1}{2}(f'_{i,j} + f'_{j,i}), \quad \omega'_{ij(0)} = \frac{1}{2}(f'_{i,j} - f'_{j,i}), \\ f'_i &= f_i - f_i^0, \quad k'_k = k_k, \end{aligned} \quad (3.50)$$

حيث أن:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}'_{ji(0)} &= 2\mu \dot{\varepsilon}'_{ij(0)} + 2\alpha [\dot{\omega}'_{ij(0)} - \epsilon_{kji} \chi'_k], \\ \dot{\mu}'_{ji(0)} &= (\gamma + \varepsilon) \chi'_{i,j} + (\gamma - \varepsilon) \chi'_{j,i} + \beta \chi'_{k,k} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}'_{ij(0)} &= \frac{1}{2}(g'_{i,j} + g'_{j,i}), \quad \dot{\omega}'_{ij(0)} = \frac{1}{2}(g'_{i,j} - g'_{j,i}), \\ g'_i &= g_i - g_i^0, \quad \chi'_k = \chi_k, \end{aligned} \quad (3.52)$$

• العلاقات التأسيسية الدقيقة، الصرفة، محلولةً بالنسبة للانفعالات الدقيقة، الصرفة

والمحققة في  $\Omega \times T$ :

$$\begin{aligned} \gamma'_{ji} &= \frac{1}{2\mu} \sigma'_{(ji)} + \frac{1}{2\alpha} \sigma'_{[ji]}, \\ \kappa'_{ji} &= \frac{1}{2\gamma} \mu'_{(ji)} + \frac{1}{2\varepsilon} \mu'_{[ji]} - \frac{\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)} \mu'_{kk} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.53)$$



- العلاقات التي تعطي الإزاحات والدورانات، الدقيقة الصرفة، بلغة الإجهادات الدقيقة الصرفة والمحقة في  $\Omega \times T$ :

$$u'_i = g'_i t + f'_i + \rho^{-1}(t * \hat{R}'_i), \quad (3.54)$$

$$\phi'_i = \chi'_i t + k'_i + J^{-1}(t * \hat{M}'_i) \quad (3.55)$$

أيضاً في [2]، تم الوصول إلى النتائج التالية، المتعلقة بالمعادلات المنفصلة لحقول Ignaczak، الهوكية، الصرفة ولحقول Ignaczak، الدقيقة الصرفة، في الجسم المعبر (E-N:6)، الخاضع لمؤثرات حرارية، ولا يخضع لتأثير قوة حجمية، ويملاً  $R^3$ :  
المعادلات المنفصلة من أجل الإجهادات الهوكية الصرفة  $\sigma_{ij}^0$ ، والحرارة الهوكية الصرفة  $\theta^0$ ، والمحقة في  $\Omega \times T^+$ :

$$D_2 \sigma_{ij}^0 = -\frac{V_T}{\kappa} [2\mu Q_{,ij} + \delta_{ij} (\lambda \nabla^2 - \square_1) Q], \quad (3.56)$$

$$D_2 \theta^0 = -\frac{1}{\kappa} \square_1 Q \quad (3.57)$$

المعادلات المنفصلة من أجل الإجهادات الدقيقة، الصرفة  $\sigma'_{ji}$  و  $\mu'_{ji}$ ، والمحقة في  $\Omega \times T^+$

$$\square_3 L \sigma'_{ji} = 2\alpha \{ \square_3 [ (\mu + \alpha) \epsilon_{i s n} Y_{n, s j} + (\mu - \alpha) \epsilon_{j s n} Y_{n, s i} ] + \quad (3.58)$$

$$+ \epsilon_{i j k} (L_1 Y_{s, s k} - \square_2 \square_3 Y_k) \},$$

$$\square_3 L \mu'_{ji} = - \left\{ \square_2 \square_3 [ (\nu + \epsilon) Y_{i, j} + (\nu - \epsilon) Y_{j, i} ] \right. \quad (3.59)$$

$$\left. - 2\gamma L_1 Y_{s, s i j} + \beta \delta_{ij} L Y_{s, s} \right\}$$

وتم في [2] تمييز الحالتين التاليتين:

$$:(f'_i = 0, g'_i = 0, k'_i = 0, \chi'_i = 0) \text{ و } Y_i = 0, Q \neq 0$$

في هذه الحالة العملية الترموديناميكية، الدقيقة الصرفة، هي العملية الصفرية؛

$$(\mathbf{u}', \phi', \theta', \sigma', \mu', \gamma', \kappa') \equiv (\mathbf{0}) \quad (3.60)$$

ويؤول السلوك الترموديناميكي بالكامل إلى السلوك الهوكي الصرف:  $(\mathbf{u}^0, \theta^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0)$  ،  
 $(\boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\kappa}^0) \equiv (\mathbf{0})$  ، المحقق للمسألة الهوكية، الصرفة، الموافقة، والتي تُهمل فيها  
 البنية الجزئية للجسم المعتبر، أما المعادلات، الهوكية، الصرفة، المنفصلة ، فتبقى على  
 حالها، في الوقت الذي يجب فيه استبدال كل  $f_i \rightarrow f_i^0$  وكل  $g_i \rightarrow g_i^0$  في المسألة  
 الهوكية الصرفة.

الحالة الثانية:  $Q = 0, Y_i \neq 0$  و  $(f_i^0 = 0, g_i^0 = 0, l = 0)$ : في هذه الحالة،  
 العملية الترموديناميكية، الهوكية الصرفة، هي العملية الصفرية؛

$$(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \theta^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0) \equiv (\mathbf{0}) \quad (3.61)$$

ويؤول السلوك الترموديناميكي بالكامل إلى السلوك الدقيق الصرف:  
 $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \theta', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$  ، المحقق للمسألة الدقيقة، الصرفة، الموافقة، والتي  
 تُظهر البنية الدقيقة للجسم المعتبر، أما المعادلات، الدقيقة، الصرفة، المنفصلة، فتبقى  
 على حالها، في الوقت الذي يجب فيه استبدال  $f_i \rightarrow f_i'$  و  $g_i \rightarrow g_i'$  في المسألة الدقيقة  
 الصرفة.

تعتمد نتائج بحثنا أيضاً على تحويل Fourier التكاملي، الرباعي، المباشر  $\mathbf{F}_4$  ،  
 والعكسي  $\mathbf{F}_4^{-1}$  ([10,11])، ولهذا نعرض فيما يلي مايلزمنا من ذلك.

أ. تحويلا Fourier التكامليان، المضاعفان، من المرتبة الرابعة، المباشر والعكسي:  
 لنكن  $f(\mathbf{x}, t)$  (حيث:  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ) دالة حقيقية معرفة ومستمرة في  $R^4$  ،  
 ولنفرض، أنها قابلة للمكاملة، بالقيمة المطلقة على  $R^4$  . عندئذٍ تحويل Fourier  
 التكاملي، المضاعف من المرتبة الرابعة للتابع  $f(\mathbf{x}, t)$  ، والذي نرمز له بالرمز  
 $\mathbf{F}_4[f(\mathbf{x}, t)]$  (أو بالرمز  $(\bar{f})(\boldsymbol{\xi}, \tau)$  ، يكون موجوداً<sup>5</sup> ، وبحسب تعريفه، يعطى بـ:

<sup>4</sup> اعتبرنا أن الدالة الحقيقية  $f(\mathbf{x}, t)$  معرفة من أجل الجزء السالب للزمن، على نحوٍ تصبح فيه الدالة معرفة  
 ومستمرة في  $R^4$  .

<sup>5</sup> الشروط المذكورة أعلاه، التي تحققها الدالة  $f(\mathbf{x}, t)$  ، هي شروط كافية من أجل وجود كل من  
 $\mathbf{F}_4[f(\mathbf{x}, t)]$  و  $\mathbf{F}_4^{-1}[\bar{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau)]$  ([10,11]).

$$\mathbf{F}_4[f(\mathbf{x}, t)] = \bar{f}(\xi, \tau) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{x} \cdot \xi + \tau t)} d\mathbf{x} dt \quad (3.62)$$

علماً بأن:  $\mathbf{x} \cdot \xi = x_k \xi_k$  و  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  و  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$$i = \sqrt{-1} \text{ و } d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$$

كما تكون عندئذ الدالة  $\bar{f}(\xi, \tau)$ ، أيضاً معرفة ومستمرة في  $R^4$ ، وقابلة للمكاملة، بالقيمة المطلقة، على  $R^4$ ، بالتالي فإن تحويل Fourier، التكامل العكسي، من المرتبة الرابعة، لـ  $\bar{f}(\xi, \tau)$ ، والذي نرمز له بالرمز  $\mathbf{F}_4^{-1}[\bar{f}(\xi, \tau)]$  (أو بالرمز  $f(\mathbf{x}, t)$ )، يكون موجوداً، وهو بحسب التعريف يعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{F}_4^{-1}[\bar{f}(\xi, \tau)] = f(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\xi, \tau) e^{-i(\mathbf{x} \cdot \xi + \tau t)} d\xi d\tau \quad (3.63)$$

حيث:  $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ .

ب. مبرهنة الطي لـ Fourier :

لنفرض أن:  $F(\xi, \tau) = \mathbf{F}_4[f(\mathbf{x}, t)]$  و  $G(\xi, \tau) = \mathbf{F}_4[g(\mathbf{x}, t)]$

يمثلان تحويلي Fourier التكاملين المضاعفين من المرتبة الرابعة للدالتين الحقيقيتين  $f(\mathbf{x}, t)$  و  $g(\mathbf{x}, t)$ ، على الترتيب، عندئذ:

$$\mathbf{F}_4[(f * g)(\mathbf{x}, t)] = F(\xi, \tau) G(\xi, \tau) \quad \text{أولاً:}$$

$$\mathbf{F}_4^{-1}[F(\xi, \tau) G(\xi, \tau)] = (f * g)(\mathbf{x}, t) \quad \text{ثانياً:}$$

حيث الرمز  $(f * g)(\mathbf{x}, t)$  يدل على طي Fourier للتابعين  $f(\mathbf{x}, t)$  و  $g(\mathbf{x}, t)$  على  $R^4$ ، ويعطى بحسب تعريفه، بالعلاقة:

<sup>6</sup> ينتج ذلك عن أن:  $\mathbf{F}_4^{-1}$  هو التحويل العكسي لـ  $\mathbf{F}_4$ .

$$(f * g)(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) g(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds$$

حيث:  $d\mathbf{y} = dy_1 dy_2 dy_3$  و  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$

4. النتائج والمناقشة:

في البحث سنهتم بالحالة الثانية حيث سنفترض هنا أن كافة المقاطع التتسورية، الفيزيائية، الدقيقة، الصرفة في (E-N:6) الذي يشغل  $R^3$ ، من الناحية الرياضية، معرفة ومعدومة من أجل جميع القيم السالبة لـ  $t$ . كما سنفترض أن هذه المقاطع التتسورية المذكورة، والداخلية في المعادلات، الدقيقة، الصرفة، المستقلة (3.58) و (3.59)، تحقق تلك الشروط التي تسمح بتطبيق تحويل Fourier التكاملي، الرباعي، المباشر  $F_4$ ، وتلك الشروط التي تسمح لنا أيضاً بتطبيق خواص هذا التحويل. وإذا كانت هذا المقاطع التتسورية، المذكورة عبارة عن توزيعات [10]، فيبقى الكلام السابق صحيحاً؛ أي يمكن تطبيق تحويل Fourier التكاملي، الرباعي، المباشر  $F_4$  على المعادلات، الدقيقة، الصرفة، المستقلة (3.58) و (3.59)، ويمكن أيضاً تطبيق خواص هذا التحويل، حيث نحصل على النتائج التالية:

تحويلات Fourier للحقول الدقيقة الصرفة:

$$\bar{\sigma}'_{ji} = \frac{2\alpha(-i\xi_s)[(\mu+\alpha)\epsilon_{isn}(-i\xi_j) + (\mu-\alpha)\epsilon_{jns}(-i\xi_i)]\bar{Y}_n}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)\Delta_4(\xi;\tau)}$$

$$+ \frac{2\alpha\epsilon_{ijk}\left\{\left(\frac{V_0^2}{\tau_0^2}-1\right)[\xi^2-\sigma_2^2(\tau)]+\eta_0^2\right\}(-i\xi_k)(-i\xi_s)\bar{Y}_s}{(\beta+2\gamma)[\xi^2+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)]\Delta_4(\xi;\tau)}$$

$$+ \frac{2\alpha\epsilon_{ijk}[\xi^2-\sigma_2^2(\tau)]\bar{Y}_k}{(\gamma+\varepsilon)\Delta_4(\xi;\tau)}, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}'_{j i} = & \frac{[\xi^2 - \sigma_2^2(\tau)] [(\gamma + \varepsilon)(-i\xi_j)Y_i^- + (\gamma - \varepsilon)(-i\xi_i)Y_j^-]}{(\gamma + \varepsilon) \Delta_4(\xi; \tau)} \\ & + \frac{2\gamma \left\{ \left( \frac{v_0^2}{\tau_0^2} - 1 \right) [\xi^2 - \sigma_2^2(\tau)] + \eta_0^2 \right\} (-i\xi_i)(-i\xi_j)(-i\xi_s)Y_s^-}{(\beta + 2\gamma) [\xi^2 + \tau_0^2 - \sigma_3^2(\tau)] \Delta_4(\xi; \tau)} \quad (4.2) \\ & + \frac{\beta \delta_{i j} (-i\xi_s)Y_s^-}{(\beta + 2\gamma) [\xi^2 + \tau_0^2 - \sigma_3^2(\tau)]} \end{aligned}$$

حيث:  $\xi = (\xi_i, \xi_j, \xi_s)^{\frac{1}{2}}$ ، كما أن:

$$\begin{aligned} \Delta_4(\xi; \tau) = & \xi^4 - [\sigma_2^2(\tau) + \sigma_4^2(\tau) + \eta_0^2 - v_0^2] \xi^2 + \\ & + \sigma_2^2(\tau) [\sigma_4^2(\tau) - v_0^2] \\ c_2 = & \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}} \quad \text{و} \quad \sigma_4(\tau) = \frac{\tau}{c_4} \quad \text{و} \quad \sigma_3(\tau) = \frac{\tau}{c_3} \quad \text{و} \quad \sigma_2(\tau) = \frac{\tau}{c_2} \quad \text{و} \\ \tau_0^2 = & \frac{4\alpha}{\beta + 2\gamma} \quad \text{و} \quad c_4 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}} \quad \text{و} \quad c_3 = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{J}} \quad \text{و} \\ \cdot s = & \frac{2\alpha}{\mu + \alpha} \quad \text{و} \quad \eta_0^2 = p s \quad \text{و} \quad v_0^2 = 2p = \frac{4\alpha}{\gamma + \varepsilon} \quad \text{و} \end{aligned}$$

باستخدام تهجين طريقة التراكيب لمعادلات الحركة بالإجهادات والحرارة من نوع Ignaczak مع طريقة التكامل القائمة على تحويل Fourier التكاملي المضاعف من المرتبة الرابعة  $F_4$ ، سنوجد سلوك Green-Ignaczak الديناميكي الدقيق الصرف، الشاذ للجسم الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)، الخاضع لحرارة، ويشغل كامل  $R^3$ ، والذي إجهاداته الخارجية، وحقل درجاته، الخارجي، جميعها معدومة في اللانهاية، وذلك من أجل حالة العزم الحجمي:

$$Y_i = M_0 e^{-i\omega t} \delta(\mathbf{x} - \zeta) \delta_{i h} \quad (4.3)$$

حيث:  $\omega > 0$  ثابت معطى ويرمز للتردد، و  $\delta(\mathbf{x} - \zeta)$  هو توزيع Dirac على  $R^3$ ، [10]، والذي يعطى بحسب تعريفه بالعلاقة:  $\delta(\mathbf{x} - \zeta) := \delta(x_1 - \zeta_1) \delta(x_2 - \zeta_2) \delta(x_3 - \zeta_3)$ ، حيث  $\delta(x_i - \zeta_i)$  هو توزيع Dirac على  $R$  و  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  و  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$

كما أن:  $M_0$  هو ثابت موجب. ولنوجد الآن العملية الديناميكية الشاذة، الدقيقة، الصرفة، الموافقة للقوة الحجمية (4.3).

4. أ: سلوك *Green-Ignaczak* الديناميكي الدقيق، الصرفة، الشاذ، الموافق

للغزم الحجمي (4.3):

بتعويض (4.3) في (4.1) - (4.2)، وبالأخذ بعين الاعتبار أن [10, 11]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}) d\mathbf{x} = e^{i \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\xi}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\tau - \omega)t} dt = 2\pi \delta(\tau - \omega) \quad (4.4)$$

نحصل على:

تحويل *Fourier* لإجهادات القوة، الدقيقة، الصرفة:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}'_{ji(h)} = \frac{M_0}{2\pi} & \left[ \frac{2\alpha(-i\zeta_s)[(\mu+\alpha)\epsilon_{ish}(-i\zeta_j) + (\mu-\alpha)\epsilon_{jsh}(-i\zeta_i)]}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)\Delta_4(\zeta;\tau)} \right. \\ & + \frac{2\alpha\epsilon_{ijk} \left\{ \left(\frac{V_0^2}{\tau_0^2} - 1\right) [\zeta^2 - \sigma_2^2(\tau)] + \eta_0^2 \right\} (-i\zeta_k)(-i\zeta_h)}{(\beta+2\gamma)[\zeta^2 + \tau_0^2 - \sigma_3^2(\tau)]\Delta_4(\zeta;\tau)} \\ & \left. + \frac{2\alpha\epsilon_{ijh}[\zeta^2 - \sigma_2^2(\tau)]}{(\gamma+\varepsilon)\Delta_4(\zeta;\tau)} \right] \delta(\tau - \omega) e^{i\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\xi}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}'_{ji(h)} = \frac{M_0}{2\pi} & \left[ \frac{[\zeta^2 - \sigma_2^2(\tau)][(\gamma+\varepsilon)(-i\zeta_j)\delta_{ih} + (\gamma-\varepsilon)(-i\zeta_i)\delta_{jh}]}{(\gamma+\varepsilon)\Delta_4(\zeta;\tau)} \right. \\ & + \frac{2\gamma \left\{ \left(\frac{V_0^2}{\tau_0^2} - 1\right) [\zeta^2 - \sigma_2^2(\tau)] + \eta_0^2 \right\} (-i\zeta_i)(-i\zeta_j)(-i\zeta_h)}{(\beta+2\gamma)[\zeta^2 + \tau_0^2 - \sigma_3^2(\tau)]\Delta_4(\zeta;\tau)} \\ & \left. + \frac{\beta\delta_{ij}(-i\zeta_h)}{(\beta+2\gamma)[\zeta^2 + \tau_0^2 - \sigma_3^2(\tau)]} \right] \delta(\tau - \omega) e^{i\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\xi}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

وبما أن:

$$\frac{1}{\Delta_4(\xi; \tau)} = \frac{1}{\lambda_1^2(\tau) - \lambda_2^2(\tau)} \left[ \frac{1}{\xi^2 - \lambda_1^2(\tau)} - \frac{1}{\xi^2 - \lambda_2^2(\tau)} \right], \quad (4.7)$$

$$\frac{\xi^2 - \sigma_2^2(\tau)}{\Delta_4(\xi; \tau)} = \frac{A_2(\tau)}{\xi^2 - \lambda_1^2(\tau)} + \frac{A_1(\tau)}{\xi^2 - \lambda_2^2(\tau)}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\left(\frac{\nu_0^2}{\tau_0^2} - 1\right) [\xi^2 - \sigma_2^2(\tau)] + \eta_0^2}{[\xi^2 + \tau_0^2 - \sigma_3^2(\tau)] \Delta_4(\xi; \tau)} = \frac{\beta + 2\gamma}{\gamma + \varepsilon} \left[ \frac{C_1(\tau)}{\xi^2 - \lambda_1^2(\tau)} + \frac{C_2(\tau)}{\xi^2 - \lambda_2^2(\tau)} + \frac{C_3(\tau)}{\xi^2 - \lambda_3^2(\tau)} \right] \quad (4.9)$$

حيث:  $\lambda_1^2(\tau)$  و  $\lambda_2^2(\tau)$  هي جذور كثير الحدود:

$$\Delta_4(\lambda; \tau) = \lambda^4 - [\sigma_2^2(\tau) + \sigma_4^2(\tau) + \eta_0^2 - \nu_0^2] \lambda^2 + \sigma_2^2(\tau) [\sigma_4^2(\tau) - \nu_0^2]$$

$$\text{و: } \lambda_3^2(\tau) = \sigma_3^2(\tau) - \tau_0^2$$

$$A_1(\tau) = \frac{\sigma_2^2(\tau) - \lambda_2^2(\tau)}{\lambda_1^2(\tau) - \lambda_2^2(\tau)}, \quad A_2(\tau) = \frac{\sigma_2^2(\tau) - \lambda_1^2(\tau)}{\lambda_2^2(\tau) - \lambda_1^2(\tau)} \quad \text{كما أن:}$$

$$C_1(\tau) = \frac{A_2(\tau)}{\lambda_1^2(\tau)}, \quad C_2(\tau) = \frac{A_1(\tau)}{\lambda_2^2(\tau)}, \quad C_3(\tau) = -\frac{\sigma_2^2(\tau)}{\lambda_1^2(\tau) \lambda_2^2(\tau)}$$

فبتعويض العلاقات (4.7)-(4.9) في التحويلات (4.5)-(4.6)، ومن ثم بتطبيق تحويل Fourier التكامل، الرباعي العكسي  $F_4^{-1}$ ، على العلاقات الناتجة، وباستخدام خاصية تصفية توزيع Dirac، التي تتمثل بالعلاقة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (4.10)$$

والعلاقات [10, 11]:

$$F_4^{-1}[(-i \xi_j) \bar{f}(\xi, \tau)] = \partial_j f(\mathbf{x}, t) \quad (4.10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(\mathbf{x} - \xi) \cdot \xi}}{\xi^2 - a^2} d\xi = 2\pi^2 \frac{e^{i a R}}{R} \quad (4.11)$$

مع العلم أن:  $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$  ، و  $R := |\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}|$  ، وحيث  $a$  عدد حقيقي أو عقدي، نحصل

بالنتيجة على:

- الإجهادات الدقيقة، الصرفة، الشاذة، التالية:

$$\sigma'_{ji}{}^{(h)} = \frac{M_0 p e^{-i\omega t}}{4\pi} \left\{ \epsilon_{ijk} \partial_{kh}^2 \mathcal{F}_1 + \epsilon_{ijh} \Gamma_1 + \frac{1}{(\mu + \alpha)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} [(\mu + \alpha)\epsilon_{ish} \partial_j + (\mu - \alpha)\epsilon_{jsh} \partial_i] \partial_s F_1 \right\}, \quad (4.12)$$

$$\mu'_{ji}{}^{(h)} = \frac{M_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \left\{ \partial_h \left[ \frac{2\gamma}{\gamma + \epsilon} \partial_{ij}^2 \mathcal{F}_1 + \frac{\beta \delta_{ij} e^{i\lambda_3 R}}{\beta + 2\gamma} R \right] + \frac{1}{\gamma + \epsilon} [(\gamma + \epsilon)\delta_{ih} \partial_j + (\gamma - \epsilon)\delta_{jh} \partial_i] \Gamma_1 \right\}, \quad (4.13)$$

$$\mathcal{F}_1 = C_1 \frac{e^{i\lambda_1 R}}{R} + C_2 \frac{e^{i\lambda_2 R}}{R} + C_3 \frac{e^{i\lambda_3 R}}{R}, \quad \text{حيث:}$$

$$\Gamma_1 = A_2 \frac{e^{i\lambda_1 R}}{R} + A_1 \frac{e^{i\lambda_2 R}}{R}, \quad F_1 = \frac{e^{i\lambda_1 R} - e^{i\lambda_2 R}}{R},$$

كما أن:  $\sigma_2 = \sigma_2(\omega)$  و  $\sigma_3 = \sigma_3(\omega)$  و  $\sigma_4 = \sigma_4(\omega)$  و  $\lambda_1 = \lambda_1(\omega)$  و  $\lambda_2 = \lambda_2(\omega)$  و  $\lambda_3 = \lambda_3(\omega)$  و  $A_1 = A_1(\omega)$  و  $A_2 = A_2(\omega)$  و  $C_1 = C_1(\omega)$  و  $C_2 = C_2(\omega)$  و  $C_3 = C_3(\omega)$ .

أما انفعالات القوة، المتممة، الشاذة، الصرفة  $\gamma'_{ji}{}^{(h)}$ ، وانفعالات العزم، المتممة، الشاذة، الصرفة  $\kappa'_{ji}{}^{(h)}$ ، فنحصل عليها، بحسب طريقة التراكيب في وصف Ignaczak، بتعويض (4.12) و (4.13)، في العلاقات (3.53)، وفقاً لمايلي. من (4.12) و (4.13)، لدينا:

$$\sigma'_{(ji)}{}^{(h)} = \frac{\mu M_0 p e^{-i\omega t}}{4\pi(\mu + \alpha)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (\epsilon_{ish} \partial_j + \epsilon_{jsh} \partial_i) \partial_s F_1, \quad (4.14)$$



$$\sigma'_{[ji]}^{(h)} = \frac{M_0 p e^{-i\omega t}}{4\pi} \left\{ \epsilon_{ijk} \partial_{kh}^2 \mathcal{F}_1 + \epsilon_{ijh} \Gamma_1 + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{(\mu + \alpha)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (\epsilon_{ish} \partial_j - \epsilon_{jsh} \partial_i) \partial_s F_1 \right\}, \quad (4.15)$$

$$\mu'_{(ji)}^{(h)} = \frac{M_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \left\{ \partial_h \left[ \frac{2\gamma}{\gamma + \varepsilon} \partial_{ij}^2 \mathcal{F}_1 + \frac{\beta \delta_{ij}}{\beta + 2\gamma} \frac{e^{i\lambda_3 R}}{R} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{\gamma + \varepsilon} (\delta_{ih} \partial_j + \delta_{jh} \partial_i) \Gamma_1 \right\}, \quad (4.16)$$

$$\mu'_{[ji]}^{(h)} = \frac{M_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \frac{\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} (\delta_{ih} \partial_j - \delta_{jh} \partial_i) \Gamma_1, \quad (4.17)$$

$$\mu'_{kk}^{(h)} = \frac{M_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \partial_h \left[ \frac{2\gamma}{\gamma + \varepsilon} (\nabla^2 \mathcal{F}_1 + \Gamma_1) + \frac{3\beta}{\beta + 2\gamma} \frac{e^{i\lambda_3 R}}{R} \right] \quad (4.18)$$

وبما أن [9, 10]:

$$\nabla^2 \left( \frac{e^{i a R}}{R} \right) = \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) - a^2 \frac{e^{i a R}}{R} \quad (4.19)$$

$$A_1 + A_2 = 1, \quad C_1 + C_2 + C_3 = 0, \quad (4.20)$$

$$-\frac{2\gamma}{\gamma + \varepsilon} \lambda_3^2 C_3 + \frac{3\beta}{\beta + 2\gamma} = \frac{3\beta + 2\gamma}{\beta + 2\gamma} \quad (4.21)$$

فينتج عن ذلك وعن العلاقة (4.18) أن:

$$\mu'_{kk}^{(h)} = \frac{M_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \frac{(3\beta + 2\gamma)}{(\beta + 2\gamma)} \partial_h \left( \frac{e^{i\lambda_3 R}}{R} \right) \quad (4.22)$$

الآن، بتعويض (4.14) و (4.15) في العلاقة الأولى من (3.53) و (4.16) و (4.17) و (4.22) في العلاقة الثانية من (3.53)، نحصل على انفعالات القوة، المتممة، الشاذة، الصرفة  $\gamma'_{ji}^{(h)}$ ، وانفعالات العزم، المتممة، الشاذة، الصرفة  $\kappa'_{ji}^{(h)}$ ، التالية:

$$\gamma'_{ji}{}^{(h)} = \frac{M_0 e^{-i\omega t}}{4\pi Jc_4^2} \left( \epsilon_{ijk} \partial_{kh}^2 \mathcal{F}_1 + \epsilon_{ijh} \Gamma_1 + \right. \\ \left. + \frac{s}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \epsilon_{ish} \partial_{js}^2 F_1 \right), \quad (4.23)$$

$$K'_{ji}{}^{(h)} = \frac{M_0 e^{-i\omega t}}{4\pi Jc_4^2} \partial_j \left( \partial_{ih}^2 \mathcal{F}_1 + \delta_{ih} \Gamma_1 \right), \quad (4.24)$$

أخيراً، الإزاحات والدورانات، المتممة، الشاذة، الصرفة، الموافقة، تنتج بحسب طريقة التراكيب في وصف Ignaczak، عن تحليل الشروط الابتدائية (3.29)-(3.25)، بمساعدة الطول، المتممة الصرفة، الشاذة (4.12) و (4.13)، وعن العلاقات (3.31) و (3.32)، بمساعدة العلاقات (4.12) و (4.13)، باتباع مايلي. بتحليل الشروط الابتدائية (3.26)<sub>1</sub> و (3.28)<sub>1</sub>، بمساعدة الحل، المتمم، الصرف، الشاذ (4.12) ومشتقه الزمني (من أجل لحظة البدء  $t=0$ )، نصل إلى أن:

$$g'_j{}^{(h)} = -i\omega f'_j{}^{(h)} \quad (4.25)$$

حيث:

$$f'_j{}^{(h)} = \frac{M_0 p}{4\pi(\mu + \alpha)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \epsilon_{jsh} \partial_s F_1 \quad (4.26)$$

أما بتحليل الشروط الابتدائية (3.26)<sub>2</sub> و (3.28)<sub>2</sub>، بمساعدة الحل، المتمم، الصرف، الشاذ (4.13) ومشتقه الزمني (من أجل لحظة البدء  $t=0$ )، نصل إلى أن:

$$\chi'_j{}^{(h)} = -i\omega k'_j{}^{(h)} \quad (4.27)$$

حيث:

$$k'_j{}^{(h)} = \frac{M_0}{4\pi Jc_4^2} \left( \partial_{jh}^2 \mathcal{F}_1 + \delta_{jh} \Gamma_1 \right), \quad (4.28)$$

الآن، ينتج عن العلاقة (4.12)، أن:

$$\hat{R}'_i{}^{(h)} = \sigma'_{ji}{}^{(h)} = \frac{M_0 p e^{-i\omega t}}{4\pi} \epsilon_{ijh} \partial_j \left( \Gamma_1 + \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \nabla^2 F_1 \right) \quad (4.29)$$

وبما أن:

$$\Gamma_1 + \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \nabla^2 F_1 = -\frac{\sigma_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} F_1 \quad (4.30)$$

فتأخذ العلاقة (4.29) الشكل التالي:

$$\hat{R}'_i{}^{(h)} = -\frac{M_0 p \sigma_2^2 e^{-i \omega t}}{4 \pi (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \epsilon_{i j h} \partial_j F_1 \quad (4.31)$$

كما ينتج عن (4.12) و(4.13)، وعن العلاقات (4.19) و(4.20)، والعلاقات:

$$-\frac{2\gamma}{\gamma + \varepsilon} \lambda_3^2 C_3 + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} = 1 \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}), \quad (4.33)$$

$$\epsilon_{i j k} \epsilon_{i s n} = \delta_{j s} \delta_{k n} - \delta_{j n} \delta_{k s}, \quad \epsilon_{i j k} \epsilon_{i j n} = 2\delta_{k n}, \quad (4.34)$$

أن:

$$\begin{aligned} J^{-1} M_i'^{(h)} &= J^{-1} [\hat{M}_i'^{(h)} + Y_i^{(h)}] = \\ &= J^{-1} [\epsilon_{i j k} \sigma_{j k}'^{(h)} + \mu_{j i, j}'^{(h)} + Y_i^{(h)}] = \\ &= \frac{M_0 e^{-i \omega t}}{4 \pi J} \left\{ \partial_{i h}^2 \left[ -\Gamma_1 - 2p \mathcal{F}_1 + \frac{p s}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} F_1 + \frac{e^{i \lambda_3 R}}{R} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{i h} \left[ \nabla^2 \Gamma_1 - \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) - 2p \Gamma_1 - \frac{p s}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \nabla^2 F_1 \right] \right\}, \quad (4.35) \end{aligned}$$

هذا من جهة. ومن جهة أخرى باستخدام العلاقات (4.19) و(4.20)<sub>1</sub>، يمكن بسهولة

اثبات أن:

$$-\Gamma_1 + \frac{p s}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} F_1 + \frac{e^{i \lambda_3 R}}{R} = -(\sigma_4^2 - 2p) \mathcal{F}_1, \quad (4.36)$$

$$\nabla^2 \Gamma_1 - \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{p s}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \nabla^2 F_1 = -(\sigma_4^2 - 2p) \Gamma_1 \quad (4.37)$$

الآن، بتعويض (4.36) و(4.37) في (4.35)، نحصل على العلاقة التالية:

$$J^{-1}M_i^{(h)} = -\frac{M_0\sigma_4^2 e^{-i\omega t}}{4\pi J} \left( \partial_{ih}^2 \mathcal{F}_1 + \delta_{ih} \Gamma_1 \right), \quad (4.38)$$

أخيراً، بتعويض (4.25) و(4.26) و (4.31) في العلاقة (3.54)، من ثم بالاستفادة من علاقة الطي:

$$t \widehat{*} e^{-i\omega t} = \omega^{-2}(1 - i\omega t - e^{-i\omega t}) \quad (4.39)$$

نحصل بعد الاختصار على الإزاحات المتممة، الصرفة، الشاذة، الموافقة، التالية:

$$\begin{aligned} u_i^{(h)} &= g_i^{(h)} t + f_i^{(h)} + \rho^{-1}[t \widehat{*} \hat{R}_i^{(h)}] = \\ &= \frac{M_0 p e^{-i\omega t}}{4\pi(\mu + \alpha)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \epsilon_{ish} \partial_s F_1, \end{aligned} \quad (4.40)$$

أيضاً، بتعويض (4.27) و(4.28) و(4.38) في العلاقة (3.55)، من ثم بالاستفادة من علاقة الطي (4.39)، نحصل بعد الاختصار على الدورانات المتممة، الصرفة، الشاذة، الموافقة:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(h)} &= \chi_i^{(h)} t + k_i^{(h)} + J^{-1}[t \widehat{*} M_i^{(h)}] = \\ &= \frac{M_0 e^{-i\omega t}}{4\pi J c_4^2} \left( \partial_{ih}^2 \mathcal{F}_1 + \delta_{ih} \Gamma_1 \right), \end{aligned} \quad (4.41)$$

تمثل:  $[\mathbf{u}^{(h)}, \boldsymbol{\varphi}^{(h)}, \boldsymbol{\sigma}^{(h)}, \boldsymbol{\mu}^{(h)}, \boldsymbol{\gamma}^{(h)}, \boldsymbol{\kappa}^{(h)}]$  ، المعطاة بالعلاقات: (4.40) و(4.41) و(4.12) و(4.13) و(4.23) و(4.24) ، تمثل عملية Green-Ignaczak ، الديناميكية، الدقيقة الصرفة، الشاذة، الموافقة للعزم الحجمي المركز في النقطة  $\zeta$  ، المتغير توافقياً مع الزمن، والمعطى بالعلاقة: (4.3).

4. ب: صيغ Green-Ignaczak ، الدقيقة، الصرفة، الموافقة لعزم حجمي نظامي

متغير توافقياً مع الزمن:

فيمايلي سنناقش صيغ Green-Ignaczak ، الدقيقة الصرفة، الموافقة للعزم الحجمي النظامي، التالي، المتغير توافقياً مع الزمن بتردد  $\omega > 0$  :

$$Y_i(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega t} Y_i(\mathbf{x}) \quad (4.42)$$

ولهذا الغرض، في الفقرة السابقة، سنختار:  $M_0 = 1$  ، ومن ثم سنرمز بـ  $(\xi, \tau; \zeta)$   $\bar{\sigma}'_{ji}{}^{(h)}$

وبـ  $(\xi, \tau; \zeta)$   $\sigma'_{ji}{}^{(h)}$  للطرف الأيسر للعلاقة (4.5) والعلاقة (4.12)، على الترتيب، وبـ

$(\xi, \tau; \zeta)$   $\bar{\mu}'_{ji}{}^{(h)}$  وبـ  $(\xi, \tau; \zeta)$   $\mu'_{ji}{}^{(h)}$  للطرف الأيسر للعلاقة (4.6) والعلاقة (4.13)،

على الترتيب. بتطبيق تحويل Fourier الرباعي  $F_4$  على طرفي العلاقة (4.42)، من ثم بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة الثانية في (4.4)، نجد:

$$Y_i^-(\xi, \tau) = (2\pi)^2 Y_i^-(\xi) \delta(\tau - \omega) \quad (4.43)$$

حيث هنا:

$$Y_i^-(\xi) = F_3[Y_i(x)] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{x} \cdot \xi} Y_i(x) d\mathbf{x} \quad (4.43)$$

والتي حسب خاصة تصفية Delta Dirac تكتب بالشكل:

$$Y_i^-(\xi) = F_3[Y_i(x)] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mathbf{x} \cdot \xi} Y_i(x) d\mathbf{x} \quad (4.43)$$

$$Y_i^-(\xi) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} F_4[Y_i(x) \delta(t)] = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \overline{[Y_i(x) \delta(t)]} \quad (4.44)$$

بالتعويض في التحويلين (4.1) و (4.2)، نجد:

تحويل Fourier لإجهادات القوة، الدقيقة، الصرفة:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}'_{ji} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} & \left[ \frac{2\alpha(-i\xi_s)[(\mu+\alpha)\epsilon_{isn}(-i\xi_j) + (\mu-\alpha)\epsilon_{jns}(-i\xi_i)] Y_n^-(\xi)}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon) \Delta_4(\xi; \tau)} \right. \\ & + \frac{2\alpha \epsilon_{ijk} \left\{ \left(\frac{v_0^2}{\tau_0^2} - 1\right) [\xi^2 - \sigma_2^2(\tau)] + \eta_0^2 \right\} (-i\xi_k) (-i\xi_s) Y_s^-(\xi)}{(\beta+2\gamma) [\xi^2 + \tau_0^2 - \sigma_3^2(\tau)] \Delta_4(\xi; \tau)} \\ & \left. + \frac{2\alpha \epsilon_{ijk} [\xi^2 - \sigma_2^2(\tau)] Y_k^-(\xi)}{(\gamma+\varepsilon) \Delta_4(\xi; \tau)} \right] \delta(\tau - \omega), \quad (4.45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}'_{ji} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} & \left\{ \frac{[\zeta^2 - \sigma_2^2(\tau)][(\gamma + \varepsilon)(-i\zeta_j)\bar{Y}_i(\xi) + (\gamma - \varepsilon)(-i\zeta_i)\bar{Y}_j(\xi)]}{(\gamma + \varepsilon)\Delta_4(\zeta; \tau)} \right. \\ & + \frac{2\gamma \left\{ \left(\frac{\nu_0^2}{\tau_0^2} - 1\right)[\zeta^2 - \sigma_2^2(\tau)] + \eta_0^2 \right\} (-i\zeta_i)(-i\zeta_j)(-i\zeta_s)\bar{Y}_s(\xi)}{(\beta + 2\gamma)[\zeta^2 + \tau_0^2 - \sigma_3^2(\tau)]\Delta_4(\zeta; \tau)} \\ & \left. + \frac{\beta \delta_{ij}(-i\zeta_s)\bar{Y}_s(\xi)}{(\beta + 2\gamma)[\zeta^2 + \tau_0^2 - \sigma_3^2(\tau)]} \right\} \delta(\tau - \omega) \end{aligned} \quad (4.46)$$

واللتان تكتبان بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}'_{ji} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} & \left[ \frac{2\alpha(-i\zeta_s)[(\mu + \alpha)\epsilon_{ish}(-i\zeta_j) + (\mu - \alpha)\epsilon_{jsh}(-i\zeta_i)]}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)\Delta_4(\zeta; \tau)} \right. \\ & + \frac{2\alpha \epsilon_{ijk} \left\{ \left(\frac{\nu_0^2}{\tau_0^2} - 1\right)[\zeta^2 - \sigma_2^2(\tau)] + \eta_0^2 \right\} (-i\zeta_k)(-i\zeta_h)}{(\beta + 2\gamma)[\zeta^2 + \tau_0^2 - \sigma_3^2(\tau)]\Delta_4(\zeta; \tau)} \\ & \left. + \frac{2\alpha \epsilon_{ijh}[\zeta^2 - \sigma_2^2(\tau)]}{(\gamma + \varepsilon)\Delta_4(\zeta; \tau)} \bar{Y}_h(\xi) \delta(\tau - \omega) \right], \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}'_{ji} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} & \left\{ \frac{[\zeta^2 - \sigma_2^2(\tau)][(\gamma + \varepsilon)(-i\zeta_j)\delta_{ih} + (\gamma - \varepsilon)(-i\zeta_i)\delta_{jh}]}{(\gamma + \varepsilon)\Delta_4(\zeta; \tau)} \right. \\ & + \frac{2\gamma \left\{ \left(\frac{\nu_0^2}{\tau_0^2} - 1\right)[\zeta^2 - \sigma_2^2(\tau)] + \eta_0^2 \right\} (-i\zeta_i)(-i\zeta_j)(-i\zeta_h)}{(\beta + 2\gamma)[\zeta^2 + \tau_0^2 - \sigma_3^2(\tau)]\Delta_4(\zeta; \tau)} \\ & \left. + \frac{\beta \delta_{ij}(-i\zeta_h)}{(\beta + 2\gamma)[\zeta^2 + \tau_0^2 - \sigma_3^2(\tau)]} \right\} \bar{Y}_h(\xi) \delta(\tau - \omega) \end{aligned} \quad (4.48)$$

نلاحظ الآن، أنه ينتج عن العلاقات (4.43) و (4.44)، أن (4.47) و (4.48) تكتبان بالشكل:

$$\bar{\sigma}'_{ji}(\xi, \tau) = (2\pi)^2 \bar{\sigma}'_{ji}{}^{(h)}(\xi, \tau; \zeta = 0) \overline{[Y_h(\mathbf{x})\delta(t)]}, \quad (4.49)$$

$$\bar{\mu}'_{ji}(\xi, \tau) = (2\pi)^2 \bar{\mu}'_{ji}{}^{(h)}(\xi, \tau; \zeta = 0) \overline{[Y_h(\mathbf{x})\delta(t)]}, \quad (4.50)$$

حيث هنا:  $M_0 = 1$ .

بتطبيق مبرهنة الطي لـ Fourier على طرفي كلٍ من (4.49) و (4.50)، نحصل على:

$$\sigma'_{ji}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^2 \mathbf{F}_4^{-1} \{ \bar{\sigma}'_{ji}{}^{(h)}(\xi, \tau; \zeta = 0) \overline{[Y_h(\mathbf{x})\delta(t)]} \} = \quad (4.51)$$

$$= (2\pi)^2 \{ \sigma'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}, t; \zeta = 0) * [Y_h(\mathbf{x})\delta(t)] \},$$

$$\bar{\mu}'_{ji}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^2 \mathbf{F}_4^{-1} \{ \bar{\mu}'_{ji}{}^{(h)}(\xi, \tau; \zeta = 0) \overline{[Y_h(\mathbf{x})\delta(t)]} \} = \quad (4.52)$$

$$= (2\pi)^2 \{ \mu'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}, t; \zeta = 0) * [Y_h(\mathbf{x})\delta(t)] \},$$

حيث:

$$\sigma'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}, t; \zeta = 0) * [Y_h(\mathbf{x})\delta(t)] = \quad (4.53)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s; \zeta = 0) Y_h(\mathbf{y}) \delta(s) dy ds,$$

$$\mu'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}, t; \zeta = 0) * [Y_h(\mathbf{x})\delta(t)] = \quad (4.54)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s; \zeta = 0) Y_h(\mathbf{y}) \delta(s) dy ds,$$

وبتطبيق خاصة التصفية (4.10)، تأخذ العلاقتان (4.53) و (4.54) الشكل التالي:

$$\sigma'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}, t; \zeta = 0) * [Y_h(\mathbf{x})\delta(t)] = \quad (4.55)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t; \zeta = 0) Y_h(\mathbf{y}) dy,$$

$$\mu'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}, t; \zeta = 0) * [Y_h(\mathbf{x})\delta(t)] = \quad (4.56)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t; \zeta = 0) Y_h(\mathbf{y}) dy,$$

وبذلك تصبح صيغ Green-Ignaczak، الدقيقة الصرفة، لأجل الإجهادات الدقيقة الصرفة،

والموافقة للعزم الحجمي (4.42)، بالشكل التالي:

$$\sigma'_{ji}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}-\zeta, t; 0) Y_h(\zeta) d\zeta, \quad (4.57)$$

$$\mu'_{ji}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}, t; \mathbf{0}) Y_h(\boldsymbol{\zeta}) d\boldsymbol{\zeta}, \quad (4.58)$$

لكن بحسب خواص توابع Green:  $\sigma'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\zeta})$  و  $\mu'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\zeta})$ ، فإن:

$$\sigma'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}, t; \mathbf{0}) = \sigma'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\zeta}), \quad \mu'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}, t; \mathbf{0}) = \mu'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\zeta}) \quad (4.59)$$

وتصبح بذلك صيغ Green-Ignaczak، الدقيقة الصرفة، لأجل الإجهادات الدقيقة الصرفة، والمتوافقة مع العزم الحجمي (4.42)، بالشكل:

$$\sigma'_{ji}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\zeta}) Y_h(\boldsymbol{\zeta}) d\boldsymbol{\zeta}, \quad (4.60)$$

$$\mu'_{ji}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu'_{ji}{}^{(h)}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\zeta}) Y_h(\boldsymbol{\zeta}) d\boldsymbol{\zeta}, \quad (4.61)$$



## 5. الاستنتاجات والمقترحات:

### أولاً) الاستنتاجات:

من أجل الجسم الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)، غير المحدود، والذي كلاً من إجهاداته وحرارته، الخارجية، معدومة، أوجدنا: (I) سلوك Green-Ignaczak، الدقيق الصرف، الشاذ، الموافق للعزم الحجمي المركز والمتغير توافقياً مع الزمن: (4.3)، (II) صيغ Green-Ignaczak، الدقيقة الصرفة، لأجل الإجهادات الدقيقة الصرفة، والمتوافقة مع العزم الحجمي النظامي (4.42).

### ثانياً) المقترحات:

يمكن أن نختم هذا البحث باقتراح أربع مسائل للمناقشة، هي التالية:  
 المسألة الأولى: استنتاج الجزء المتبقي من صيغ Green-Ignaczak التي تعطي باقي حقول Ignaczak، الدقيقة الصرفة:  $(u', \phi', \gamma', \kappa')$ ، والمتوافقة مع العزم الحجمي (4.42).  
 المسألة الثانية: استنتاج صيغ Green التي تعطي العمليتان الترموديناميكيتان، النظاميتان، الهوكية والدقيقة، المتممة، لأجل أي حالة من أحد الشكلين الآتيين:

$$X_i = e^{-i\omega t} X_i(\mathbf{x}), \quad Y_i = 0, \quad Q = 0 \quad (5.1)$$

$$X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad Q = e^{-i\omega t} Q(\mathbf{x}) \quad (5.2)$$

حيث:  $(X_1, X_2, X_3)$  متجه القوة الحجمية المؤثرة في الجسم، و  $\omega > 0$  ثابت، و  $Q$  المصادر الحرارية في الجسم المعتبر.

المسألة الثالثة: دراسة وجود الحل المعمم لمسألتني Ignaczak الهوكية والدقيقة، المتممة للجسم الصلب دقيق الاستقطاب، والمحدود.

المسألة الرابعة: دراسة وحدانية الحل لكل من مسألتني Ignaczak الهوكية والدقيقة، المتممة للجسم الصلب دقيق الاستقطاب، والمحدود.

## المراجع

- [1] – Nabil Ali, **2021** – Role of pure Hooke differential equations in finding pure Hooke singular solutions, related to the concentrated heat sources in unbounded micropolar elastic solid , Journal of Al-Baath University, Vol.43, Nr.11, p. 31–50.
- [2] – Nabil Ali and Mountajab Al-Hasan, **2019** – The behavior of unbounded solid with microstructure using the pure Hooke and micropolar differential equations in the cases of body moments and heat sources , Journal of Al-Baath University, Vol.41, Nr.19, p. 73–94.
- [3] – Al-Hasan , M. & Ali , N. , **2019** – Singular behavior superposition for unbounded elastic body with microstructure governed by differential equations of stresses and temperature unknowns , Journal of Al-Baath University, Vol.41, Nr.10, p. 119–138.
- [4] – Al-Hasan , M., Dyszlewicz , J. (**2014**) Coupled Dynamic Micropolar Problems of Thermoelasticity: Stress–Temperature Equations of Motion of Ignaczak Type. In: Hetnarski R.B. (eds) Encyclopedia of Thermal Stresses. Springer, Dordrecht.
- [5] – Al -Hasan , M. , **2016** – Studying the behavior of unbounded micropolar elastic body without external stresses, Journal of Al-Baath University, Vol.38, Nr.1, p.35–64.

- [6] – Mohammad , K & Al –Hasan , M, **2013** – Studying the isotherm of the complementary Ignaczak solutions for the (E–N:6) micropolar body occupying  $\mathbb{R}^3$ , Journal of Al–Baath University, Vol.35, Nr.1, p.205–236.
- [7] – Al –Hasan , M. , **2007** – Superposition method for stress–temperature equations of motion , Journal of Al–Baath University, Vol.29, Nr.5, p.53–78.
- [8]– Al–Hasan, M. , Dyszlewicz, J , **2001** – Stress–temperature equations of motion of Ignaczak type for a three – dimensional problem of micropolar thermoelasticity , Journal of Thermal Stresses ,24, p. 709 –722.
- [9]– Dyszlewicz , J., **2004** – Micropolar Theory of Elasticity , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .
- [10] – Gerrit van Dijk , **2013** – Distribution Theory , De Gruyter Graduate Lectures, Deutsche Nationalbibliothek , Berlin.
- [11] – Debnath, L& Bhatta , D , **2007** – Integral Transforms and their Applications, ( Second Edition), CRC Press, Boca Raton, Florida.
- [12] – Ignaczak , J , **1971** – Tensorial equations of motion for elastic materials with microstructure , in : Trends of

Elasticity and Thermoelasticity, Witold Nowacki Ann.Volume ,  
Wolters-Noordhoff Groningen , 90 – 111;

[13] –Nowacki, W , **1986** – Theory of Asymmetric Elasticity ,  
Warsaw , PWN.

[14] – Eringen , A . C , **1966** – Linear theory of  
micropolar elasticity, J.Math. Mech., 15 , 909 – 930.

## تحديد الأوندانسيبترون هيدروكلورايد في المستحضرات الصيدلانية باستخدام المسرى المحضر من معجونة الكربون المعدلة كيميائياً بمعقد الزوج الأيوني

عبد القادر دياب<sup>1</sup> . د. بشير الياس<sup>2</sup> . د. فاطمة الرحال<sup>2</sup> . د. علا مصطفى<sup>3</sup>

### ملخص

طورت طريقة تحليلية لتحديد الأوندانسيبترون هيدروكلورايد باستخدام الطريقة الكمونية في الحالة النقية وفي المستحضرات الصيدلانية، عن طريق تحضير مسرى معجونة الكربون المعدلة كيميائياً بمعقد الزوج الأيوني (OND-NaTPB) ما بين الأوندانسيبترون هيدروكلورايد (OND.HCl) وكاشف رباعي فينيل بورات الصوديوم (NaTPB) كمادة فعالة كهركيميائياً. بينت النتائج عند تطبيق الطريقة المقترحة باستخدام المسرى المحضر المؤلف من 48.0% فحم غرافيتي، و 48.0% ثنائي بوتيل فتلات (DBPH)، و 4% معقد الزوج الشاردي (OND-NaTPB)، أن استجابة المسرى المحضر تجاه مادة الأوندانسيبترون هيدروكلورايد تحقق علاقة نرست ضمن المجال الخطي  $(0.58-918.09)\mu\text{M}$ ، وبميل  $59.284\text{mV/decade}$ ، ضمن مجال pH يتراوح ما بين (2.1-7.3)، وبزمن استجابة 10Sec، وبحد كشف  $0.55\mu\text{M}$ ، وعمر مسرى يمتد حتى 50 يوم. تم استخدام المسرى في تحديد تركيز الأوندانسيبترون هيدروكلورايد في الحالة النقية وفي مستحضراته الصيدلانية.

**الكلمات المفتاحية:** الأوندانسيبترون هيدروكلورايد، رباعي فينيل بورات الصوديوم، معقد الزوج الأيوني، مسرى معجونة الكربون، الطريقة الكمونية.

<sup>1</sup> طالب دكتوراه كيمياء تحليلية - قسم الكيمياء - كلية العلوم - جامعة البعث.

<sup>2</sup> أستاذ مساعد - قسم الكيمياء - كلية العلوم - جامعة البعث.

<sup>3</sup> مدرس - قسم الأدوية والسموم - كلية الصيدلة - جامعة البعث.

# Determination of Ondansetron Hydrochloride in Pharmaceutical Formulations Using the Prepared Electrode Form Carbon Paste Modified with Ion Pair Complex

Abdalqader Dyab<sup>1</sup> Dr. Bashir Elias<sup>2</sup> Dr. Fatima AlRahal<sup>2</sup>  
Dr. Aoula Moustapha<sup>3</sup>

## Abstract

An analytical Potentiometric method has been developed for the quantitative determination of Ondansetron hydrochloride in bulk and in the pharmaceutical dosage forms, by preparing a chemically modified carbon paste electrode. The new electrode composed of ion pair complex between Ondansetron hydrochloride (OND.HCl) and Sodium tetraphenyl borate (NaTPB) reagent as an electrochemically active substance (OND-NaTPB). The optimum electrode consisted of 48.0%, graphite powder, 48.0% dibutyl phthalate (DBPH), and 4% ionic pair complex (OND-NaTPB) and showed a response to Ondansetron hydrochloride that achieved the Nernst relationship within Linear range (0.58-918.09)  $\mu\text{M}$ , slope of 59.284mV/decade, pH range (2.1-7.3), response time of 10 Sec, lower limit of detection of 0.55 $\mu\text{M}$  and electrode life of up to 50 days. In addition to determining (OND.HCl) in its pure form, the prepared electrode was applied successfully for the determination of (OND.HCl) in its pharmaceutical dosage forms.

**Keywords:** Ondansetron hydrochloride, Sodium tetraphenyl borate, ion-pair complex, carbon paste electrode, Potentiometric Method.

<sup>1</sup> Analytical Chemistry PhD Student, Chemistry Department, Faculty of Science, AL Baath University.

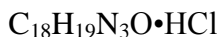
<sup>2</sup> Associate professor, Chemistry Department, Faculty of Science, AL Baath University.

<sup>3</sup> Lecturer, Department of Pharmacology and Toxicology, Faculty of Pharmacy, AL Baath University.

## مقدمة:

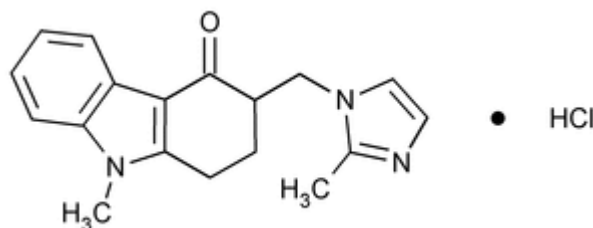
الأوندانسيبترون مسحوق أبيض أو أبيض تقريباً، قليل الانحلال في الماء والكحول، ومنحل في الميثانول، وينحل بشكل ضعيف في ثنائي كلور الميثان، ومصنف من أحد المركبات الكيميائية المؤثرة على الجملة العصبية ويستطب به كمضاد فعال للإقياء، ويستعمل في حالات الغثيان والإقياء بعد الجراحة، وخلال فترة العلاج الكيميائي و الإشعاعي، يستخدم على شكل أوندانسيبترون هيدروكلورايد المنحل في الماء [1].

يمتلك الأوندانسيبترون هيدروكلورايد (OND.HCl) الصيغة المجملة:



وله الكتلة الجزيئية (329.90 g/mol)، واسمه العلمي:

(3RS)-9-Methyl-3-[(2-methyl-1H-imidazol-1-yl)methyl]-1,2,3,9-tetrahydro-4H-carbazol-4-one hydrochloride dehydrate [2].



الصيغة المفصلة للأوندانسيبترون هيدروكلورايد

حُدِّد الأوندانسيبترون هيدروكلورايد (OND.HCl) في حالته النقية وفي المستحضرات الصيدلانية باستخدام العديد من الطرائق التحليلية ونشرت العديد من الأوراق البحثية التي تعنى بذلك ومنها:

أجريت دراسة تحليلية طيفية للتحديد المتزامن للأوندانسيبترون والأومبيرازول ضمن مستحضراتهما الصيدلانية باستخدام طريقة بسيطة واقتصادية تعتمد مطيافية الامتصاص الجزيئي، وذلك عن طريق قياس امتصاصية محلول الأوندانسيبترون في الميثانول عند طول موجة 246nm والأومبيرازول عند طول موجة 205nm، وكان قانون بيير لامبيرت محققاً ضمن مجال خطي للتركيز يتراوح بين (2-12µg/mL)، وبمعامل ارتباط وقدره 0.99، وتم التحقق من صلاحية الطريقة المقترحة وحساب حد الكشف الذي بلغ 0.07µg/mL للأوندانسيبترون، و0.29µg/mL للأومبيرازول، وتراوحت الاسترجاعية بين (99.66-99.49%) للأوندانسيبترون وبين (100.3-99.48%) للأومبيرازول[3].

حُدّد الأوندانسيبترون في مستحضراته الصيدلانية (أقراص) وعينات البول البشري بتقنية مطيافية الفلورة عند طولي موجة انبعاث 316nm و353nm، وذلك لمحاليله المائية ضمن مجال خطي للتركيز يتراوح بين (2.0-0.2µg/mL)، وبلغت قيمة حدي الكشف والكشف الكمي 0.04µg/mL و0.11µg/mL على التوالي. تم التحقق من صلاحية الطريقة وأثبتت النتائج أن الطريقة المطوّرة انتقائية وحساسة ودقيقة في تقدير الأوندانسيبترون[4].

طبقت طريقة تحليلية بسيطة وسريعة ودقيقة استخدمت تقنية الكروماتوغرافيا السائلة عالية الأداء ذات الطور العكوس (RP-HPLC) للتحديد المتزامن للأوندانسيبترون و البنيتوبرازول في حالتَيْهما النقية وضمن المستحضرات الصيدلانية. تم فصل المواد المدروسة بواسطة عمود Phenomenex Kromosil C18، وبوجود طور متحرك مكون من مزيج من مزيغ موقى فوسفات البوتاسيوم الثنائية (درجة حموضته 3.0) والأسيتونتريل والميثانول بنسبة (40:20:40) V/V وكاشف جهاز قياس امتصاص الأشعة فوق البنفسجية عند طول موجة 210nm، حيث كانت قيمة معاملات الارتباط



الخطي تساوي 0.9990 للأوندانسيبترون و0.9980 للبنتبوزول ضمن مجال خطي للتركيز يتراوح بين (20-120µg/mL)، وبلغت حدود الكشف الكيفي والكشف الكمي للأوندانسيبترون 0.075µg/mL و0.232µg/mL على التوالي [5].

طورت طريقة تحليلية لتحديد الأوندانسيبترون هيدروكلورايد كمادة نقية، وفي أشكاله الصيدلانية السائلة بتقنية الكروماتوغرافيا السائلة عالية الأداء، باستخدام عمود Discovery Cyano أبعاده (250x4.6mm; 5µm)، وطور متحرك متدرج المزج مع الزمن مكون من مزيج موقى فوسفاتي (درجة حموضته 5.7) والأسيتونتريل، بتدفق 0.9mL/min وطول موجة كاشف 216nm، تراوحت قيمة الانحراف المعياري النسبي المئوي بين (0.55%-2.72%) والاسترجاعية بين (88.4%-113.0%)، بمعامل ارتباط وقدره 0.995 [6].

دُرس السلوك الكهركيميائي للأوندانسيبترون بالطريقة الفولط أمبيرومترية، باستخدام مسرى معدل باستخدام البولي فينيل بيروليدين والأنابيب النانوية الكربونية متعددة الجدران (MWCNTs)، أدى التأثير التآزري للمواد النانوية وبوليمر التبادل الكاتيوني على معدل نقل الإلكترون إلى مضاعفة تيار قمة الأكسدة. تم استخدام طريقة الموجة المربعة الفولط أمبيرومترية لتحديد الأوندانسيبترون في مستحضراته الصيدلانية، كما أظهر المسرى المعدل انتقائية عالية في القياسات الفولط أمبيرومترية للأوندانسيبترون مع تيار فصل قوي (442mV)، وكان مجال التركيز الخطي الذي تم العمل عنده يتراوح بين (200.0-2.0nmol/L) وحد كشف 430pmol/L. طبقت الطريقة بنجاح على عينات من المصورة الدموية البشرية والمستحضرات الصيدلانية الحاوية على الأوندانسيبترون [7].

نشرت ورقة بحثية لتحديد الأوندانسيبترون هيدروكلورايد في مستحضراته الصيدلانية بدقة وحساسية عالية باستخدام مسرى معدل عن طريق الترسيب الكهربائي لكبريتات دوديسيل الصوديوم- بولي بيرول على سطح مسرى كربون زجاجي، وذلك في محلول وقاء فوسفاتي (درجة حموضته 2.0) يحتوي على البيروكسيدات وكبريتات دوديسيل الصوديوم، أظهر المسرى المحضر استجابة كهروكيميائية ممتازة للأوندانسيبترون، حيث كانت أقصى استجابة عند قيمة كيون (1.33V)، وذلك عند تطبيق موجة مربعة ضمن مجال تراكيز خطي يتراوح بين (1.0-80  $\mu\text{M}$ ) بحد كشف الكيفي (0.09  $\mu\text{M}$ ) وحد كشف كمي (0.3  $\mu\text{M}$ ) [8].

تم اصطناع مسرى عشائي من بولي فينيل كلورايد (PVC) منتهي للأوندانسيبترون معدل بالزوج الأيوني (أوندانسيبترون - حمض فوسفو الموليبدنوم) بوجود المدلنات: ثنائي بوتيل فتالات (DBPH) وثنائي أوكثيل فتالات (DOPH) وأورتو-نيتروفينيل أوكثيل إيثر (O-NPOE) وثنائي بوتيل فوسفات (DBP) كل على حدى، لتحديد الأوندانسيبترون هيدروكلورايد كمادة أولية وضمن مستحضراته الدوائية. أظهرت النتائج أن لمسارى المدلن بـ (DBPH) أعطى أفضل استجابة، حيث امتد المجال الخطي له بين التراكيز ( $7.3 \times 10^{-5}$ - $1 \times 10^{-2}$  M) بميل  $59.61 \pm 0.50 \text{ mV/decade}$  وعمر مسرى 30 يوم [9].

#### أهمية البحث وأهدافه:

تكم أهمية هذا البحث من خلال تطوير طريقة تحليلية كيونية حساسة وبسيطة ومنخفضة التكلفة من أجل تحديد الأوندانسيبترون هيدروكلورايد كمادة أولية وفي مستحضراته الصيدلانية، وذلك باستخدام مسرى محضر من معجونة الكربون المعدلة بمعقد الزوج الأيوني (OND-NaTPB)، واختبار صلاحية هذه الطريقة من خلال

حساب الدقة والصحة بهدف استخدامها لتحليل عينات دوائية حاوية على مادة  
(OND.HCl).

#### مواد وطرائق البحث:

استخدم لإنجاز هذا البحث مسرى كالوميل مقارن (SCE) إنتاج الشركة  
البريطانية EDT directION، ومقياس كمون رقمي كوري الصنع من شركة  
FINEST، ومقياس pH/mV/C<sup>0</sup> نوع Sartorius طراز PB-11 مزود بمسرى  
زجاجي، وميزان تحليلي بدقة أربعة أرقام بعد الفاصلة من شركة Precisa السويسرية  
نموذج XB220A.

#### المواد الكيميائية والصيدلانية:

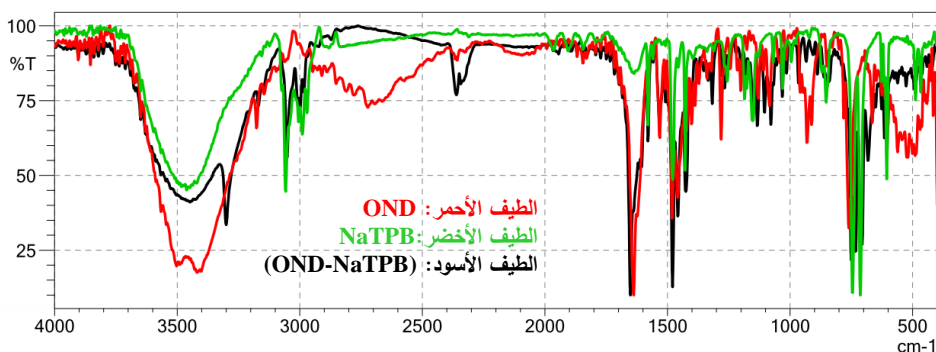
استخدم في هذا البحث مواد من الدرجة التحليلية عالية النقاوة، وماء ثنائي  
التقطير، كما استخدم لتحضير معجونة الكربون المعدلة فحم كرافيتي عالي النقاوة من  
إنتاج شركة ALDRICH، ومجموعة من الملدنات شملت ثنائي أوكثيل فتالات  
(DOPH) بنقاوة 99.5%، وثنائي بوتيل فتالات (DBPH) بنقاوة 99%، ورباعي بوتيل  
فوسفات (TBP) بنقاوة 99.5% من شركة Fluka، واستخدم لتحضير معقد الزوج  
الأیوني مادة فعالة نقيه من الأوندانسيبترون هيدروكلورايد (OND.HCl) بنقاوة 99.7%  
من إنتاج الشركة الهندية (Anugraha Chemicals)، وكاشف رباعي فينيل بورات  
الصوديوم NaB(C<sub>6</sub>H<sub>5</sub>)<sub>4</sub> (NaTPB) بنقاوة 99.5% من شركة Merck، كما  
استخدمت مستحضرات دوائية محلية الصنع على شكل حبابات سائلة تحتوي مادة  
الأوندانسيبترون هيدروكلورايد بتركيز (2mg/mL) من إنتاج شركات ابن حيان وابن زهر  
والسعد للصناعات الدوائية.

## طريقة العمل:

### تحضير معقد الزوج الأيوني الأوندانسيبترون - رباعي فينيل بورات الصوديوم (OND-NaTPB):

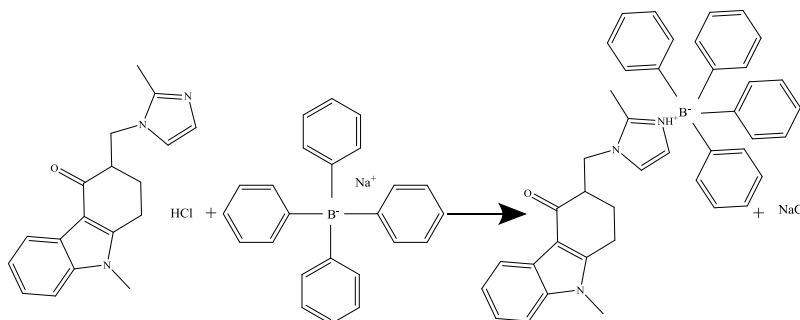
حضر المعقد الراسب عن طريق مزج محلولين متساويي التركيز ( $1 \times 10^{-2} M$ ) لكل من الأوندانسيبترون هيدروكلورايد ورباعي فينيل بورات الصوديوم بنسبة ارتباط (1:1)، ترك الراسب ضمن المحلول لمدة 24 ساعة، ثم ثقل الراسب وغسل بالماء ثنائي التقطير وجفف عند درجة حرارة المخبر. حفظ الراسب ضمن عبوة عاتمة محكمة الإغلاق.

دُرس طيف الأشعة تحت الحمراء لكل من المادة الدوائية والكاشف المستخدم والمعقد للتأكد من الزمر الوظيفية الموجودة في المعقد وفق آلية التفاعل المقترحة، ويظهر طيف IR للمعقد الناتج مقارنةً بأطياف المواد المتفاعلة ظهور عصابة الامتصاص عند  $3300 \text{ cm}^{-1}$  العائدة لـ  $\text{NH}$ - الناتجة عن برتنة الأزوت في حلقة الإيميدازول في صيغة المادة الدوائية، مما يؤكد حدوث الارتباط بين OND و NaTPB عند الـ  $\text{NH}$ - بعد برتنتها كما هو ظاهر الشكل (1).



الشكل (1): تراكب أطياف الأشعة تحت الحمراء لمعقد الزوج الأيوني والمادة الدوائية والكاشف

والآلية المقترحة لتشكيل المعقد:



**تحضير مسرى معجونة الكربون المعدل كيميائياً بمعقد الزوج الأيوني:**

تم مزج الفحم الكرافيتي والملدن ومعقد الزوج الأيوني بشكل جيد على زجاجة ساعة نظيفة وينسب محددة للحصول على معاجين الكربون المتجانسة عند درجة حرارة المخبر، ثم ضغطت المعجونة المراد دراستها بواسطة مكبس خاص ضمن أنبوب من البولي إيثيلين مع التأكد من خلو المعجونة من فقاعات الهواء، وغُرز سلك نحاسي داخل المعجونة وثُبت بشكل جيد لضمان استقراره ضمنها. ثُبت المسرى المحضر إلى جانب مسرى الكالوميل المقارن ضمن الخلية الكهركيميائية ووصل المسريان بمقياس الكمون، فكان المخطط الترسيمي للخلية الناتجة كمايلي:

Cu|معجونة الكربون المعدلة|(المحلول المدروس)|(مشبع)|KCl|(صلب)|KCl|Hg|Hg<sub>2</sub>Cl<sub>2</sub>|

**تحضير محلول المادة النقية:**

حضر محلول عياري لـ (OND.HCl) واستخدم كمحلول عياري رئيسي. أضيفت حجوم محددة منه إلى 100mL من الماء ثنائي التقطير بحيث يزداد تركيز المادة المدروسة من أقل تركيز إلى أعلى تركيز ضمن المجال المتعمد، والذي يتم فيه المحافظة

على خطية العلاقة بين القوة المحركة الكهربائية للخلية وتركيز الـ (OND.HCl)، ومن ثم تم رسم الخط البياني المحقق للعلاقة  $E=f(pC_{OND})$ .

#### تحضير محلول عينة المستحضر الدوائي:

حضر محلول حجمه 100mL من الـ (OND.HCl) انطلاقاً من المستحضر الدوائي (الحُبابة) بأخذ 1mL من المستحضر وإتمام الحجم بالماء ثنائي التقطير إلى 100mL للحصول على محلول تركيزه النظري  $60.6244 \mu\text{M}$ .

#### النتائج والمناقشة:

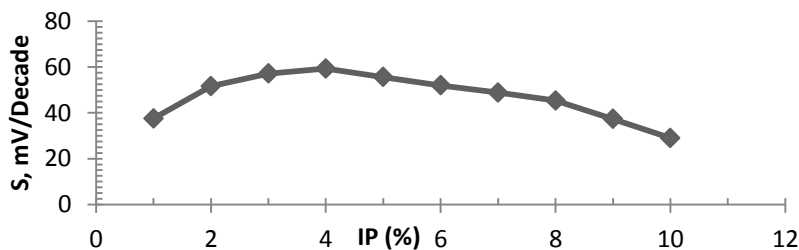
##### 1- دراسة التركيب الأمثل لمعجونة الكربون الفعالة كهربائياً:

حُضرت مجموعة من المساري تحتوي على نسب مختلفة من المعقد ومن الكربون الكرافيت والملدن DBPH، ودرست تغيرات كمون الخلية بدلالة التركيز حتى الوصول إلى التركيب الأمثل من خلال إضافة حجوم محددة على دفعات صغيرة من محلول المادة المدروسة معلوم التركيز إلى 100mL من الماء ثنائي التقطير بحيث يتزايد التركيز وصولاً إلى أعلى تركيز يتم فيه المحافظة على خطية العلاقة بين القوة المحركة الكهربائية للخلية وتركيز OND، كما هو موضح في الجدول (1).

الجدول (1): تأثير تركيب معجونة الكربون على خصائص المساري الانتقائية

القرائن التحليلية			التركيب % (w/w)		
R	المجال الخطي $\mu\text{M}$	الميل (S) $\text{mV/Decade}$	الملدن (DBPH)	الكرافيت (G)	الزوج الأيوني (IP)
0.9830	1.58-209.71	37.489	49.5	49.5	1
0.9946	1.08-304.24	51.585	49.0	49.0	2
0.9940	1.08-487.94	57.120	48.5	48.5	3
<b>0.9991</b>	<b>0.58-918.09</b>	<b>59.284</b>	<b>48.0</b>	<b>48.0</b>	<b>4</b>
0.9947	1.08-304.24	55.621	47.5	47.5	5
0.9979	1.08-487.94	55.953	47.0	47.0	6
0.9864	1.58-304.24	48.805	46.5	46.5	7
0.9872	1.58-304.24	45.357	46.0	46.0	8
0.9797	2.57-304.24	37.298	45.5	45.5	9
0.9787	1.58-304.24	29.019	45.0	45.0	10

وجد رسم العلاقة بين تغير ميل المنحنيات العيارية بدلالة النسبة المئوية الوزنية لمعقد الزوج الأيوني في المعجونة الشكل (2)، أن نسبة 4% من الزوج الأيوني هي الأفضل نظراً لتقارب قيمة الميل من القيمة النظرية للميل في معادلة نرنست.



الشكل (2): دراسة تغيرات الميل بدلالة النسبة المئوية الوزنية للمعقد OND-NaTPB باستخدام الملدن DBPH

## 2- دراسة تأثير نوع الملدن على خصائص المسرى الانتقائية:

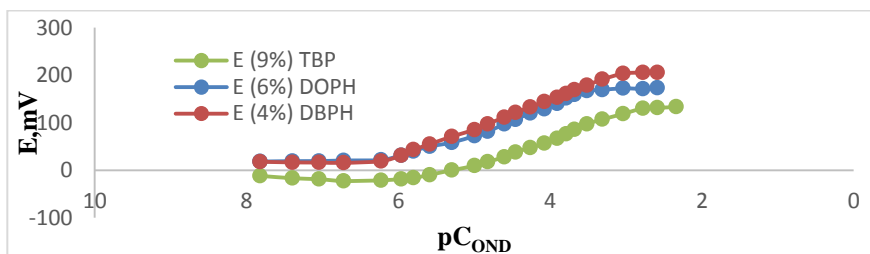
حُضرت عدة مسارى تحتوي على نسب مختلفة لكل من الكرافيت والملدن والمعقد المحضر، باستخدام ثلاثة ملدنات مختلفة في خصائصها الفيزيائية وهي DOPH

و DBPH و TBP، والتي تمتاز بخصائص مختلفة من حيث الوزن الجزيئي، وثابت عزل الكهربائي والقدرة على اذابة المواد، حيث يتعلق أداء وحساسية مساري معجونة الكربون بالملدن المستخدم، ومن الجدير بالذكر أن للخصائص الفيزيائية للملدن تأثيراً كبيراً في حركية الزوج الأيوني ضمن معجونة الكربون [10]. رُسمت المنحنيات العيارية  $E=f(pC_{OND})$  لكل مسرى محضر، حيث اختيرت النسب المثلى للمعقد المحضر من أجل كل ملدن، ووضعت النتائج في الجدول (2).

الجدول (2): تأثير نوع الملدن على خصائص المسرى الانتقائية

نوع الملدن	نسبة الزوج الأيوني %	الميل mV/Decade	المجال الخطي $\mu M$	حد الكشف $\mu M$	زمن الاستجابة sec
TBP	9	53.4	2.57-1671.37	2.45	35 sec
DOPH	6	55.65	1.08-487.93	0.93	20 sec
<b>DBPh</b>	<b>4</b>	<b>59.28</b>	<b>0.58-918.09</b>	<b>0.55</b>	<b>10 sec</b>

يبين الجدول (2) أن المسرى الملدن بـ DBPH، أبدى تحسناً ملحوظاً في الخصائص التحليلية للمسرى المحضر من خلال قيمة الميل القريبة من القيمة النظرية لمعادلة نرنست وانخفاض قيمة حد الكشف الشكل (3).



الشكل (3): تأثير نوع الملدن على خصائص المسرى الانتقائية

### 3- دراسة تأثير نسبة الكرافيت إلى الملدن G/P على أداء المسرى:

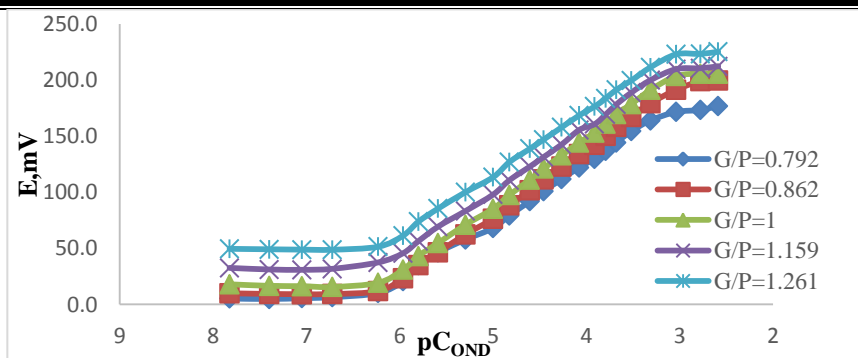
حُضرت لهذه الدراسة عدة مساري تحوي نسبة مئوية وزنية ثابتة للزوج الأيوني ونسباً مختلفة من الكرافيت والملدن، وبعد إجراء الرسم البياني للمنحنى العياري الموافق



للتابع  $E=f(pC_{OND})$  للمساري المحضرة، لوحظ أن النسبة  $G/P=1$  هي الأفضل، وهذا ما يوضحه الجدول (3)، لذلك تم اعتمادها في الدراسات اللاحقة كونها منحت المسرى المحضر أفضل الخصائص التحليلية من حيث المجال الخطي الواسع وزمن الاستجابة، كما هو موضح في الشكل (4).

الجدول (3): تأثير نسبة  $G/P$  على خصائص المساري الانتقائية

زمن الاستجابة (sec)	المجال الخطي $\mu M$	الميل mV/Decade	G/P	IP (%)	P (%)	G (%)
25	1.08-487.93	52.942	0.778	4	54	42
15	0.58-918.09	57.740	0.882	4	51	45
<b>10</b>	<b>0.58-918.09</b>	<b>59.284</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>48</b>	<b>48</b>
20	1.08-918.09	57.170	1.133	4	45	51
35	1.08-918.09	55.493	1.286	4	42	54



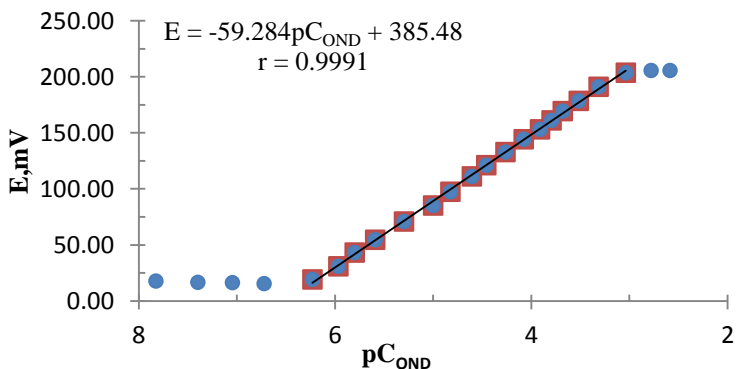
الشكل (4): تأثير النسبة  $G/P$  على أداء المساري المحضرة

#### 4- توصيف المسرى:

#### 1.4- المنحني العياري للمسرى المحضر:

لدراسة المنحني العياري للمسرى، أُخذ 100mL من الماء ثنائي التقطير وأضيف له حجوم متزايدة من محلول (OND.HCl) العياري، بحيث يزداد التركيز خطياً وصولاً

إلى أعلى تركيز يتم المحافظة فيه على خطية تزايد الكمون بزيادة تركيز المحلول المقاس، وقيس كمون خلية المسرى المحضر بعد كل إضافة، ثم رُسمت العلاقة الخطية بيانياً  $(E=f(pC_{OND}))$ ، ووُجد أن قيمة الميل قريبة من القيمة النظرية للميل في علاقة نيرنست للمسرى المحضر من العلاقة  $(E=-59.284pC_{OND}+385.48)$ ، الشكل (5).



الشكل (5): المنحني العياري لمسرى OND الانتقائي المحضر باستخدام ملدن DBPH

### 2.3- المجال التحليلي للمسرى المحضر:

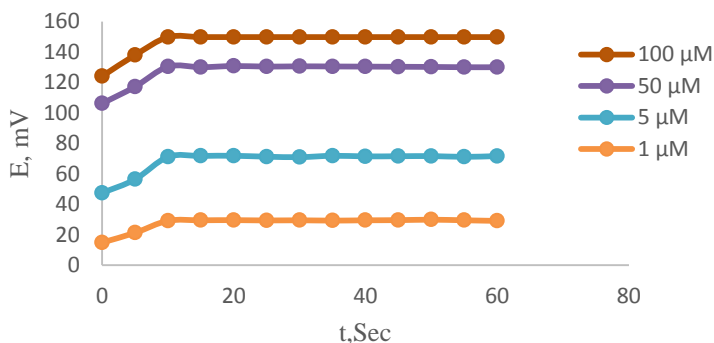
حدد المجال الخطي التحليلي الذي يعمل به المسرى المحضر كما هو موضح في الشكل (5)، حيث تراوح ما بين  $(0.58-918.09\mu M)$ ، وبمعامل ارتباط وقدره 0.9991.

### 3.3- حد الكشف:

أوجد التابع الخطي المستقيم للجزء السفلي من المنحني العياري الشكل (5) المبين وكانت معادلته  $(E=2.0739pC_{OND}+1.4942)$ ، وبالحل المشترك لهذا التابع وتابع الجزء المستقيم الذي سبق ذكره بالشكل السابق، تم الحصول على نقطة تقاطع عند كمون قيمته  $14.47\text{mV}$  وقيمة  $(pC_{OND}=6.26)$  والتي توافق التراكيز  $(0.55)\mu M$  من  $(\text{OND.HCl})$  وهي قيمة حد الكشف.

### 4.3- زمن استجابة المسرى:

حُدّد الزمن اللازم للوصول إلى حالة الاستقرار لكمون المسرى المحضر باستخدام مقياسية رقمية [11]، حيث كان زمن الاستجابة عند تحديده في محاليل تراكيزها ما بين (1.0- 100.0  $\mu\text{M}$ ) من (OND.HCl) يساوي 10Sec وذلك من أجل المسرى المحضر DBPH (OND-NaTPB<sub>4%</sub>SE)، كما هو موضح في الشكل (6).



الشكل (6): زمن استجابة المسرى المنتقي لـ OND المحضر باستخدام ملدن (OND-NaTPB<sub>4%</sub>SE) DBPH

### 5.3- عمر المسرى:

رُسم المنحني العياري للمسرى المحضر والمنتقي لمادة OND لتحديد عمر المسرى الأمثل، كما دُرِس بيانياً تغيرات ميل الجزء المستقيم من المنحني العياري للمسرى S مع تقدم زمن العمل t حتى حصول انخفاض واضح في قيمة الميل مما يدل على بدء خمول المسرى. وُجد أن عمر المسرى المحضر يمتد حتى 50 يوماً دون تغيرات معتبرة في قيمة الميل وهذا ما يبينه الجدول (4).

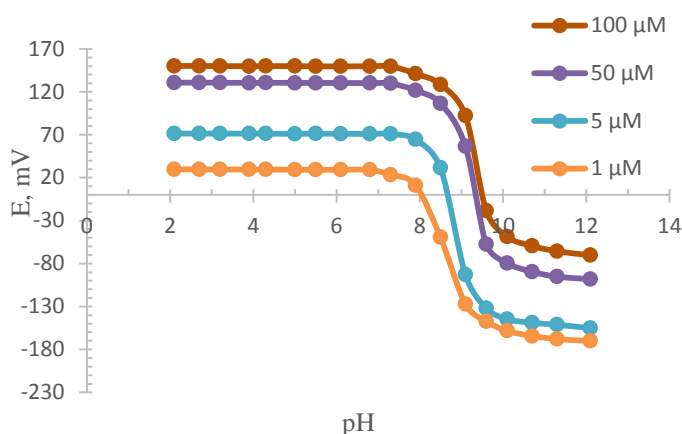
الجدول (4): تأثير زمن العمل على أداء المسرى المحضر

المجال الخطي، $\mu\text{M}$	الميل $S, \text{mV/decade}$	زمن العمل
(OND-NATPB <sub>4%</sub> SE) DBPH		
0.58-918.09	59.284	1 ساعة
0.58-918.09	59.278	1 يوم
0.58-918.09	59.256	2 يوم
0.58-918.09	59.204	5 يوم
0.58-918.09	59.177	10 يوم
0.58-918.09	59.106	15 يوم
0.58-918.09	59.072	20 يوم
0.58-918.09	59.045	25 يوم
0.58-918.09	58.878	30 يوم
0.58-918.09	58.638	35 يوم
0.58-918.09	58.553	40 يوم
0.58-918.09	58.242	45 يوم
<b>0.58-918.09</b>	<b>58.104</b>	50 يوم
1.08-487.93	57.784	55 يوم
1.58-304.24	57.560	60 يوم

#### 5- دراسة تأثير درجة حموضة الوسط على ثبات أداء المسرى:

دُرِس تأثير تغير قيمة pH الوسط ضمن المجال (2-12) على القيمة المقاسة للكُمون التوازني للمسرى المحضر (OND-NaTPB<sub>4%</sub>SE) DBPH، حيث عُمر المسرى المنتقي لمادة OND بوجود مسرى pH زجاجي ضمن محلول لـ (OND.HCl) تركيزه  $1 \mu\text{M}$ ، ثم أُضيف حجوم ضئيلة من محلول HCl أو NaOH بتركيز (0.1-1.0M) حتى الوصول الى الـ pH المطلوب. سُجِلت قيم الكُمون و pH المحلول عند درجة الحرارة  $25^\circ\text{C}$ . كُرر العمل على محاليل أخرى من مادة OND بتركيز  $5.0 \mu\text{M}$  و  $50.0 \mu\text{M}$

و  $100.0\mu\text{M}$ ، ثم رُسِمت تغيرات الكمون بدلالة pH لكل تركيز مدروس كما هو موضح في الشكل (7) وتبين أن المجال الأمثل لعمل المسرى هو بين قيمتي الـ pH (2.0-7.3).



الشكل (7): دراسة تأثير قيم pH على قيم الكمون للمسرى المحضر

#### 6- دراسة دقة وصحة الطريقة المقترحة باستخدام المسرى المقترح:

حُضرت مجموعة من المحاليل العيارية تقع تراكيزها ضمن المجال الخطي المعتمد حددت دقة وصحة الطريقة المقترحة، ثم طبقت علاقة الجزء المستقيم من المنحني العياري للمسرى المنتقي لـ OND المحضر ( $E = -59.284pC_{\text{OND}} + 385.48$ ) لتحديد تركيز المحاليل، الشكل (5). أخذ متوسط التركيز وكرر العمل خمس مرات. ووضعت نتائج التحديد بهذه الطريقة بعد إجراء المعالجة الإحصائية للنتائج في الجدول (5).

الجدول(5): تحديد دقة الطريقة المقترحة وصحتها باستخدام المسرى المحضر

R%	RSD%	C, $\mu\text{M}$		
		SD*	التركيز المحدد	التركيز المأخوذ
98.64	2.03	0.020	0.9864	1.000
99.34	1.75	0.087	4.9669	5.000
98.02	1.55	0.760	49.0123	50.000
99.76	0.93	0.926	99.7551	100.00
99.61	0.51	2.520	498.0332	500.000

\*متوسط خمس تجارب

تدل نتائج تحديد (OND.HCl) ضمن المحلول النقي باستخدام المسرى المحضر أن الطريقة المقترحة مقبولة تحليلياً لعدم تجاوز الانحراف المعياري النسبي المئوي RSD% القيمة % 2.03 من أجل التركيز  $1.0\mu\text{M}$ ، والاسترجاعية R% القيمة % 98.64، مما يؤكد دقة وصحة هذه الطريقة.

#### 7- التطبيق العملي:

استخدم المسرى المحضر لتحديد (OND.HCl) في مستحضراته الصيدلانية (حُبابة) أوندال ( $2\text{mg}/1\text{mL}$ ) من إنتاج شركة ابن حيان للصناعات الدوائية، وفومي كايند ( $2\text{mg}/1\text{mL}$ ) من إنتاج شركة ابن زهر للصناعات الدوائية، ودي فوميت ( $2\text{mg}/1\text{mL}$ ) من إنتاج شركة السعد للصناعات الدوائية، وطُبقت الطريقة الكمونية المقترحة لمعرفة مدى صلاحيتها من أجل المراقبة الدوائية. يوضح الجدول (6) نتائج التحديد والمعالجة الإحصائية للطريقة المقترحة باستخدام المسرى المحضر، والتي تبين

دقة وصحة الطريقة المقترحة من خلال قيم الانحراف المعياري النسبي المئوي المنخفضة وقيم الاسترجاعية الجيدة.

الجدول (6): النتائج التحليلية لتحديد في المستحضرات الدوائية

R%	RSD%	SD <sup>a</sup> , $\mu$ M	COND, $\mu$ M		المستحضر الدوائي
			المأخوذ	المحدد	
98.85	1.18	1.170	59.9290	60.6244	أوندال <sup>b</sup>
99.08	1.01	0.998	60.0679	60.6244	فومي كايند <sup>c</sup>
101.10	1.05	1.062	61.2936	60.6244	دي فوميت <sup>d</sup>

a متوسط خمس تجارب.

b حُبابة عيار 2mg/1mL من شركة ابن حبان للصناعات الدوائية.

c حُبابة عيار 2mg/1mL من شركة ابن زهر للصناعات الدوائية.

d حُبابة عيار 2mg/1mL من شركة السعد للصناعات الدوائية.

أُجريت مقارنة إحصائية بين النتائج التي تم التوصل إليها ونتائج الطريقة المرجعية

[12]، وذلك بحساب الاختبارين t-test و F-test [13-15]، ودلت القيم على عدم وجود

فرق معنوي يعتد به احصائياً بين الطريقتين، وهذا ما يوضحه الجدول (7).

الجدول (7): تحديد (OND.HCl) في المستحضرات الدوائية بالطريقة المقترحة والمرجعية

الطريقة المقترحة	الطريقة المرجعية <sup>f</sup> [12]	المستحضر الدوائي
98.85±1.170	100.16±0.406	أوندال <sup>c</sup>
2.1978	0.8812	
F-test <sup>b</sup>	0.1204	
99.08±0.998	100.51±1.475	فومي كايند <sup>d</sup>
2.0613	0.7731	
F-test <sup>b</sup>	2.1843	
101.10±1.062	98.62±1.467	دي فوميت <sup>e</sup>
2.3161	2.1035	
F-test	1.9081	

a متوسط خمس تجارب.

b من أجل أربع درجات حرية وحد ثقة 95% قيمة t الجدولة 2.776 وقيمة F الجدولة 6.26.

c حُبابة عيار 2mg/1mL من شركة ابن حيان للصناعات الدوائية.

d حُبابة عيار 2mg/1mL من شركة ابن زهر للصناعات الدوائية.

e حُبابة عيار 2mg/1mL من شركة السعد للصناعات الدوائية.

f طريقة تحليلية مرجعية معتمدة من دستور الأدوية الأمريكي (USP34) تعتمد على قياس طيف الامتصاص الضوئي لمادة الأوندانسيبترون هيدروكلورايد عند طول موجة 310nm.

## 8- الاستنتاجات والتوصيات:

اتسمت الطريقة التحليلية المقترحة في هذا البحث لتحديد الأوندانسيبترون هيدروكلورايد باستخدام مسرى معجونة الكربون المعدلة كيميائياً بمعقد الزوج الأيوني (OND-NaTPB)، بالبساطة والسهولة وانخفاض التكاليف، والصحة من خلال قيم الاسترجاعية الجيدة، والدقة من خلال قيم الانحراف المعياري والانحراف المعياري النسبي المنوي.

تم تطبيق هذه الطريقة على مستحضرات صيدلانية تحتوي الأوندانسيبترون هيدروكلورايد في تركيبها وكانت النتائج ضمن المعايير المقبولة.

نوصي بتطبيق الطريقة المقترحة على أشكال صيدلانية أخرى كالمضغوطات والشرابات السائلة.



## 9-المراجع:

- [1] Committee, J. F., 2021- *BNF 81 (British National Formulary) March 2021. Pharmaceutical Press*.
- [2] Commission, B. P.; Office, S., 2010- *British Pharmacopoeia 2011. Stationery Office*.
- [3] PATEL, S. A.; PATEL, K. N.; PATEL, M. R., 2022- A Novel Validated Simultaneous Equations Method for Simultaneous Estimation of Omeprazole and Ondansetron in Bulk and Pharmaceutical Preparation, *Int. J. Pharm. Sci. Rev. Res.*, 25, 150-154.
- [4] GAYATRI, S. N.; PALLE, K.; SUSMITHA, T.; YUMNAM, S.; KUMAR, N. P. J. M. T. P., 2022- Spectrofluorimetric determination of ondansetron in pharmaceutical tablets: Applicability to human urine and content uniformity testing, *International Conference on Advanced Materials for Innovation and Sustainability*, 64, Part 1, 79-82.
- [5] RAKAM, G.; MALLIK, A.; SUCHARITHA, C. J. I. J. O. P. S., 2022- Method Development and Validation of Reverse Phase High Performance Liquid Chromatography Method for Estimation of Ondansetron and Pantoprazole in their Tablet Dosage Form., *Indian Journal of Pharmaceutical Sciences*, 84 (2), 483-192.
- [6] KOWTHARAPU, L. P.; KATARI, N. K.; SANDOVAL, C. A.; MUCHAKAYALA, S. K.; REKULAPALLY, V. K. J. J. O. S. S., 2022- Unique green chromatography method for the determination of serotonin receptor antagonist (Ondansetron hydrochloride) related substances in a liquid formulation, robustness by quality by design-based design of experiments approach., *Journal of Separation science*, 25, (10),1-15.
- [7] RAHMAN, M. A. A.; SAAD, A. S.; EL-MOSALLAMY, S. S.; ELGHOBASHY, M. R.; ZAAZAA, H. E.; ATTY, S. A. J. E., 2022- Economical Voltammetric Sensor for Sensitive Rapid Determination of Ondansetron in the Presence of Opioid Antagonist Naltrexone., *Springer Link, Electrocatalysis*, 13, 567-579.
- [8] ZAABAL, M.; DOULACHE, M.; BAKIRHAN, N. K.; KADDOUR, S.; SAIDAT, B.; OZKAN, S. A. J. E., 2019- A facile strategy for

construction of sensor for detection of ondansetron and investigation of its redox behavior and thermodynamic parameters., **ELECTROANALYSIS**, 31 (7), 1279-1290.

[9] ABASS, A. M.; ALABDULLAH, S. S.; HASSAN, O. S.; AHMED, A. J. R. A., **2021**- Novel potentiometric sensors for determination of ondansetron hydrochloride in pure and dosage form., **ROYAL SOCIETY OF CHEMISTRY**, 11 (55), 34820-34827.

[10] ISSA, Y.; ABDEL-FATTAH, H.; ABDEL-MONIEM, N. J. I. E. S., **2013**- Chemically modified carbon paste sensor for potentiometric determination of doxycycline hydrochloride in batch and FIA conditions., **Int. J. Electrochem. Sci.**, 8, 9578.

[11] BAILEY, P.; RILEY, M. J. A., **1975**- Performance characteristics of gas-sensing membrane probes., **Analyst**, 100 (1188), 145-156.

[12] Convention, U. S. P., **2011**- *U.S. Pharmacopeia National Formulary 2011: USP 34 NF 29. **United States Pharmacopeial**.*

[13] Christian, G. D.; Dasgupta, P. K.; Schug, K. A., 2013- *Analytical chemistry. **John Wiley & Sons**.*

[14] Patnaik, P., **2004**- *Dean's analytical chemistry handbook. **McGraw-Hill Education**.*

[15] Holscher, H. H., **1971**- *Simplified statistical analysis: handbook of methods, examples and tables. **Cahners Books**.*

# توصيف جبري لمسألة نقل المعلومات على شبكات الاتصال الترجيبية

علاء جوني<sup>(1)</sup> أ.م. د. شوقي الراشد<sup>(2)</sup>

قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة دمشق - سورية

(1) طالب دكتوراه - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة دمشق.

(2) أستاذ مشارك في الجامعة العربية الدولية الخاصة، عضو هيئة تدريسية في كلية العلوم جامعة دمشق.

## ملخص

قُمنّا في هذا البحث بتقديم دراسة لمسألة إرسال واستقبال المعلومات على شبكة اتصال ترجيبية وذلك باستخدام بعض الأدوات المُستخدمة في الجبر التبادلي والهندسة الجبرية، من خلال تقديم نموذج جبري للتعريف بمسألة الإرسال المُتعدد على شبكة اتصالات ترجيبية، ثم قُمنّا بتعميم النظرية الأساسية في ترميز الشبكة من الحالة الكلاسيكية إلى الحالة الترجيبية وذلك بعد وضع المفاهيم اللازمة لهذا التعميم، ثم وضعنا شرطاً لازماً وكافياً لتكون مسألة الترميز قابلة للحل اعتماداً على طبيعة مجموعة كثيرات الحدود المُعرّفة لمسألة الترميز على شبكة اتصالات ترجيبية مُعطاة، وبناءً على ذلك قُدمنا بعض النتائج حول قابلية الحل أي قابلة إتمام عملية الإرسال المُتعدد بنجاح، ثم أوجدنا علاقة بين قابلية حل مسألة الترميز و بُعد الفضاء  $\frac{(F_q, \mu_1)[X, Y]}{I}$  وذلك باستخدام قواعد غروبنر، وتم تعريف ترميز ثنائي ترجيبي وشبكة ترجيبية كتطبيق عملي لهذه الدراسة.

التصنيف الرياضياتي (2020) 05C21, 13P10, 13P25, 94D05

الكلمات المفتاحية: ترميز الشبكة - المجموعة الترجيبية - البيان الترجيبي - التطبيق الترجيبي.

# Algebraic Characterization Of The Problem Of Transferring Information On Fuzzy Communication Networks

## Abstract

In this paper, we present a study of the problem of sending and receiving information on a probability communication network, using some useful tools from commutative algebra and algebraic geometry. Then we transferred the fundamental theory of network coding from the classical case to the general case, i.e. the Fuzzy case, after developing the necessary concepts for this generalization.

Then we set a necessary and sufficient condition for the coding problem to be solvable depending on the nature of the set of polynomials defining the coding problem on a given fuzzy communication network.

Accordingly, we presented some results about the solvability, i.e. the ability to complete the transmission process successfully, and then we found a relationship between the solvability of the encoding problem and the dimension of the space  $\frac{(F_q, \mu_1)[X, Y]}{I}$  using Grobner Bases, also we define a fuzzy coding and a fuzzy communication network as an application for this study.

**MSC2020:** 05C21, 13P10, 13P25, 94D05

## Key words

Network Coding – Fuzzy Set – Fuzzy Graph – Fuzzy Map.

## 1- مقدمة

لقد تم إحرار تقدّم كبير في نظرية المجموعات الترجيحية (الضبابية أو العائمة) منذ نشأتها بطرقٍ متنوعة وفي العديد من التخصصات، فيمكن العثور على تطبيقات هذه النظرية في الذكاء الصنعي وعلوم الكمبيوتر وهندسة التحكم ونظرية اتخاذ القرار والأنظمة الخبيرة والمنطق وعلوم الإدارة وبحوث العمليات والروبوتات وغيرها. تُعتبر الرياضيات الترجيحية، فرعاً من فروع الرياضيات، يتعلّق بنظرية المجموعات الترجيحية وبالمنطق الترجيحي الذي ظهر على يد العالم Zadeh حيث قدّم مفهوم المجموعة الترجيحية في بحثه [17] مُبيّناً أن كل عنصر من المجموعة له درجة انتماء من المجال  $[0,1]$ . تأتي أهمية مفهوم الترجيح من كونه أقرب إلى أسلوب الحياة الواقعية، الأمر الذي دفعنا لدراسة الترميز على شبكات الاتصال الترجيحية لأنّه في الحالة العامة عند نقل المعلومات بين المرسل والمستقبل يتم استخدام قنوات ضجيجية أي مُعرّضة للتشويش مما يعني أن الرسالة المستلمة قد تكون تعرضت للتشويه، بمعنى آخر أنّه قد تم استلام الرسالة ولكن بدرجة معينة من الصحة، لذلك فمنا أولاً في هذا البحث بتوصيف شبكة الاتصالات الترجيحية ودراسة إمكانية إتمام عملية الإرسال على هذه الشبكة الترجيحية.

ظهر مفهوم ترميز الشبكة الكلاسيكي في الأبحاث ([4], p7) ([5], p1) حيث يُسمح للرؤوس الداخلية إجراء عمليات معالجة على البيانات الداخلة إليها، ويُقال إن مسألة الترميز فوق الشبكة المدروسة أو مسألة الإرسال المُتعدد قابلة للحل إذا وُجدت عمليات على الرؤوس المتوسطة في الشبكة حيث إن كل مستقبل يحصل على كل الرسائل المرسلّة من كل المصادر.

## 2- تعاريف ومفاهيم أساسية:

### 1-2- تعريف (التطبيق الحدوديائي) ([2], p79)

ليكن  $K$  حقلاً ما، يُقال عن كل تطبيق من الشكل:

$$F = (f_1, \dots, f_n): K^n \rightarrow K^n$$

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto (f_1(a_1, \dots, a_n), \dots, f_n(a_1, \dots, a_n))$$

حيث  $f_i$  هو عنصر من الحلقة  $K[X] = K[x_1, \dots, x_n]$ ، من أجل كل  $i \in \{1, \dots, n\}$ . إنه تطبيق حدودياتي أو تطبيق كثيرات حدود.

2-2- تعريف: ([16],p5)

يُقال عن التطبيق الحدودياتي  $F: K^n \rightarrow K^n$  إنه قلوب إذا وجد

$$y_i = g_i(f_1, \dots, f_n), i = 1, \dots, n \text{ تحقق } g_1, \dots, g_n \in K[y_1, \dots, y_n]$$

2-3- تعريف (قاعدة غروبنر): ([6], p78)

ليكن  $I$  مثالي في حلقة كثيرات الحدود  $K[x_1, \dots, x_n]$  و  $G = \{g_1, \dots, g_t\}$  مجموعة جزئية منتهية من  $I$  فإنه يُقال عن  $G$  إنها قاعدة غروبنر للمثالي  $I$  إذا وفقط إذا تحقق:

$$\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle = \langle LT(I) \rangle$$

$$LT(I) = \{cx^\alpha: \exists f \in I, LT(f) = cx^\alpha\}$$

أو بشكلٍ مكافئ

المجموعة  $\{g_1, \dots, g_t\} \subset I$  هي قاعدة غروبنر لـ  $I$  إذا وفقط إذا كان الحد القائد

لأي عنصر من  $I$  يقبل القسمة على أحد الحدود  $LT(g_i)$  حيث  $i = 1, \dots, t$ .

ويُقال إنَّ  $G$  هي قاعدة غروبنر للمثالي  $I$  وفق علاقة ترتيب معينة، وذلك لأن تحديد الحدود القائدة  $LT(g_i)$  يتطلب تعيين علاقة ترتيب على الحدوديات.

2-4- مفاهيم أساسية في البيان: ([15],p2)

- البيان هو زوج مرتب  $G = (V, E)$  من المجموعات  $V, E$  حيث عناصر  $V$  هي رؤوس البيان وعناصر  $E$  هي أضلاع البيان وتكون على شكل مجموعات جزئية من  $V$  كلاً منها مكوّن من رأسين.
- يُقال عن الرأسين  $u, v$  إنهما متجاورين إذا وجد ضلع  $e$  يصل بينهما ونكتب  $e = (u, v)$ .
- يُقال عن الرؤوس غير المترافقة إنها مستقلة.
- وتُعرّف درجة الرأس  $v$  بأنها عدد الأضلاع المشتركة مع الرأس  $v$  ويرمز لها بـ  $\deg(v)$  أو  $d(v)$ .

### 2-5- البيان الموجه: ([19])

يُقال عن البيان  $G = (V, E)$  إنه بيان موجه الأضلاع إذا تحقق أن كل ضلع فيه موجه من رأس إلى رأس آخر.

### 3- الموديل الرياضي لشبكة اتصالات عامة ([13],p2)

شبكة الاتصالات هي بيان موجه لا يحوي دوائر  $G = (V, E)$ ، حيث  $V$  تمثل مجموعة الرؤوس و  $E$  تمثل مجموعة الأضلاع أو قنوات الاتصال، يوجد مجموعتين منفصلتين في  $V$  هما  $S, T \subseteq V$  (أي  $S \cap T = \emptyset$ ) حيث:

الرؤوس في  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  تدعى رؤوس المصدر وتملك درجة دخل صفر.

الرؤوس في  $T = \{t_1, \dots, t_m\}$  تدعى رؤوس المستقبل أو الهدف وتملك درجة خرج صفر.

حيث تُعرّف درجة دخل الرأس  $v$  بأنها عدد الأضلاع الموجهة الداخلة إلى الرأس  $v$  ورمزها  $id(v)$ .

ودرجة خرج الرأس  $v$  بأنها عدد الأضلاع الموجهة الخارجة من الرأس  $v$  ورمزها  $od(v)$ .

كل الرؤوس الأخرى في  $V$  تُدعى رؤوس متوسطة أو داخلية.

تُشكّل مجموعة الرموز  $M = \{m_1, \dots, m_n\}$  ما يُسمى بالرسالة المُراد نقلها من  $S$  إلى  $T$  وهي مأخوذة من أبجدية  $\Sigma$  (Alphabet) غالباً ما تكون عبارة عن حقل منته.

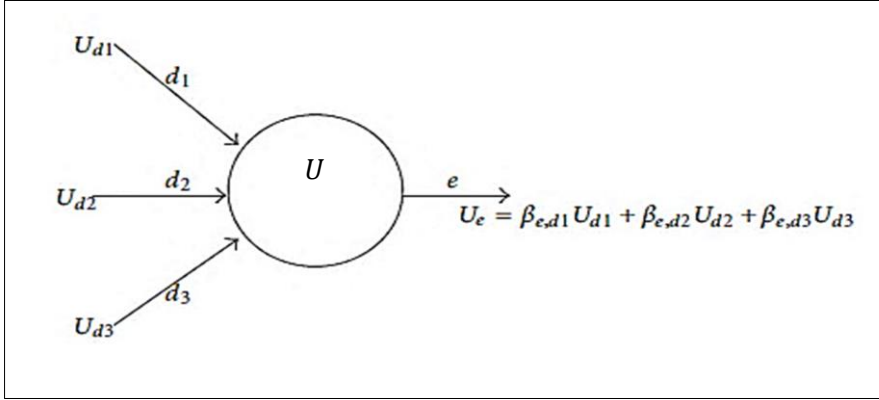
كل مصدر  $s_i$  يُولّد مجموعة من الرسائل، وكل مستقبل  $t_j$  يطلب مجموعة من الرسائل.

يتم إرسال رمز واحد خلال واحدة الزمن عبر كل ضلع من أضلاع البيان  $G$ .

ولأجل كل مصدر  $s_i$  الرمز على الضلع  $(s_i, v)$  هو دالة بالرسائل المولّدة في المصدر.

ومن أجل رأس متوسط  $u$  الرمز على الضلع  $(u, v)$  هو دالة بالرموز المحمولة على

الأضلاع الداخلة إلى الرأس  $u$ .



شكل 1-3

### 3-1- تعريف (ترميز الشبكة) ([13], p2)

لتكن  $N$  شبكة اتصالات مُعطاة عندئذٍ مجموعة كل الدوال المرافقة للأضلاع تُدعى بترميز الشبكة.

**ملاحظة:** ترميز الشبكة يَسمح للرؤوس الداخلية في الشبكة بمعالجة البيانات الواردة إليها و إجراء عمليات رياضية عليها بدلاً من نقلها و تخزينها فقط.

### 3-2- تعريف (الارتباط الجبري) ([11], p1)

ليكن  $K$  حقلاً ما، يُقال عن كثيرات الحدود  $f_1, \dots, f_k \in K[x_1, \dots, x_n]$  إنها مرتبطة جبرياً إذا وجد كثير حدود غير صفري  $A(t_1, \dots, t_k) \in K[t_1, \dots, t_n]$  يُحقق  $A(f_1, \dots, f_k) = 0$ ، وخلاف ذلك تُدعى مستقلة جبرياً.

**مثال:**

$f_2(x, y) = (x^2 + y^2)^3 + 1$  و  $f_1(x, y) = (x^2 + y^2)^2$  هي مرتبطة جبرياً لأنه يتحقق  $f_1^3 = (f_2 - 1)^2$  بالتالي وجد كثير حدود  $A(f_1, f_2) = 0$  يُحقق  $A(t_1, t_2) = t_1^3 - (t_2 - 1)^2$



## 3-3- تعريف (الاستقلال غير الخطي) ([18],p23)

ليكن  $K$  حقلاً ما، يُقال عن مجموعة الرسائل

$$\{f_1, \dots, f_m\} \subseteq K[x_1, \dots, x_m]$$

$$|\{f_1, \dots, f_m\}| = |\{x_1, \dots, x_m\}| = |K|^m$$

حيث  $x_1, \dots, x_m$  تُمثل الرسائل المرسلَة و  $f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m)$  تُمثل الرسائل المُستلمَة.

## 3-4- مبرهنة (النظرية الأساسية في ترميز الشبكة): ([8], p3) ([7], p15)

بفرض أن المصدر  $s_i$  ينقل الرمز  $\sigma_i$  من حقل ما  $F_q$ ، وبما أن الرؤوس المتوسطة يمكنها إجراء عملية تركيب خطي على العناصر الداخلة إليها فإن الأضلاع تحمل تراكيب خطية بالرموز المُرسلة عبر المصادر وبإمكان المستقبلات استخلاص الرموز المُرسلة، أي أن مسألة الترميز قابلة للحل إذا وفقط إذا تحقق أن الـ  $n$  ضلع المتعلقة بكل مستقبل تحمل تراكيب خطية مستقلة بالرموز  $\sigma_i$ .

## 4- البيان الترجيحي:

## 4-1- تعريف (البيان الترجيحي): ([14],p9)

البيان الترجيحي هو الثلاثية  $(V, \sigma, \mu)$  حيث  $G = (V, \sigma, \mu)$  هي دوال مُعرفة بالشكل التالي

$$\sigma: V \rightarrow [0,1], \mu: E \rightarrow [0,1]$$

$$\forall x, y \in V; \mu(x, y) \leq \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}$$

- المجموعة الترجيحية  $\sigma$  تُدعى مجموعة الرؤوس الترجيحية للبيان  $G$ .
- المجموعة الترجيحية  $\mu$  تُدعى مجموعة الأضلاع الترجيحية للبيان  $G$ .

## 4-2- تعريف ([14],p4)

لتكن  $S$  هي مجموعة ما، العلاقة الترجيحية  $\mu$  على  $S$  هي مجموعة جزئية ترجيحية من  $S \times S$

**4-3- تعريف ([14],p4)**

إذا كانت  $\mu$  علاقة ترجيحية على  $S$  و  $\sigma$  مجموعة جزئية ترجيحية من  $S$ ، عندئذ  $\mu$  هي علاقة ترجيحية على  $\sigma$  إذا تحقق:

$$\mu(x, y) \leq \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}, \forall x, y \in S$$

**4-4- تعريف ([14],p4)**

إذا كانت  $\sigma$  مجموعة جزئية ترجيحية من  $S$ ، فإن أقوى علاقة ترجيحية على  $\sigma$  هي  $\mu_\sigma$  المعطاة بالشكل

$$\mu_\sigma(x, y) = \min\{\sigma(x), \sigma(y)\}, \forall x, y \in S$$

**4-5- تعريف (تركيب العلاقات الترجيحية) ([14],p4)**

لتكن  $\rho: S \times T \rightarrow [0,1]$  هي علاقة ترجيحية من مجموعة جزئية ترجيحية  $\mu$  من  $S$  إلى مجموعة جزئية ترجيحية  $\nu$  من  $T$  ولتكن  $\omega: T \times U \rightarrow [0,1]$  علاقة ترجيحية من مجموعة جزئية ترجيحية  $\nu$  من  $T$  إلى مجموعة جزئية ترجيحية  $\xi$  من  $U$ . تُعرّف عملية التركيب للعلاقين

$$\rho \circ \omega: S \times U \rightarrow [0,1]$$

$$\rho \circ \omega(x, z) = \sup_{y \in T} \{\min\{\rho(x, y), \omega(y, z)\}\}$$

**5- التطبيقات الترجيحية**

يُعد التطبيق الترجيحي في الحالة الترجيحية تعميماً لمفهوم التطبيق في الحالة الكلاسيكية فهو تطبيق يربط كل عناصر المنطلق بعناصر من المستقر بدرجات ارتباط تأخذ قيمها من المجال  $L = [0,1]$  مع إهمال عناصر المنطلق والمستقر التي درجات انتمائها تساوي الصفر.

**5-1- تعريف ([10],p2)**

يُعرّف التطبيق الترجيحي بين المجموعتين  $\delta, \mu$  الجزئيتين الترجيحييتين من  $X, Y$  على الترتيب على أنه الثنائية  $(f, R)$  حيث:

•  $f$  هو تطبيق كلاسيكي من الشكل

$$\begin{aligned} f: \mu_0 &\rightarrow \delta_0 \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

حيث  $\mu_0 = \{x \in X ; \mu(x) > 0\}$

•  $R$  هي علاقة ترجيحية تحقق:

i.  $0 < R(x, f(x)) = \min\{\mu(x), \delta(f(x))\}$

ii.  $\forall y \in \delta_0 : y \neq f(x) ; R(x, y) = 0$

ونكتب :  $f_R: \mu \rightarrow \delta$

5-2- تعريف ([10],p4)

يُقال عن التطبيق الترجيحي  $f_R: \mu \rightarrow \delta$  إنه متبايناً (غامراً) إذا كان التطبيق

$f: \mu_0 \rightarrow \delta_0$  متبايناً (غامراً) ويُقال عن  $f_R: \mu \rightarrow \delta$  إنه تقابل إذا كان  $\mu_0 \rightarrow \delta_0$  تقابلاً.

5-3- تعريف التطبيق الترجيحي الواحدي ([10],p4)

يُعرف التطبيق الترجيحي الواحدي بالنسبة لـ  $\mu$  على أنه الثنائية  $(I, i_\mu)$  حيث

•  $I$  هو التطبيق المطابق بالنسبة لـ  $\mu_0$  :

$$I: \mu_0 \rightarrow \mu_0$$

$$x \mapsto I(x) = x$$

•  $i_\mu$  هي علاقة ترجيحية معرفة بالشكل

$$\forall (x, \dot{x}) \in X \times X: i_\mu(x, \dot{x}) = \begin{cases} \mu(x) & ; x = \dot{x} \\ 0 & ; x \neq \dot{x} \end{cases}$$

ونكتب  $I_{i_\mu}: \mu \rightarrow \mu$

5-4- تعريف: تركيب تطبيقين ترجيحين: ([10],p4)

ليكن  $f_{R_1}: \mu \rightarrow \delta, g_{R_2}: \delta \rightarrow \lambda$  تطبيقين ترجيحين، عندئذ يُعرف التركيب

$g_{R_2} \circ f_{R_1}$  على أنه التطبيق الترجيحي التالي:  $(g \circ f)_{R_2 \circ R_1}$  حيث:

$$g_{R_2} \circ f_{R_1} : \mu \rightarrow \lambda$$

$$g \circ f: \mu_0 \rightarrow \lambda_0$$

$$x \mapsto g(f(x))$$

حيث إن

$$\begin{aligned} \forall x \in \mu_0 : R_2 \circ R_1(x, g(f(x))) &= \sup_{t \in Y} \{ \min\{R_1(x, t), R_2(t, g(f(x)))\} \} \\ &= \min\{R_1(x, f(x)), R_2(f(x), g(f(x)))\} \\ &= \min\{\mu(x), \delta(f(x)), \lambda(g(f(x)))\} \end{aligned}$$

5-5-5 مبرهنة: ([10],p5)

ليكن  $f_{R_1}: \mu \rightarrow \delta, g_{R_2}: \lambda \rightarrow \mu$  تطبيقين ترجيحيين، إن التطبيق الترجيحي الواحدي بالنسبة لـ  $\mu$  تطبيق يحقق المساواتين التاليتين

$$I_{i_\mu} \circ g_{R_2} = g_{R_2}, f_{R_1} \circ I_{i_\mu} = f_{R_1}$$

5-6-6 تعريف: مقلوب تطبيق ترجيحي ([10],p8)

ليكن  $f_{R_1}: \mu \rightarrow \lambda$  إن مقلوب  $f_{R_1}$  هو عبارة عن التطبيق الترجيحي  $g_{R_2}: \lambda \rightarrow \mu$

$$f_{R_1} \circ g_{R_2} = I_{i_\lambda}, g_{R_2} \circ f_{R_1} = I_{i_\mu}$$

ملاحظة: إن مقلوب  $f_{R_1}$  يحقق أن

$$(f \circ g = I_{\lambda_0}) \text{ و } (g \circ f = I_{\mu_0}) \text{ و } (R_1 \circ R_2 = i_\lambda) \text{ و } (R_2 \circ R_1 = i_\mu)$$

عندها من السهل أن نرى مما سبق أنه لوجود التطبيق  $g$  يجب أن يكون  $f$  تقابلاً،

ونكتب

$g = f^{-1}$  ، ومن جهة أخرى يجب إيجاد علاقة ترجيحية  $R_2$  تحقق

$$R_2 \circ R_1 = i_\mu, R_1 \circ R_2 = i_\lambda$$

هذا يعني أنه يجب أن يتحقق ما يلي:

- $\forall x \in \mu_0 : (R_2 \circ R_1)(x, g \circ f(x)) = (R_2 \circ R_1)(x, x) = \min\{\mu(x), \lambda(f(x))\}$
- $\forall y \in \lambda_0 : (R_1 \circ R_2)(y, f \circ g(y)) = (R_1 \circ R_2)(y, y) = \min\{\lambda(y), \mu(f^{-1}(y))\}$

وبما أن  $f$  غامر فإن

$$\forall y \in \lambda_0 : \exists x \in \mu_0 : y = f(x)$$

وبالتالي يكون  $f^{-1}(y) = x$

$$\forall y \in \lambda_0 : (R_1 \circ R_2)(x, f \circ g(y)) = (R_1 \circ R_2)(y, y) = \min\{\lambda(f(x)), \mu(x)\}$$

من أجل (1) نجد  $\min\{\mu(x), \lambda(f(x))\} = \mu(x)$  عندما  $\mu(x) \leq \lambda(f(x))$

من أجل (2) نجد  $\min\{\mu(x), \lambda(f(x))\} = \lambda(f(x))$  عندما  $\mu(x) \geq \lambda(f(x))$

بالتالي  $\mu(x) = \lambda(f(x))$

إذاً يكون للتطبيق الترجيحي  $\lambda: \mu \rightarrow f_{R_1}$  مقلوب إذا تحقق الشرطان  
(1)  $f$  تقابل.

(2)  $f$  ينقل كل عنصر  $x \in \mu_0$  إلى عنصر من  $\lambda_0$  بحيث يتحقق  
 $\mu(x) = \lambda(f(x))$ .

5-7-نتيجة: ([10],p8)

إذا وجدَ للتطبيق الترجيحي  $\lambda: \mu \rightarrow f_{R_1}$  مقلوب عندئذ يكون  $f_{R_1}$  تطبيقاً ترجيحياً تقابلاً،  
ولكن العكس غير صحيح بالضرورة.

5-8-تعريف: ([9],p2)

ليكن  $F$  حقلاً ما، ولتكن  $K$  مجموعة جزئية في  $F$  مزودة بدالة عضوية  $\mu$   
يُقال إن  $K$  حقل ترجيحي في  $F$  ويُرمز له بـ  $(K, \mu, F)$  أو اختصاراً  $(K, \mu)$ ، إذا تحقق  
ما يلي:

1.  $\mu(x + y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$  ,  $\forall x, y \in F$
2.  $\mu(-x) \geq \mu(x)$  ,  $\forall x \in F$
3.  $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$  ,  $\forall x, y \in F$
4.  $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$  ,  $x \neq 0$

5-9-تعريف ([1],p2)

يُقال عن المجموعة الجزئية  $\mu$  من فضاء متجهي  $E$  على حقل  $K$  إنها فضاء جزئي  
ترجيحي من  $E$  إذا تحقق

$$\forall a, b \in K, \forall x, y \in E ; \mu(ax + by) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

5-10-مبرهنة ([1],p2)

لتكن المجموعة الجزئية  $\mu$  من فضاء متجهي  $E$  على حقل  $K$  فضاءً جزئياً ترجيحياً من  
 $E$  عندئذ يتحقق:

1.  $\mu(0) = \sup\{\mu(x) \mid x \in E\}$
2.  $\mu(ax) = \mu(x)$  ,  $\forall a \in K - \{0\}$  and  $x \in E$
3. if  $x, y \in E$  and  $\mu(x) \neq \mu(y)$  then  
 $\mu(x + y) = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$

**5-11- تعريف (الاستقلال الخطي الترجيحي) ([1],p2)**

ليكن  $\mu$  فضاءً جزئياً ترجيحياً من  $E$  يُقال عن مجموعة المتجهات  $B$  إنها مجموعة مستقلة خطية ترجيحية إذا تحقق

1.  $B$  هي مستقلة خطياً

$$2. \mu(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \min\{\mu(a_i x_i)\}, i = 1, \dots, n$$

إنَّ القاعدة الترجيحية للفضاء الترجيحي  $\mu$  هي مجموعة مولدة ومستقلة خطية ترجيحية  $L$ . لذلك إذا ملك فضاء جزئي ترجيحي  $\mu$  قاعدة ترجيحية  $B$  عندئذ قيم  $\mu$  عند عناصر القاعدة كافية لتحديد  $\mu$ .

إذا كان  $x \in E$  تركيباً خطياً بعناصر من القاعدة الترجيحية  $B$  أي

$$x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \text{ حيث } a_i \neq 0 \text{ عندئذ}$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \\ &= \min\{\mu(a_i x_i)\} = \min\{\mu(x_i)\}, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

**5-12- تعريف المثالي الترجيحي ([12],487)**

المثالي الترجيحي في حلقة  $R$  هو مجموعة جزئية ترجيحية  $[0,1] \rightarrow R$  تحقق مايلي :

1.  $\alpha(x + y) \geq \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}, \forall x, y \in R$
2.  $\alpha(xy) \leq \max\{\alpha(x), \alpha(y)\}, \forall x, y \in R$
3.  $\alpha(x) = \alpha(-x)$

**5-13- تعريف المثالي الحدودي الترجيحي ([12],488)**

ليكن المثالي الترجيحي  $\alpha: R \rightarrow [0,1]$  من حلقة  $R$ ، وليكن  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  كثير حدود في الحلقة  $R[x]$ . ولتكن المجموعة

الترجيحية  $\alpha_x: R[x] \rightarrow [0,1]$  حيث

$$\alpha_x(f(x)) = \min\{\alpha(a_i) \mid i = 0, 1, \dots, n\}$$

عندئذ يدعى  $\alpha_x$  مثالي حدودي ترجيحي.

## 6- الموديل الرياضي لشبكة اتصالات ترجيحية

في هذا الجزء نُعرّف نموذج رياضي ترجيحي لمسألة نقل المعلومات عبر شبكة اتصالات ترجيحية لتكون على الشكل الآتي

$$N = (G: (V, \sigma, \mu), S, R, (F_q, \mu_1), C, M, F)$$

حيث  $G: (V, \sigma, \mu)$  بيان موجه ترجيحي لا يحوي دوائر

وتحتوي  $\sigma$  على مجموعتين منفصلتين هما  $S, T$

والرؤوس في  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  تدعى رؤوس المصدر.

والرؤوس في  $T = \{t_1, \dots, t_m\}$  تدعى رؤوس المستقبل أو الهدف.

كل الرؤوس الأخرى في  $\sigma$  تدعى رؤوس متوسطة أو داخلية.

تُمثل  $C$  مجموعة ساعات قنوات الارسال خلال واحدة الزمن (باعتبار أضلاع البيان هي قنوات نقل المعلومات).

وتُشكل مجموعة الرموز  $M = \{m_1, \dots, m_n\}$  ما يُسمى بالرسالة المُراد نقلها من

المصادر إلى المستقبلات وهي مأخوذة من أبجدية  $\Sigma$  (Alphabet) هي عبارة عن حقل ترجيحي منته وليكن  $(F_q, \mu_1)$ .

كل مصدر  $s_i$  يولّد مجموعة من الرسائل الترجيحية  $A(s_i) \subseteq M$

وكل مستقبل  $t_i$  يطلب مجموعة من الرسائل الترجيحية  $D(t_i) \subseteq M$

يتم إرسال رمز واحد خلال واحدة الزمن عبر كل ضلع من أضلاع البيان  $G$ .

من أجل رأس متوسط  $u$  الرمز في القناة (Channel)  $e = (u, v)$  هو دالة ترجيحية بالرموز المُرسلة عبر الأضلاع الداخلة إلى الرأس  $u$ .

مجموعة دوال الترميز الترجيحية المُعرّفة لشبكة الاتصالات الترجيحية تُشكل تطبيق حدودياتي

$$F_R = (f_1, \dots, f_n): (F_q^n, \mu_1) \rightarrow (F_q^n, \mu_1)$$

من أجل كل  $i$  فإن  $f_{i_e}$  معطى بالشكل

$$f_{i_e}: \begin{cases} \Sigma^{|M|} \rightarrow \Sigma & \text{if } \exists i: v = s_i \\ \Sigma^{|E_{in}(v)|} \rightarrow \Sigma & \text{if } \forall i: v \neq s_i \end{cases}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X^\alpha : c_\alpha \in (F_q, \mu_1)$$

$|E_{in}(v)|$  تمثل عدد الأضلاع الداخلة إلى  $v$ .

إن  $R$  هي علاقة ترجيحية تحقق من أجل كل  $e = (u, v)$

i.  $0 < R(X, f_{i_e}(X)) = \min\{\sigma_u(X), \sigma_v(f_{i_e}(X))\}$

ii.  $\forall y \in \sigma_{v_0} : y \neq f_{i_e}(X) ; R(X, y) = 0$

حيث تُمثّل  $\sigma_u$  دالة العضوية لأبجدية الرأس  $u$ ، و  $\sigma_v$  دالة العضوية لأبجدية الرأس  $v$ .

سندعو التطبيق السابق بالتطبيق الترجيحي الحدودياتي

(Fuzzy polynomial map) ونرمز له بـ  $F_R$ .

### 6-1- ملاحظة

نقول عن دوال الترميز الترجيحية المحمولة على الأضلاع الداخلة إلى المستقبل إنها تُمثّل مسألة الترميز على شبكة الاتصالات الترجيحية أو المُعرّفة لشبكة الاتصالات الترجيحية، عندما يكون التطبيق الترجيحي الحدودياتي مُعرّف من أجل كل  $e =$

$$(u, t): t \in T$$

وتكون العلاقة الترجيحية  $R$  مُعرّفة بالشكل التالي:

i.  $0 < R(X, F(X)) = \min\{\sigma_s(X), \sigma_t(F(X))\}$

ii.  $\forall y \in \sigma_{t_0} : y \neq F(X) ; R(X, y) = 0$

### 6-2- تعريف (الاستقلال غير الخطي الترجيحي)

ليكن  $\mu$  فضاءً جزئياً ترجيحياً من  $E$  يُقال إن مجموعة المتجهات  $B$  هي مجموعة مستقلة غير خطية ترجيحية إذا تحقق

1.  $B = \{f_1, \dots, f_n\}$  هي مستقلة غير خطية

2.  $\mu(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha f_i) = \min_i \{\mu(c_\alpha f_i)\}$  ,  $i = 1, \dots, n$

القاعدة الترجيحية للفضاء الترجيحي  $\mu$  هي مجموعة مولدة ومستقلة غير خطية ترجيحية

$E$  لـ



ويتحقق

$$\mu \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ i=1, \dots, n}} c_\alpha f_i \right) = \min_i \{ \mu(c_\alpha f_i) \}$$

وأكثر من ذلك يتحقق

$$\begin{aligned} \min_i \{ \mu(c_\alpha f_i) \} &= \min_i \{ \mu(f_i) \} \\ &= \min_i \left\{ \mu \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha X^\alpha \right) \right\} = \min_\alpha \{ \mu(X^\alpha) \} \end{aligned}$$

في ما يلي نقوم بتقديم تعميم للنظرية الأساسية في ترميز الشبكة إلى الحالة الترجيحية

### 6-3- النظرية الأساسية في ترميز الشبكة غير الخطي الترجيحي:

لتكن  $N = (G: (V, \sigma, \mu), S, R, (F_q, \mu_1), C, M, F)$  شبكة اتصالات ترجيحية وليكن

المصدر  $(V, \sigma, \mu)$   $s_i \in S \subseteq (V, \sigma, \mu)$  ينقل الرمز  $\sigma_i \in (F_q, \mu_1)$ ، لأجل كل  $i = 1, \dots, q$

وبفرض أن الرؤوس الداخلية يمكنها إجراء عملية تركيب غير خطي على العناصر

الداخلية إليها، فإن الأضلاع ستحمل تركيبات غير خطية بالرموز المرسله عبر المصادر

وبإمكان المستقبلات استخلاص رموز المصدر أي أن مسألة الترميز قابلة للحل إذا فقط

إذا تحقق أن الـ  $n$  ضلع المتعلقة بكل مستقبل تحمل تركيبات مستقلة غير خطية ترجيحية

بالرموز  $\sigma_i$ .

### 6-4- مبرهنة

لتكن  $N$  شبكة ترجيحية، ولتكن  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  مجموعة رؤوس المصدر و

$T = \{t_1, \dots, t_m\}$  مجموعة المستقبلات، وخلال واحدة الزمن يُرسل المصدر  $s_i$

الرسالة الترجيحية  $a_i \in (F_q, \mu_1)$ ، وذلك  $\forall i = 1, \dots, n$ . عندئذ بإمكان المستقبلات

$t_j$  وذلك  $\forall j = 1, \dots, m$  استخلاص الرموز المرسله  $a_i$  إذا فقط إذا تحقق أن مجموعة

دوال الترميز الترجيحية  $\{f_1, \dots, f_m\}$  الممثلة لمسألة الترميز على شبكة الاتصالات

الترجيحية  $N$  تُشكل قاعدة ترجيحية في الفضاء  $(F_q, \mu_1)[x_1, \dots, x_n]$  للمثالي

والذي هو مثالي ترجيحي مُولّد بدوال الترميز الترجيحية المُعرّفة لشبكة الاتصالات الترجيحية.

**البرهان**

بفرض أن المسألة قابلة للحل، وبما أن  $\{f_1, \dots, f_n\}$  تولّد المثالي  $I$  فيكفي أن نُبرهن أنها مجموعة مستقلة غير خطية ترجيحية.

**أولاً**

المسألة قابلة للحل تعني أن الـ  $n$  مسار منفصل المتعلقة بالمستقبلات تحمل تركيبات غير خطية مستقلة برسائل المصدر ([8], p3)، وهذا يكافئ أنه إذا كانت  $\{x_1, \dots, x_n\}$  هي مجموعة الرسائل الأصلية المُرسلة عبر المصادر والـ  $n$  رسالة المستلمة هي  $\{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)\}$ ، وذلك بافتراض عدم وجود أي ضياع أو فقدان للرموز المُرسلة عبر المصادر، عندئذ حسب النظرية الأساسية في ترميز الشبكة في الحالة الترجيحية تكون المسألة قابلة للحل إذا وفقط إذا تحقق أن الـ  $n$  ضلع المتعلقة بها تحمل تركيبات غير خطية مستقلة بالرسائل  $\{x_1, \dots, x_n\}$  أي دوال الترميز الترجيحية المُعرّفة لشبكة الاتصالات الترجيحية، مما يعني أن الرسائل المستلمة  $\{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)\}$  مستقلة غير خطية.

**ثانياً**

لنبرهن تحقق  $\mu_2(\sum_{i=1}^n a_i f_i) = \min\{\mu_2(a_i f_i)\}, i = 1, \dots, n$  ينتج مباشرةً حسب تعميم المبرهنة الأساسية في ترميز الشبكة إلى الحالة الترجيحية وذلك حسب تعريف الاستقلال غير الخطي الترجيحي وهو المطلوب.

بفرض أن مجموعة دوال الترميز الترجيحية  $\{f_1, \dots, f_n\}$  المُمتلة لمسألة الترميز على شبكة الاتصالات الترجيحية  $N$  تُشكل قاعدة ترجيحية في الفضاء  $I = (\langle f_e \rangle, \mu_2)$  للمثالي  $(F_q, \mu_1)[x_1, \dots, x_n]$

عندئذ حسب التعريف تكون هذه الدوال مستقلة غير خطية ترجيحية، وحسب النظرية الأساسية في ترميز الشبكة الترجيحية تكون المسألة قابلة للحل وهو المطلوب.

### 6-5- نتيجة

لتكن  $N$  شبكة ترجيحية. إن مسألة ترميز الشبكة الترجيحية قابلة للحل إذا فقط إذا تحقق أن التطبيق الترجيحي الحدودياتي  $F_R$  المُعرّف بدوال الترميز الممثلة لمسألة ترميز الشبكة على  $N$  متباين.

**البرهان:**

إن مسألة ترميز الشبكة في الحالة الكلاسيكية قابلة للحل إذا فقط إذا تحقق أن تطبيق كثيرات الحدود  $F = (f_1, \dots, f_n)$  المُعرّف للشبكة متباين. لأن المسألة قابلة للحل إذا فقط إذا تحقق أن الـ  $n$  ضلع المتعلقة بها تحمل تركيبات غير خطية مستقلة بالرسائل  $\{m_1, \dots, m_n\}$  مما يعني أن الرسائل المستلمة  $\{f_1(m_1, \dots, m_n), \dots, f_n(m_1, \dots, m_n)\}$  مستقلة، وحسب تعريف الاستقلال غير الخطي (3-3) يوجد تقابل واحد لواحد بين المجموعة  $\{m_1, \dots, m_n\}$  والمجموعة  $\{f_1(m_1, \dots, m_n), \dots, f_n(m_1, \dots, m_n)\}$  وهذا يكافئ أن تطبيق كثيرات الحدود  $F$  المُعرّف للشبكة متباين

$$F = (f_1, \dots, f_n): F_q^n \rightarrow F_q^n$$

$$(m_1, \dots, m_n) \mapsto (f_1(m_1, \dots, m_n), \dots, f_n(m_1, \dots, m_n))$$

وهذا يكافئ حسب التعريف (2-5) أن التطبيق الترجيحي الحدودياتي

$$F_R = (f_1, \dots, f_n): (F_q^n, \mu_1) \rightarrow (F_q^n, \mu_1)$$

### 6-6- نتيجة:

لتكن  $N$  شبكة ترجيحية، ويفرض أن  $\{f_1, \dots, f_m\}$  هي مجموعة دوال الترميز الترجيحية الممثلة لمسألة الترميز على شبكة الاتصالات الترجيحية  $N$ . عندئذ تكون مسألة ترميز الشبكة الترجيحية قابلة للحل إذا وجد للتطبيق الترجيحي الحدودياتي  $F_R = (f_1, \dots, f_n): (F_q^n, \mu_1) \rightarrow (F_q^n, \mu_1)$  مقلوب ترجيحي وليكن  $F_R^{-1}$ .

البرهان:

حسب النتيجة (5-7) نجد أن التطبيق الترجيحي الحدودياتي  
 $F_R = (f_1, \dots, f_n): (F_q^n, \mu_1) \rightarrow (F_q^n, \mu_1)$  هو تطبيق ترجيحي تقابل، فهو متباين وحسب النتيجة السابقة تكون مسألة الترميز قابلة للحل.

### 6-7-نتيجة

لتكن  $N$  شبكة ترجيحية، والأبجدية  $\Sigma$  هي عبارة عن حقل ترجيحي منته وليكن  $(\bar{F}_q, \mu_1)$  حيث  $\bar{F}_q$  هي الغلقة الجبرية (Algebraic closure) للحقل  $F_q$ ، ولتكن  $\{f_1, \dots, f_n\}$  دوال الترميز الترجيحية المُعرّفة لشبكة الاتصالات الترجيحية، عندئذ مسألة ترميز الشبكة الترجيحية قابلة للحل (أي يمكن لكل مستقبل استخلاص الرسائل المرسلَة عبر المصادر) إذا تحقق أن  $\det JF_R \neq 0$ .  
 لنفترض أن مسألة ترميز الشبكة غير قابلة للحل ولنبرهن أن  $\det JF_R = 0$  وبذلك يتم المطلوب.

بما أن مسألة ترميز الشبكة غير قابلة للحل أي حسب النتيجة (6-5) يكون التطبيق الترجيحي الحدودياتي  $F_R$  غير متباين أي التطبيق الكلاسيكي  $F: \bar{F}_q^n \rightarrow \bar{F}_q^n$  غير متباين أيضاً.

لُعرّف التشاكل الحلقي:

$$\Phi: \bar{F}_q[y_1, \dots, y_n] \rightarrow \bar{F}_q[x_1, \dots, x_n]$$

$$y_i \mapsto f_i$$

أي

$$\forall h = \sum_v c_v y_1^{v_1} \dots y_n^{v_n} : c_v \in F_q, v = (v_1, \dots, v_n) \in N^n$$

يتحقق

$$\Phi(h) = \sum_v c_v f_1^{v_1} \dots f_n^{v_n} = h(f_1, \dots, f_n) \in \bar{F}_q[x_1, \dots, x_n]$$

عندها نواة هذا التشاكل تكون معطاة بالشكل

$$\text{Ker } \Phi = \{P \in \bar{F}_q[y_1, \dots, y_n] : P(f_1, \dots, f_n) = 0\}$$

وبما أن التطبيق  $F: \bar{F}_q^n \rightarrow \bar{F}_q^n$  غير متباين فإن  $\text{Ker } \Phi \neq \{0\}$ .  
وذلك بسبب التكافؤ التالي:

يُقال إن المتنوعتين  $A, B$  متماثلتين إذا وفقط إذا كانت حلقات الاحداثيات لهما متماثلة.

وهنا لدينا  $A = B = \bar{F}_q^n$  فيتحقق أن  $\mathbb{I}(\bar{F}_q^n) = \langle 0 \rangle$

أي يوجد  $P(u_1, \dots, u_n)$  كثير حدود غير صفري ولنختاره من أصغر درجة كلية يحقق  
:

$$P(f_1, \dots, f_n) = 0$$

عندئذ إذا قُمنّا بحساب المُشتقات الجزئية لكثير الحدود  $P(f_1, \dots, f_n)$  نحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} P(f_1, \dots, f_n) = \frac{\partial P}{\partial u_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial P}{\partial u_n} \frac{\partial f_n}{\partial x_i} : i = 1, \dots, n$$

بالتالي يمكن أن نكتب العلاقة السابقة بالشكل المصفوفي:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial P}{\partial u_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

وبحسب اختيار  $P$  فإنه يتحقق:

$$\frac{\partial P}{\partial u_i} (f_1, \dots, f_n) \neq 0 : 1 \leq i \leq n$$

وبالتالي  $\det(J(f_1, \dots, f_n)) = 0$  وهو المطلوب.

### 6-8- مبرهنة

ليكن التطبيق الترجيحي الحدودياتي  $F_R$  المُعرّف لشبكة اتصالات ترجيحية معطاة  $N$ ،  
من الشكل التالي:

$$F_R = (f_1, \dots, f_n): (F_q^n, \mu_1) \rightarrow (F_q^n, \mu_1)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

عندئذ مسألة ترميز الشبكة قابلة للحل إذا تحقق أنَّ

$$(F_q, \mu_1)[x_1, \dots, x_n] = (F_q, \mu_1)[f_1, \dots, f_n]$$

**البرهان:**

بفرض أنَّ  $(F_q, \mu_1)[x_1, \dots, x_n] = (F_q, \mu_1)[f_1, \dots, f_n]$  عندئذ  $x_i \in$

$(F_q, \mu_1)[f_1, \dots, f_n]$  لأجل كل  $i$ ، أي يوجد  $g_i$  بحيث

$x_i = g_i(f_1, \dots, f_n)$  لذلك  $G = (g_1, \dots, g_n)$  هو معاكس يساري لـ  $F_R$ ، حسب

التعريف (6-5) وحسب النتيجة (6-6) فإن مسألة ترميز الشبكة تكون قابلة للحل.

نقدّم فيما يلي شرطاً كافياً لقبالية حل مسألة الإرسال على شبكة ترجيحية اعتماداً على

بُعد الفضاء  $\frac{(F_q, \mu_1)[X, Y]}{I}$ .

ليكن  $(F_q, \mu_1)$  حقلاً ما و  $(F_q^n, \mu_1) \rightarrow (F_q^n, \mu_1)$   $F_R = (f_1, \dots, f_n):$

تطبيق حدودياتي ترجيحي ولتكن  $y_1, \dots, y_n$  عبارة عن  $n$  متحول أو اختصاراً  $Y$  وليكن

$I$  مثالياً في  $(F_q, \mu_1)[X, Y]$  مولدٌ بـ  $y_1 - f_1(X), \dots, y_n - f_n(X)$

عندئذ يمكننا صياغة المبرهنة الآتية:

### 6-9- مبرهنة:

لتكن  $N$  شبكة ترجيحية، عندئذ مسألة الترميز قابلة للحل إذا تحقق

$$\dim \frac{(F_q, \mu_1)[X, Y]}{I} = 1$$

**البرهان**

بفرض أنَّ  $\dim \frac{(F_q, \mu_1)[X, Y]}{I} = 1$

عناصر هذا الفضاء هي المرافقات من الشكل :

$$[f] = f + I = \{f + h : h \in I\}$$

وتُعرّف القاعدة للفضاء المتجهي  $\frac{K[x_1, \dots, x_n]}{I}$  بأنها مجموعة المرافقات لكل الحدوديات

$X$  بحيث يتحقق، من أجل كل  $i = 1, \dots, t$  فإن  $LP(g_i)$  لا يقسم  $X$ .

([2], p58)

عندئذ قاعدة غروينر للمثالي  $I$  لها الشكل:

$$G = \{x_1 - g_1(Y), \dots, x_n - g_n(Y)\} \text{ حيث } g_i \in (F_q, \mu_1)[Y]$$

وبما أن  $I = \langle y_1 - f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n - f_n(x_1, \dots, x_n) \rangle$  عندئذ يمكن أن نكتب

$$x_i - g_i(Y) = \sum_j b_j(X, Y) (y_j - f_j(X)) : b_j \in (F_q, \mu_1)[X, Y]$$

ويتحقق عند المستقبليات أن  $y_j = f_j$

بالتالي  $x_i - g_i(f_1(X), \dots, f_n(X)) = 0 ; \forall i = 1, \dots, n$

إذن  $G(F(X)) = X$  حيث  $G = (g_1, \dots, g_n)$  أي  $F$  يملك معاكس، ([3], p2) وحسب النتيجة (6-6) فإن مسألة الترميز قابلة للحل.

### 6-10- الترميز الثنائي الترجيحي:

تُعرّف الرسالة الترجيحية الثنائية لتكون مجموعة جزئية  $M$  من  $Z_2^n$  لها الشكل

$$M = \{(m_i, \mu(m_i)) : m_i \in Z_2^n\}$$

مزودة بدالة عضوية  $\mu$  مُعرّفة بالشكل التالي

$$\mu: Z_2^n \rightarrow [0, 1]$$

$$m_i \mapsto \frac{w(m_i)}{J}$$

حيث

- $w(m_i)$  هو مجموع مواقع الخانات غير الصفيرية في  $m_i$
- $J$  يمثل أكبر مجموع مواقع خانات ممكن وهو مُعرّف كما يلي  $J = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

وإذا تحقق

1.  $\mu(m_i + m_j) \geq \min\{\mu(m_i), \mu(m_j)\}$
2.  $\mu(m_i m_j) \leq \max\{\mu(m_i), \mu(m_j)\}$

عندها يُدعى ترميز ثنائي ترجيحي.

## 6-10-2- مثال لترميز ثنائي ترجيحي:

لنأخذ الترميز على الأبجدية  $Z_2^7$

$$C = \{0000000, 1111111, 1000101, 1100010, 0110001, \\ 1011000, 0101100, 0010110, 0001011\}$$

$m_i \in C$	$\mu(m_i)$
0000000	0/28
1111111	28/28
1000101	13/28
1100010	9/28
0110001	12/28
1011000	8/28
0101100	11/28
0010110	14/28
0001011	17/28

جدول 1-

نلاحظ أن شروط الترميز الثنائي الترجيحي محققة من أجل كل كلمات الترميز C .

## 7- مثال

سنقدّم فيما يلي تطبيقاً عملياً على شبكة ترجيحية ما وسنرى أن هذا النوع من الشبكات يُقدّم أكبر قدر ممكن من الثقة في جهة الحماية من حسابات التعريف المزيفة وذلك من خلال تعريف دالة للعضوية في الشبكة، وهذا التطبيق مُتبع في بعض شبكات الاتصال مثل شبكة Research Gate حيث أنه لا يتم قبول أي عضو فيها إلا بعد دراسة معينة.

**توصيف العمل على هذا النوع من الشبكات**

**التسجيل:**

الخطوة الأولى للانضمام إلى الشبكة هي التسجيل، أثناء التسجيل يجب أن يقوم الشخص بعدة خطوات ليتم تسجيله فيجب على الأشخاص المسجلين حديثاً إضافة بعض المعلومات الأساسية مثل الاسم والعمر والصورة الشخصية والجنس وما إلى ذلك من معلومات شخصية، وبعدها يحصل جميع الأشخاص الموجودين على الشبكة على هذه المعلومات الأساسية للشخص المُسجل حديثاً.



تتميز هذه الشبكة المدروسة بخطوة سندعوها خطوة المُصادقة ففي هذه الخطوة يجب على الشخص تقديم بعض المعلومات مثل (1) اسم المدرسة - الكلية، الاهتمامات العلمية (2) موقع الوظيفة الحالية أو مكان العمل أو المؤسسة (أيضاً الوظائف وأماكن العمل السابقة، إن وجدت)، فالمنظمات والمواقع الإلكترونية الرسمية تحتوي على المعلومات الشخصية الأساسية ومعلومات الاتصال إلى جانب عناوين البريد الإلكتروني كلها متوفرة في مواقع الويب الخاصة بالمؤسسة أو المنظمة أو الجامعة التي ينتمي إليها الشخص.

على سبيل المثال في شبكة Research Gate نلاحظ وجود اختيار آخر للباحثين الذين لا ينتمون إلى منظمة أو مؤسسة تمتلك حساب الكتروني رسمي (شكل 7-1)، لذلك لا يمكن التأكد من هوية هؤلاء الأشخاص لأن الملفات

ResearchGate

Join 20+ million researchers, including 79 Nobel Laureates

What type of researcher are you?

Academic or student  
University students and faculty, institute members, and independent researchers

Corporate, government, or NGO  
Technology or product developers, R&D specialists, and government or NGO employees in scientific roles

Medical  
Health care professionals, including clinical researchers

Not a researcher  
Journalists, citizen scientists, or anyone interested in reading and discovering research

شكل 7-1

الشخصية الإلكترونية لهؤلاء الأشخاص

غير متوفرة في مواقع الويب

الأصلية، لذلك سيتم

قبول هؤلاء بعد موافقة مجموعة معينة

من أعضاء الشبكة وليكن

عدد هؤلاء هو  $n$ .

(من أجل هؤلاء يتحقق  $\sigma(p) = 1$ )

حيث  $p$  هو عضو أساسي في الشبكة.

نُعرّف أيضاً قيمة عضوية الرؤوس

(التي تُمثّل الأشخاص المنتسبين إلى الشبكة المدروسة) كما يلي:

$$\sigma(p) = \begin{cases} \frac{d}{n} & \text{if } d = 1, 2, \dots, n \\ 1 & \text{if } d > n \end{cases}$$

حيث  $d$  هو عدد الرؤوس المرافقة لـ  $p$  (أي التي تشترك مع الشخص  $p$  برابط على سبيل

المثال نفس التخصص الدقيق - أو نفس الجنسية).

وحسب التعريف (4-4)، نُعرّف قيمة عضوية الضلع الذي يربط بين  $p_i, p_j \in V$  من

خلال التطبيق  $\mu: V \times V \rightarrow [0,1]$  حيث

$$\mu(p_i, p_j) = \min\{\sigma(p_i), \sigma(p_j)\}$$

الفائدة من هذه الشبكة:

تمتلك الجامعات التي ترعاها الحكومة مواقع ويب رسمية تحتوي هذه المواقع على الأسماء ومعلومات الاتصال (على سبيل المثال أعضاء هيئة التدريس في الجامعة - كلية العلوم). إذا أراد شخص ما التسجيل في الشبكة فعليه تقديم اسم الجامعة وعنوان الويب ثم يتعين عليه تقديم عنوان بريده الإلكتروني وأرقام هواتفه وما إلى ذلك من المعلومات المتوفرة في عنوان الويب، ثم يتم إرسال رمز التحقق أو رابط التفعيل إلى عناوين الاتصال إذا تم التحقق من المعلومات بشكل صحيح، فمن المؤكد أن الشخص ليس مزيفاً.

هنا يحصل الأشخاص العاملين في المؤسسات الرسمية والشركات وما إلى ذلك على فرصة للحصول على العضوية الكاملة ( أي  $\sigma(p) = 1$  )، بينما يحصل الأشخاص الآخرون على العضوية الكاملة من خلال التّعرف على الأشخاص المؤلفين له فقط مثل أصدقاء المدرسة - الكلية - الجامعة، والزملاء، وما إلى ذلك في الشبكة.

بالمقارنة مع Facebook و Twitter لا يمكن للأشخاص تحديد فيما إذا كان الملف الشخصي الذي يُمثل ملفاً شخصياً لأحد المشاهير أو من عامة الناس هو ملف حقيقي أم مزيف، لأن الملف الشخصي يتم إنشاؤه على هذه الشبكات بواسطة مجهول، لا يحتاج إلى التحقق منه أو التعرف عليه، هنا تكمن فائدة الشبكات الترجيحية في الحد من الملفات المزيفة.

## 8- خلاصة

تُقدّم هذه الورقة العلمية توصيف جبري لمسألة ترميز الشبكة الترجيحية، فتم عرض موديل أو نموذج رياضي لشبكة اتصالات ترجيحية، كما تم نقل النظرية الأساسية لترميز الشبكة من الحالة الكلاسيكية إلى الحالة الترجيحية ووضع شرط لازم وكافي لتكون مسألة الترميز قابلة للحل اعتماداً على كثيرات الحدود المُعرّفة لمسألة الترميز على الشبكة الترجيحية (4-6)، كما تم استخلاص بعض النتائج حول قابلية حل المسألة اعتماداً على التطبيق الترجيحي الحدودياتي  $F_R$  المُعرّف بدوال الترميز الممثلة لمسألة ترميز الشبكة، وفي النهاية تم تقديم دراسة حول شبكة واقعية لتوضيح أهمية العمل على الشبكات الترجيحية.

## 9- توصيات ومقترحات:

بالارتكاز على ما توصلنا إليه من نتائج، نرى أنه من الممكن الاستفادة من الحالة الترجيحية التي تم عرضها في هذا البحث في نظرية الترميز وبشكل خاص في اكتشاف وتصحيح الأخطاء الناتجة خلال عملية الإرسال عبر قنوات ضجيجية. ومن المواضيع الهامة جداً والتي نضعها كروية مستقبلية لموضوع بحثنا هذا هو موضوع حماية شبكة الاتصالات المدروسة من الهجمات (التنصت) أو من المستخدمين غير المُصرح لهم الدخول إلى الشبكة والحصول على المعلومات المُرسلة، أي موضوع أمن المعلومات المرسلة عبر الشبكة.

المراجع العلمية: **References**

1. ABDUKHALIKOV, K. KIM, C. 1998 Fuzzy Linear Maps, **journal of mathematical analysis and application**, 220. 1-13
2. ADAMS, W and LOUSTAUNAU, P 1994- **An Introduction to Groebner Bases**. Graduate Studies in mathematics 3, AMS, Providence. 105p.
3. ADAMUS, E PAWEL, B CRESPO, T and HAJTO, Z 2016. A new characterization of the invertibility of polynomial maps , **Mathematics, arXiv, Commutative Algebra**, Cornell University. 1-15.
4. AHLWEDE, R. CAI, N and ROBERT, L 2000 Network Information Flow, **IEEE Transactions on Information Theory**, Vol.46, 4. 1204 -1216.
5. CELEBILER, M, and STETTE, G 1978 On Increasing the Down-Link Capacity of a Regenerative Satellite Repeater in Point-to-Point Communications, **Proceedings of the IEEE**, Vol. 66. 1. 98–100.
6. COX D, LITTLE J, and O'SHEA D, 1998- **Ideals, Varieties, and Algorithms**. fourth Edition. New York: London. Springer. 653p
7. FRAGOULI, C and SOLJANIN, E 2007 - **Network Coding Fundamentals**, Foundation and Trends R in Networking, 133p
8. FRAGOULI, C and SOLJANIN, E 2015 (Secure) Linear network coding multicast A theoretical minimum and some open problems, Designs, Codes and Cryptography comprising the 25<sup>th</sup> Anniversary Issue. **New York: Springer Verlag**. 1-42.

9. GEBRAY, G and REDDY, B 2014 Fuzzy Set Field and Fuzzy Metric, Department of Mathematics, UCS, **Osmania University, India**, Vol.2014 .1-9.
10. ISMAIL, F and MASSADEH, M 2013 A New Structure and Constructions of L-Fuzzy Maps, **International Journal of Computational and Applied Mathematics**. ISSN 1819-4966 Vol 8.1. 1-10 .
- 11 KAYAL, N 2007. The complexity of the annihilating polynomial, **Conference Paper in Proceedings of the Annual IEEE Conference on Computational Complexity**, Paris: France.184-193.
12. KIMA, B KIMB, S and SOOK, K 2014 On the fuzzy polynomial ideals, **Journal of Intelligent & Fuzzy Systems**, Vol. 27. 487–494.
13. LEHMAN, A and LEHMAN, E 2004 Complexity classification of network information flow problems, **Proceedings of the fifteenth annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms**, 142–150.
14. MORDESON, J MATHEW, S MALIK, D 2018- **Fuzzy Graph Theory with Applications to Human Trafficking**, Springer, 262p.
15. ROUAYHEB, E and GEORGHIADES, C 2009. Graph Theoretic Methods in Coding Theory, **ECE Department, Texas A&M University**, College Station, TX 77843,1-10
16. VAN DEN ESSEN, A 1994- **Automorphisms of Affine Spaces**, Proceedings of a Conference held in Curaao (Netherlands)

Antilles ), July 4-8, 1994, under auspices of the Caribbean Mathematical Foundation CMF. 243p.

17. ZADEH, L 1965 Fuzzy Sets, **Information and control**, Vol. 8, Issue 3. 338-353.

18. ZHANG, G CAI, S ZHANG, D 2017. The Nonlinear Network Coding and Its Application in Error-Correcting Codes, **Springer**. 1-30.

19- شاهين، رامي، محفوض، سهيل. 2010-2011. نظرية البيان، منشورات جامعة

تشرين، كلية العلوم.

## حول مسألة غالوا العكسية

طالب الدراسات العليا: فادي أبو حرب

كلية العلوم - جامعة دمشق

إشراف الدكتور: حمزة حاكمي + د. نور غازي

### الملخص

تتص مسألة غالوا العكسية على ما يلي: لأجل أي زمرة منتهية  $G$  ولأجل أي حقل  $K$ ، يوجد تمديد غالوا  $F/K$  زمرة تماثل الزمرة  $G$ . قمنا في بحثنا هذا بحل هذه المسألة فوق حقل لا يحوي حقل أمبل، وذلك بالاعتماد على حل مسألة التوسيع  $EP$  وعلاقتها بمسألة غالوا العكسية مع الاستفادة من مبرهنة بوب.

الكلمات المفتاحية: زمرة غالوا - مسألة التوسيع - حقل هنسيلي - الحقل الأمبل.

التصنيف الرياضياتي العالمي: 2020 MSC 12F12

# On Inverse Galois Problem

## Abstract

Inverse Galois Problem over a field  $K$  consists in realizing finite groups as Galois groups of Galois extension  $F/K$ . We do a solution of this problem over field does not have ample field, depending on solving Embedding Problem and its relation with Inverse Galois Problem and by using Pop theorem.

**Key Words :** Galois group, Embedding Problem, Henselian field, Ample field.

**Mathematical Subject Classification :** 2020 MSC 12F12.



## 1 - مقدمة .

ظهرت نظرية غالوا في بدايات القرن التاسع عشر لإيجاد حل للحدوديات من خلال جذورها. أول نتيجة مهمة تم إنجازها من قبل العالم غالوا هي برهان أن الحدوديات من الدرجة الخامسة فما فوق ليست قابلة للحل بواسطة الجذور بالحالة العامة، وأعطى العالم غالوا شرطاً لازماً وكافياً لحل هذا النوع من الحدوديات بواسطة الجذور وهو أن تكون زمرة غالوا لهذه الحدودية قابلة للحل.

وفقاً للمبرهنة الأساسية في نظرية غالوا فإنه يوجد لأجل كل حدودية غير خزولة على حقل ما  $K$  زمرة غالوا مقابلة لها. دُعيت المسألة المعاكسة لهذه الفكرة بمسألة غالوا العكسية IGP، والتي تنص على ما يلي: لأجل زمرة منتهية ما  $G$ ، ولأجل حقل ما  $K$ ، يوجد تمديد غالوا  $E$  للحقل  $K$  بحيث زمرة تماثل الزمرة  $G$ .

تم حل هذه المسألة لأجل بعض الزمر مثل الزمر  $A_n, S_n$  ولأجل الزمر التبديلية، وتم حل هذه المسألة أيضاً لأجل بعض الحقول مثل حقل الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$ . ترافق مع ظهور مسألة غالوا العكسية ظهور مسألة تُعد تعميماً لها، دُعيت مسألة التوسيع Embedding problem والتي يرمز لها بـ EP، والتي ساهمت في حل الكثير من الحالات في مسألة غالوا العكسية. هناك الكثير ممن عملوا في هذه المسألة ونذكر منهم Scholz, Brauer, Faddeev, Haran.

أثبت بوب في مقال له عام 1996 أن مسألة التوسيع المنتهية المنشطرة تملك حلاً تاماً فوق نوع معين من الحقول دعاه بالحقل الأمبل [10]، حيث يُعرّف الحقل الأمبل كما يلي: نقول عن الحقل  $K$  إنه أمبل إذا كان لكل منحنى أملس معرّف على  $K$  عدد غير منته من النقاط الـ  $K$ -نسبية بشرط وجود نقطة  $K$ -نسبية واحدة على الأقل.

سنقوم في بحثنا هذا بحل مسألة غالوا العكسية لأجل حقل لا يحوي حقل أمبل. أي سنقوم بإثبات المبرهنة التالية:

مبرهنة ( \* ).

ليكن  $D$  حقلاً مميزه صفراً و لا يحوي حقلاً أميل. عندئذٍ يوجد حقلاً  $K$  ممدد منتظم لـ  $D$  بحيث يحقق ما يلي:

1. لتكن  $G$  زمرة منتهية، عندها يوجد حقلاً  $E$  تمديد للحقل  $K$  بحيث

$$\text{Gal}(E/K) \cong G.$$

2. الحقل  $K$  لا يحوي حقلاً أميل.

## 2 - الدراسة البحثية.

### 2 - 1 التمديد المنتهي والجبري. [6]

ليكن  $L, K$  حقلين. نقول عن الحقل  $L$  إنه تمديد لـ  $K$  (و نرمز لذلك بـ  $L/K$ ) إذا وجد تشاكل حلقي من  $K$  إلى  $L$ .

نعرف درجة تمديد  $L/K$  بأنها بُعد الفضاء الشعاعي  $L$  على الحقل  $K$ ، و نرمز لها بـ  $[L:K]$ . نقول عن التمديد  $L/K$  إنه منته إذا كان  $[L:K] < \infty$  و خلاف ذلك نقول أنّ التمديد غير منتهي. فمثلاً التمديد  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$  تمديد منته درجته 2 بينما  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  تمديد غير منتهي. نقول عن التمديد  $L/K$  إنه تمديد جبري إذا كان كل عنصر  $t \in L$  جبرياً فوق  $K$  ( أي توجد حدودية غير صفرية  $p(x) \in K[x]$  بحيث  $p(t) = 0$  ). تشكل مجموعة العناصر من  $L$  الجبرية فوق  $K$  حقلاً ممدداً للحقل  $K$  يدعى باللصاقة الجبرية لـ  $K$  في  $L$ ، ويرمز لها بـ  $\bar{K}$ .

### 2 - 2 تمديد غالوا.

#### 2-2-1 تركيب الحقول. [6]

ليكن  $E/K$  تمديد حقول. إذا كان  $L_1, L_2$  حقلين جزئيين للتمديد  $E/K$ ، عندئذٍ ندعو

$$L_1 L_2 := L_1(L_2) = L_2(L_1)$$

بتركيب الحقلين  $L_1, L_2$  في  $E$ ، ويُمثل أصغر حقل (بالنسبة لعلاقة الاحتواء) يحوي  $L_1, L_2$  معاً.

### 2-2-2 التمديد القابل للفصل. [6]

ليكن  $F/K$  تمديداً جبرياً. نقول عن حدودية  $p(x) \in K[x]$  إنها قابلة للفصل فوق  $K$  إذا كانت جميع جذورها في تمديد ما للحقل  $K$  بسيطة. نقول عن العنصر  $\alpha \in F$  إنه قابل للفصل فوق  $K$  إذا كانت الحدودية الأصغرية من  $K[x]$  التي تقبل  $\alpha$  صفراً لها قابلة للفصل فوق  $K$ . نقول عن التمديد الجبري  $F/K$  إنه قابل للفصل إذا كان كل عنصر  $\alpha \in F$  قابلاً للفصل فوق  $K$ . فمثلاً التمديد الجبري  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$  قابل للفصل. تشكل مجموعة العناصر من  $F$  القابلة للفصل فوق  $K$  حقلاً ممدداً للحقل  $K$  يُدعى اللصاقة الانفصالية لـ  $K$  في  $F$  يرمز له بـ  $K_S$ .

**ملاحظة:** نتعامل في ورقتنا البحثية مع الحقول التي مميزها صفر، وفي هذه الحالة يتطابق مفهوم اللصاقة الانفصالية والجبرية، أي  $K_S = \bar{K}$ .

### 3-2-2 التمديد الناظمي. [1]

نقول عن التمديد الجبري  $E/K$  إنه ناظمي إذا كان لأجل كل  $\alpha \in E$  فإن الحدودية غير الخزولة على  $K$  والتي تقبل  $\alpha$  صفراً لها تتحلل بشكل تام فيه. مثلاً  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$  تمديد ناظمي، بينما  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$  ليس ناظماً لأن الحدودية  $(x^3 - 2)$  تملك صفراً في  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  ولكن لا تتحلل بشكل تام فيه.

كما وأن التعريف السابق يكافئ التعريف التالي: التمديد الجبري  $E/K$  ناظمي إذا وفقط إذا كان لأجل كل تشاكل  $\sigma$  من  $E$  إلى  $\bar{K}$  يثبت جميع عناصر الحقل  $K$  هو تماثل على  $E$ .

### 2-2-4 تمديد غالوا : [1]

نقول عن التمديد الجبري  $E/K$  إنه تمديد غالوا إذا كان ناظمياً وقابلاً للفصل.  
 مثال : التمديد  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$  تمديد غالوا، بينما التمديد  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$  ليس تمديد غالوا.

### 2-2-5 زمرة غالوا لتمديد غالوا : [1]

ليكن  $E/K$  تمديد غالوا. نعرّف زمرة غالوا لهذا التمديد على أنها زمرة كل التماثلات من  $E$  إلى نفسها و التي تثبت جميع عناصر الحقل  $K$  ونرمز لها بـ  $\text{Gal}(E/K)$ ، بمعنى آخر إذا كان  $\sigma$  عنصراً من  $\text{Gal}(E/K)$  فإن  $\sigma: E \rightarrow E$  تماثل ويحقق  $\sigma(x) = x$  وذلك مهما يكن  $x \in K$ .

### 2-2-6 زمرة غالوا المطلقة. [6]

ليكن  $K$  حقلاً ولتكن  $K_S$  اللصاقة الانفصالية لـ  $K$ . نعرّف زمرة غالوا المطلقة للحقل  $K$  بأنها

$$G_K := \text{Gal}(K_S/K)$$

مثال : [6]

زمرة غالوا المطلقة لحقل الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  هي الزمرة الدوارة من المرتبة 2 نظراً لأنّ حقل الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  هو اللصاقة الجبرية لـ  $\mathbb{R}$ .

### 2-2-7 مبرهنة العنصر الأولي : [1]

ليكن  $L/K$  تمديداً منتهياً قابلاً للفصل، عندئذٍ يملك  $L$  عنصراً أولياً أي يوجد  $\alpha \in L$  بحيث إنّ

$L = K(\alpha)$ . يدعى  $\alpha$  بعنصر أولي في الحقل  $L$ ، كما ويدعى التمديد  $L/K$  بالتمديد البسيط.

## 2-2-8 الحقل المثبت بالنواة. [1]

ليكن  $E/K$  تمديد غالوا، ولنفرض أن  $\Gamma$  زمرة جزئية من زمرة غالوا  $\text{Gal}(E/K)$ . تُشكل المجموعة

$$E^\Gamma = \{u \in E: \forall \gamma \in \Gamma; \gamma(u) = u\}$$

حقلًا جزئيًا من  $E$  يحوي  $K$  يدعى الحقل الجزئي من  $E$  المثبت بـ  $\Gamma$ . كما أن القضايا الآتية صحيحة.

$$1. \text{Gal}(E/E^\Gamma) = \Gamma.$$

$$2. [E: E^\Gamma] = |\text{Gal}(E/E^\Gamma)| = |\Gamma|.$$

$$3. [E^\Gamma: K] = \frac{|\text{Gal}(E/K)|}{|\Gamma|}.$$

## 2-2-9 الحقول الجزئية من تمديدات غالوا وعلاقتها بزمرة غالوا. [1]

ليكن  $E/K$  تمديد غالوا ولنفرض أن  $L/K$  تمديد جزئي من  $E/K$  (أي  $E/L/K$ )، عندئذٍ  $E/L$  تمديد غالوا. إن زمرة غالوا  $\text{Gal}(E/L)$  هي زمرة جزئية من  $\text{Gal}(E/K)$ ، ومرتبته  $[E: L] = |\text{Gal}(E/L)|$ . كما أن  $L = E^{\text{Gal}(E/L)}$ .

## 2-3 حقل سلاسل لورنس : [11]

بفرض  $K$  حقل ما و  $\Lambda$  مجموعة المتتاليات  $(a_i)_{i \in I}$  من عناصر  $K$  حيث كل عناصرها

أصفار باستثناء عدد منته منها ولنعرف الجمع على  $\Lambda$  بالشكل

$$(a_i)_i + (b_i)_i = (a_i + b_i)_i$$

والضرب بالشكل

$$(a_i)_i \cdot (b_j)_j = (c_n)_n ; c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

يشكل الجمع والضرب قانوني تشكيل داخليين على المجموعة  $\Lambda$ ، وتشكل هذه المجموعة مع هذين القانونين حقلاً، إن عمليات الحقل في  $\Lambda$  تقابل صيغتنا الجمع والضرب لسلاسل لورنس وبهذا يدعى  $\Lambda$  حقل لصيغ سلاسل لورنس فوق  $K$  عناصره من الشكل  $\sum_{i=N}^{\infty} a_i x^i$  ونرمز لـ  $\Lambda$  عندئذٍ بالرمز  $K((x))$  ويدعى حقل سلاسل لورنس بأمثال من  $K$ .

## 2-4 التمديد المنتظم: [5]

### 2-4-1 تعريف التمديد المنتظم.

نقول عن التمديد الحقلي  $K/k$  إنه منتظم إذا حقق أحد الشرطين المتكافئين التاليين:

1.  $k$  مغلق جبرياً في  $K$  (بمعنى أن كل عنصر من  $K$  جبري فوق  $k$  يقع في  $k$ )، و  $K$  قابل للفصل فوق  $k$ .

2.  $K$  منفصل خطياً عن  $\bar{k}$  فوق  $k$ ، (أي إن كل مجموعة منتهية من عناصر  $K$  والتي تكون مستقلة خطياً فوق  $k$  تبقى مستقلة خطياً فوق  $\bar{k}$ ).

### خصائص التمديد المنتظم. [4], [5]

#### 2-4-2 مبرهنة. القضايا الآتية محققة.

1. ليكن  $K$  تمديداً منتظماً للحقل  $k$ . الحقل الجزئي  $E$  للتمديد  $K/k$  يكون منتظماً فوق  $k$ .

2. ليكن  $E$  تمديداً منتظماً للحقل  $k$  و  $K$  تمديد منتظم لـ  $E$ ، عندئذٍ  $K$  تمديد منتظم لـ  $k$ .

3. إذا كان  $k$  مغلقاً جبرياً، عندئذٍ فإن أي تمديد لـ  $k$  يكون منتظماً.

4. التمديد  $K(T)/K$  منتظم، كما أن التمديد  $K((T))/K$  منتظم.

5. ليكن  $K, L$  تمديدين منتظمين لـ  $k$ . إذا كان  $K$  منفصل خطياً عن  $L$  فوق  $k$  عندئذٍ فإن  $LK$  تمديد منتظم لـ  $k$ .
6. كل تمديد منتظم يكون قابلاً للفصل.

## 2-5 تعريف حقل الدوال: [4]

ندعو التمدد الحقلي  $F/K$  حقل دوال جبرية بمتحول واحد (أو باختصار حقل دوال) إذا تحقق الشرطان التاليان:

1. درجة تسامي  $F/K$  تساوي 1.
2.  $F/K$  منتهي التوليد ومنتظم.

## 2-6 الحقل الهنسيلي. [4]

ليكن  $F$  حقلاً. نعرّف التقييم للحقل  $F$  بأنه تطبيق  $v$  من  $F$  إلى مجموعة  $\Gamma \cup \{\infty\}$ ، حيث  $\Gamma$  زمرة مرتبة، ويحقق الخواص التالية:

1.  $v(ab) = v(a) + v(b)$ .
2.  $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$ .
3.  $v(a) = \infty$  إذا وفقط إذا  $a = 0$ .
4.  $\exists a \in F^\times; v(a) \neq 0$ .

ندعو الزوج  $(F, v)$  بالحقل المقيّم. نقول عن الحقل  $K$  إنه حقل هنسيلي بالنسبة للتقييم  $v$  إذا كان  $v$  يملك تمديد وحيد لأجل كل تمديد جبري للحقل  $K$ . يحقق التقييم  $v$  لأجل كل  $x \in K_\sigma$  و  $\sigma \in \text{Gal}(K)$  المساواة  $v(\sigma(x)) = v(x)$ . إن  $v(\sigma(x)) = v(x)$  هو حقل هنسيلي [4, §11.5]. كما أنّ الحقل الهنسيلي هو حقل أميل [9, §1].

## 2-7 حقل هلبيرت.

### 2-7-1 تعريف حقل هلبيرت. [11]

نقول عن حقل  $k$  إنه حقل هلبيرت إذا تحقق الشرط الآتي:

لأجل أي حدودية غير خزولة  $f(x, y) \in k[x, y]$  بمتحولين فوق الحقل  $k$ ، وبدرجة  $1 \leq$  بالنسبة للمتحول  $y$  فإنه يوجد عدد غير منته من الثوابت  $b \in k$  بحيث تبقى الحدودية المخصصة عند  $x = b$  أي  $f(b, y) \in k[y]$  (بمتحول واحد) غير خزولة على  $k$  [11, def 1.9].

### 2-7-2 خواص حقل هلبيرت.

1. إذا كان  $k$  هلبيرت فإن أي تمديد منته للتوليد للحقل  $k$  يكون أيضاً هلبيرت [11, corllary 1.11].
2. الحقل  $k(x_1, \dots, x_n)$  حقل هلبيرت وذلك لأجل أي حقل  $k$  و أي  $n \geq 1$  [11, remark 1.12].

3. حقل الأعداد النسبية  $\mathbb{Q}$  هو حقل هلبيرت [11, theorem 1.23].

### 2-8 تعريف مسألة التوسيع. [10]

ليكن  $k$  حقلاً. مسألة التوسيع لـ  $k$  هي مخطط من التشاكلات الزمرية الغامرة التالية :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & G_k & \\
 & & & & & \downarrow \alpha_k & \\
 1 & \longrightarrow & \ker \beta & \longrightarrow & \hat{H} & \xrightarrow{\beta} & H \longrightarrow 1
 \end{array}$$

حيث أن السطر يشكل متتالية تامة.



نقول عن مسألة التوسيع إنها منتهية إذا كانت الزمرة  $\hat{H}$  منتهية، كما ونقول عنها إنها منشطرة إذا كان التشاكل  $\beta$  منشطراً ( بمعنى أنه يوجد  $\gamma: H \rightarrow \hat{H}$  بحيث  $\gamma \circ \beta = \text{id}_{\hat{H}}$  ). إن حل مسألة التوسيع هو تشاكل  $\mu: G_k \rightarrow \hat{H}$  بحيث يحقق  $\beta \circ \mu = \alpha_k$ ، ندعو هذا الحل بحل تام إذا كان التشاكل  $\mu$  غامراً كما في المخطط التالي:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & G_k & & \\
 & & & & \downarrow \alpha_k & & \\
 & & & \swarrow \mu & & & \\
 1 & \longrightarrow & \ker \beta & \longrightarrow & \hat{H} & \xrightarrow{\beta} & H \longrightarrow 1
 \end{array}$$

نعرف الحل المنتظم لـ  $EP_k$  بأنه حل لمسألة التوسيع فوق الحقل  $k(T)$  بمعنى آخر أنه تشاكل  $\gamma: G_{k(T)} \rightarrow \hat{H}$  يجعل المخطط التالي تبديلي:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & G_{k(T)} & & \\
 & & & & \downarrow \alpha & & \\
 & & & \swarrow \gamma & & & \\
 1 & \longrightarrow & \ker \beta & \longrightarrow & \hat{H} & \xrightarrow{\beta} & H \longrightarrow 1
 \end{array}$$

يُدعى هذا الحل بحل منتظم تام إذا كان  $\gamma$  غامراً.

## 9-2 مبرهنة بوب. [10]

ليكن  $K$  حقل أمبل. عندئذٍ فإن كل مسألة توسيع منتهية منشطرة لـ  $K$  تملك حلاً منتظماً تماماً. وعلى وجه الخصوص فإن كل زمرة منتهية  $G$  تُمثل بشكل منتظم كزمرة غالوا فوق الحقل  $K(T)$ .

3- المبرهنة (\*).

ليكن  $k$  حقلاً مميزه صفراً و لا يحوي حقل أمبل. عندئذ يوجد حقل  $K$  ممدد منتظم لـ  $k$  بحيث يحقق ما يلي:

1. لتكن  $G$  زمرة منتهية، عندها يوجد حقل  $E$  تمديد غالوا للحقل  $K$  بحيث  $\text{Gal}(E/K) \cong G$ .

2. الحقل  $K$  لا يحوي حقل أمبل.

البرهان.

لتكن  $EP_k$  مسألة توسيع منتهية منشطرة على  $k$

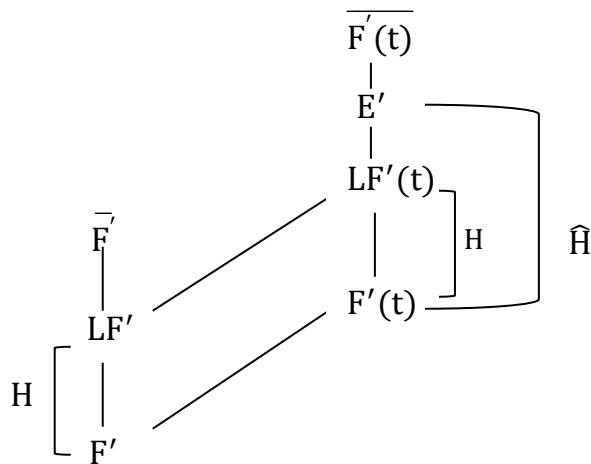
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & G_k & \\
 & & & & & \downarrow \alpha_k & \\
 1 & \longrightarrow & \ker \beta & \longrightarrow & \hat{H} & \xrightarrow{\beta} & H \longrightarrow 1
 \end{array}$$

والتي نرمز لها اختصاراً بـ  $EP_k(\alpha_k, \beta)$ . إن الحقل  $L = \bar{k}^{\ker \alpha_k}$  المثبت بنواة التشاكل  $\alpha_k$  هو تمديد غالوا للحقل  $k$  زمرة تماثل الزمرة  $H$ . كما في الشكل التالي (شكل (1-1)):

$$G_k \left[ \begin{array}{c} \bar{k} \\ | \\ L = \bar{k}^{\ker \alpha_k} \\ | \\ k \end{array} \right] H$$

شكل (1-1)

لنثبت  $x$  متحولاً فوق  $k$  ولنأخذ  $k((x))$  حقل سلاسل لورنس بالمتحول  $x$  فوق  $k$ ، عندئذٍ إنَّ  $F' = k((x)) \cap \overline{k(x)}$  هو حقل هنسيللي، حيث  $\overline{k(x)}$  الغلاقة الجبرية لـ  $k(x)$ . عندئذٍ حسب (2 - 4 - 1) فإنَّ  $F'$  تمديد منتظم لـ  $k$  من درجة تسامي 1. كذلك  $F'$  مغلق جبرياً في  $k((x))$ . إنَّ  $F'$  يكون أيضاً حقل هنسيللي وبالتالي أميل وذلك حسب (2 - 6). وبالتالي أي مسألة توسيع منتهية منشطرة فوق  $F'$  مثل  $EP_k(\alpha_k, \beta)$  تملك حلاً منتظماً وذلك بحسب مبرهنة بوب (2 - 9). إذاً يوجد  $E'$  تمديد غالوا للحقل  $F'(t)$  يحوي الحقل  $LF'(t)$  بحيث إنَّ  $\text{Gal}(E'/F'(t)) = \hat{H}$ ، كما هو موضح بالشكل التالي (شكل (1 - 2))



شكل (1 - 2)

كما وأنَّ

$$\begin{aligned} \beta: \text{Gal}(E'/F'(t)) &\rightarrow \text{Gal}(LF'(t)/F'(t)) \\ &\cong \text{Gal}(LF'/F') \\ &\cong \text{Gal}(L/k) = H \end{aligned}$$

من جهة أخرى التمديد  $E'/F'(t)$  تمديد غالوا فهو قابل للفصل، وحسب مبرهنة العنصر الأولي (2 - 2 - 7) فيوجد  $\alpha$  عنصر أولي بحيث يكون  $E' = F'(t)(\alpha)$ .

إذاً توجد حدودية غير خزولة على  $F'$  مثل

$$f(y) = p(t, y) = a_n(t)y^n + \dots + a_1(t)y + a_0(t) \in F'(t)[y]$$

بحيث  $f(\alpha) = 0$ . بأخذ أمثال الحدودية  $f(y)$  وإضافتها للحقل  $k(x)$  نحصل على الحقل

$$F(t) = k(x)(a_n(t), \dots, a_0(t))$$

إن  $F(t)$  تمديد منته للحقل  $k(x)$  محتوي في الحقل  $k((x))$ .

لنرمز بـ  $E$  للحقل  $F(t)(\alpha)$ . إن  $E$  تمديد غالوا منتظم لـ  $F(t)$  زمرة تماثل  $\hat{H}$ . هذا يعني أن مسألة التوسيع المنتهية المنشطرة فوق حقل الدوال  $F$  تملك حلاً منتظماً تماماً. لتكن  $\mathcal{EP}_k = \{EP_k^i(\alpha_{ik}, \beta_i) \mid i \in I\}$  مجموعة كل مسائل التوسيع المنتهية المنشطرة فوق الحقل  $k$ . حسب ما سبق فإنه يوجد لأجل كل  $i$  حقل دوال  $F_i/k$  بمتحول واحد بحيث تكون  $EP_k^i(\alpha_{ik}, \beta_i)$  تملك حلاً منتظماً تماماً فوق  $F_i$ . باختيار الحقول  $F_i (i \in I)$  بحيث يكون كل  $F_i$  منفصلاً خطياً فوق  $k$  عن تركيب جميع الحقول  $F_j$  بحيث  $i \neq j$ .

لنرمز بـ  $K$  للحقل المركب لكل  $F_i (i \in I)$ . من خلال البناء نلاحظ ما يلي:

1. كل مسألة توسيع منشطرة منتهية  $EP_k^i(\alpha_{ik}, \beta_i) (i \in I)$  تملك حلاً منتظماً تماماً فوق  $K$ .

2. من خلال تعريف حقل الدوال (2 - 5) و خواص التمديد المنتظم (2 - 4 - 2) فإن  $K/k$  منتظم.

3. من خلال تعريف حقل هلبيرت (2 - 7 - 1) والخاصة ([7] theorem 1.3) فإن  $K$  هلبيرت.

بالتالي أصبح لدينا مسألة توسيع منشطرة قابلة للحل فوق حقل هلبيرت  $K$ .  
نفرض  $G$  زمرة منتهية ولنأخذ مسألة التوسيع المنتهية المنشطرة :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & G_{K(T)} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & g & & & \\
 & & & \swarrow & & & \\
 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \longrightarrow 1
 \end{array}$$

حسب خواص الحقل الذي تم بناؤه فإن هذه المسألة قابلة للحل فوق الحقل  $K$ . بمعنى آخر يوجد تشاكل غامر  $g: G_{K(T)} \rightarrow G$  بحيث يجعل المخطط تبديلي. بأخذ الحقل  $E = \overline{K(T)}^{\ker g}$  فإن  $E$  تمديد غالوا منتظم للحقل  $K(T)$  بحيث  $\text{Gal}(E/K(T)) \cong G$ .

بما أن  $E/K(T)$  تمديد غالوا منتظم فهو قابل للفصل وبالتالي حسب مبرهنة العنصر الأولي (2 - 2 - 7) توجد  $\alpha \in E$  بحيث  $E = K(T)(\alpha_T)$ . لنرمز بـ  $p(T, Y) \in K(T)[Y]$  الحدودية غير الخزولة على  $K(T)$  والتي تقبل  $\alpha$  صفراً لها.

كون  $K$  حقل هلبيرت وبالتالي يوجد عدد غير منته من الثوابت  $b \in K$  بحيث تبقى الحدودية  $p(b, Y) \in K[Y]$  غير خزولة على  $K$ . الحقل المقابل للحدودية  $p(b, Y)$  هو  $E_b = K(\alpha_b)$ . وبالتالي  $E_b$  هو تمديد غالوا للحقل  $K$  زمرة تماثل الزمرة  $G$ . المخطط التالي يوضح ما سبق:

$$G \left[ \begin{array}{ccc} E = K(T)(\alpha_T) & & E_b = K(\alpha_b) \\ \left| \right. & \xrightarrow{T=b} & \left| \right. \\ K(T) & & K \end{array} \right] G$$

بتلخيص ما سبق نجد أننا بنينا حقل هلبرت  $K$  ممدد لـ  $k$  بحيث لأجل أي زمرة منتهية  $G$  يوجد  $E_D$  تمديد للحقل  $K$  زمرة تماثل الزمرة  $G$ . بهذا نكون قد أثبتنا الطلب الأول.

سنثبت الآن إن  $K$  لا يملك أي حقل أمبل. لنفرض جدلاً أن  $K$  يحوي حقل أمبل وليكن  $L$ ، عندئذٍ ومن خلال الفرض فإن  $L \not\subseteq k$  وبالتالي يوجد  $x \in L \setminus k$ . من جهة أخرى وبما أن  $K/k$  حقل دوال فإن  $x$  متسام فوق  $k$ . ليكن  $k_0$  الحقل الأولي لـ  $k$  وباختيار منحنى أملس  $C$  من الجنس  $g > 2$  معرف فوق  $k_0(x)$  مع نقطة  $k_0(x) -$ نسبية  $P \in C(k_0(x))$  وبحيث يكون  $C$  ليس متكافئ ثنائي النسبية (birational equivalent [3, p34]) - فوق تمديد ما منتهي لـ  $E(x) -$  مع منحنى معرف فوق  $E$  لأجل أي حقل  $E$  يحوي  $k_0$  وبحيث يبقى  $x$  متسامياً. إن مثل هذا المنحنى دائماً موجود، ويمكن العودة لـ ([3] example 6.2). لتكن  $I_0 \subseteq I$  المجموعة الجزئية المنتهية الأصغرية الوحيدة من  $I$  بحيث يكون  $x \in F_{I_0}$  (حيث  $F_{I_0}$  هي تركيب الحقول  $(F_i; i \in I_0)$ ، ولتكن  $\{x_1, \dots, x_n\}$  القاعدة المتسامية لـ  $F_{I_0}$  فوق  $\mathbb{Q}$  و  $E$  هو الحقل المركب للحقول  $k(x_1, \dots, x_{n-1})$  لأجل  $F_{I \setminus I_0}$ . عندئذٍ يكون  $x$  متسامياً فوق  $E$  ويكون  $K$  حقل دوال بمتحول واحد فوق  $E$ . بما أن  $C$  غير متكافئ فوق  $E$  مع أي منحنى معرف فوق  $E$  ويحقق الشرط السابق فإنه وبالاعتماد على مبرهنة موردل فوق حقول الدوال [8] يقتضي أن  $C(K)$  منته، وكون

$$P \in C(\mathbb{Q}_0(x)) \subseteq C(L) \subseteq C(K)$$

فإن  $C(L)$  غير خال، وكون  $L$  حقل أمبل إذاً  $C(L)$  غير منته، وحسب الاحتواء  $C(L) \subseteq C(K)$  فإن هذا غير ممكن. إذا فالفرض الجدلي خاطئ، وأن  $K$  لا يحوي حقل أمبل.

المراجع.

- [1] BAKER, A., (2013). **An Introduction To Galois Theory** .  
University of Glasgow, 101p.
- [2] DEBES, P. & DESCHAMPS, B., (1996) **The Regular Inverse Galois Problem over Large Fields**, 21p.
- [3] Hartshorne, R., (1977). **Algebraic Geometry**. Springer, 496p.
- [4] JARDEN, M. & FRIED, M. D., (2008). **Field Arithmetic**. Springer-Verlag, third edition, 792p.
- [5] LANGE, S 2002- **Algebra**. Revised Third Edition, Springer-Verlag New York, 943p.
- [6] LORENZ, F 2006- **Algebra, Volume I: Fields and Galois Theory**. Springer, Amrica, 293.
- [7] Malle, G. & Matzat, B. H., ( 2018). **Inverse Galois Theory**. Second Edition, Springer, 533p.
- [8] MIWA, M., (1965). **On Mordell's conjecture for algebraic curves over function fields**. 183-188p.
- [9] POP, F., **Little survey on Large fields** –OLD & NEW- 22p.

[10] POP, F., (1996). **Embedding problems over large fields**–  
Annals of Mathematics, 144, 1-34p.

[11] VOLKLEIN, A., (1996). **GROUPS AS GALOIS GROUPS, An  
Introduction**. CAMPRIDGE UNIVERSITY PRESS, 266p.



# دراسة بعض الخصائص الفيزيائية لمزيج $PVA - SiO_2$

فطمة سلمون<sup>1</sup> عبد الرزاق الصوفي<sup>2</sup> ناصر سعد الدين<sup>3</sup>

## ملخص :

تم في هذا البحث تحضير أفلام من مزيج بولي فينيل الكحول (PVA) و أوكسيد السيلكون (Sol-  $SiO_2$ ) (Polyvinyl alcohol – Silicon dioxide) وفق طريقة السول جيل Sol-Gel حيث استخدمنا رباعي ايتيل اورتو السيلكات (TEOS) كمصدر للسليكا ولايتانول و الماء المقطر ، تم في النهاية إضافة حمض الخل لضبط ( PH ) الوسط لتحضير محلول  $SiO_2$  ، حيث تمت اضافته بعدة تراكيز إلى محلول (PVA) لتحضير مزائج بتراكيز مختلفة من كلا المحلولين . درست الخصائص البنوية للأفلام المحضرة باستخدام تقنية انعراج الأشعة السينية (XRD) كما درست بعض الخصائص الضوئية باستخدام المقياس الطيفي السبيكتروفوتومتر (Spectrophotometer JASCO530) أظهرت النتائج تغيير في الخصائص المدروسة للمزيج بسبب ارتباط مجموعات (Silanol) من (TEOS) مع مجموعات (OH) في (PVA) حيث لوحظ تناقص المجال المحظور بزيادة تركيز  $SiO_2$  في المزيج و زيادة في قيمة الناقلية الضوئية بزيادة تركيز  $SiO_2$  في المزيج .

كلمات مفتاحية : الخصائص الفيزيائية، أوكسيد السيلكون، PVA .

- 1- /طالبة دكتوراه/ قائم بالأعمال في قسم الفيزياء-كلية العلوم-جامعة البعث 2- أستاذ في قسم الفيزياء-كلية العلوم قسم الفيزياء 3- أستاذ في قسم الفيزياء-كلية العلوم-قسم الفيزياء

## *Study some physical properties of PVA- $SiO_2$ composite*

Fatma Salamone Dr. Abdul Razak AL-Soufi Dr. Nasser Saad Aldin

### **Abstract:**

In this paper, films of  $PVA:SiO_2$  composite were prepared using sol-gel method, where we used tetraethyl orthosilicate (TEOS) as a source of silica and ethanol, and distilled water was finally added to acetic acid to adjust the PH of the medium to prepare  $SiO_2$  solution. Several concentration of this solution were added to PVA solution to prepare composite of those solution at different concentration.

The structural properties of prepared films  $PVA-SiO_2$  were studied using X-ray diffraction technique. Some optical properties of composite were studied using Spectrophotometer JASCO530, the results showed the difference in studied properties at added  $SiO_2$  to the composite due to reaction between silanol group from TEOS and OH group of PVA. the energy band gap ( $E_g$ ) decrease as a  $SiO_2$  CONCENTRATIONS INCREASE and optical conductivity increase as a  $SiO_2$

Concentrations increase.

Keywords: physical properties, Silicon Oxide,  $PVA$ .

## 1. مقدمة:

تعتبر المواد العضوية وغير العضوية المهجنة مهمة في مختلف المجالات لأنها تجمع بين الخصائص المرغوبة للطور غير العضوي (الاستقرار الحراري ، الصلابة) مع الطور العضوي (المرونة ، القدرة على المعالجة ، المرونة) [1]، تتكون المادة الهجينة من بوليميرات قابلة للذوبان مع مكونات غير عضوية ذات خصائص ميكانيكية وإلكترونيات ضوئية وعازلة ممتازة بسبب الجمع بين المكونات العضوية وغير العضوية ، ويمكن ترسيبها كطبقة، وتتميز بأنها ذات تكلفة منخفضة ، وخصائص قابلة للضبط بسهولة [2]. في الآونة الأخيرة ، تم تطوير هجائن بوليمر سيليكيا مع خصائص حرارية وميكانيكية محسنة (بسبب السيليكيا) ومرونة أفضل (بسبب محتوى البوليمر)، والتي وجدت تطبيقات في مجموعة متنوعة من المجالات مثل الحفز و أجهزة الاستشعار [3] والالكترونيات الضوئية [4] والأجهزة الكهروضغطية [2]. من بين التقنيات المختلفة لتصنيع المواد الهجينة من السيليكيا ، أظهرت تقنية سول-جل نتيجة واعدة بسبب فعاليتها من حيث التكلفة ومعالجتها السهلة. وشروط تفاعل معتدلة مثالية لتجنب أي ضرر لطور البوليمر. يتم استخدام مجموعة من البوادئ لتصنيع السيليكيا من خلال عملية سول-جيل ، ولكن رباعي ايتيل اورتو سيليكات (TEOS) هو الأكثر استخدامًا حيث أن له معدل تفاعل بطيء نسبيًا ويمكن التحكم فيه ، في حالة وجود محفزات مناسبة ، يخضع مزيج (TEOS ، الماء ، و / أو الإيثانول) لتفاعلات التحلل المائي والتكثيف ، مما ينتج شبكة سيليكيا تتكون من روابط (Si - O - Si) (siloxane) في الكتلة بينما ينتهي السطح في مجموعات من (Si - OH) (silanol). هذه الأخيرة مسؤولة في الغالب عن تفاعل السيليكيا [3]، تستخدم الجسيمات النانوية السيليكيا على نطاق واسع بسبب امتصاصها الضوئي وخصائص الانبعاثات والانعكاس العالي. السيليكيا موجودة في كل من الأشكال البلورية وكذلك غير المتبلورة. اجتذبت السيليكيا غير المتبلورة مجالات البحث الحالية

بسبب خصائصها الضوئية الاستثنائية [4]. يجعل الاستقرار الحراري العالي والتفاعل المنخفض نسبياً السيليكا مرشحاً مثالياً لمجموعة متنوعة من التطبيقات [3]. من جهة أخرى فإن بولي فينيل الكحول هو بوليمير مصنع ذواب في الماء [5] وقابل للتحلل البيولوجي وغير سام. هذا البوليمر هو مادة لاصقة ممتازة ، وله مقاومة جيدة للمذيبات العضوية يستخدم على نطاق واسع في صناعة النسيج ، وفي صناعة التغليف وفي التطبيقات الطبية الحيوية [2]، وله قدرة عالية على تشكيل أفلام متميزة بخصائص ميكانيكية جيدة [5]، يتألف بولي فينيل الكحول من سلسلة هيكلية من ذرات الكربون مع مجموعات هيدروكسيل مرتبطة مع كربون الميثان، تُشكل مجموعات الهيدروكسيل مصدر للروابط الهيدروجينية [6]، التفاعل البيني بين سلسلة  $PVA$  وجسيمات  $SiO_2$  هو العامل الأكثر حسماً الذي يحكم خصائص مركبات  $(PVA:SiO_2)$  [7].

في هذا البحث تمت إضافة السيليكا من محلول سول-جيل المحضر انطلاقاً من  $(TEOS)$  بتراكيز مختلفة إلى بوليمير  $(PVA)$  وتمت دراسة تأثير السيليكا على بعض الخصائص الضوئية لمزيج  $(PVA:SiO_2)$

## 2. أهداف البحث:

يهدف البحث إلى :

1- تحضير أفلام من مزيج بوليمير  $(PVA)$  مع أكسيد السيلكون  $(SiO_2)$  بطريقة سهلة التشكيل و رخيصة الثمن.

2-دراسة الخصائص البنيوية للأفلام المحضرة باستخدام جهاز انعراج الأشعة السينية (PW 1840) .

3- دراسة بعض الخصائص الضوئية للأفلام المحضرة بجهاز السبيكتروفوتومتر  $(Spectrophotometer JASCO530)$  من المجال الطيفي  $(200 - 800) nm$

### 3. مواد و طرق البحث :

#### 3-1-الأجهزة و المواد المستخدمة :

1-دورق زجاجي

2-سخانة مع خلاط .

3-جهاز انعراج الأشعة السينية (PW1840) ذو مصعد من الكوبالت Co إنتاج شركة (PHILIPS)مربوط مع حاسب مزود ببرنامج لمعالجة طيوف الانعراج.

4-جهاز السيبيكتروفوتومتر (*Spectrophotometer JASCO530*) من المجال الطيفي (200 – 800) nm والموصول مع حاسوب لتسجيل النتائج

5 -مواد كيميائية نقية: رباعي ايتيل اورتو السيلكات (TEOS) 99.8% كبادئ للسيلكا و الايتانول ( ethanol ) 99.8% ,46gr/mol,0.790gr/ml (Honeywell Lab) حمض الخل (C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>OH) (Merek الخل 99.8 % , 60.05gr/mol, 1.05gr/ml (C<sub>2</sub>H<sub>4</sub>o<sub>2</sub>) (Dramstcdi) لضبط ( PH ) الوسط و ماء مقطر وبولي فينيل الكحول (PVA) (Quallkems)115000g/mol.

#### 3-2-تحضير أفلام من مزيج بوليمر (PVA) - أوكسيد السيلكون ( SiO<sub>2</sub> ) :

تم تحضير أفلام من مزيج (PVA: SiO<sub>2</sub>) وفق الخطوات التالية:

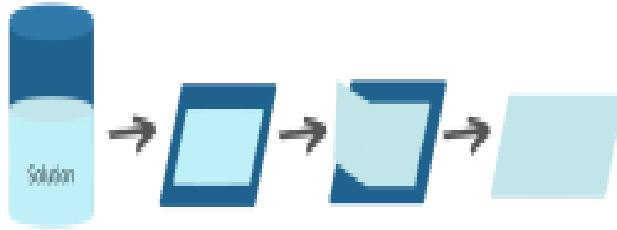
الخطوة الأولى : تحضير محلول (PVA) :تم تحضير محلول (PVA) بتركيز (5%) ووزناً من (PVA) و ذلك بوزن (5gr) من (PVA) و إتمام المزيج (100 g) ماء مقطر مع الخلط عند درجة حرارة (90°C) لمدة . (1h) بعد ذلك تم رفع مزيج (PVA) عن السخان .

الخطوة الثانية : تحضير محلول الـ (TEOS) :تم تحضير محلول الـ (TEOS) للحصول (SiO<sub>2</sub>) باستخدام طريقة (Sol – gel) باستخدام (TEOS) كبادئ والايثانول كمذيب مع إضافة ماء مقطر وعدة قطرات من حمض الخل كمادة محفزة . تم

خلط المواد بخلاط مغناطيسي بدون تسخين لمدة (1h) بعد انتهاء الخلط تم ترك المحلول لمدة يوم كامل، بعد (24h) تم إضافة محلول (TEOS) إلى محلول PVA بعدة تراكيز للحصول على عدة مزائج من  $PVA:SiO_2$  ، كما هو موضح بالجدول (1):

تركيز $PVA:SiO_2$	رمز العينة
100:0	1
90:10	2
80:20	3
60:40	4
الجدول (1)	

بعد خلط المحلولين بدون تسخين و تحريكهم لمدة 1h تم تشكيل الفيلم بطريقة القولية (casting method) كما هو موضح بالشكل (1).



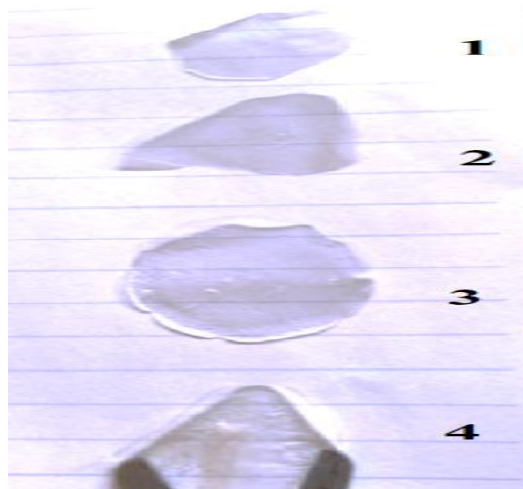
الشكل (1) تشكيل الفيلم بطريقة القولية

تم ترك الأفلام حتى الجفاف عند درجة حرارة الغرفة بعد ذلك تم حساب سماكة الأفلام باستخدام البياكوليس الرقمي ، بين الجدول (2) قيم السماكات التي تم الحصول عليها:

رقم العينة	السماكة (mm)
1	0.03
2	0.05
3	0.06
4	0.08

الجدول (2)

يوضح الشكل (2) الأفلام التي تم الحصول عليها عند نسبة تركيز مختلفة  $PVA:SiO_2$

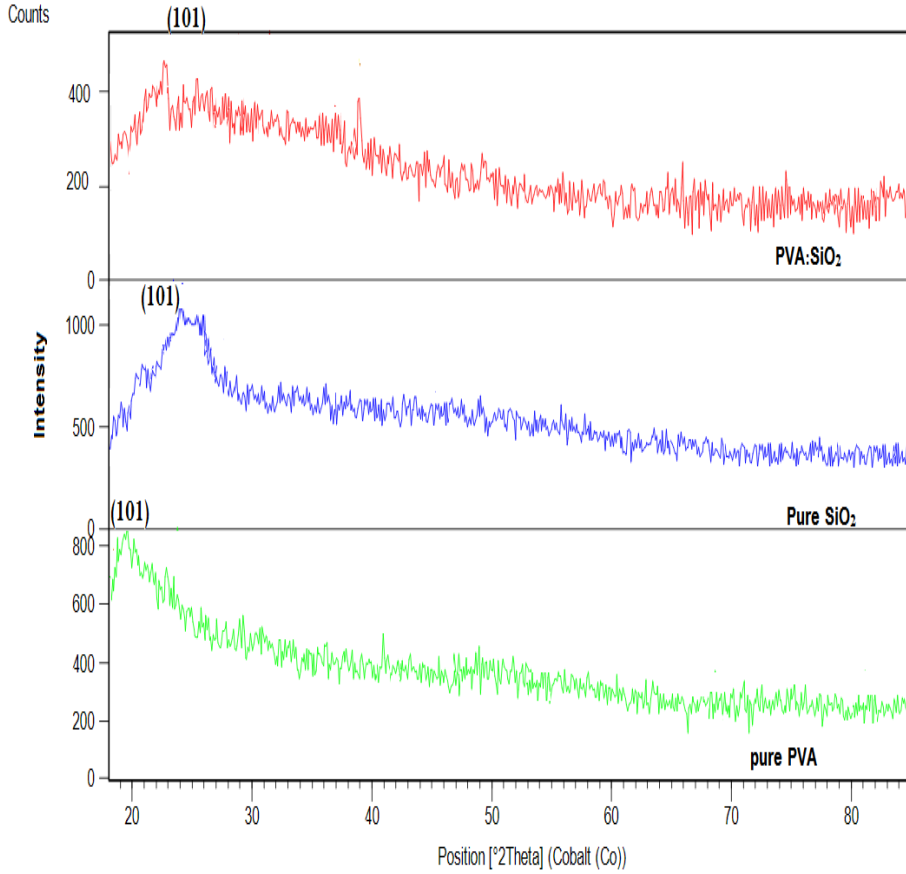


الشكل (2) الأفلام عند نسبة تركيز مختلفة  $PVA:SiO_2$

#### 4. النتائج و المناقشة :

الخصائص البنيوية للأفلام المحضرة من  $PVA:SiO_2$ :

يوضح الشكل (3) أطيف الـXRD للأفلام المحضرة (a) و (b) و (c) و هي على التوالي  $PVA$  و  $SiO_2$  و  $PVA - SiO_2$  باستخدام تقنية انعراج الأشعة السينية  $XRD$ . يبين الشكل (3) أطيف الـXRD للأفلام المحضرة .



الشكل (3) أطيف الـ XRD للأفلام المحضرة

نلاحظ من الشكل قمة قوية لـ  $PVA$  النقي عند زاوية انعراج ( $2\theta = 19.24^\circ$ ) وفق المستوي (101)، وتتنخفض شدة هذه القمة في المزيج  $PVA - SiO_2$  وذلك يعود لارتباط silanol من TEOS مع مجموعات  $-OH$  لـ  $PVA$ . تُعزى القمة العريضة التي تظهر بين 20 و 25 (الشكل 3) إلى السيليكا المتبلورة النقية التي تتميز بقمة رئيسية وفق المستوي (101) عند الزاوية ( $2\theta = 24.49^\circ$ ) علاوة على ذلك، هناك انحراف بسيط في موقع القمة إلى اليسار في المزيج مقارنةً بعينة السيليكا النقية، بسبب زيادة تبلور  $PVA$  في المزيج  $PVA:SiO_2$  وهذا يتوافق مع بعض الأعمال العلمية [8,9].

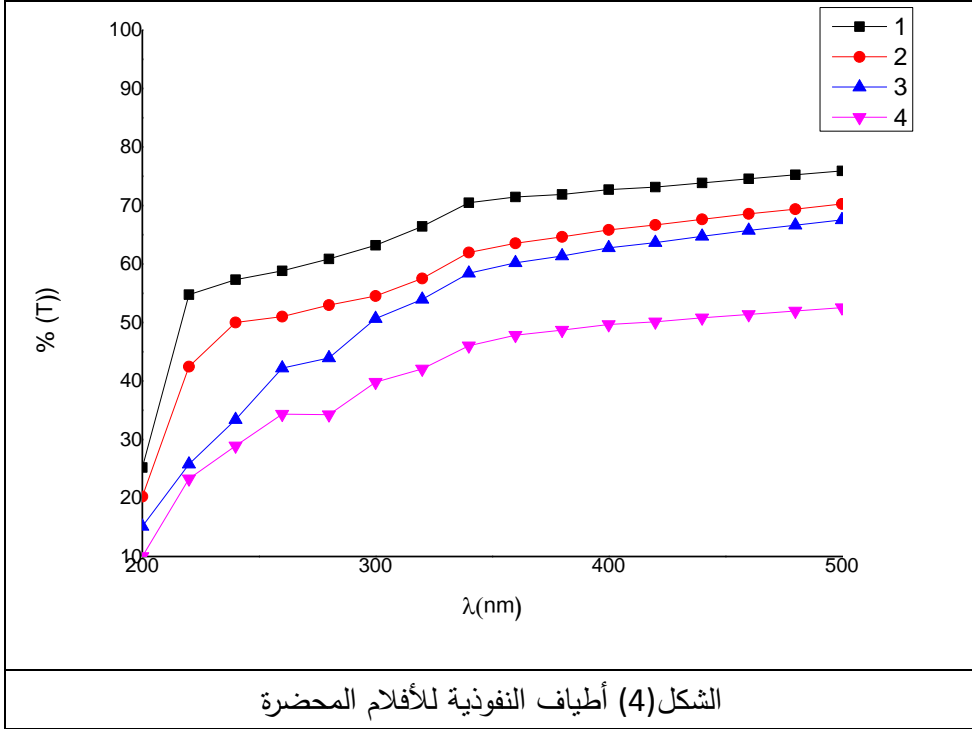


### الخصائص الضوئية للأفلام المحضرة من $PVA:SiO_2$

تفيد دراسة الخصائص الضوئية في تحديد العديد من العوامل التي تميز العينات المدروسة نذكر منها معامل الامتصاص  $\alpha$  (the absorption coefficient) و قرينة الانكسار  $n$  (the refractive index) و معامل التخماد  $k$  (the extinction coefficient) و المجال المحظور  $E_g$  (the band gap)... الخ حيث ترتبط هذه العوامل مع بعضها بعلاقات يمكن بواسطتها حساب قيم الثوابت الضوئية المميزة لهذه العينات.

#### 1-دراسة أطياف النفوذية :

سجلت أطياف النفوذية للأفلام المحضرة باستخدام المقياس الطيفي Spectrophotometer نوع *Jasco 570V* ضمن مجال للأطوال الموجية  $(200 - 800)nm$  بتركيز مختلفة. بين الشكل (4) أطياف النفوذية للأفلام المحضرة . حيث استخدم  $PVA$  النقي المتشكل بشكل فيلم للمعايرة (حيث تعتبر العينة المرجعية المستعملة في القياس).



نلاحظ من الشكل (4) ان قيمة النفوذية تتناقص مع زيادة تركيز SiO<sub>2</sub> في المزيج مقارنةً مع طيف PVA النقي، يعزى هذا التناقص إلى تأثير إضافة السيلكا وهذا يتوافق مع بعض الاعمال العلمية [4].

## 2-حساب عرض المجال المحظور :

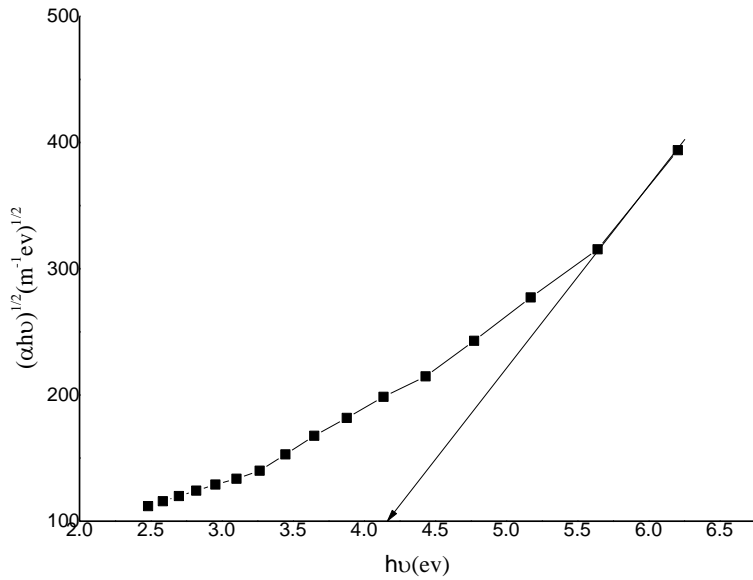
يعطى معامل الامتصاصية بالعلاقة [10]:

$$\alpha = 2.303A/t \dots \dots \dots (1)$$

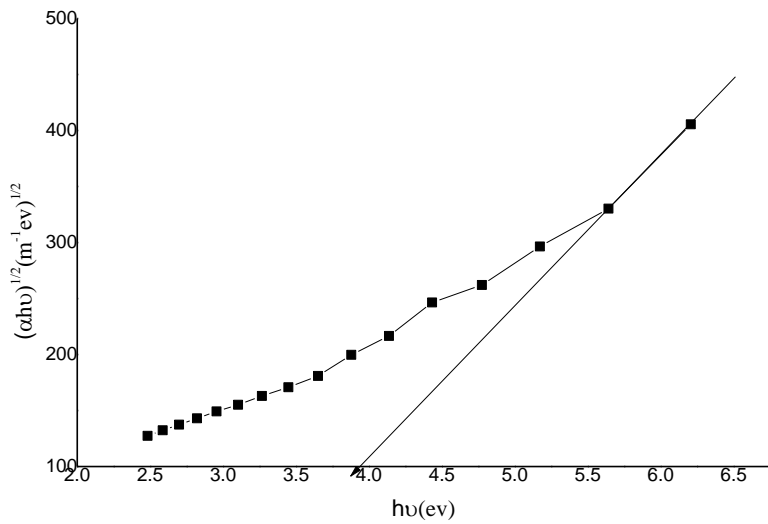
حيث  $A = \text{Log}\left(\frac{1}{T}\right)$  و سماكة العينة  $(t)$  وتعطى العلاقة العامة للمجال المحظور غير المباشر بالعلاقة :

$$\alpha h\nu = B(h\nu - E_g)^r \dots \dots \dots (2)$$

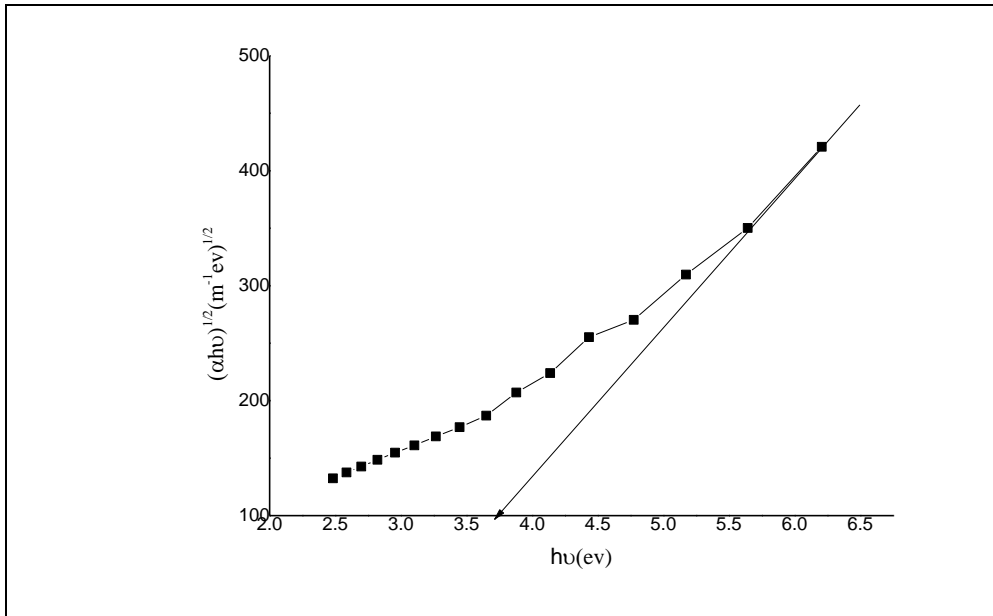
حيث  $B$  هو ثابت و  $r = 2, \text{ or } 3$  للانتقال الغير مباشر المسموح و الغير المسموح على التوالي . بين الشكل (5) قيم المجال المحظور للأفلام المحضرة.



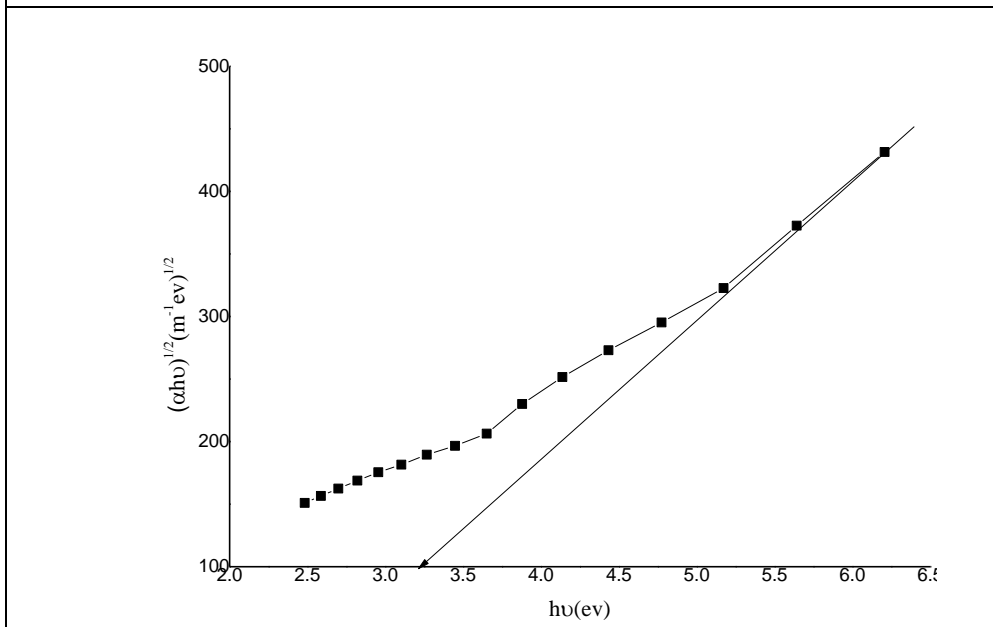
(5-1)



(5-2)



(5-3)



(5-4)

الشكل (5) قيم المجال المحطور للأفلام المحضرة

يبين الجدول (3) قيم المجال المحظور للأفلام المحضرة :

الشكل	قيم $E_g$ المحسوبة	السمائة
(5-1)	4.2ev	0.03mm
(5-2)	3.9ev	0.05mm
(5-3)	3.6ev	0.06mm
(5-4)	3.3ev	0.08mm
الجدول (3)		

يبين الشكل (5) و الجدول (3) تغيرات قيمة المجال المحظور عند نسبة تركيز مختلفة من  $PVA:SiO_2$  حيث نلاحظ تناقص قيمة المجال المحظور بزيادة تركيز  $SiO_2$  إلى المزيج يعزى هذا زيادة السويات الموضعية في المجال المحظور و العائدة للسيلكا و هذا يتوافق مع بعض الاعمال العلمية [2].

### 3-حساب قرينة الانكسار و معامل التخامد :

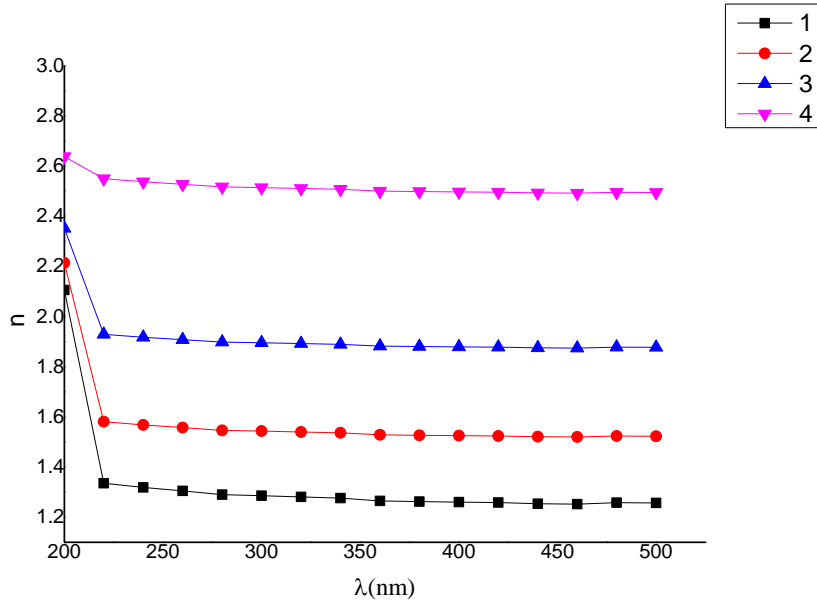
يرتبط معامل الانعكاس  $R$  مع قرينة الانكسار  $n$  في المجال البنفسجي بالعلاقة [11][2]:

$$n = \frac{(1 + R^{\frac{1}{2}})}{(1 - R^{\frac{1}{2}})} \dots \dots (3)$$

و يرتبط  $K$  معامل التخامد بشكل أساسي مع معامل الامتصاص  $\alpha(cm^{-1})$  بالعلاقة [12]:

$$\alpha = \frac{4\pi K}{\lambda} \Leftrightarrow K = \frac{\alpha \lambda}{4\pi} \dots \dots (4)$$

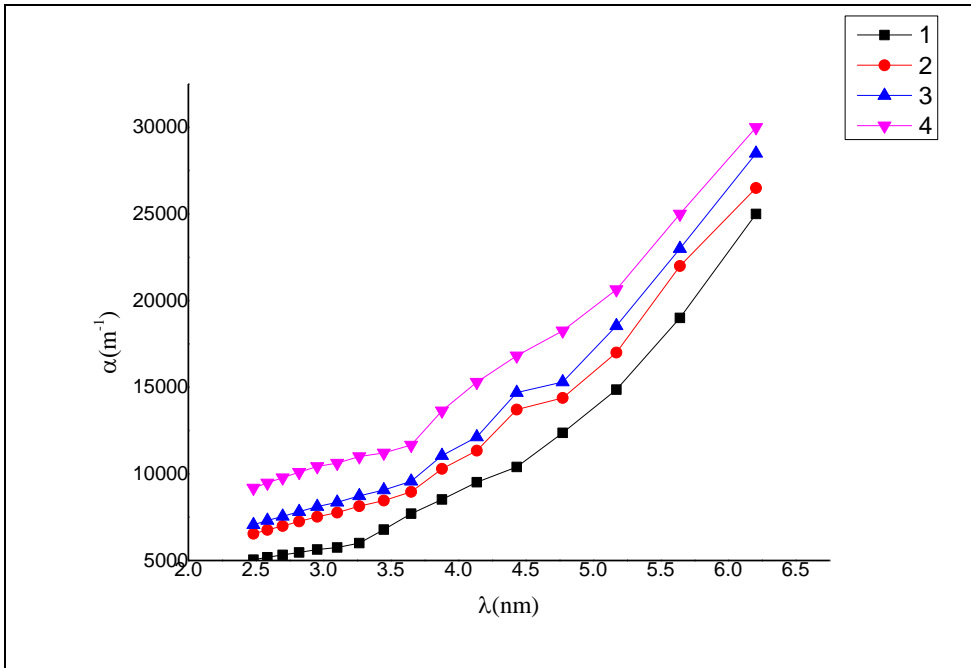
يبين الشكل (6) قرينة الانكسار للأفلام المحضرة



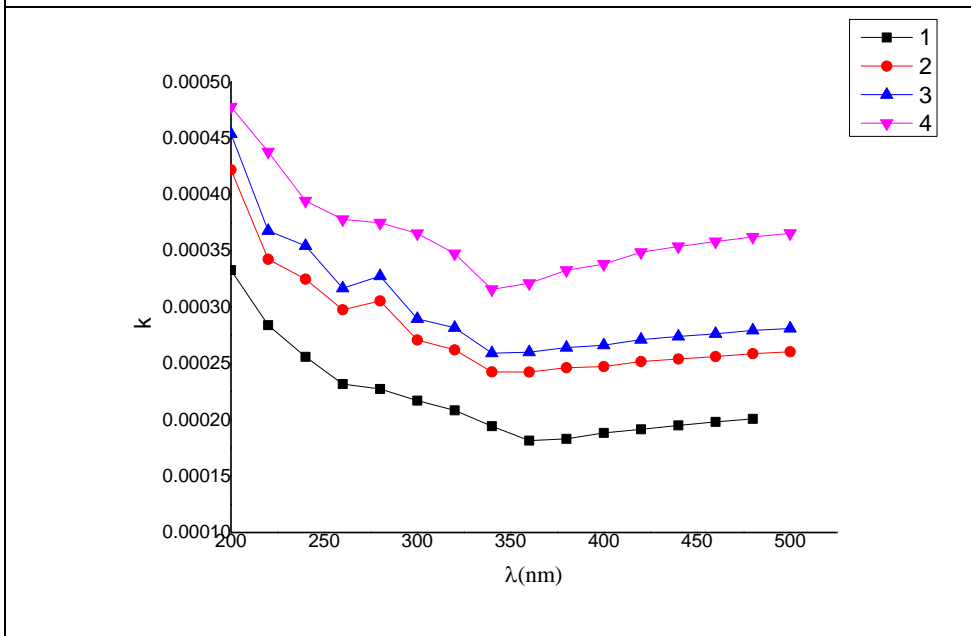
الشكل (6) قرينة الانكسار للأفلام المحضرة

نلاحظ من الشكل ان قيمة قرينة الانكسار تزداد مع تزايد نسبة  $SiO_2$  في المزيج من  $PVA:SiO_2$  و هذه النتائج قريبة من بعض الأعمال العلمية [2].

يبين الشكل (7) و (8) معامل الامتصاص و معامل التخامد على التوالي للأفلام المحضرة.



الشكل (7) معامل الامتصاص للأفلام المحضرة



الشكل (8) معامل التخماد للأفلام المحضرة

#### 4-ثوابت العزل الكهربائي :

يعطى ثابت العزل الكهربائي العقدي  $\epsilon_c$  بالعلاقة :

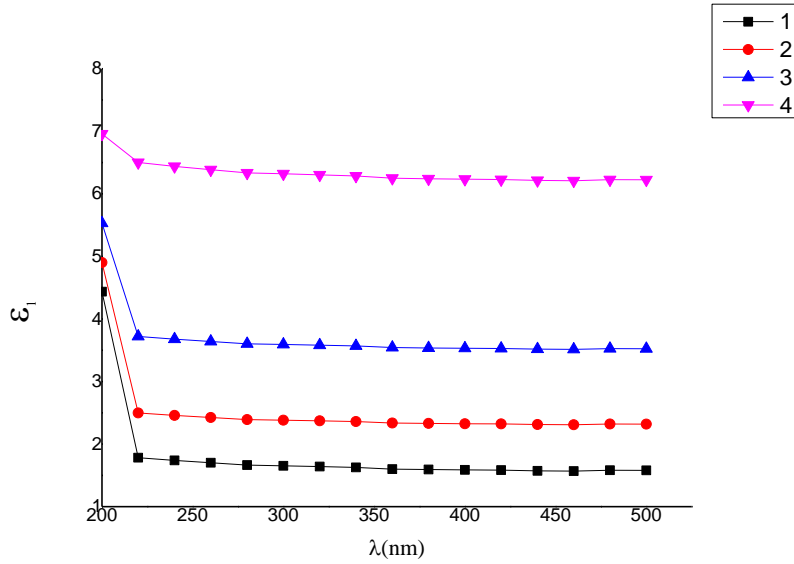
$$\epsilon_{com} = (\epsilon_1 + i\epsilon_2) = n_{com}^2 = (n + ik)^2 \dots (5)$$

من هذه العلاقة نستخرج قيمتي ثابت العزل الكهربائي الحقيقي و التخيلي :

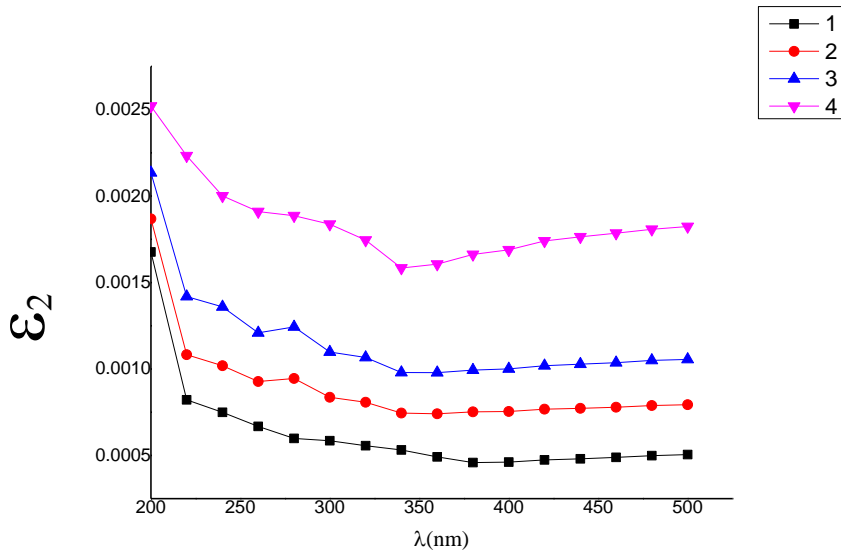
$$\epsilon_1 = n^2 - k^2 \dots (6)$$

$$\epsilon_2 = 2nk \dots (7)$$

يبين الشكل (9) ثابتي العزل الحقيقي و التخيلي للأفلام المحضرة .





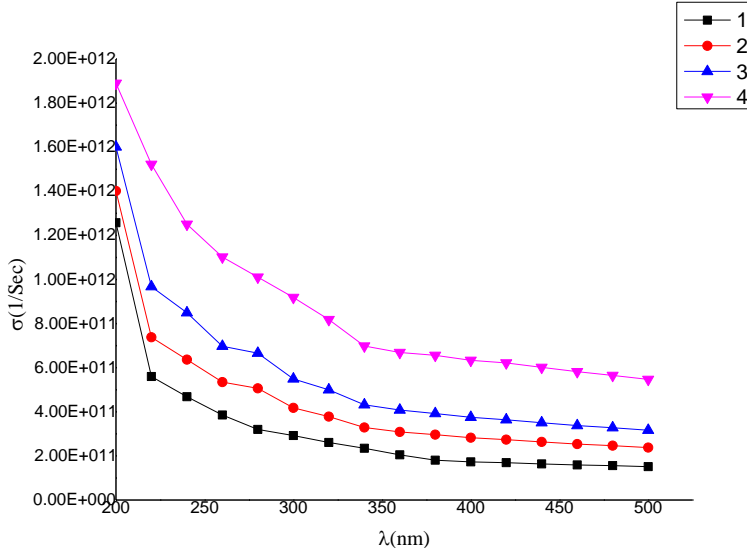


الشكل (9) ثابت العزل الحقيقي و التخيلي للأفلام المحضرة

### حساب الناقلية الضوئية :

ترتبط الناقلية الضوئية  $\sigma$  مع معامل الامتصاص  $\alpha$  بالعلاقة [13]:

$$\alpha = \frac{4\pi\sigma}{nc} \Rightarrow \sigma = \frac{\alpha nc}{4\pi} \dots \dots \dots (8)$$



الشكل (10) الناقلية الضوئية للأفلام المحضرة

نلاحظ من الشكل السابق ازدياد الناقلية الضوئية بازدياد نسبة تركيز SiO<sub>2</sub> في المزيج .

#### 5.الاستنتاجات و التوصيات:

1 – تم تحضير أفلام رقيقة من مزيج (PVA:SiO<sub>2</sub>) بطريقة القولبة انطلاقاً من محلول (Sol- gel) للبادئء (TEOS) مع محلول (PVA).

2- لوحظ تناقصاً في عرض المجال المحطور للأفلام المحضرة مع زيادة تركيز (SiO<sub>2</sub>) في المزيج ، و زيادة في الناقلية الضوئية مع زيادة تركيز (SiO<sub>2</sub>) في المزيج.

نوصي بـ :

1 – تحضير الأفلام عند تراكيز أخرى وبتغيير درجات حرارة عند التحضير .

2 – دراسة تأثير إضافة (SiO<sub>2</sub>) إلى المزيج على الخصائص الحرارية والكهربائية والميكانيكية للأفلام المحضرة.

## 6.المراجع:

- 1- N.Muhamad et el, **Synthesis of PVA/SiO<sub>2</sub> Nanofibers by Electrospinning Method for Supercapacitor Separators**, IPTEK proceedings series No.(6) (2020), ISSN (2345-6026)
- 2- H.Ahmed et al, **Lower Cost and Higher UV-Absorption of Polyvinyl Alcohol/ Silica Nanocomposites For Potential Applications**, Egyptian Journal of Chemistry, *Egypt. J. Chem.* 63, No. 2 (2020)
- 3- Tahira Pirzada and Syed Sakhawat Shah, **Water-Resistant Poly(vinyl alcohol)-Silica Hybrids through Sol-Gel Processing**, *Chem. Eng. Technol.* 2014, 37, No. 4, 620–626
- 4- B. Karthikeyan, et al, **Optical, vibrational and fluorescence recombination pathway properties of nano SiO<sub>2</sub>-PVA composite films**, *Optical Materials* 90 (2019) 139–144
- 5- M.Edwin et al, **a review of polyvinyl alcohol derivatives: promising material for pharmaceutical and biomedical applications**, *African journal of pharmacy and pharmacology*, vi.8(24), pp:674-684,2014
- 6- P. Balaji Bhargav et al, **Investigations on electrical properties of (PVA:NaF) polymer electrolytes for electrochemical cell applications**, *Current Applied Physics* 9 (2009) 165–171
- 7- Shobhna Choudharya and R. J. Sengwa, **Anomalous Dielectric Behaviour of Poly(vinyl alcohol)- Silicon Dioxide (PVA-SiO<sub>2</sub>) Nanocomposites**, International Conference on Condensed Matter and Applied Physics (ICC 2015), AIP Conf. Proc. 1728, 020420-1–020420-6
- 8- Zongli Xie et al , **Sol-gel Derived Poly(vinyl alcohol)/Maleic Acid/Silica Hybrid Membrane for Desalination by Pervaporation**, *journal of membrane science*, 2011, volume 383, issues1-2
- 9- Hu Pingan et al, **A silica/PVA adhesive hybrid material with high transparency, thermostability and mechanical strength**, *RSC Adv.*, 2017, 7, 2450–2459
- 10-Ahmed Hashim, Majeed Ali Habeeb, Ghaidaa Abdul Hafidh, Ayad Mohammad, Angham.G.Hadi, Hussein Hakim, **Study of the**

**Effect of Berry Paper Mulberry on Optical Properties of Poly Methyl Methacrylate**, J.Baghdad for Sci., Vol.11, No.2, (2014).

11-Ibrahim R.Agool, Majeed Ali, Ahmed Hashim, **Polyvinyl alcohol- Poly-acrylic acid-Titanium Nanoparticles**

**Nanocomposites:Optical Properties**, Advances in Natural and Applied Sciences, Vol.8, No.15, (2014).

12-Majeed Ali Habeeb, Hussein Hakim, Ahmed Hashim, **Studying the Optical Properties of (PVA-PEG-KBr) Composite**,

International Journal of Science and Research, Vol.3, No.10, (2014).

13-Ahmed Hashim, Noor Hamid, **UV-Absorption for Biological Application of (Polymer- Carbide) Nanocomposites**, Research

Journal of Agriculture and Biological Sciences, Vol.13, No.1, (2018).

# الشكل الجديد في التطبيقات F-السوية بين الفضاءات المتناظرة

د. ميشيل حداد (1)

## ملخص البحث

نعرف فضاء كيلير والفضاء المتناظر والمتضمن التطبيق F - السوي وتم تحديد العلاقات الأساسية في التطبيقات F - السوية.

ومن ثم نثبت في المبرهنة (3) أن الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء المتناظر منطلقاً لتطبيق F - سوي هو أن يوجد فيه تتسور متناظر غير معدوم يحقق الخواص (17) و (18).

وأخيراً تم في المبرهنة (4) إثبات أنه إذا وجد تطبيق F - سوي متناظر غير مبتدل من الفضاء  $S_n$  إلى الفضاء  $S_n^1$  ذوي الاتصال  $F_i^h, \varphi_i$  على الترتيب، فإنه يتواجد تطبيق  $F_1 -$  سوي متناظر غير مبتدل جديد من الفضاء  $S_n^1$  في الفضاء  $S_n^1$  ذوي الاتصال  $F_1^n, \varphi_1^n$  تحقق العلاقات (11), (16), (20), (23).

كلمات مفتاحية :

فضاء كيلير - التطبيق السوي - الفضاء المتناظر

<sup>1</sup> - أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية جامعة الوادي الخاصة.

## New method of F - planimetric mapping between symmetric spaces

D. Michael Haddad

Docent at Wadi international university

### Abstract

In this research defined Khlerre space and symmefrie space , and F – planimetric mapping , and in the theorem (3) proved that the necessary and sufficient conditions.

The symmetie space to be premise to F – planimetric mapping, that exist in it symmetric tensor equal Zero investigate (17), (18) .

In theorem (4) proved if exest nontreval F – planimetric ametric symmetric space, from  $S_n$  space to  $S_n^1$  space with affine comection ,  $F_i^h, \varphi_i$  respectively, then exist . new treval F – planimetric symmetric from space  $S_n^1$  to space  $\bar{S}_n^1$  with affine connections  $\varphi_s^1, F_1^n$  respectivel relation ships (23), (20), (16), (11)

### Key word :

Khler space, symmetric spaces, Planimetric mapping .

هدف البحث :

يهدف البحث إلى دراسة خواص التطبيقات ( -F ) السوية بين الفضاءات المتناظرة ، وإيجاد المعادلات الأساسية لهذه التطبيقات وتحديد الشروط اللازمة و الكافية لوجود مثل هذه التطبيقات، وإيجاد قاعدة يمكننا من خلالها إنشاء متتالية من الفضاءات المتناظرة المتواجدة بينها تطبيقات ( -F ) سوية.

مقدمة البحث :

يدرس موضوع البحث نوعاً خاصاً من المنطويات ذوات الاتصال الأفيني.

\* تطورت في الآونة الأخيرة نظرية التطبيقات الديفيومورفية بين فضاءات ريمان ذوات الاتصال الأفيني ، و من هنا ظهر مفهوم التطبيقات الهولومورفية بين فضاءات كلير التي درست في أعمال ( اتسوكي - تاسيرو [8] - يانا [9] - ميكش [6] - ميكش داماشيفا [1] وشيخة [ ] .

والتي تعتبر تعميم لمفهوم التطبيقات الجيوديزية في أعمال سينسكوف و غيرها [ ] . كما درس سينيوكوف نظرية التطبيقات شبه الجيوديزية بين فضاءات ذوات الاتصال الأفيني عديم الالتفاف [4].

كما درس ميكش وكورباتا [6] أنواع خاصة من التطبيقات شبه الجيوديزية بين فضاءات ريمان [2-10].

و درس ميكش وسينيوكوف نوعاً خاصاً من التطبيقات بين الفضاءات ذوات الاتصال الأفيني عديمة الالتفاف أطلقوا عليها تسمية التطبيقات ( -F ) السوية [3].

نتابع في هذا البحث دراسة العلاقات الأساسية لهذه التطبيقات وشروط وجودها بين الفضاءات المتناظرة .

أولاً: التعاريف الأساسية:

○ تعريف (1)

المنطوي التفاضلي  $V_n$  من الصف  $(C^n)$  يدعى منطوياً ذا اتصال أفيني، إذا وجد فيه تنسور من النوع  $F_i^h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

وللاختصار نرمز لجداء التركيب  $(F_i^h)$  بأي تنسور  $(A_j \dots)$  من النوع  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ ، وأي

$$A_{\alpha} \dots F_i^{\alpha} = A_i \dots \quad \text{مرافق الدليل (j) للتنسور A بالشكل:}$$

$$A^{\alpha} \dots F_{\alpha}^h = A^{\bar{h}} \dots \quad \text{و لمرافق الدليل (h) للتنسور A بالشكل:}$$

○ تعريف (2)

فضاء كيلير هو فضاء ريمان ذو التنسور المتري  $(g_{ij})$  و التركيب  $(F_i^h)$  بحيث تتحقق الشروط :

$$\begin{aligned} a) F_a^h F_i^{\alpha} &= -\delta_i^h \\ b) g_{aj} F_i^{\alpha} + g_{ai} F_j^{\alpha} &= 0 \\ c) F_{i,j}^h &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

حيث  $\Gamma_{i,j}^h$  رموز كريستوفل للفضاء  $V_n$  و  $\langle \langle , \rangle \rangle$  تعني المشتق موافق التغيير للتركيب  $(F_i^h)$ .

○ تعريف (3)

يسمى فضاء ريمان  $V_n$  فضاء ذا تركيب (متناظر) إذا كان تركيبه الخطي  $(F_i^h)$  المتناظر تخالفاً وغير المعدوم يحقق الشروط :

$$\begin{aligned} a) F_{(ij,h)} &= F_{ij,h} + F_{hi,j} + F_{jh,i} = 0 \\ b) \det \| F_{ij} \| &\neq 0 \end{aligned} \quad (2)$$



$$c) F_{ij} = -F_{ji}$$

حيث التركيب المتناظر  $F_{ij}$  يعرف على  $V_n$  بالشكل:

$$F^h_i = F_{ai} g^{ah} \quad (3)$$

على اعتبار أن:

$$(4) F^\alpha_\alpha = 0$$

ثانياً: التطبيقات  $-F$  السوية بين الفضاءات ذوات الاتصال الأفيني:

ليكن  $A_n$  فضاءً ذا اتصال أفيني عديم الالتفاف المنسوب إلى النظام الإحداثي  $x^1, \dots, x^n$ ، والمحقق للشرط:

$$(5) F_i^h(x) \neq \alpha \delta_i^h$$

حيث:  $\delta_i^h$  دلتا كرونكر، و  $\alpha$  ثابت ما.

○ **تعريف (4):**

ليكن  $L$  منحنياً معرفاً بالمعادلة الوسيطة  $x^h = x^h(t)$  (ت وسيط) و متجه المماس له:

$$\lambda^h(t) = \frac{dx^h}{dt} (\neq 0) \quad (h=1,2,\dots,n)$$

يسمى ( $L$ ) منحنياً ( $-F$ ) سويةً، إذا بقي متجه المماس له  $\lambda^h(t)$  بالانتقال الموازي متوضعاً في المنطقة المستوية، المحددة بالمتجهين:  $\lambda^h(t)$ ،  $\lambda^h_\alpha F^\alpha$ .

أي يحقق العلاقة:

$$\lambda^h_\alpha F^\alpha = \rho_1(t) \lambda^h + \rho_2(t) \lambda^h F^h_\alpha \quad (5)$$

حيث:  $\rho_1, \rho_2$  دوال ما في  $t$ .

إن مجال الفضاءات  $A^n - F$  السوية واسع جداً، على اعتبار أنه في أي نقطة و وفق أي منحنى يمر دوماً مجموعة غير منتهية من المنحنيات.

إن وصف الدوال F- السوية يتضمن :

- 1- المنحنيات الجيوديزية.
- 2- المنحنيات شبه الجيوديزية.
- 3- المنحنيات السوية.
- 4- المنحنيات التحليلية السوية.

○ **تعريف (4) [3]**

ليكن  $\bar{A}_n, A_n$  فضاءين ذوي الاتصال الأفيني  $F^h_i, F^h_i$  تركيبها الأفيني على الترتيب، يسمى التطبيق:  $F: A_n \rightarrow \bar{A}_n$  - F سوي إذا صور كل منحنى F- سوي من الفضاء  $A_n$  بمنحنى F سوي من الفضاء  $\bar{A}_n$ .

الآن لنفرض أن الفضاءين  $\bar{A}_n, A_n$  متواجد بينهما تطبيق F- سوي، عندئذ نتحقق المبرهنات الآتية:

○ **مبرهنة (1) [3]**

التطبيق F- سوي من الفضاء  $A_n$  إلى الفضاء  $\bar{A}_n$  ( $n > 3$ ) و يحقق الشرط :

$$P_{ij}^h = \delta_i^h \psi_j + \delta_j^h \psi_i + F_i^h \phi_j + F_j^h \phi_i \quad (6)$$

حيث :  $\psi_i(x), \phi_j(x)$  رموز كريستوفل.

○ **مبرهنة (2) [4]**

إن أي تطبيق F- سوي من الفضاء  $A_n$  إلى الفضاء  $\bar{A}_n$  ( $n > 3$ ) يحافظ على تركيب الفضاءين ، أي:

$$F_i^h(x) = \bar{F}_i^h(x)$$

## ثالثاً: التطبيقات F-سوية بين الفضاءات المتناظرة:

ليكن الفضاءان المتناظران  $S_n(g_{ij}, F_{ij}), S_n(\bar{g}_{ij}, \bar{F}_{ij})$  الموجود بينهما تطبيق F-سوي، عندئذ فإن المعادلة الأساسية لهذا التطبيق في نظام إحداثي مشترك  $(x^h)$  تأخذ الشكل:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i)}(x) \delta_{ij}^h + \varphi_{(i)}(x) F_{(j)}^h(x) \quad (7)$$

$$|F_i^h| \neq 0$$

$$F_{(ij)} = \bar{F}_{(ij)} = 0 ; F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i} ; \bar{F}_{ij} = F_j^\alpha \bar{g}_{\alpha i} \quad (8)$$

$$F_{(ij/k)} = \bar{F}_{(ij/k)} = 0 \quad (9)$$

حيث (/) تعني المشتق موافق التغيير في الفضاء  $\bar{A}_n$  ذي الاتصال  $\bar{\Gamma}$ .

وتتحقق العلاقة الآتية بين المتجهين  $\psi_i$  و  $\varphi_i$ :

$$\psi_i = \varphi_\alpha F_i^\alpha = \varphi_i \quad (10)$$

استناداً إلى (10) بتقليص (7) بالدليل  $j, h$  نجد:

$$\frac{1}{n+2} (\Gamma_{i\alpha}^\alpha - \bar{\Gamma}_{i\alpha}^\alpha) = \varphi_i \quad (11)$$

هذا يعني أن  $\varphi_i = \psi_i$  متجه تدرج، أي يوجد صامد  $\psi(\alpha)$  بحيث

$$\psi_i = \psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \quad (12)$$

إن العلاقة الأساسية في التطبيقات F-السوية (7) تكافئ العلاقة:

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_{(i} \bar{g}_{j)k} + \varphi_i \bar{F}_{j)k} \quad (13)$$

رابعاً: الصيغة الجديدة للعلاقات الأساسية للتطبيقات F-السوية بين الفضاءات المتناظرة:

ليكن F-تطبيقاً سويةً من الفضاء المتناظر  $S_n(g_{ij}, F_{ij})$  إلى الفضاء المتناظر  $S_n(\bar{g}_{ij}, \bar{F}_{ij})$  فإن العلاقات الأساسية لهذا التطبيق في نظام إحداثي مشترك  $x^c$  كما وجدنا تأخذ الشكل (13), (12), (9), (8).

تمثل العلاقة ( 13 ) جملة معادلات تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى بالنسبة للتنسور  $g_{ij}$  ، ولإيجاد شروط وجود حل وحيد لهذه الجملة ، نستخدم طريقة التحويل للعالم سينيوكوف [4] في نظرية التطبيقات الجيوديزية بين فضاءات ريمان ولننطلق من المعادلة (13) و لناخذ في الفضاء  $S_n$  التنسور :

$$a_{ij} = e^{2\psi} g^{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha i} \cdot g_{\beta j} \quad (14)$$

لناخذ المشتق موافق التغيرله في  $S_n$  :

$$a_{ij,k} = e^{2\psi} \left( 2\psi_j \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} + \bar{g}_{,k}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} \right)$$

و باعتبار أن:

$$\bar{g}_{i\alpha} \bar{g}^{\alpha h} = \delta_i^h$$

ينتج:

$$\bar{g}_{i\alpha,k} \bar{g}^{\alpha h} + \bar{g}_{i\alpha} \bar{g}_{,k}^{\alpha h} = 0$$

$$\bar{g}_{,k}^{ih} = -\bar{g}_{\alpha\beta,k} \bar{g}^{\alpha i} \bar{g}^{\beta h} \quad \text{أو:}$$

من هنا ينتج استناداً إلى ( 13 ):

$$\begin{aligned} a_{ij,k} &= e^{2\psi} \left( 2\psi_k \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} - \bar{g}_{\gamma\delta,k} \bar{g}^{\alpha\gamma} \bar{g}^{\beta\delta} g_{\alpha i} g_{\beta j} \right) = \\ &= e^{2\psi} \left[ 2\psi_k \bar{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j} - \left( 2\psi_k \bar{g}_{\alpha\beta} + \psi_{(\alpha} \bar{g}_{\beta)k} + \varphi_{(\alpha} \bar{F}_{\beta)k} \right) \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} g_{\beta j} \right] = \\ &= e^{2\psi} \left( -\psi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} g_{jk} - \psi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma j} g_{ik} - \varphi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} F_{jk} - \varphi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma j} F_{ik} \right) = \\ &= -e^{2\psi} \left( \psi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma(i} g_{j)k} + \varphi_{\alpha} g_{\gamma(i} F_{j)k} \right) \end{aligned}$$

أي أن:

$$a_{ij,k} = -e^{2\psi} (\psi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma(i} g_{j)k} + \varphi_{\alpha} g_{\gamma(i} F_{j)k})$$

لنفترض أن:

$$e^{2\psi} \bar{g}^{h\alpha} g_{\alpha i} = A_i^h \quad (15)$$

$$\varphi_{\alpha} A_i^{\alpha} = \varphi_i^1 \quad (16)$$

حيث إن  $\psi_i = \varphi_i$ ، فإنه من (9) نجد:

$$\begin{aligned} e^{2\psi} \psi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} &= e^{2\psi} \varphi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} = \\ &= e^{2\psi} \varphi_{\alpha} \bar{g}^{\alpha\gamma} g_{\gamma i} = \varphi_i^1 \end{aligned}$$

و منه نجد :

$$a_{ij,k} = -\varphi_i^1 g_{jk} - \varphi_j^1 g_{ik} - \varphi_i^1 F_{j)k} \quad (17)$$

حيث:

$$F_{jk} = F_{k}^{\alpha} g_{\alpha j} = -F_{kj}.$$

و يتحقق الشرط (8) من أجل التنسور  $a_{ij}$ :

$$a_{ja} F^{\alpha}_i = -a_{ia} F^{\alpha}_j \quad (18)$$

حقيقة لدينا:

$$\begin{aligned} a_{ja} F^{\alpha}_i &= e^{2\psi} F^{\alpha}_i g_{\alpha\beta} \bar{g}^{\beta\delta} g_{\delta j} = \\ &= -e^{2\psi} F^{\alpha}_{\beta} g_{\alpha i} \bar{g}^{\beta\delta} g_{\delta j} = e^{2\psi} F^{\delta}_{\beta} g_{\alpha i} \bar{g}^{\beta\delta} g_{\delta j} = \\ &= -e^{2\psi} F^{\delta}_j g_{\alpha i} \bar{g}^{\beta\delta} g_{\delta j} = -a_{ia} F^{\alpha}_j. \end{aligned}$$

واستناداً إلى العلاقات ( 14 ) و ( 16 ) يكون  $a_{ij}$  تنسوراً متناظراً غير صفري من النوع

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ و } \varphi_i^1 \text{ متجه موافق التغير، و بتقليص ( 17 ) بالتنسور } g^{ij} \text{ نجد :}$$

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta,k} g^{\alpha\beta} &= -\varphi_\alpha^1 g_{\beta k} g^{\alpha\beta} - \varphi_\beta^1 g_{\alpha k} g^{\alpha\beta} - \varphi_\alpha^1 F_{\beta k} g^{\alpha\beta} - \varphi_{j\beta}^1 F_{\alpha k} g^{\alpha\beta} = \\ &= -\varphi_k^1 - \varphi_k^1 - \varphi_\beta^1 F_{\beta k} - \varphi_\beta^1 F_{\beta k} = -4\varphi_k^1. \end{aligned}$$

وباعتبار أن المشتق موافق للمتغير  $g^{ij}$  مطابقاً للصفر يكون لدينا :

$$(a_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta})_{,k} = -4\varphi_k^1$$

من هنا نجد أن  $\varphi_k^1$  متجه تدرج ، حيث أنه يتضح من ( 16 ) أن  $\varphi_k^1 \neq 0$  على اعتبار أن  $\varphi_k \neq 0$  وبالعكس .

من هنا نجد أنه إذا كان الفضاء  $S_n$  منطلقاً لتطبيق F- سوي غير مبتدل فإنه يوجد فيه تنسور  $a_{ij}$  يحقق الخواص ( 17 ) و ( 18 ) حيث:  $\varphi_i^1 \neq 0$  .

و بسهولة نلاحظ أن العكس صحيح أيضاً ، كما هو موضح في [ 4 ] .

### • مبرهنة ( 3 ) :

إن الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء المتناظر  $(g_{ij}, F_{ij})$   $S_n$  منطلقاً لتطبيق F- سوي

هو أن يوجد فيه تنسور متناظر غير صفري من النوع  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  يحقق الخواص (17) و(18)

بشرط أن يكون المتجه  $\varphi_i^1 \neq 0$  .

أي أن (17) تمثل الشكل الجديد للمعادلة الأساسية في نظرية التطبيقات المتناظرة F- السوية ، وهي تكافئ العلاقة (13)

خامساً: التحويلات الثابتة في الفضاءات المتناظرة و المتواجد بينها تطبيق F- السوي:

باعتبار أن التنسور  $a_{ij}$  المعرف بالعلاقة (14) متناظر غير صفري من النوع  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

يمكننا القول إن للفضاء  $S_n^1$  تنسور متري ، لنحدده:

ينتج من (17) أن:

$$\begin{aligned} -\Gamma_{ki}^{\alpha} a_{aj} - \Gamma_{kj}^{\alpha} a_{ai} &= \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \\ &= -\varphi_i^l g_{jk} - \varphi_i^l g_{jk} - \varphi^l_{(i} F_{j)k} \end{aligned}$$

أي أن :

$$\Gamma_{ki}^{\alpha} a_{aj} + \Gamma_{kj}^{\alpha} a_{ai} - \varphi_i^l g_{jk} - \varphi^l_{(i} F_{j)k} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}$$

استناداً إلى العلاقة الأخيرة نحصل على رموز كريستوفل من النوع الأول  $\Gamma^l_{ij,k}$  للفضاء

$S_n^1$ .

$$\begin{aligned} \Gamma^l_{ij,k} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \Gamma_{ji}^{\alpha} a_{ak} + \Gamma_{jk}^{\alpha} a_{ai} - \varphi^l_{i} g_{kj} - \varphi^l_{k} g_{ij} - \varphi^l_{i} F_{kj} - \varphi^l_{k} F_{ij} + \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{ij}^{\alpha} a_{ak} + \Gamma_{ik}^{\alpha} a_{aj} - \varphi^l_{i} g_{ki} - \varphi^l_{k} g_{ji} - \varphi^l_{i} F_{ki} - \varphi^l_{k} F_{ji} - \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_{ki}^{\alpha} a_{aj} - \Gamma_{kj}^{\alpha} a_{ai} + \varphi^l_{i} g_{jk} + \varphi^l_{j} g_{ik} + \varphi^l_{i} F_{jk} + \varphi^l_{j} F_{ik} \right) = \end{aligned}$$

$$= \Gamma_{ji}^{\alpha} a_{\alpha k} - \varphi^1_{\underline{k}} g_{ij} - \varphi^1_i F_{kj} - \varphi^1_j F_{ki}$$

برفع الدليل k مستخدمين التنسور  $a^{kh}$  في  $S^1_n$  نجد :

$$\begin{aligned} \Gamma^l_{ij,\beta} \alpha^{\beta h} &= \Gamma_{ji}^{\alpha} a_{\alpha\beta} \alpha^{\beta h} - \varphi^1_{\underline{\beta}} g_{ij} \alpha^{\beta h} - \varphi^1_i F_{\beta j} \alpha^{\beta h} - \varphi^1_j F_{\beta i} \alpha^{\beta h} = \\ &= \Gamma_{ji}^h - \varphi^1_{\underline{\beta}} \alpha^{\beta h} g_{ij} - \varphi^1_i F_{\beta j} \alpha^{\beta h} - \varphi^1_j F_{\beta i} \alpha^{\beta h}. \end{aligned}$$

أو:

$$= \Gamma_{ij}^k - \varphi^1_{\underline{\alpha}} a^{\alpha k} g_{ij} - \varphi^1_i F_{\alpha j} a^{\alpha k} - \varphi^1_j F_{\alpha i} a^{\alpha k}, \Gamma^{1k}_{ij}$$

حيث  $\Gamma^{1k}_{ij}$  - رموز كريستوفل للفضاء  $S^1_n$ .

ينتج من (14) و (15) :

$$\begin{aligned} \varphi^1_{\underline{\alpha}} a^{\alpha k} &= (e^{2\psi} \varphi_{\underline{\beta}} g^{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha}) (e^{-2\psi} g^{\alpha\sigma} \varphi_{\sigma\mu} g^{\mu k}) = \\ &= \varphi_{\underline{\beta}} g^{\beta k} = \psi_{\beta} g^{\beta k} = \psi^k. \end{aligned}$$

نرمز بـ :

$$F_{\alpha j} a^{\alpha k} = e^{-2\psi} F_{\alpha j} g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g^{\gamma k} = F_j^{\beta} \tilde{A}^K_{\beta} = {}^{def} F^l_j{}^k, \quad (20)$$

حيث :  $(\tilde{A}^K_i) = (\tilde{A}^K_i)^{-1}$ .

من الواضح أن :

$$F^l_j{}^k = F_j^{\beta} \tilde{A}^K_{\beta} = F^k_{\beta} \tilde{A}^{\beta}_j \quad (21)$$

حقيقةً من العلاقة ( 8 ) نجد:



$$\begin{aligned}\tilde{A}^K_\beta &= e^{-2\psi} F^\beta_j \tilde{g}_{\beta\alpha} \tilde{g}^{\alpha k} = - e^{-2\psi} F^\beta_\alpha \tilde{g}_{\beta j} g^{\alpha k} = F^\beta_j \\ &= e^{-2\psi} F^k_a \tilde{g}_{\beta j} g^{\alpha\beta} = F^k_a \tilde{A}^a_j.\end{aligned}$$

إن العلاقة (18) تأخذ الشكل :

$$= \Gamma^k_{ij} - \psi^k g_{ij} - \phi^l_{(i} F^l_{j)} \quad (22) \Gamma^{lk}_{ij}$$

ليكن  $S^1_n$  فضاء ريمان ذا التنسور المترى :

$$a_{ij} = e^{2\psi} g_{ij}. \quad (23)$$

وكما هو معلوم أن الأخيرة (23) تعني وجود تطبيق ثوافقي من الفضاء  $S_n$  إلى

الفضاء  $S^1_n$  ، لذلك فإن مركبات كريستوفل تأخذ الشكل :

$$\Gamma^{lh}_{ij} = \Gamma^h_{ij} + \psi_{(i} \delta^h_{j)} - \psi^h g_{ij} \quad (24)$$

و استناداً إلى (22) نجد :

$$\begin{aligned}\underline{\Gamma}^{lh}_{ij} &= \Gamma^{lh}_{ij} + \psi^h g_{ij} + \phi^l_{(i} F^{lh}_{j)} + \psi_{(i} \delta^h_{j)} - \psi^h g_{ij} = \\ &= \Gamma^{lh}_{ij} + \psi_{(i} \delta^h_{j)} + \phi^l_{(i} F^{lh}_{j)}\end{aligned}$$

أي أن:

$$\underline{\Gamma}^{lh}_{ij} = \Gamma^{lh}_{ij} + \psi_{(i} \delta^h_{j)} + \phi^l_{(i} F^{lh}_{j)} \quad (25).$$

حيث:

$$F^{lh}_j = F^h_\alpha \tilde{A}^\alpha_j.$$

يتضح من (10) و (16) أن :

$$\psi_i = \varphi_i = \varphi_\alpha^1 \tilde{A}^\alpha_\beta F^\beta_i = \varphi_\alpha^1 F^{1\alpha}_i \quad (26)$$

و استناداً إلى ( 20 ) و ( 23 ) نجد أنه في  $S_n, S_n^1$  :

$$F^{1}_{ij} = \stackrel{def}{=} F^{1\alpha}_j a_{\alpha i} = F_{\beta j} a^{\beta\alpha} a_{\alpha i} = F_{ij}; \quad (27)$$

$$F^{1}_{ij} = \stackrel{def}{=} F^{1\alpha}_j a_{\alpha i} = F_{\beta j} a^{\beta\alpha} a_{\alpha i} = \quad (28)$$

$$= F_{\beta j} ( e^{-2\psi} g^{\beta\gamma} g_{\gamma\delta} g^{\delta\alpha} ) ( e^{2\psi} g_{\alpha i} ) = F_{ij};$$

هذا يعني استناداً إلى ( 8 ) أن :

$$F^l_{(ij)} = \underline{F}^l_{(ij)} = 0$$

و باعتبار أن  $|F_i^h| \neq 0$  و  $|A_i^h| \neq 0$  نجد :

$$|F_a^h \tilde{A}_i^\alpha| = |F_i^{1h}| \neq 0 \quad (29)$$

أخيراً من (27) و (28) و (29) نجد :

$$F^{1}_{(ij)k} \equiv \frac{\partial F^{1}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F^{1}_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F^{1}_{ki}}{\partial x^j} = \quad (30)$$

$$= \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = F_{(ij,k)} = 0 ;$$

$$\underline{F}^l_{(ij)k} \equiv \frac{\partial F^l_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F^l_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F^l_{ki}}{\partial x^j} = \quad (31)$$

$$= \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = \underline{F}^l_{(ij,k)} = 0 ;$$

حيث "1" و "1" تعني المشتق موافق التغير في الفضاء  $S_n^1$  و  $\underline{S}_n^1$  على الترتيب.

تعني العلاقات (31) و (27) أن  $F_{ij}^1$  و  $\underline{F}_{ij}^1$  هي تركيب متناظر والفضائين  $(a_{ij}, F_{ij}^1)$ ،  $(a_{ij}, \underline{F}_{ij}^1)$  متناظران.

بمقارنة العلاقات (25) و (32) مع العلاقات (7) و (10) نصل إلى المبرهنة الآتية:

• مبرهنة (4) :

إذا وجد تطبيق  $F$ -سوي غير مبتدل بين فضائين متناظرين:

$$F : S_n(g_{ij}, F_{ij}) \longrightarrow \bar{S}_n(\bar{g}_{ij}, \bar{F}_{ij})$$

الموافقة للاتصال الأفيني  $(F^{hi})$  والمتجه  $(\varphi_i)$  على الترتيب ، فإنه يتولد تطبيق  $F$ -سوي

غير مبتدل جديد من الفضاءين المتناظرين  $S_n^1$  إلى  $\bar{S}_n^1$ :

$$F_1 : S_n^1(a_{ij}, F_{ij}^1) \longrightarrow \bar{S}_n^1(\bar{a}_{ij}, \bar{F}_{ij}^1)$$

الموافقة للتركيب  $F^{hi}$  و المتجه  $(\varphi^1)$  حيث الترسورات:

$$F_{ij}^1, \bar{F}_{ij}^1, F_i^{1h}, \varphi_i^1, a_{ij}, \bar{a}_{ij}$$

موضحة بالعلاقات (14)، (18)، (26)، (17)، (28)، (20) ، (21)

نكون بذلك استناداً إلى العلاقات (14) و (16) و (20) و (23) قد توصلنا إلى قاعدة

انشاء زوج من الفضاءات  $(S_n)$  و  $(\bar{S}_n)$  الموجود بينها تطبيق F- سوي  $F: S_n^1 \longrightarrow \bar{S}_n^1$

والزوج الجديد من الفضاءات المتناظرة  $(S_n^1)$  و  $(\bar{S}_n^1)$  المتواجد بينها  $F_1: S_n^1 \longrightarrow \bar{S}_n^1$

تطبيق F- سوي .

التحويل الثابت F- السوي الموافق لها و نرمز له بالشكل:

$$\Gamma(g, g, \varphi, F) \equiv (a^l, \bar{a}^l, \varphi^l, F^l)$$

حيث رمزنا لـ  $a^l_{ij} = a_{ij}$ ,  $\bar{a}^l_{ij} = \bar{a}_{ij}$

بذلك يمكننا القول إن التحويلات الثابتة هي تطابق بين الفضاءات المتناظرة التي يوجد

بينها تطبيقات F- سوية.

## Литература

- 1- Домашев В.В. , Микеш й . К теории *голоморфно-проективных отображений келеровых пространств* // Мат . заметки , 1978 , 28 , №2 . С.297, 303.
- 2- Курбатова И.Н. *НР-отображения Н-пространств*//Укр геом.сб. , 1984 . вып.24 . С.75-82 .
- 3- Микеш й . , Синюков Н.С. О *квазипланарных отображениях пространств аффинной связности*// Изв вузов , Матем . 1983. - №3 . С.55-61 .
- 4- Синюков Н.С. Геодезические *отображения римановых пространств*// М .: Наука , 1979. 275с .
- 5- Ishihara S. *Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold*// Tohoku Math . J. , 1957.9 . №3 . p.273-294 .
- 6- Jano K. *Differential Geometry of Complex and Almost Complex Spaces* / Pergamon Press , 1965 .
- 7- , Mikes J. , Vanzurova A. , *Hinterleitner I. Geodesic Mappings and Some Generalizations*// Palacky University . Olomouc , Faculty of Science . Olomouc ,2009
- 8- Otsuki T. , Tashiro J. *On curves in Kahlerian spaces*// Math.J.Okayama Univ . , 1954 , 4. №1 . p.57-78 .

- 9- Tashiro J. *On holomorphically projective correspondences in an almost complex spaces*// Math.J.Okayama Univ . , 1957 , 6 , №2 . p.142-152 .
- 10 -Курбатова Т.Н., . Добик М.В. *Особенности F-планарных отображений квазисимплектических пространств* .Тез.докл . Международной конференции "Геометрия в Одессе - 2014 - Одесса . 2014 .
- 11.Фоменко А.Т. *Дифференциальная геометрия и топология . Дополнительные главы* . Изд-во МГУ , 1983 .