

مجلة جامعة البعث

سلسلة العلوم الأساسية



مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 42 . العدد 7

1442 هـ - 2021 م

الأستاذ الدكتور عبد الباسط الخطيب

رئيس جامعة البعث

المدير المسؤول عن المجلة

رئيس هيئة التحرير

أ. د. ناصر سعد الدين

رئيس التحرير

أ. د. درغام سلوم

مديرة مكتب مجلة جامعة البعث

بشرى مصطفى

عضو هيئة التحرير	د. محمد هلال
عضو هيئة التحرير	د. فهد شريباتي
عضو هيئة التحرير	د. معن سلامة
عضو هيئة التحرير	د. جمال العلي
عضو هيئة التحرير	د. عباد كاسوحة
عضو هيئة التحرير	د. محمود عامر
عضو هيئة التحرير	د. أحمد الحسن
عضو هيئة التحرير	د. سونيا عطية
عضو هيئة التحرير	د. ريم ديب
عضو هيئة التحرير	د. حسن مشرقي
عضو هيئة التحرير	د. هيثم حسن
عضو هيئة التحرير	د. نزار عبشي

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها

الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة البعث

سورية . حمص . جامعة البعث . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : ++ 963 31 2138071

. موقع الإنترنت : www.albaath-univ.edu.sy

. البريد الإلكتروني : [magazine@ albaath-univ.edu.sy](mailto:magazine@albaath-univ.edu.sy)

ISSN: 1022-467X

شروط النشر في مجلة جامعة البعث

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
- طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
- إذا كان الباحث طالب دراسات عليا: يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقة على النشر في المجلة.
- إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية: يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.
- إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث : يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.
- إذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية : يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.
- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):
 - 1- مقدمة
 - 2- هدف البحث
 - 3- مواد وطرق البحث
 - 4- النتائج ومناقشتها .
 - 5- الاستنتاجات والتوصيات .
 - 6- المراجع.

- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (الآداب - الاقتصاد - التربية - الحقوق - السياحة - التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):
- عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1. مقدمة.
- 2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
- 3. أهداف البحث و أسئلته.
- 4. فرضيات البحث و حدوده.
- 5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
- 6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
- 7. منهج البحث و إجراءاته.
- 8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
- 9. نتائج البحث.
- 10. مقترحات البحث إن وجدت.
- 11. قائمة المصادر والمراجع.
- 7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:
 - أ- قياس الورق 25×17.5 B5.
 - ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 - يمين 2.5- يسار 2.5 سم
 - ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8
 - ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20
- . كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي . العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.
- ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.
- 8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.
- 9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.
- 10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة . الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة . سنة النشر . وتتبعها معترضة (-) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة . دار النشر وتتبعها فاصلة . الطبعة (ثانية . ثالثة) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة . وفيما يلي مثال على ذلك:

-MAVRODEANUS, R1986- Flame Spectroscopy. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

. بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة . المجلد والعدد (كتابة مختزلة) وبعدها فاصلة . أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة . مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases Clinical Psychiatry News , Vol. 4. 20 – 60

ج . إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد

بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: (المراجع In Arabic)

رسوم النشر في مجلة جامعة البعث:

1. دفع رسم نشر (20000) ل.س عشرون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (50000) ل.س خمسون ألف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (3000) ل.س ثلاثة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

المحتوى

الصفحة		
38-11	عبير السوس د. عبد الإله الشيخ حمود د. علي يوسف	اصطناع مشتقان جديان للتيمول بتفاعل التيمول مع بعض المركبات الأمينية
60- 39	د. عبدالله رستناوي د. سليمان ديبو علي الدود	معادلة تحليلية عامة لتدفق الحزمة النيوترونية العابرة لعينة ذات أبعاد كبيرة
88-61	أ.د. علي يوسف د. ثناء شريتح سهير علي	اصطناع وتوصيف بولي [2,2- ثنائي (4-أكريلات فينيل) بروبان]
110-77	أ. د. منتجب الحسن حسام شقوف	شروط <i>Sommerfeld</i> المقاربية لكمونات <i>Nowacki</i> المتوافقة مع الحالة الديناميكية لجسم <i>Koiter-Mindlin</i> الخاضع لحمول حجمية متغيرة توافقياً مع الزمن
146-111	ايمان حسين د. سامح العرجه	دراسة استقرار حل جملة معادلات تكاملية تفاضلية من مرتبة كسرية باستخدام مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة

160-147	أ.د. منتجب الحسن علي لولو	تعميم طريقة متجه تشيفر في حل مسائل الحالة المستوية، الأولى لانفعالات الجسم الصلب المرن الخاضع لحرارة
---------	------------------------------	--

اصطناع مشتقان جديان للتيمول بتفاعل التيمول

مع بعض المركبات الأمينية

طالبة دكتوراه : عبير السوس *

كلية العلوم - جامعة البعث

إشراف الدكتور: عبد الإله الشيخ حمود + د. علي يوسف

ملخص البحث

حضر في هذا البحث مركبين جديدين من مشتقات التيمول:

المركب A:6- ايزوبروبيل-3- ميتيل-2- (نفثالين-2-أمينو) ميتيل) فينول.

المركب B:1- (2,4-ثنائي نترو فينيل)-2- (3-ايزوبروبيل-6,2-ثنائي ميتيل بنزول

(هيدرازين ،انطلاقاً من تفاعل التيمول مع كل من نفتيل أمين و ثنائي نترو فينيل

هيدرازين والفورم ألدهيد بوسط حمضي، بالتسخين لدرجة الحرارة 80 م°، بعد ذلك تمت

تنقية المركبين بإعادة البلورة بالإيثانول و كان المردود 85% للمركب A و 70% للمركب

B.

تم تحديد بنية المركبات باستخدام أطياف الأشعة تحت الحمراء وطيف الطنين النووي

المغناطيسي $^{13}\text{C-NMR}$, $^1\text{H-NMR}$.

كما تم دراسة الفعالية الحيوية لهذين المركبين على كل من جرثيم سالبة الغرام وإيجابية

الغرام وذلك باستخدام طريقة ورق الترشيح المشرب بالمادة، إذ بينت النتائج بأن المركب

A لم يبدي فعالية تجاه جرثيم ايجابية الغرام وسلبية الغرام، بينما المركب B أبدى فعالية

تجاه الجرثيم ايجابية الغرام وسلبية الغرام.

كلمات مفتاحية: التيمول ، نفتيل أمين ، 2,4-ثنائي نترو فينيل هيدرازين ، جرثيم إيجابية

الغرام .

(* طالبة دكتوراه - قسم الكيمياء - كيمياء عضوية - كلية العلوم - جامعة البعث

Synthesis of two new Thymol derivatives via Reaction of Thymol with some amino compounds

Abeer Alsous *) Abdulilah Alsheikh Hammoud, Ali Youssef

Abstract

In this research two new derivatives of thymol have been synthesized:

A: 6-isopropyl-3-methyl-2-((naphthalen-2-ylamino)methyl)phenol and B: 1-(2,4-dinitrophenyl)-2-(3-isopropyl-2,6-dimethylbenzyl)hydrazine by the reaction of thymol with 2-Naphthylamine, 2,4-Dinitrophenyl Hydrazine and formaldehyde in presence of hydrochloric acid as catalyst at 80 °C. The products were obtained in high yields: 85% for the compound(A) and 70% for (B). The purified products were characterized by spectral methods such as IR, ¹HNMR and ¹³CNMR spectroscopy. The biological activity of compounds were studied on both Gram-negative and Gram-positive bacteria by impregnated filter paper method. The results showed that the compound A wasn't effective against both Gram-positive and Gram-negative bacteria, while B was effective against both Gram-positive and Gram-negative bacteria.

Key words: thymol, 2-Naphthylamine, 2,4-Dinitrophenyl Hydrazine, Gram-positive bacteria.

*) student D.Ph- organic chemistry- Department of chemistry- Faculty of science-albaath university, SYRIA

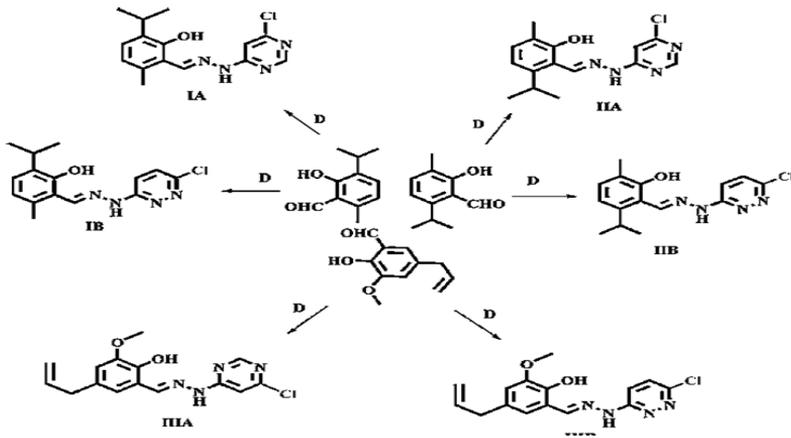
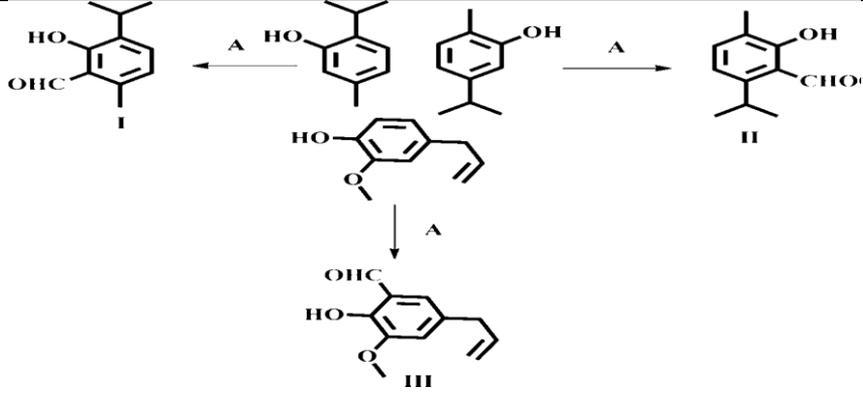
1- مقدمة:

تملك مشتقات التيمول فعالية حيوية ودوائية واسعة، الأمر الذي يكسبها أهمية كبيرة في الكيمياء والزراعة و الأصبغة والصناعات الدوائية ، وتعتبر المركبات الأكثر إنتاجاً، كما تملك هذه المركبات فعالية حيوية و دوائية تجاه العديد من الميكروبات والفيروسات والفطريات وسرطان الجلد وتعمل كمضادات حيوية في حالات عديدة، وتستخدم الكثير من مشتقات التيمول في معالجة السل والملاريا ومكافحة الليشمانيا وكبح نشاط العصيات والمكورات العنقودية والجراثيم موجبة وسالبة الغرام . كما لها تطبيقات مضادة للأكسدة[1]، و لها نشاط طارد للديدان ومعمم للجروح ومنقٍ للأعضاء من البلغم[2]، ولها أهمية دوائية صيدلانية كمواد مضادة للتشنج ومهدئات ومسكنات للألم[3]، وأيضاً لها فعالية منشطة للجهاز الهضمي حيث تزيد من نشاط الأنزيمات الهاضمة[4]، ولها دور في مكافحة تكوين حصى الكلى[5]، تخفيض ضغط الدم وخفض مستويات الكولسترول[6].

في عام 2017 قام العلماء Jamatsing D. Rajput¹• Suresh D. وغيرهم باصطناع مشتقات للتيمول ذات أهمية بيولوجية هامة حيث تبين لها نشاطات مضادة للسرطان (سرطان البنكرياس وسرطان القولون) ومضادة للاكسدة. تم تصنيع هذه المركبات كأدوية من قبل العديد من الباحثين من أجل مكافحة الأمراض مع الحد الأدنى من السمية ذات الآثار القسوى.

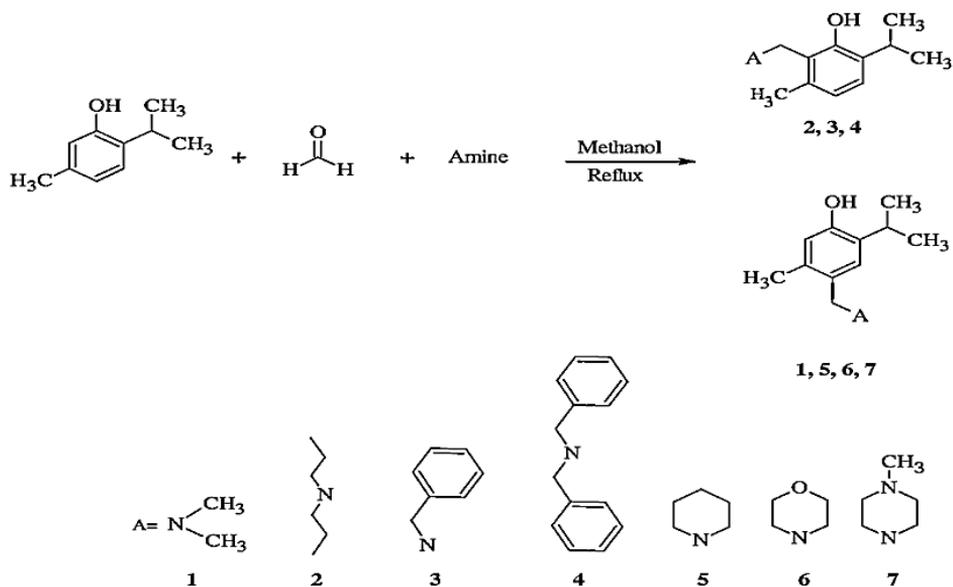
قام الكيميائيون الطبيون بعمل بحث واسع النطاق على مشتقات التيمول وفق المخطط (1) ، وقد تم تطوير منهجيات اصطناع مشتقات التيمول، حيث وجد أنها نشطة ضد أهداف دوائية متنوعة كمضادات للميكروبات وللسرطان و لالتهابات و للملاريا[8].

اصطناع مشتقات جديدة للثيمول بتفاعل الثيمول مع بعض المركبات الأمينية



المخطط (1): اصطناع مشتقات دوائية للثيمول

كما تم اصطناع سبعة مشتقات للثيمول من قبل العلماء Halise Inci Gul, Cem Yamali, Asiyе Tugce Yasa, Elif Unluer وآخرون في عام 2016 وذلك عن طريق تفاعل الثيمول مع الفورمالين وأمينات متنوعة في الميثانول وتسخين الخليط لمدة زمنية تتراوح بين 20 و 26 ساعة وفق تفاعل مانيش وذلك في الموقع اورتو وبارا وتم تقييم تلك المركبات كمضادة للورم وهي من المركبات الأكثر أنتقائية ضد hcAl و hcAll ولها أنشطة مضادة للخلايا السامة (OSCC) وخلايا الفم الطبيعية [9].

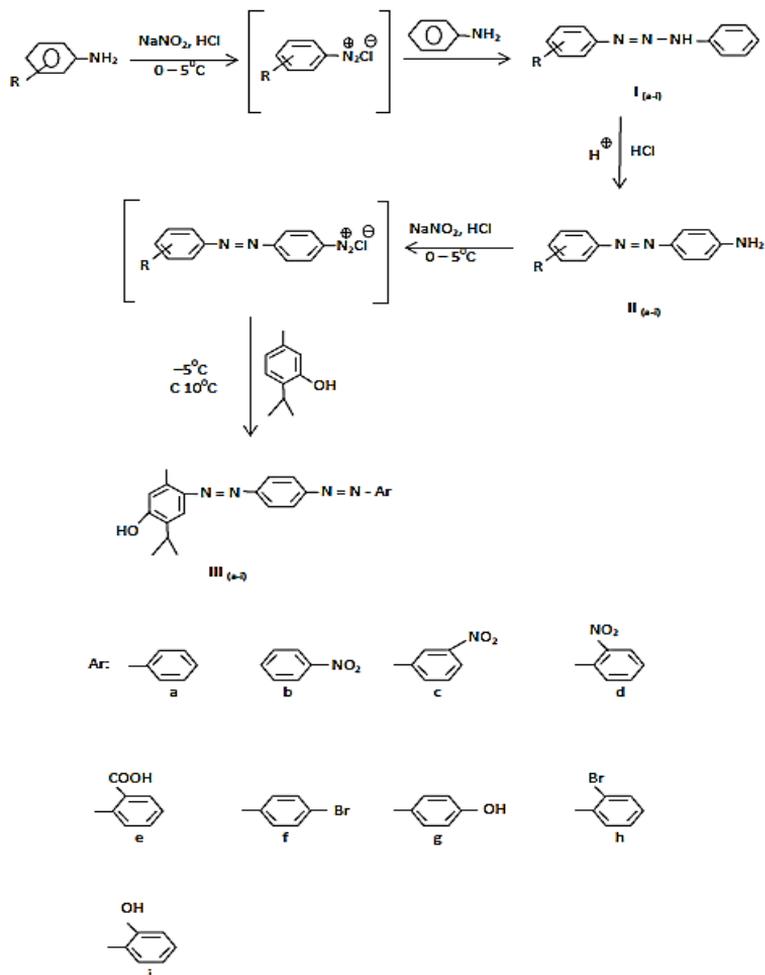


المخطط (2): اصطناع مشتقات للتيمول وفق تفاعل مانيش.

وفي عام 2012 قام العلماء MRS. PRAVINA B. PISTE وآخرون باصطناع مشتقات أمينية للتيمول انطلاقاً من تفاعل التيمول وبارا أمينو آزو بنزن حيث أظهرت هذه المركبات نشاطاً مضاداً للميكروبات والبيكتيريا ضد العصيات الرقيقة ايجابية الغرام والمكورات العنقودية الذهبية وأنواع البكتيريا القولونية السالبة الغرام [10]. وفق المخطط

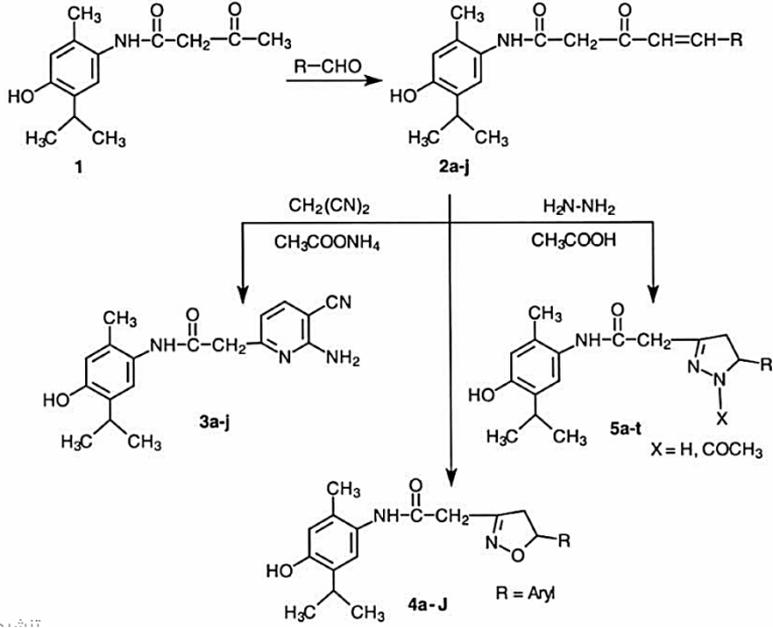
(3):

اصطناع مشتقات جديدة للتيمول بتفاعل التيمول مع بعض المركبات الأمينية



المخطط (3): اصطناع مشتقات أزو بنزن تيمول

في عام 2003 قام العالم J.M desai ورفاقه باصطناع سلسلة من المشتقات الأمينية للتيمول ، لها أهمية بيولوجية كمضاد للفطريات والميكروبات والجراثيم ، حيث تم الاصطناع انطلاقا من 4-اسيتواسست أميد و التيمول مع بارا ميتوكسي بنزالدهيد، ثم مفاعلة قسم من الناتج مع الهيدرازين بوجود حمض الخل والقسم الثاني تمت مفاعله مع مالونونتريل بوجود خلات الأمونيوم [11] وفق المخطط (4) :



المخطط (4): اصطناع مشتقات أمينية للتيمول

2- هدف البحث:

للتيمول أهمية كبيرة في الكيمياء العضوية وفي الكيمياء الحيوية، إذ يستخدم على نطاق واسع للحد من الطفيليات الداخلية وللقضاء عليها [11]، و منع التخمر ونمو العفن في خلايا النحل [12]، كما تمتلك مشتقاته نشاطاً مضاداً للميكروبات، لذا يهدف هذا البحث إلى:

- اصطناع مشتقان جديان للتيمول من خلال تفاعله مع المركبات الأمينية وفصل النواتج وتنقيتها .
- التأكد من هوية النواتج من خلال تحديد بنيتها الجزيئية باستخدام أطياف الـ NMR (البروتوني والكربوني) و طيف الأشعة تحت الحمراء (IR).
- دراسة الفعالية البيولوجية للنواتج تجاه الجراثيم.

3- القسم التجريبي:

3-1- الأجهزة والمواد الكيميائية المستخدمة:

- جهاز طيف الطنين النووي المغناطيسي بروتوني و كربوني نموذج 400MHz من شركة Bruker السويسرية.
- جهاز درجة الانصهار Electrothermal Melting Point Apparatus
- ميزان حساس نوع artorius BL-210S
- سخان مزود بمحرك مغناطيسي Agimatic P-Selecta 243
- مبخر دوار نموذج 4.91 من شركة Normschiff الألمانية
- مصباح UV مزود بلمبتين 254 nm و 366 nm من شركة DESAGA الألمانية.

3-2- المواد الكيميائية المستخدمة :

- تيمول- ثنائي كلور الإيتان- ميتانول- نفتيل أمين، 2،4- ثنائي نترو فينيل هيدرازين، إيتانول، فورم ألدهيد.
- ألواح كروماتوغرافيا الطبقة الرقيقة TLC تحليلية وتحضيرية من الألمنيوم مطلية بالسيليكا جل 60F₂₅₄ بقياس 20X20 من شركة MERK الألمانية.
- جميع هذه المواد المخبرية عالية النقاوة من شركات BDH, Merck, Fluka .

3-3 - تحضير المركب (A):

- يُوضع في حوالة مصنفرة ثنائية الفتحة سعة (100 mL) مجهزة بسخان ومحرك مغناطيسي ومبرد عكوس (1.5gr, 0.01mol) تيمول، و (1.43gr, 0.01mol) نفتيل أمين، ومذيب 20ml من الإيتانول ويحرك المزيج لمدة ساعة، ثم يُضاف بالتنقيط (37%(w/v), 1ml) من محلول الفورم ألدهيد، يكثف مزيج التفاعل لمدة 5 ساعات عند درجة غليان المذيب (78 °C). تم مراقبة سير التفاعل بواسطة كروماتوغرافيا الطبقة الرقيقة T.L.C باستخدام جملة جرف (ثنائي كلورو الإيتان - ميتانول)، فتشكل راسب بني فاتح، فصل بالترشيح وتمت تنقيته بإعادة البلورة بالإيتانول، حيث تم الحصول على ناتج بمردود 85%، و درجة انصهار (m.p=310 °C).

3-4 - تحضير المركب (B):

يُوضع في حوجلة مصنفرة ثنائية الفتحة سعة (100 mL) مجهزة بسخان ومحرك مغناطيسي ومبرد عكوس (1.5gr, 0.01mol) تيمول، و (1.98gr, 0.01mol)، 4,2- ثنائي نثرو فينيل هيدرازين، تذاب في 20ml من الإيتانول ويحرك المزيج مدة ساعة، ثم يُضاف بالتدقيق (1ml, 37%(w/v)) من محلول الفورم ألدهيد، يكثف مزيج التفاعل لمدة 4 ساعات عند درجة غليان المذيب (78 °C). تم مراقبة سير التفاعل بواسطة كروماتوغرافيا الطبقة الرقيقة T.L.C باستخدام جملة جرف (ثنائي كلورو الإيتان - ميثانول)، فتشكل راسب برتقالي، تم فصله وتمت تنقيته بإعادة البلورة بالإيتانول، حيث تم الحصول على ناتج بمردود 70%، و درجة انصهار (m.p=165°C). و نورد في الجدول (1): الصيغ العامة - شروط التفاعل - مذيب إعادة البلورة - درجة الانصهار و المردود للمركبين (A) و (B):

الجدول (1): الخصائص الفيزيائية للمركبات المحضرة.

Product	Molecular Formula	Reflux Time [h]	Yield [%]	m.p [°C]	Crystallization Solvent
A	C ₂₁ H ₂₃ N ₁ O ₁	5	85	310	EtOH
B	C ₁₇ H ₁₇ N ₄ O ₅	4	70	165	EtOH

3-5 - دراسة الفعالية البيولوجية للمركبات المصنعة.

تمت دراسة الفعالية الحيوية للمركبين A,B على كل من جرثيم سالبة الغرام وإيجابية الغرام وذلك باستخدام طريقة ورق الترشيح المشرب بالمادة.

المواد وطريقة العمل :

1-العزلات الجرثومية المستخدمة: تم اجراء الفعالية الحيوية على كل من الجرثيم الآتية: Pseudomonas aeruginosa و E.coli و staphylococcus aureus المعزولة

اصطناع مشتقان جديان للتيمول بتفاعل التيمول مع بعض المركبات الأمينية

من عينات إدرار لدى مصابين بانتانات المسالك البولية وتم تأكيد تشخيص كل منهما
باجراء بعض الاختبارات البيوكيميائية المميزة لكل منهما.

2- تحضير سلسلة التمديدات: تم تحضير سلسلة التمديدات الآتية:

و (50,25,12,5mg/ml) وتم حل المركبات بالمذيب العضوي DMSO للمركب A و
DMF للمركب B بعد أن تم التأكد من عدم تأثيره على أي من العزولات قيد الدراسة
وظهر كل من المركبين بلون أصفر غامق للمركب A وأصفر برتقالي للمركب B.

3-تنشيط العزلات: نقلت مستعمرة واحدة بعمر 18 ساعة من وسط الآغار المغذي إلى
أنبوب حاوي 5ml على وسط سائل مغذي(خلاصة القلب والدماغ) حضنت لمدة ساعتين
في الحاضنة على درجة حرارة 37 درجة مئوية للحصول على عكارة 0.5 ماكفرلاند
،تم قياس العكارة بجهاز المطياف الضوئي عند طول موجة 600 إذ أعطى امتصاصية
مقدارها 0.09nm للمركب A و 0.08nm للمركب B.

4- تحضير وسط مولر هنتون: تم وزن 9.5gr من بودرة مولر هنتون وحلت
ب250gr ماء مقطر في أرلينماير سعة 500ml. عقم بجهاز الصاد الموصل لمدة ساعة
عند درجة حرارة 120م° وتركت بعدها لتبرد ثم صببت في أطباق بتري قطر 9mm بمقدار
20ml لكل طبق تركت بعدها لتتصلب مع تعريضها للأشعة فوق بنفسجية (uv) لمدة
ساعة.

5- تحضير ورق التشرب: تم تقطيع ورق ترشيح واتمان 0.1 بشكل دوائر قطرها 6mm
بواسطة ثاقب ورقي ،

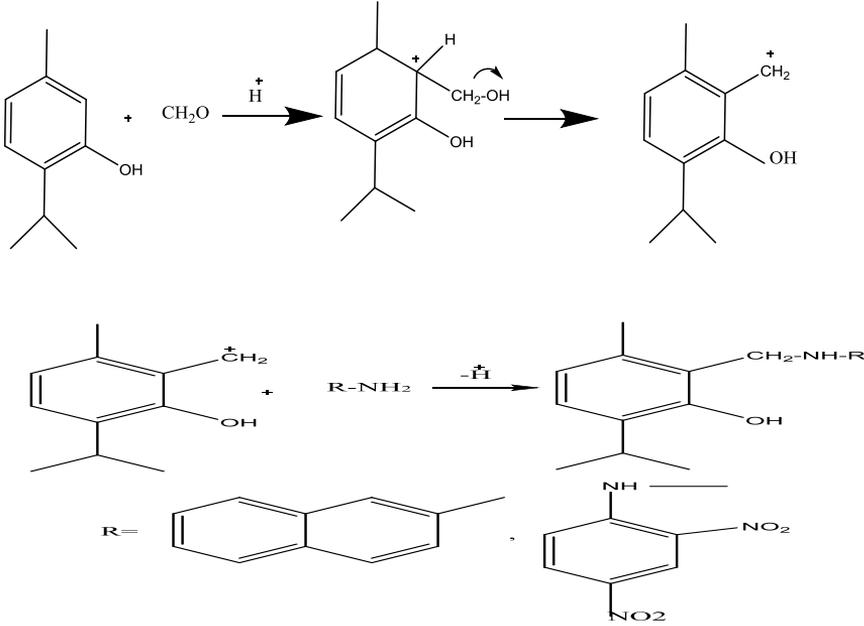
عقمت بالفرن لمدة ساعتين على درجة حرارة 180 .

6-الزرع الجرثومي ودراسة الفعالية البيولوجية: تم أخذ 100 مايكروليتر من كل معلق
جرثومي وفرش على سطح آغار مولر هنتون وتركت حوالي ربع ساعة في البراد حتى يتم
التشرب ،

تم وضع عدة أوراق ترشيح فوق بعضها وشربت بكمية 50 ميكروليتر من محلول
المركب ومن ثم وضعت في البراد لمدة نصف ساعة حتى تمام التشرب في الوسط.
بعدها تم التحضين على درجة حرارة 37c° لمدة 24 ساعة .

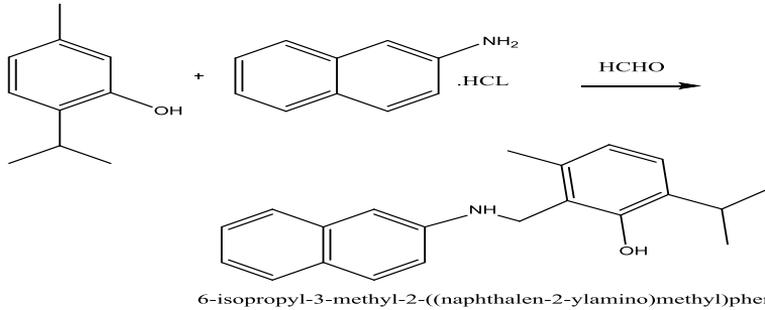
4- النتائج والمناقشة:

آلية تفاعل التيمول مع المركبات الأمينية :



4-1-1- دراسة تفاعل التيمول مع نفتيل أمين والفورم ألدهيد(المركب A) :

تم تحضير المركب A وفق التفاعل التالي:



تم تحديد بنيته الجزيئية باستخدام أطياف الأشعة تحت الحمراء والطنين المغناطيسي

النووي البروتوني والكربوني.

يبين في طيف الأشعة تحت الحمراء (IR) الشكل (1) للمركب الناتج عصابة امتصاص

عند المجال 3400cm^{-1} تعود لامتطاط الرابطة O-H وعصابة امتصاص عند المجال

اصطناع مشتقان جديان للتيمول بتفاعل التيمول مع بعض المركبات الأمينية

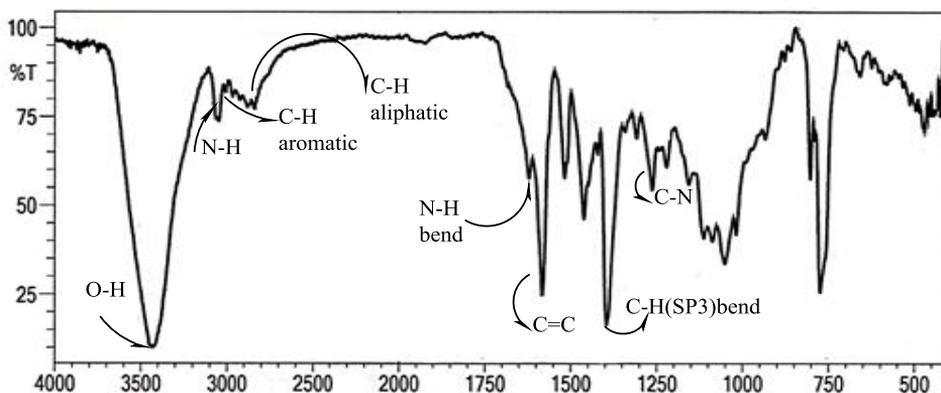
1600cm^{-1} تعود لامتطاط الرابطة $\text{C}=\text{C}$ العطرية ، وعصابة امتصاص ثنائية عند

المجال $2980 \& 2989 \text{cm}^{-1}$ تعود لامتطاط ذرات الكربون

$\text{C}-\text{H}$ (SP³stretch) الاليفاتية وتعود العصابة عند المجال 3100cm^{-1} لامتطاط

ذرات الكربون العطرية كما هو مبين في الجدول (2).

(C-H)sp ² (Aromatic)	(C-H)sp ³ (Aliphatic)	(C-N)	(C=C) (Aromatic)	(O-H)	(N-H) (Stretch)	الزمرة الوظيفية
3100	2980 & 2989	1250	1600	3400	3250	العدد الموجي cm^{-1}



الشكل (1): طيف الأشعة تحت الحمراء للمركب (A)

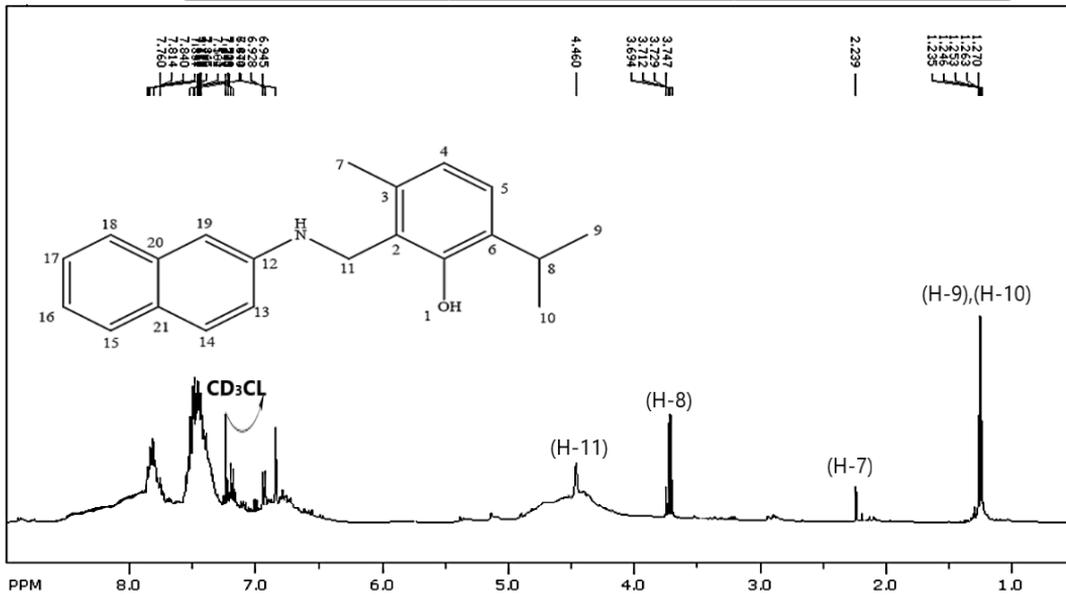
كما تم تسجيل طيف الطنين المغناطيسي البروتوني، باستخدام الكلوروفورم المديتر كمذيب الشكل (2)، حيث يلاحظ ظهور اشارة أحادية عند 4.460ppm تعود إلى بروتون مجموعة زمرة الميثيلين (CH_2) المتصلة بالحلقة العطرية، و اشارة أحادية عند 7.240ppm وهي تعود إلى بروتون مجموعة الأمين الثانوي ($-\text{NH}-$) ، يبين الجدول (2) الانزياحات الكيميائية.

جدول (3) قيم الانزياحات الكيميائية δ_H للمركب (A) في طيف ^1H-NMR :

الانزياح الكيميائي PPM	عدد البروتونات	رقم البروتون
1.235-1.246	(d ,6H,J=6,8HZ)	(H-9),(H-10)
2.239	(s ,3H)	(H-7)
3.694	(m, 1H)	(H-8)
4.460	(S, 2H)	(H-11)
6.844	(S ,1H)	فينولية (O-H)
7.240	(S ,1H)	(N-H)
6.928	(d ,1H,J=6.8HZ)	(H-4)
7.184	(d ,1H, J=7.6HZ)	(H-5)
7.204	(S ,1H)	(H-19)
7.438	(d ,1H,J=8.8HZ)	(H-16)
7.446	(d ,1H,J=8 HZ)	(H-14)
7.454	(m ,1H)	(H-17)

اصطناع مشتقان جديان للتيمول بتفاعل التيمول مع بعض المركبات الامينية

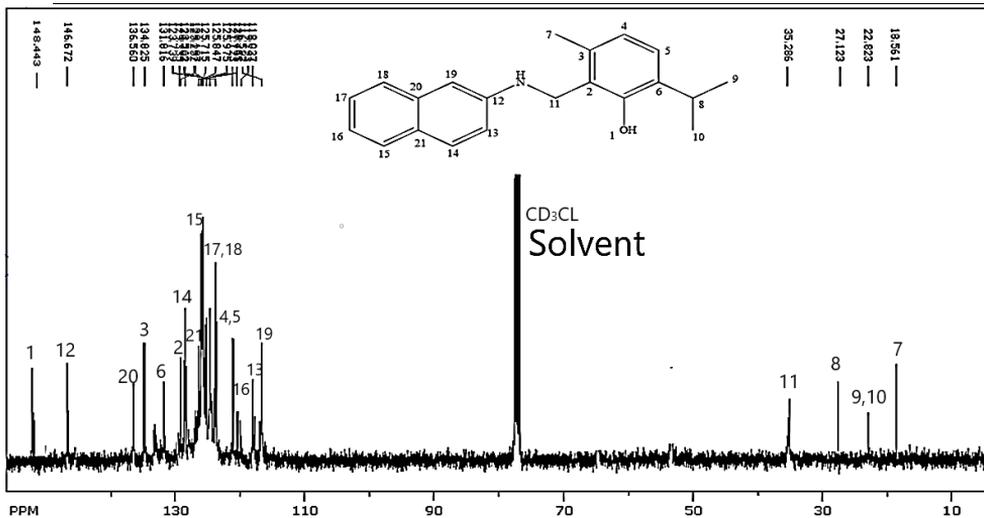
7.523	(d ,1H,J=8.4HZ)	(H-13)
7.814	(d ,1H,J=2.4HZ)	(H-18)
7.857	(d ,1H,J=4.8HZ)	(H-15)



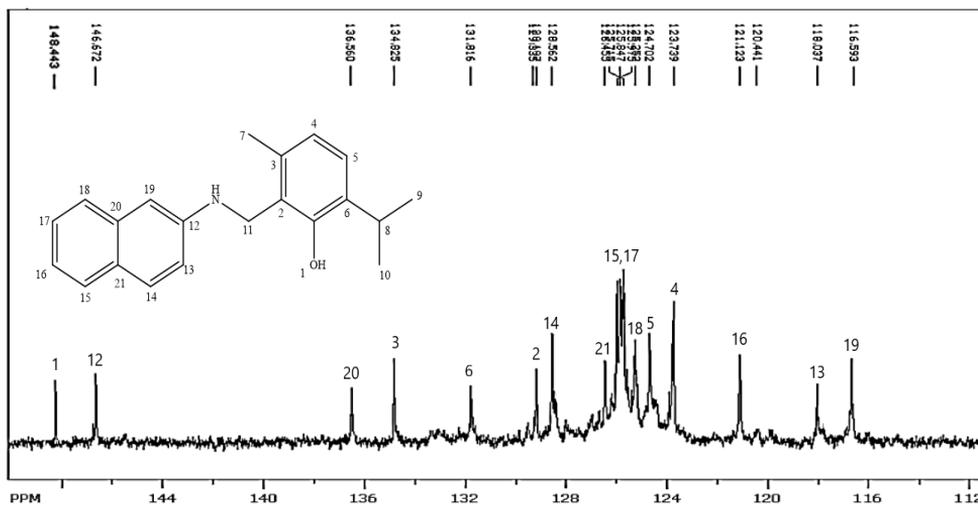
الشكل (2): طيف الـ ¹H-NMR للمركب (A)

جدول (4) قيم الانزياحات الكيميائية δ_A للمركب (A) في طيف $^{13}\text{C-NMR}$:

الانزياح الكيميائي ppm	رقم ذرة الكربون	الانزياح الكيميائي ppm	رقم ذرة الكربون
126.555	C-15	18.561	C-7
128.562	C-21	22.823	C-9,C-10
129.197	C-14	27.123	C-8
129.385	C-2	35.286	C-11
131.816	C-6	116.593	C-19
134.825	C-3	118.037	C-13
136.560	C-20	121.123	C-16
146.672	C-12	123.739	C-4
148.443	C-1	124.702	C-5
-	-	125.252	C-18
-	-	125.847	C-17



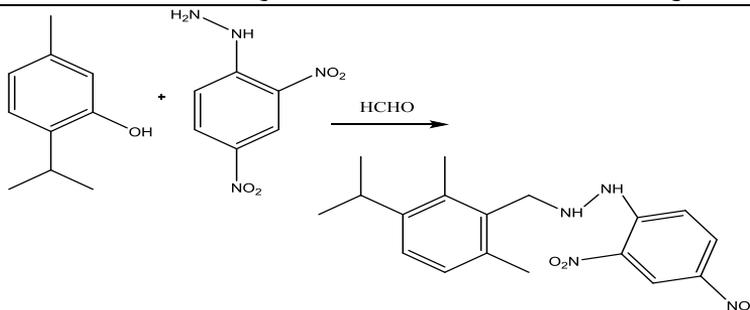
الشكل (5): طيف الـ¹³C-NMR للمركب (A)



الشكل (6): طيف الـ¹³C-NMR للمركب (A) بشكل موسع

4-2- دراسة تفاعل التيمول مع 4,2- ثنائي نيترو فينيل هيدرازين والفورم ألدهيد (المركب B) تم تحضير المركب B وفق التفاعل التالي:

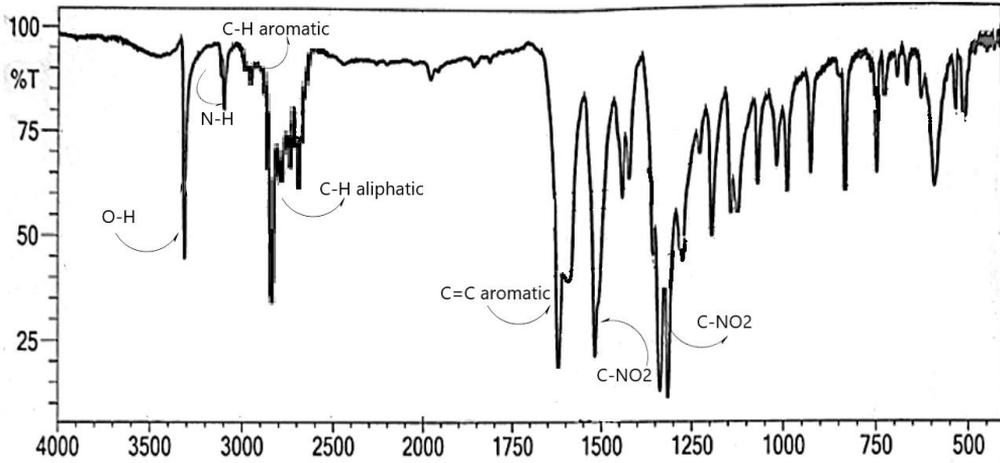
اصطناع مشتقان جديان للتيمول بتفاعل التيمول مع بعض المركبات الأمينية



و حددت بنيته الجزيئية باستخدام أطياف الأشعة تحت الحمراء والطنين المغناطيسي النووي للبروتون فقط .

يلاحظ في طيف الأشعة تحت الحمراء (IR) الشكل (7) للمركب الناتج ظهور عصابة امتصاص عند المجال 3350cm^{-1} تعود لامتطاط الرابطة (O-H) وعصابة امتصاص عند المجال 1650cm^{-1} تعود لامتطاط الرابطة C=C العطرية ، وعصابة امتصاص ثنائية عند المجال $2985 \& 2990 \text{cm}^{-1}$ تعود لامتطاط ذرات الكربون الاليفاتية وعند المجال 3100cm^{-1} تعود لامتطاط ذرات الكربون العطرية، حيث يبين الجدول (5) التالي الزمر الوظيفية للمركب مع الأعداد الموجبة المقابلة لها.

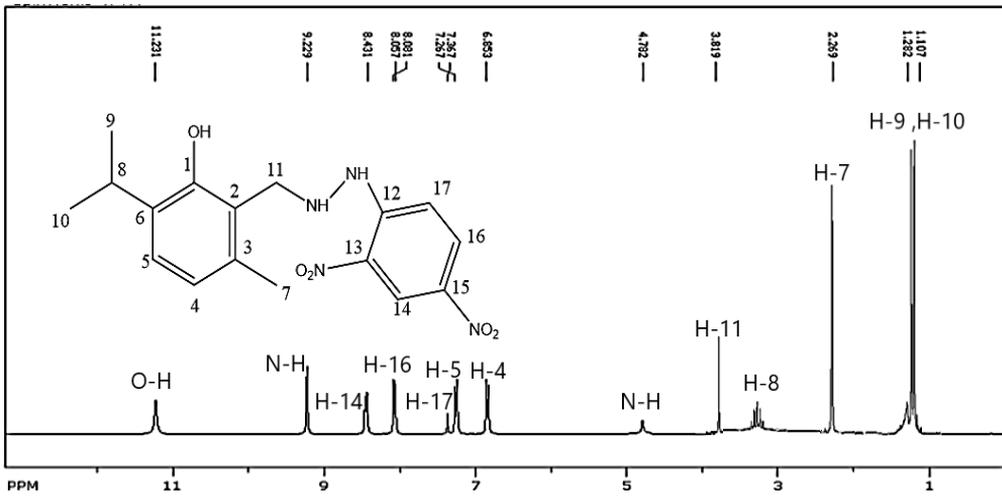
(C-H)sp2 (Aromatic)	(C-H)sp3 (Aliphatic)	(C-NO ₂)	(C=C) (Aromatic)	(O-H)	(N-H) (Stretch)	الزمرة الوظيفية
3100	2985 & 2990	(1250) & (1515)	1650	3350	3230	العدد الموجي cm^{-1}



الشكل (7): طيف الأشعة تحت الحمراء للمركب (B)

تم تسجيل طيف الطنين النووي المغناطيسي البروتوني $^1\text{H-NMR}$ للمركب (B)

باستخدام الكلوروفورم المذيب كالمبين في الشكل (8).



الشكل (8): طيف الـ $^1\text{H-NMR}$ للمركب (B)

حيث نلاحظ ظهور إشارة أحادية عند 3.819 ppm وهي تعود إلى بروتون مجموعة زمرة الميثيلين (CH_2) المتصلة بالحلقة العطرية، وإشارة أحادية عند 4.782 ppm وهي تعود إلى بروتون مجموعة الأمين الثانوي ($-\text{NH}-$) ، وإشارة أحادية عند 9.229 ppm وهي تعود إلى بروتون مجموعة الأمين الثانوي ($-\text{NH}-$) المتصل بالحلقة العطرية ، يبين الجدول (4) الانزياحات الكيميائية في طيف $^1\text{H-NMR}$ للمركب (B).

جدول (6) قيم الانزياحات الكيميائية δ_A للمركب (B) في طيف $^1\text{H-NMR}$:

الإنزياح الكيميائي PPM	عدد البروتونات	رقم البروتون
1.107-1.282	(d ,6H,J=7.2 HZ)	(H-9),(H-10)
2.269	(S, 3H)	(H-7)
2.957	(m ,1H)	(H-8)
3.819	(S ,2H)	(H-11)
4.782	(S ,1H)	(N-H)
6.853	(d ,1H,J=10.8 HZ)	(H-4)
7.267	(d ,1H,J=10.8 HZ)	(H-5)
7.367	(d ,1H,J=10.2 HZ)	(H-17)
8.081	(d ,1H,J=9.6 HZ)	(H-16)
8.431	(d ,1H,J=8.6 HZ)	(H-14)
9.229	(S ,1H)	(N-H) متصلة بالحلقة العطرية
11.231	(S ,1H)	(O-H)

3-4 - دراسة الفعالية الحيوية للمركبين A,B:

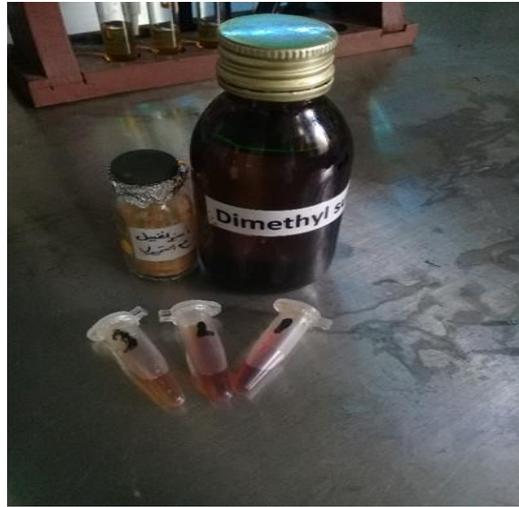
و تم تسجيل نتائج الفعالية بقياس أقطار منع النمو الجرثومي حول ورق الترشيح المشرب بالمادة. نلاحظ من الجدول (7): بأن المركب A لم يبدي فعالية تجاه الجراثيم ايجابية

اصطناع مشتقان جديان للتيمول بتفاعل التيمول مع بعض المركبات الأمينية

الغرام وسلبية الغرام في حين ابدأ المركب B فعالية تجاه هذه الجراثيم كما موضح في الجدول (8).

الجدول (7): نتائج الفعالية الحيوية للمركب A

تركيز المركب (A) مقدر ب mg/ml			نوع السلالة الجرثومية
12,5	25	50	
-	-	-	E.coli
0	0	0	قطر هالة تثبيط النمو الجرثومي مقدر بال (مم)
-	-	-	Staphylococcus aureus
0	0	0	قطر هالة تثبيط النمو الجرثومي
-	-	-	Pseudomonas aeruginosa
0	0	0	قطر هالة التثبيط مقدر بال (مم)

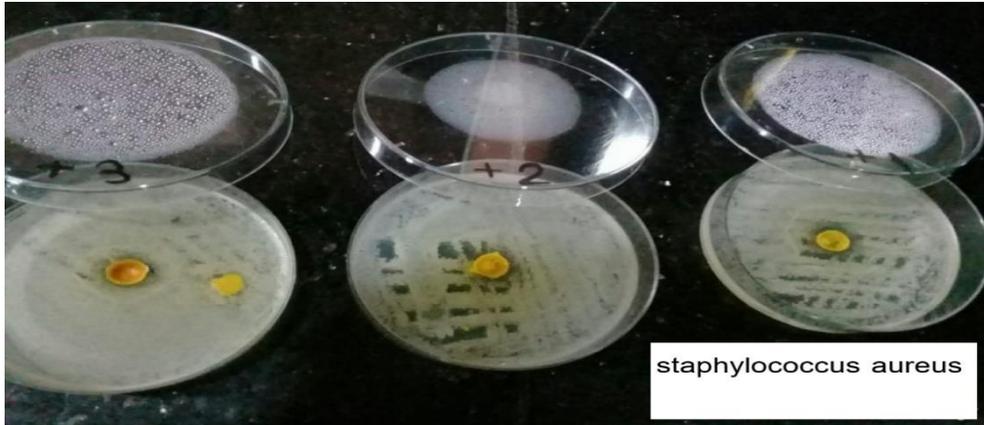


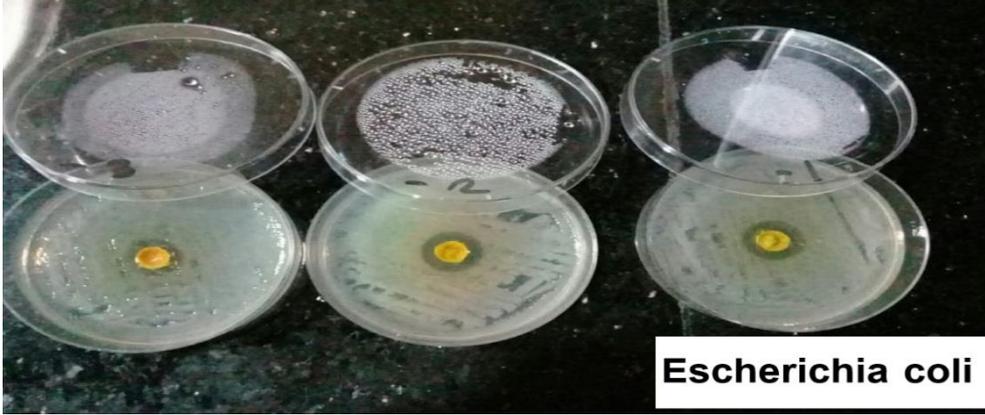
الشكل (11): الفعالية الحيوية للمركبين A:

الجدول (8): نتائج الفعالية الحيوية للمركب B

تركيز المركب (B) مقدر ب mg/ml			نوع السلالة الجرثومية
12,5	25	50	

+	+	+	Escherichia coli
13	14	15	قطر هالة تثبيط النمو الجرثومي
+	+	+	Staphylococcus aureus
10	12	13	قطر هالة تثبيط النمو الجرثومي (mm)





الشكل (12): الفعالية الحيوية للمركب B

5- الخلاصة والاستنتاجات:

1. صنع مركبان (A) و (B) جديان ولأول مرة لمشتقات التيمول باستخدام بعض المركبات الأمينية.
2. حددت بنية المركبان المحضران بالاعتماد على الطرق المطيافية الحديثة واقترحت آلية مناسبة لشرح اصطناعها.
3. كما تم دراسة الفعالية الحيوية للمركبان A و B على كل من جرثيم سالبة الغرام وإيجابية الغرام وذلك باستخدام طريقة ورق الترشيح المشرب بالمادة، حيث أعطى المركب B فعالية بينما لم يبدي المركب A أية فعالية تجاه هذه الجرثيم.
4. نقترح دراسة البنية الكيميائية للمركبين المصنعين باستخدام تقنيات الرنين المغناطيسي النووي المتطورة (2D-NMR) لتحديد البنية بشكل أدق.
5. نقترح دراسة تطبيقات هذه المركبات على أنواع أخرى من الجرثيم والفطريات لتقصي الفوائد المحتملة من هذه المركبات.

6-المراجع:

1. Matela. G, and Aman. R,"**TIN- AND ORGANOTIN (IV) COMPLEXES OF THYMOL DERIVATIVE DERIVED FROM ALANINE: SYNTHESIS AND CHARACTERISTIC SPECTRAL STUDIES**".Chem,(2011),Vol.4, No.3, 594-598 ,ISSN: 0974-1496.
2. MATELA. G, AMAN. R, SHARMA². C,and CHAUDHARY³. S, "**Reactions of tin and triorganotin(IV) isopropoxides with thymol derivative: synthesis, characterization and *in vitro* antimicrobial screening**", *J. Serb. Chem. Soc.* (2013),V.78,N. 9, P.1323-1333.
3. Yamada. S, Hongo. C, Yoshioka. Ryuzo, and Chibata. Ichiro, "**Method for the Racemization of Optically Active Amino Acids**", *J. Org. Chem.* (1983), Vol. 48, No. 6, P.845.
4. Mohammad. A, Siddiq. A, Moheman. A, and El-Desoky. G, "**Aqueous Urea Solution Promoted Resolution of Five-Component Mixture of Amino Acids on Silica TLC Plates, Journal of Planar Chromatography**" , (2013),V.26,P.1.
5. Diwakarrao Kukade. S, Ramdas Naik. R, and Vitthalrao Bawankar. S, "**Green Synthesis and Characterization of Thymol-guanidine-formaldehyde Terpolymer Resin**",(2014), Vol. 6 , No. 4 , P.6428.
- 6- Walczak. M, Michalska-Sionkowska. M, "**Surface and antibacterial properties of thin films based on collagen and thymol**", 2020,V. 22,P.100949.
7. NURUL. H, CHE ABDUL, R. ASNUZILAWATI, A. NORAZNAWATI, I., FAUZIAH, A., HASNAH, O.and SORAYA SH.

MOHAMAD, T. **Synthesis and Antibacterial Study of Thymol Derivatives**, *Asian Journal of Chemistry*; (2018), V. 30, No.1 P.126–128.

8. Jamatsing. D, Rajput1• Suresh. D,Bagul1• Ratnamala,S, "**Synthesis, biological activities and molecular docking simulation of hydrazone scaffolds of carvacrol, thymol and eugenol**", (2017) ,ISSN 0922–6168, Res Chem Intermed ,DOI 10.1007/s11164–017–3007–3.

9. Halise. G, Cem. Y, Asiye.T, Elif. U,"**Carbonic anhydrase inhibition and cytotoxicity studies of Mannich base derivatives of thymol**",(2016), J Enzyme Inhib Med Chem,31(6):P.1375–1380.

10. MRS. PRAVINA, B. PISTE1*, DIPALI P .INDALKAR1, **SYNTHESIS AND ANTIMICROBIAL ACTIVITY OF SUBSTITUTED p-AMINO AZOBENZENE WITH THYMOL MOIETY– A GREEN PROTOCOL**", 2012,V. 3, Issue 2, P.0976–5689.

11. J M. desai,V H .shah,"**synthesis and biological activity of cyanobryridine, isoxazois and pyrazoline derivatives having thymol moiety**",2003,vol.42B, P.382–385.

12. P. S. Nagle*, Y. A. Pawar, A. E. Sonawane, A. P. Nikum, U. D. Patil and D. H. More, **THYMOL: SYNTHESIS, REACTIONS & ITS SPECTRUM OF PHARMACOLOGICAL AND CHEMICAL APPLICATIONS**, Indo American Journal of Pharmaceutical Research, (2013), V.3, Issue 9, ISSN NO: 2231–6876.

معادلة تحليلية عامة لتدفق الحزمة النيوترونية العابرة لعينة ذات أبعاد كبيرة

د. عبدالله رستاوي¹، د. سليمان ديبو²، الطالب: علي الدود³

الملخص

في هذا البحث، تم أولاً استنتاج معادلة تدفق حزمة النيوترونات العابرة بصورة مباشرة من أجل عينة كبيرة.

تم وضع تعريفاً للعينة الكبيرة، وتم إدخال مصطلحاً جديداً هو العينة الكبيرة للغاية، كما تم وضع تعريفاً له. وبناء على ذلك، وضعنا نظرية وطريقة تجريبية جديدتين لتعيين المقطع العرضي لأسر النيوترون، إن هذه الطريقة يتوقع أن تعطي نتائج أدق لأنها تأخذ بعين الاعتبار تدفق حزمة النيوترونات التي تخرج من كافة جوانب العينة، إضافة لتدفق حزمة النيوترونات التي تخرج بصورة مباشرة من العينة، خلافاً للطريقة المتبعة التي تأخذ بعين الاعتبار فقط تدفق حزمة النيوترونات التي تخرج بصورة مباشرة. كما تم إيجاد العلاقة التحليلية بين المقطع العرضي للأسر (الامتصاص) والمقطع العرضي للثشتت، وإيجاد المعادلة العامة لتدفق الحزمة النيوترونية العابرة لعينة ذات أبعاد كبيرة.

كلمات مفتاحية:

المقطع العرضي للثشتت، العينات الكبيرة، تدفق حزمة نيوترونية.

¹ قسم الفيزياء بكلية العلوم - جامعة البعث.

² قسم الفيزياء بكلية العلوم - جامعة البعث.

³ طالب دكتوراه في الفيزياء النظرية في قسم الفيزياء.

A General Analytical Equation of the Neutron Beam Flux Transit a Large Size Sample

Dr. Abdullah Rastanawi⁴

Dr. Soleiman Dibo⁵

Student : Ali Al-Doud⁶

Abstract

In this paper, we first derive the equation for flux beam transient neutrons directly for a large sample.

We set a definition for the large sample, and we introduced a new term which is the very large sample, and we also put a definition for it. Accordingly, we developed a new theory and experimental method for determining the cross-section of the neutron capture. This method is expected to give more accurate results because it takes into account the flux of the neutron beam that comes out from all sides of the sample, in addition to the flux of the neutron beam that comes out directly from the sample, unlike the method. A method that takes into account only the flux of a beam of neutrons directly outside. We also found the analytical equation between the capture cross-section (absorption) and the scattering cross-section, and found the general equation for neutron beam flux transient through for a sample of large dimensions.

Key words:

scattering cross section, Large Sample, neutron beam flux.

⁴ Department of Physics in faculty of science-AL-Baath university.

⁵ Department of Physics in faculty of science-AL-Baath university.

⁶ PhD Student in Theoretical Physics.

1. مقدمة

إن العينة الكبيرة كمصطلح يستخدم في التحليل بالتنشيط النيوتروني Neutron Activation Analysis NAA لن يكون ذا معنى ما لم يوضع له تعريف واضح يمكن من خلاله تحديد أبعاد هذه العينة. لكن مما يؤسف له هو أنه في كافة البحوث المنشورة عن التحليل بالتنشيط النيوتروني للعينات الكبيرة LSNAA Large Sample Neutron Activation Analysis لم نجد أياً من الباحثين كان قد وضع تعريفاً للعينة الكبيرة، ولهذا نعتقد بأن هذا هو السبب في عدم القدرة على استنتاج المعادلة التحليلية العامة قابلة للتطبيق لتدفق حزمة النيوترونات التي تخرج من كافة جوانب العينة.

فمثلاً في بحث لـ دي بروين De Bruin [1] يقول فيه إن التقانة التي تستخدم للتعين الدقيق لآثار العناصر عن طرق تحليل بالتنشيط النيوتروني لعينات كبيرة LSNAA استخدمنا فيها **حجوم للعينة كانت كتلتها من رتبة الكيلوغرامات**. أما هيندريك ويليم Hendrik Willem [2] فقد أطلق الوصف "عينات كبيرة" على عينات أسطوانية ذات **حجوم 13 dm^3 (بطول 100 cm، ونصف قطر 13 cm)**، ثم علق قائلاً إن مفعول اللاتجانس effect of inhomogeneity يظهر في العينات الكبيرة التي تقع **حجومها بين 1 liters وبين 15 liters**، أو من 15 dm^3 (1 - 15). أما بالنسبة للعينات التي قام بتحليلها خليفى Khelifi وزملاؤه [3] بواسطة LSNAA والتي وصفوها بالكبيرة فقد كانت **حجومها 125 liters**، وهي أيضاً ذات شكل أسطواني مكوّنة من ماء وبولييثيلين polyethylene. وبالنسبة لتزيكا Tzika وزميله [4] اللذان قدما طريقة لإنجاز تحليل LSNAA متعدد العناصر لا تخريبي عميق فقد كانت حجوم العينات التي وصفوها بأنها كبيرة لا يتجاوز **1 liters**. من الدراسة المرجعية هذه يتضح بسهولة أن هنالك تفاوتاً كبيراً في أبعاد العينات الموصوفة بالكبيرة، ثم فضلاً إلى ذلك، لم نلاحظ أن أياً من هؤلاء الباحثين كان قد قدم تعريفاً يتم على أساسه تحديد أبعاد العينات المحللة. لكن على الأرجح حينما يقولون عينة كبيرة إنما يقصدون أنها أكبر من تلك

العينات التي تستخدم في طريقة التحليل بالتنشيط النيوتروني NAA الاعتيادية التي تكون فيها العينة صغيرة نسبياً.

في الحقيقة لقد جرى استنتاج المعادلة التي تعطي تدفق حزمة النيوترونات التي تخرج بصورة مباشرة من العينة من أجل عينة صغيرة الحجم (السماكة) [5]، مما يجعل احتمال تفكك النيوترون في أثناء مروره خلال العينة مهملاً، ومما يجعل احتمال تشتت النيوترون في أثناء عبوره للعينة مهملاً أيضاً. وبالتالي فإن تدفق الحزمة التي تخرج بصورة مباشرة من العينة يتعلق إلى حد كبير جداً فقط باحتمال أن يتفاعل النيوترون تفاعل أسر (امتصاص) في أثناء مروره في العينة. وبناء على ذلك، فقد وجد أن احتمال أن لا يتفاعل نيوترون حر تفاعل أسر في أثناء عبوره لعينة سماكتها x بصورة مباشرة يعطى بالعلاقة:

$$P_{r'}(x) = e^{-n\sigma_c x} \quad (1)$$

حيث n هو تركيز النوى في العينة، و σ_c هو المقطع العرضي الفعال للأسر⁷ أو (الامتصاص).

لكن في الحقيقة من أجل عينة كبيرة حيث لا يجوز لنا إهمال تأثير احتمال أن لا يتفكك النيوترون الحر في أثناء اجتيازه لعينة سماكتها x على تدفق الحزمة العابرة بصورة مباشرة، على الأقل من أجل نيوترونات ليست حرارية. ففي بحث سابق [6,7] كنا قد أوجدنا أن احتمال التفكك يعطى بالعلاقة:

$$P_{ar}(x) = e^{-\frac{\lambda}{v}x} \quad (2)$$

حيث λ هو احتمال أن يتفكك نيوترون خلال وحدة الزمن. والزمن $t = x/v$ هو الزمن اللازم للنيوترون لكي يجتاز عينة سماكتها x (بمسار مستقيم)، و v هي سرعة النيوترون في العينة.

⁷ وهنا يفترض ضمناً بأن أسر النيوترون يقود إلى امتصاص فقط للنيوترون من غير أن يؤدي ذلك إلى حدوث انشطار النواة الآسرة.

إن احتمال عدم تشتت النيوترون في عينة سماكتها x [9,10]:

$$P_{S'}(x) = e^{-n\sigma_S x} \quad (3)$$

حيث n هو تركيز النوى في العينة، و σ_S هو المقطع العرضي الفعال للتشتت.

بناء على ما سبق يكون احتمال خروج النيوترون بصورة مباشرة من العينة بعد اجتيازه مسافة قدرها x هو احتمال مركب من ثلاثة احتمالات: هي احتمال أن لا يتفاعل النيوترون تفاعل أسر مضروب باحتمال أن لا يتفكك النيوترون مضروب باحتمال أن لا يتشتت النيوترون؛ أي:

$$P_{r,d,t,S'}(x) = e^{-(n\sigma_c + \frac{\lambda}{v} + n\sigma_S)x}$$

وبالتالي فإن تدفق الحزمة العابرة بصورة مباشرة من أجل عينة كبيرة سيكون:

$$\Phi(x) = \Phi(0)e^{-(n\sigma_c + \frac{\lambda}{v} + n\sigma_S)x} \quad (4)$$

حيث $\Phi(x)$ هو تدفق حزمة النيوترونات العابرة بصورة مباشرة من عينة كبيرة

سماكتها x .

2. هدف البحث

لقد بنينا هذا البحث على مشكلة ذات أهمية كبيرة وهي عدم وضع أيأ من الباحثين الذين يشتغلون في التحليل بالتنشيط النيوتروني للعينات الكبيرة LSNAE تعريفاً واضحاً لمصطلح العينة الكبيرة. وبناء عليه، فقد كان هدفنا من هذا البحث بدايةً هو أن نضع تعريفاً واضحاً لمصطلح العينة الكبيرة لكي نحوله إلى مفهوم يمكن الاعتماد عليه في استنتاج معادلة تحليلية عامة لتدفق حزمة النيوترونات التي تخرج من كافة جوانب عينة كبيرة الحجم. ثم أنه لمأ وجدنا أن وضع هذا التعريف لم يكن كافياً لجعل تلك المعادلة قابلة للتطبيق وجدنا أنفسنا مضطرين لكي ندخل مصطلحاً جديداً آخرأ هو العينة الكبيرة للغاية، الذي وضعنا أيضاً له تعريفاً واضحاً لكي نحوله إلى مفهوم. ثم بناء على كلٍ من هذين المفهومين يتبين أننا قد وضعنا أساساً نظرياً وتجريبياً لتعيين المقطع العرضي للأسر نتوقع أنه سيمكننا من التعيين التجريبي لتابعية المقطع العرضي للأسر لطاقة

النيوترون بصورة أدق. وباستنتاج معادلة احتمال أن لا يتشتت النيوترون ستكون قادرين على استنتاج المعادلة العامة لتدفق الحزمة النيوترونية التي تخرج من كافة جوانب العينة التي ستكون صالحة من أجل كافة العينات مهما تكن حجمها، وحزمة نيوترونية أحادية الطاقة، وستكون النتائج التي تعطيها أدق. علماً أننا في هذا البحث من أجل تبسيط الدراسة سنعتبر عينة مؤلفة من عنصر واحد يتكون من نظير واحد.

3. المعادلة العامة لتدفق الحزمة النيوترونية

3.1. العينة الكبيرة (L, L)

اعتماداً على مفهوم المسار الحر الوسطي لتشتت نيوترون حر في مادة العينة التي يمر خلالها النيوترون، نعرّف العينة الكبيرة بأنها عينة أسطوانية ذات سماكة ونصف قطر يساوي كل منهما إلى المسار الحر الوسطي للنيوترون L في هذه العينة. يعطى المسار الحر الوسطي للنيوترون L من أجل عينة تحتوي على عنصر واحد مكون من نظير واحد بالعلاقة [11]:

$$L = 1/\sigma_s n$$

حيث إن n هو تركيز ذرات أو نوى نظير العنصر الذي تتكون منه العينة، و σ_s هو المقطع العرضي الفعال لتشتت النيوترون على نوى هذا النظير. وبما أن تركيز النوى في مادة يعطى بالعلاقة التالية [8]:

$$n = \frac{\rho}{\mu} N_A$$

حيث N_A هو عدد أفوكادرو، و ρ الكثافة المطلقة (كتلة وحدة الحجم) لهذه العينة، و μ هي الكتلة المولية للعينة، وهي في هذه الحالة تكون مساوية للعدد الكتلي للنظير؛ أي $\mu = A$ ، وبالتالي فإن:

$$L = \frac{A}{\sigma_s \rho N_A} \quad (1)$$

3.2. العينة الكبيرة للغاية (X, X)

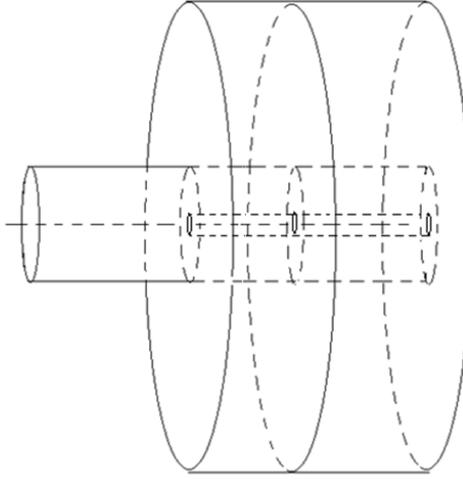
واعتماداً على المسافة القصوى التي يمكن أن يجتازها نيوترون حر في مادة (العينة) ما، نعرف العينة الكبيرة للغاية بأنها عينة لا تسمح لأي نيوترون يدخل فيها من الخروج منها، وبكلام آخر، إن أي نيوترون يدخل إلى هذه العينة فإنه إما أن يؤسر فيها من قبل أحد نواها أو أنه يتفكك فيها سواءً أ كان قد عانى تشتتاً أم لا.

لكن عملياً بسبب الهندسية المفروضة على عملية التشعيع، نفترض بأنه يجري التشعيع بحزمة نيوترونية متوازية ترد عمودياً على قاعدة عينة أسطوانية، وعندئذ يمكن لبعض النيوترونات التي تعانى تشتتاً خلفياً مفرداً أن تخرج من العينة من دون أن تتفكك أو تؤسر. وعملياً، إن عدد النيوترونات التي تشتت للخلف هو عدد صغير للغاية. لذلك، فإنه يمكننا إهماله.

إذن فيما يلي سنعتبر أن للعينة الكبيرة للغاية شكلاً أسطوانياً، وسنرمز لها بالرمز (X, X) ، حيث يمثل الرمز X الذي على الجهة اليسرى نصف قطر قاعدة الأسطوانة، والرمز X الذي على الجهة اليمنى ارتفاع أو سماكة هذه العينة.

3.2.1. تحديد أبعاد العينة الكبيرة للغاية (X, X)

من أجل تعيين أبعاد العينة الكبيرة للغاية سوف ننتقل من التعريف الذي وضعناه للعينة الكبيرة للغاية. ومن أجل التبسيط، كما ذكرنا، نفرض بأن للعينة الكبيرة للغاية شكلاً أسطوانياً، وأنها مكوّنة من عنصر كيميائي واحد وهذا العنصر مكوّن من نظير واحد، وأن سماكتها (ارتفاعها) هو X وأن نصف قطر قاعدتها هو X ، ولنفرض أن الكثافة المطلقة لهذه العينة هي ρ ، وأن الكتلة المولية لها هي $A = \mu$ ، ولنفرض أن تركيز الذرات (النوى) فيها هو n ، ولنفرض أن المقطع العرضي الفعّال لأسر النيوترون من قبل هذه النوى هو σ_c . ولنفرض أن حزمة نيوترونية ترد عمودياً على مساحة صغيرة نسبياً من قاعدة هذه الأسطوانة نصف قطرها r بتدفق $\Phi(0)$. لنأخذ حول محور العينة الكبيرة للغاية أسطوانة مقطوعها πr^2 ؛ أي نصف قطر قاعدتها r ، وطولها مساو لسماكة العينة الكبيرة للغاية X ، ولنسمها أسطوانة محورية، الشكل (1)،



الشكل (1): عينة أسطوانية كبيرة للغاية لأبعادها (X, X) .

عندئذ، فإن حجم الأسطوانة المحورية هذه سيكون:

$$V_C = X\pi r^2$$

ويكون عدد النوى فيها N_C هو:

$$N_C = n V_C = n X\pi r^2$$

لكن بما أن تركيز النوى في مادة يعطى بالعلاقة [6]:

$$n = \frac{\rho}{A} N_A$$

حيث N_A هو عدد أفوكادرو، فإن:

$$N_C = \frac{\rho}{A} N_A X\pi r^2$$

وعندئذ سيكون مجموع مساحات المقاطع العرضية الفعال لكافة النوى الموجود

في الأسطوانة المحورية $(\sigma_c N_C)$ ⁸ مساوٍ بالضبط لمقطع الأسطوانة المحورية

⁸ يجب التفريق بين الدليلين في العلاقة $\sigma_c N_C$ ، فدليل المقطع العرضي الفعال للأسر c يعود

لكلمة أسر capture، بينما دليل عدد النوى C فيعود لكلمة أسطوانة Cylinder.

$(\pi r^2 \text{ cm}^2)^9$ ، لأن أي نيوترون يعبر بصورة مباشرة (بدون تشتت) مسافة قدرها X ، فإنه لن يتمكن من الخروج من هذه الأسطوانة، لأنه حتماً سيؤسر ما لم يكن قد تفكك أو تشتت، وأن النيوترون المتشتت أيضاً سيؤسر حتماً ما لم يكن قد تفكك، باستثناء حالات التشتتات الخلفي باتجاه قاعدة الورود التي تكون على الأغلب هي تشتتات مفردة، وهذه التشتتات، كما ذكرنا سنهملها لندرته، وبالتالي فإن:

$$\sigma_c N_C = \pi r^2 \Rightarrow \sigma_c \frac{\rho}{A} N_A X \pi r^2 = \pi r^2$$

وبالتالي فإن:

$$X = \frac{A}{\sigma_c \rho N_A} \quad (2)$$

من العلاقة (2) إذا ما عرفت سماكة العينة الكبيرة للغاية X فإنه يمكن معرفة المقطع العرضي للأسر σ_c ، لأن كافة المقادير الأخرى إما أنها معلومة أو أنها قابلة للقياس. وبالتالي إذا ما استطعنا تعيين X ، فإنه سيمكننا تعيين σ_c .

وعلى الرغم من أن عدد النيوترونات التي تعاني تشتتاً مفرداً في الأسطوانة المحورية، والتي تخرج من سطحها الجانبي يكون كبيراً جداً، إلا أنها جميعاً بدورها إما أن تؤسر أو تتفكك حتى ولو عانت تشتتاً تشتتاً مضاعفاً ضمن العينة الكبيرة للغاية، لأن نصف قطر العينة الكبيرة للغاية هو أيضاً X . لكن، على كل حال، يبقى عدداً نادراً من النيوترونات المتشتتة يمكنه أن يخرج من قاعدة العينة الكبيرة للغاية التي ترد عليها النيوترونات نتيجة لتشتتات خلفية مفردة على الأغلب.

إذن بناء على تعريف العينة الكبيرة للغاية السابق، يمكن من جديد أن نعرف العينة الكبيرة للغاية بأنها عينة أسطوانية ذات سماكة ونصف قطر يُعين كل منهما بالعلاقة (2)، حيث إن أي نيوترون يتشتت ولو تشتتاً مرناً مفرداً وحتى لو كان اتجاهه معامد

⁹ في هذه الدراسة يجب أن يقدر المقطع العرضي الفعال بالمتري المربع m^2 ، وأن تقدر أبعاد العينة بالمتري m ، وتقدر الكثافة المطلقة بالكيلوغرام على المتري المكعب (kg/m^3) .

للسطح الجانبي للأسطوانة المحورية، فإنه حتماً سيؤسر خلال اجتيازه مسافة تساوي على الأكثر نصف قطر الأسطوانة الكبيرة X ما لم يكن قد تفكك أو تشتت ثانياً. فإذا كان التشتت المفرد الوحيد الذي عناه النيوترون هو تشتت مرن فسيكون طول مساره مساوياً لـ X ، وإذا كان التشتت المفرد الوحيد الذي عناه النيوترون هو تشتت غير مرن فسيكون طول مساره أصغر من X .

من الواضح من العلاقة (2) أنه، كلما كان العدد الكتلي A أكبر (كلما كان العنصر أثقل) كان حجم العينة الكبيرة للغاية أكبر، وكلما كانت كثافة العينة أصغر كان حجم العينة الكبيرة للغاية أكبر، وكلما كان المقطع العرضي الفعال للأسر σ_c أصغر، كان حجم العينة الكبيرة للغاية أكبر. وبالتالي كان احتمال خروج النيوترون من العينة سواء العابر مباشرة أو الذي يتشتت أصغر.

4. العلاقة بين المقطع العرضي للتشتت σ_s والمقطع العرضي للأسر σ_c

بنسب المعادلة (1) إلى المعادلة (2) ينتج:

$$\frac{X}{L} = \frac{\sigma_s}{\sigma_c} \quad (3)$$

ملاحظة: لم نتحدث عن دور استقطاب النيوترونات بفعل الحقول الكهرومغناطيسية للعينة في تعيين أبعاد العينة أولاً لضعف هذه الحقول وثانياً لأن النيوترونات جميعاً تستقطب بشكل متماثل تقريباً وثالثاً لأن تأثير مثل هذا الاستقطاب ينحصر في زيادة المقطع العرضي الفعال للأسر σ_c بشكل صغير جداً.

5. استنتاج معادلة التدفق من أجل عينة (X, x)

ليكن لدينا عينة كبيرة للغاية نصف قطرها هو X وسماكتها (ارتفاعها) X (أي أكبر بكثير من المسار الحر الوسطي للنيوترون $(\lambda = 1/\sigma_s n)$ في هذه العينة)، ولنفرض أن حزمة من النيوترونات ذات مجال طاقي ضيق معين تسقط عمودياً على قاعدة الأسطوانة المحورية. كما ذكرنا إن احتمال خروج أي نيوترون متشتت من العينة

الكبيرة للغاية سيكون معدوماً تقريباً، وذلك لأن النيوترون المتشتت إما أنه سيتفاعل تفاعل أسر أو أنه سيتفكك، فإن لم يتفاعل تفاعل أسر أو لم يتفكك، فإنه سيتشتت من جديد، وهكذا تستمر عملية التشتت السابقة (تشتت مضاعف)، وكلما كان عدد التشتتات أكبر صار احتمال أن يتفاعل النيوترون تفاعل أسر واحتمال أن يتفكك أكبر، بسبب طول المسافة التي يجتاها في العينة وطول الزمن الذي يستغرقه فيها، مما يجعل احتمال خروج النيوترون المتشتت من العينة، من قاعدتي العينة الأسطوانية أو من سطحها الجانبي، معدوماً تقريباً. وبالتالي في مثل هذه العينة، فإن كل نيوترون يدخل هذه العينة إما أن يتفاعل تفاعل أسر أو أن يتفكك، طبعاً إذا ما أهملنا التشتتات الخلفية المفردة لندرتها.

5.1. استنتاج معادلة التدفق للحزمة النيوترونية من أجل عينة (X, x)

لنفرض أننا أبقينا نصف قطر العينة الكبير للغاية X كما هو، لكننا جعلنا سماكتها (ارتفاعها) x أصغر بكثير من X . ولنفرض مرة أخرى أن حزمة من النيوترونات ذات مجال طاقي ضيق معين ترد عمودياً على قاعدة الأسطوانة الكبيرة للغاية التي سنسميها من الآن فصاعداً قاعدة الورود، وبالتحديد ترد على قاعدة الأسطوانة المحورية. عندئذ، فإنه من الممكن للنيوترونات الداخلة إلى هذه العينة أن تخرج فقط من القاعدة الثانية للعينة الأسطوانية (X, x) المقابلة لقاعدة الورود.

وإن الجزء من النيوترونات التي لم تخرج من العينة المذكورة إما أنها قد تفاعلت تفاعل أسر أو أنها تفككت، سواءً أكانت قد عانت تشتتاً أم لا.

وإن الجزء من النيوترونات التي تخرج من العينة المذكورة إنما تخرج فقط من القاعدة المقابلة لقاعدة الورود، وهي إما أن تخرج بصورة مباشرة معامدة من قاعدة العينة المقابلة لقاعدة الورود من دون أن تكون قد عانت تفاعلاً أو تفككاً أو تشتتاً، أو أنها تخرج من القاعدة المقابلة لقاعدة الورود بصورة غير مباشرة من دون أن تكون قد عانت تفاعلاً أو تفككاً لكنها قد عانت تشتتاً إن مفرداً أو مضاعفاً.

وبالتالي فإن تدفق النيوترونات الخارجة (العابرة) لسطح القاعدة المقابلة لقاعدة الورد $\Phi(x)$ سيكون مجموع تدفقين؛

أولاً تدفق النيوترونات التي تخرج بصورة مباشرة معامدة من سطح القاعدة المقابلة لقاعدة الورد $\Phi'(x)$ لكونها لم تعاني تفاعلاً أو تفككاً أو تشتتاً،

وثانياً تدفق النيوترونات التي تخرج بصورة غير مباشرة غير معامدة من سطح القاعدة المقابلة لقاعدة الورد $\Phi''(x)$ لكونها لم تعاني تفاعلاً أو تفككاً لكنها كانت قد عانت تشتتاً إن مفرداً أو مضاعفاً، أي أن:

$$\Phi(x) = \Phi'(x) + \Phi''(x) \quad (4)$$

5.1.1. لنوجد أولاً $\Phi'(x)$

إن تدفق النيوترونات التي تخرج بصورة مباشرة معامدة للقاعدة المقابلة لقاعدة الورد $\Phi'(x)$ يساوي إلى تدفق الحزمة النيوترونية الواردة على قاعدة الورد $\Phi(0)$ مضروباً باحتمال عبور النيوترون مسافة قدرها x بصورة مباشرة وعمودية على القاعدة المقابلة لقاعدة الورد من دون أن يتفكك أو يتفاعل أو يتشتت؛ أي باحتمال أن لا يتفكك النيوترون وأن لا يتفاعل تفاعل أسر وأن لا يتشتت في أثناء عبوره مسافة قدرها x ؛ أي:

$$\Phi'(x) = \Phi(0)P_{d,r',s'}(x) \quad (5)$$

إذن لدينا ثلاثة حوادث، الحدث الأول هو عدم حدوث تفكك للنيوترون وقد أشرنا إليه بالدليل d' ، والحدث الثاني هو عدم حدوث تفاعل أسر للنيوترون وقد أشرنا إليه بالدليل r' ، والحدث الثالث هو عدم حدوث تشتت للنيوترون وقد أشرنا إليه بالدليل s' .

وبما أن هذه الحوادث مستقلة عن بعضها البعض، فإن احتمال عبور النيوترون مسافة قدرها x بصورة مباشرة من دون أن يتفكك أو يتفاعل أو يتشتت $P_{d,r',s'}(x)$ سيكون احتمالاً مركباً من جداء ثلاثة احتمالات هي: احتمال أن لا يتفكك النيوترون عند عبوره عينة سماكتها x ؛ أي $P_{d,r}(x)$ ، واحتمال أن لا يتفاعل النيوترون تفاعل أسر عند

عبوره عينة سماكتها x ؛ أي $P_{r,r}(x)$ ، واحتمال أن لا يتشتت النيوترون عند عبوره عينة سماكتها x ؛ أي $P_{s,r}(x)$ ؛ أي:

$$P_{d,r,r,s}(x) = P_{d,r}(x) \cdot P_{r,r}(x) \cdot P_{s,r}(x) \quad (6)$$

وبما أن $x \ll X$ ، فيمكننا، بتقريب جيد، اعتبار أن النيوترونات المتشتتة وغير المتشتتة تتوزع بصورة منتظمة في الحيز (X, X) ، وبالتالي فإن هذا الاحتمال يمثل نسبة حجم الأسطوانة $(r, X - x)$ إلى حجم الأسطوانة الكلية (X, X) ؛ أي:

$$P_{d,r,r,s}(x) = \frac{\pi r^2 (X - x)}{\pi X^2 X} = \frac{r^2 X - r^2 x}{X^3} \quad (7)$$

وبالتالي من المعادلتين (6) و (7) نجد أن:

$$P_{s,r}(x) = \frac{\frac{r^2 X - r^2 x}{X^3}}{P_{d,r}(x) \cdot P_{r,r}(x)} \quad (8)$$

5.1.2. ثانياً لنوجد $\Phi''(x)$

إن تدفق النيوترونات التي تخرج بصورة غير مباشرة غير معتمدة للقاعدة المقابلة لقاعدة الورود $\Phi''(x)$ يساوي إلى تدفق الحزمة النيوترونية الواردة على قاعدة الورود $\Phi(0)$ مضروباً باحتمال عبور النيوترون مسافة قدرها x بصورة غير مباشرة وغير عمودية على القاعدة المقابلة لقاعدة الورود؛ أي باحتمال أن لا يتفاعل النيوترون تفاعل أسر وأن لا يتفكك وأن يتشتت في أثناء عبوره مسافة قدرها x ويخرج بصورة غير معتمدة للقاعدة المقابلة لقاعدة الورود؛ أي: $P_{d,r,r,s}(x)$ ؛ أي:

$$\Phi''(x) = \Phi(0) P_{d,r,r,s}(x) \quad (9)$$

إذن لدينا ثلاثة حوادث، الحدث الأول هو عدم حدوث تفكك للنيوترون وقد أشرنا إليه بالدليل d' ، والحدث الثاني هو عدم حدوث تفاعل أسر للنيوترون وقد أشرنا إليه بالدليل r' ، والحدث الثالث هو حدوث تشتت للنيوترون وقد أشرنا إليه بالدليل s .

إن احتمال عبور النيوترون سماكة قدرها x بصورة غير مباشرة من دون أن يتفكك أو يتفاعل وأن يتشتت $P_{d,r',s}(x)$ سيكون احتمالاً مركباً من جداء احتمال أن لا يتفكك النيوترون عند عبوره سماكة x ؛ أي $P_{d'}(x)$ ، مضروب باحتمال أن لا يتفاعل النيوترون تفاعل أسر عند عبوره سماكة x ؛ أي $P_{r'}(x)$ ، مضاف إليهما احتمال أن يتشتت النيوترون عند عبوره سماكة x ؛ $P_s(x)$ ؛ أي:

$$P_{d,r',s}(x) = P_{d'}(x) \cdot P_{r'}(x) + P_s(x) \quad (10)$$

مرة ثانية، بما أن $x \ll X$ ، فيمكننا، بتقريب جيد، اعتبار أن النيوترونات تتوزع بصورة منتظمة في الحيز (X, X) ، وبالتالي فإن هذا الاحتمال يمثل نسبة حجم الماسورة الأسطوانية $(X - r, X - x)$ إلى حجم الأسطوانة الكلية (X, X) ؛ أي:

$$\begin{aligned} P_{d,r',s}(x) &= \frac{\pi X^2(X - x) - \pi r^2(X - x)}{\pi X^2 X} \\ &= \frac{X^3 - X^2 x - r^2 X + r^2 x}{X^3} \end{aligned} \quad (11)$$

من المعادلتين (10) و (11) نجد أن:

$$P_s(x) = \frac{X^3 - X^2 x - r^2 X + r^2 x}{X^3} - P_{d'}(x) \cdot P_{r'}(x) \quad (12)$$

أخيراً فإن تدفق الحزمة النيوترونية التي تخرج من العينة (X, x) من قاعدتها المقابلة لقاعدة الورود يكون:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi'(x) + \Phi''(x) = \Phi(0) \{P'_{d,r,s}(x) + P'_{d,r,s'}(x)\} \\ &= \Phi(0) \left\{ \frac{r^2 X - r^2 x}{X^3} + \frac{X^3 - X^2 x - r^2 X + r^2 x}{X^3} \right\} \\ &= \Phi(0) \left\{ \frac{X^3 - X^2 x}{X^3} \right\} = \Phi(0) \left\{ 1 - \frac{x}{X} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

مثال تطبيقي:

فيما يلي نقدم مثلاً تطبيقياً لتعيين التدفق الذي يجتاز عينة أسطوانية أبعادها (X, x) ، تحتوي على نظير الزرنيخ ^{75}As ، حيث تم حساب السماكة X ، من أجل

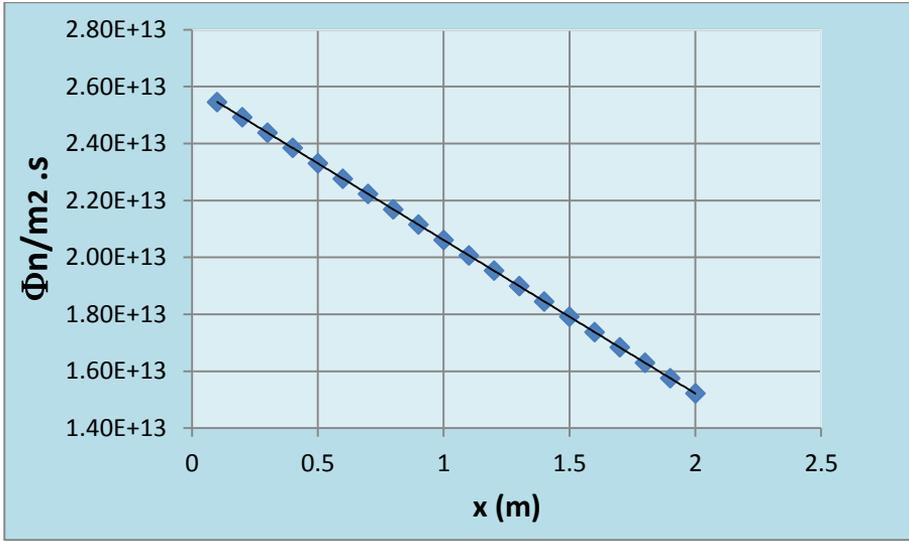
الطاقة $E_n = 1 \text{ MeV}$ ، والتي توافق مقطعاً عرضياً للأسر $\sigma_c = 0.04491 \text{ barn}$ [12]، وإن كثافته هي $\rho = 5.75 \text{ gr/cm}^3$ [13]، وعدد أفوغادرو $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ nucl/mol}$ عندئذ تكون $X = 4.82 \text{ m}$.

وعند تعريض العينة لتدفق نيوتروني قدره $\Phi(0) = 2.6 \times 10^{13} \frac{\text{neut}}{\text{sec.m}^2}$ [14]، فإن التدفق سينخفض من أجل سماكات مختلفة للعينة يبينها الجدول (1) وذلك بحسابه من العلاقة (10).

الجدول (1): قيم التدفق $\Phi(x)$ من أجل سماكات x مختلفة للعينة:

$\Phi(x) \text{ (neut/sec. m}^2\text{)}$	$x \text{ (m)}$
2.55E+13	0.1
2.49E+13	0.2
2.44E+13	0.3
2.38E+13	0.4
2.33E+13	0.5
2.28E+13	0.6
2.22E+13	0.7
2.17E+13	0.8
2.11E+13	0.9
2.06E+13	1
2.01E+13	1.1
1.95E+13	1.2
1.90E+13	1.3
1.85E+13	1.4
1.79E+13	1.5
1.74E+13	1.6
1.68E+13	1.7
1.63E+13	1.8
1.58E+13	1.9
1.52E+13	2

يوضح الشكل (2) تابعة التدفق $\Phi(x)$ للسماكة x ، حيث نلاحظ تناقص التدفق مع زيادة السماكة x .



الشكل (2): تابعة التدفق $\Phi(x)$ للسماكة x .

5.1.3. الاحتمال الأكيد من أجل العينة (X, x)

إن مجموع احتمال أن لا يخرج نيوترون من العينة (X, x) من قاعدتها المقابلة لقاعدة الورود؛ أي $P'(X, x)$ ، واحتمال أن يخرج نيوترون من العينة (X, x) من القاعدة المقابلة لقاعدة الورود؛ $P(X, x)$ ، هو الاحتمال الأكيد؛ أي أن:

$$P'(X, x) + P(X, x) = 1 \quad (1)$$

(1) - إن احتمال أن لا يخرج نيوترون من العينة (X, x) من القاعدة المقابلة لقاعدة الورود؛ أي احتمال أن يتفكك النيوترون أو يتفاعل تفاعل أسر (يمتص) ضمن العينة (X, x) يمثل مجموع احتمالين: احتمال أن يتفكك النيوترون أو يتفاعل تفاعل أسر في الأسطوانة (r, x) وأن لا يتشتت فيها؛ أي $P_{d,r,s'}(x)$ ، واحتمال أن يتفكك النيوترون أو يتفاعل تفاعل أسر في الماسورة الأسطوانية $(X - r, x)$ بعد أن تشتت ضمن الأسطوانة (r, x) ؛ أي $P_{d,r,s}(x)$. وبالتالي:

$$P'(X, x) = P_{d,r,s'}(x) + P_{d,r,s}(x) \quad (2)$$

(a) - إن احتمال أن يتفكك النيوترون أو يتفاعل تفاعل أسر في الأسطوانة (r, x) وأن لا يتشتت فيها يمثل نسبة حجم الأسطوانة (r, x) إلى حجم الأسطوانة الكلية (X, X) ؛ أي أن:

$$P_{d,r,s'}(x) = \frac{\pi r^2 x}{\pi X^2 X} = \frac{r^2 x}{X^3} \quad (3)$$

(b) - إن احتمال أن يتفكك النيوترون أو يتفاعل تفاعل أسر في الماسورة الأسطوانية $(X - r, x)$ بعد أن تشتت ضمن الأسطوانة (r, x) يمثل نسبة حجم الماسورة الأسطوانية $(X - r, x)$ إلى حجم الأسطوانة الكلية (X, X) ؛ أي أن:

$$P_{d,r,s}(x) = \frac{\pi X^2 x - \pi r^2 x}{\pi X^2 X} = \frac{X^2 x - r^2 x}{X^3} \quad (4)$$

وبالتالي، فإن احتمال أن لا يخرج النيوترون من العينة (X, x) يكون:

$$P'(X, x) = P_{d,r,s'}(x) + P_{d,r,s}(x) = \frac{X^2 x}{X^3} \quad (5)$$

(2) - إن احتمال أن يخرج نيوترون من العينة (X, x) من القاعدة المقابلة لقاعدة الورود؛ أي احتمال أن لا يتفكك النيوترون وأن لا يتفاعل تفاعل أسر (يمتص) ضمن العينة (X, x) يمثل مجموع احتمالين: احتمال أن لا يتفكك النيوترون وأن لا يتفاعل تفاعل أسر في الأسطوانة (r, x) وأن لا يتشتت فيها؛ أي $P_{d',r',s'}(x)$ واحتمال أن لا يتفكك النيوترون وأن لا يتفاعل تفاعل أسر في الماسورة الأسطوانية $(X - r, x)$ بعد أن تشتت ضمن الأسطوانة (r, x) ؛ أي $P_{d',r',s}(x)$. وبالتالي:

$$P(X, x) = P_{d',r',s'}(x) + P_{d',r',s}(x) \quad (6)$$

(a) - إن احتمال أن لا يتفكك النيوترون وأن لا يتفاعل تفاعل أسر في الأسطوانة (r, x) وأن لا يتشتت فيها يمثل نسبة حجم الأسطوانة $(r, X - x)$ إلى حجم الأسطوانة الكلية (X, X) ؛ أي أن:

$$P_{d',r',s'}(x) = \frac{\pi r^2 (X - x)}{\pi X^2 X} = \frac{r^2 X - r^2 x}{X^3} \quad (7)$$

(b) - إن احتمال أن لا يتفكك النيوترون وأن لا يتفاعل تفاعل أسر في الماسورة الأسطوانية $(X - r, x)$ بعد أن تشتت ضمن الأسطوانة (r, x) يمثل نسبة حجم الماسورة الأسطوانية $(X - r, X - x)$ إلى حجم الأسطوانة الكلية (X, X) ؛ أي:

$$P_{d',r',s}(x) = \frac{\pi X^2(X - x) - \pi r^2(X - x)}{\pi X^2 X} \\ = \frac{X^3 - X^2 x - r^2 X + r^2 x}{X^3} \quad (8)$$

وبالتالي، فإن احتمال أن يخرج النيوترون من العينة (X, x) يكون:

$$P(X, x) = P_{d',r',s'}(x) + P_{d',r',s}(x) = \frac{X^3 - X^2 x}{X^3} \quad (9)$$

بجمع المعادلتين (5) و (9):

$$P'(X, x) + P(X, x) = \frac{X^2 x}{X^3} + \frac{X^3 - X^2 x}{X^3} = 1 \quad (10)$$

يتبين بوضوح أن مجموع الاحتمالين هو الاحتمال الأكيد.

6. الاستنتاجات

1. تم استنتاج معادلة تدفق حزمة النيوترونات العابرة بصورة مباشرة من أجل عينة كبيرة.

2. تم إدخال مصطلح جديد هو العينة الكبيرة وقد تم تعريفه على أنه عينة أسطوانية ذات سماكة ونصف قطر يساوي كل منهما إلى المسار الحر الوسطي للنيوترون λ في هذه العينة.

3. تم إدخال مصطلح جديد ثان هو العينة الكبيرة للغاية وقد تم تعريفه على أنه عينة لا تسمح لأي نيوترون يدخل فيها من الخروج منها، وبكلام آخر، إن أي نيوترون يدخل إلى هذه العينة فإنه إما أن يؤسر فيها من قبل أحد نواها أو أنه يتفكك فيها سواءً أ كان قد عانى تشتتاً أم لا.

4. بناء على المصطلحين تمت صياغة نظرية جديدة لإيجاد تدفق الحزمة النيوترونية من كافة جوانب عينة أسطوانية. تم فيها إيجاد العلاقة التحليلية بين المقطع العرضي للأسر (الامتصاص) والمقطع العرضي للتشتت، وإيجاد المعادلة العامة لتدفق الحزمة النيوترونية العابرة لعينة ذات أبعاد كبيرة. كما تم إيجاد العلاقة التي تعطي احتمال تشتت نيوترون على نوى العينة.

5. تم وضع طريقة تجريبية جديدة من أجل تعيين المقطع العرضي لأسر النيوترون.

6. من المتوقع أن تعطي نتائج أدق لأنها تأخذ بعين الاعتبار تدفق حزمة النيوترونات التي تخرج من كافة جوانب العينة، وهذا ما لم يؤخذ بالاعتبار سابقاً.

المراجع العربية

- [6] د. عبدالله رستاوي، د. سليمان ديبو، علي الدود، دراسة تحليلية لتأثير تفكك النيوترونات على تدفق حزمة نيوترونية عابرة لعينة ذات سماكة كبيرة، مجلة جامعة البعث، المجلد 39، سوريا، 2017.
- [9] د. عبدالله رستاوي، د. سليمان ديبو، علي الدود، دراسة تحليلية لاحتمال تشتت نيوترون على نواة من أجل تعيين طول التشتت لها، مجلة جامعة البعث، المجلد 41، سوريا، 2019.
- [14] د. عبدالله رستاوي، د. جمال العرجة، استخدام مطياف أشعة غاما للنشاطات المنخفضة لتعيين تدفق منبع نيوتروني نظائري، مجلة جامعة البعث للعلوم الأساسية، المجلد 29، العدد 5، 1428هـ، 2007م.

Reference

- [1] M. de Bruin, J. Radioanal. Nucl. Chem. 169 (1993) 5-12.
- [2] Hendrik Willem BAAS, Neutron Activation Analysis of Inhomogeneous Large Samples, DUP Science, Netherlands, 2004.
- [3] R. Khelifi, P. Bode, A. Amokrane, Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry, Vol. 274, No.3 (2007) 639–642.
- [4] F. Tzika and I. E Stamatelatos, MONTE CARLO SIMULATIONS FOR NON-DESTRUCTIVE ELEMENTAL ANALYSIS OF LARGE SAMPLES BY NEUTRON ACTIVATION ANALYSIS, Institute of Nuclear Technology and Radiation Protection, NCSR 'Demokritos', Greece, 11-14 October 2007.
- [5] Л. Митрани, Атомна Физика, държавно издателство наука и изкуство, София 1957.
- [7] Abdullah Rastanawi, Soleiman Dibo, Ali Al-Doud, An Applied Study of the Effect of Decay of Fast Neutron in Concrete, Chemistry and material Journal, vol.9 No 10, 2017, USA.

- [8] H.Das, A.Faanhof, H. Van Der Sloot, Radioanalysis in Geochemistry, Elsevier, Amsterdam, 1989
- [10] Abdullah Rastanawi, Soleiman Dibo, Ali Al-Doud, AN APPLIED STUDY OF THE EFFECT OF SCATTERING OF THERMAL NEUTRON THROUGH A SAMPLE CONATION'S ARSENIC ELEMENT, Ally-Since.ru Journal, vol. 45, Russia, 2020.
- [11] J. Margueron, J. Navarro and N. V. Giai. Nucl. Phys. A 719 (2003) 169c.
- [12] Harl'O M. Fisher, A Nuclear Cross Section Data Handbook, Los Alamos, New Mexic, Jan 1991.
- [13] CRC Handbook for Chemistry and Physics, 91st ed., 2010–2011, CRC Press.

اصطناع وتوصيف بولي [2,2 - ثنائي (4-أكريلات

فينيل) بروبان]

أ.د. علي يوسف*

د. ثناء شريتح**

الطالبة سهير علي***

ملخص البحث

تم في هذا البحث اصطناع مونومير ثنائي الفينول A مخبرياً انطلاقاً من الفينول والأسيتون بوجود حفاز حمضي الأمبرلست (15)، تم اصطناع مونومير أكريلات ثنائي فينول انطلاقاً من ثنائي الفينول A وحمض الأكريليك ومن ثم بلمرته والحصول على بوليمير AABPA واثبات بنيتها بالرنين النووي المغناطيسي البروتوني ومطيافية الأشعة تحت الحمراء، واقترحت آلية مناسبة لشرح اصطناع كل من مونومير أكريلات ثنائي الفينول والبوليمير AABPA.

كما تم تعيين درجة البلمرة ومعدل الوزن الجزيئي العددي ومعدل الوزن الجزيئي الوزني، حيث تم الوصول إلى درجة بلمرة (23) ومعدل وزن جزيئي عددي (7802) ومعدل وزن جزيئي وزني (15268) ودرجة تبعر (1.9569)، وذلك عند إجراء التفاعل عند درجة حرارة 135°C خلال زمن تفاعل مقداره 180 min .

درست بعض الخصائص الفيزيائية كاللزوجة النسبية والميكانيكية كاستخدام البوليمير معجون لطلاء السيارات، بالإضافة لبعض الخصائص الحرارية من خلال تسجيل منحنى المسح التفاضلي الحراري (DSC) .

كلمات مفتاحية: ثنائي الفينول A، معدل الوزني الجزيئي العددي ، درجة البلمرة، المسح الحراري التفاضلي.

* أستاذ في قسم الكيمياء - كيمياء عضوية- كلية العلوم- جامعة البعث.

** أستاذ مساعد في قسم الكيمياء - كيمياء عضوية- كلية العلوم الثانية- جامعة البعث.

*** طالبة دكتوراه كيمياء عضوية- قسم الكيمياء- كلية العلوم- جامعة البعث.

Synthesis and characterization of poly(2,2- bis(4- acrylates phenyl) propane)

Suhair Ali, prof Ali Yousef, Dr. thanaa shriteh

Abstract

In this research, the bisphenol A monomer was synthesized from phenol and acetone in the presence of an amberlast acid catalyst (15), the diphenol acrylate monomer was synthesized from bisphenol A and acrylic acid, and then polymerized, obtained an AABPA polymer, and proved its structure by proton magnetic resonance and infrared spectroscopy. , And suggested a suitable mechanism to explain the synthesis of both the bisphenol acrylate monomer and AABPA.

The degree of polymerization, the numerical molecular weight rate, and the molecular weight rate were determined, as the degree of polymerization (23), the numerical molecular weight rate (7802), the molecular weight rate (15268) and the scattering degree (1.9569), were reached when the reaction was carried out at a temperature. 135°C during a reaction time of 180 min.

Some physical properties such as relative viscosity and mechanical properties were studied, such as the use of polymer paste for painting cars, in addition to some thermal properties by recording the Differential Scanning Calorimetry (DSC).

Keywords:Bisphenol A, Number Average Molecular Weight, Degree of Polymerization, Differential Calorimetric Scanning DSC.

1- مقدمة:

يعد ثنائي الفينول A 2,2-ثنائي (4-هيدروكسي فينيل) بروبان، من المواد الأولية الهامة في إنتاج راتنجات الايبوكسي والبولي كربونات على المستوى الصناعي، يتم تحضيره عن طريق التكتيف المحفز بالحمض للأسيتون والفينول، حيث تم دراسة حركية اصطناع ثنائي الفينول A من الأسيتون والفينول على محفز التبادل الأيوني المعزز بالتعادل الجزئي للمجموعات الحمضية مع 2-مركابتو إيثيل أمين في نطاق درجة حرارة $50-85^{\circ}\text{C}$ [1-3].

ثنائي الفينول A ملوث بيئي يستخدم على نطاق واسع في صناعة البلاستيك. ثبت أنه يسبب اضطراب الغدد الصماء وله تأثير سلبي على التطور الجنيني للثدييات، و يظهر تأثيرًا سلبيًا على التطور الجنيني المبكر للخنازير من خلال تلف الميتوكوندريا والحمض النووي [4-5].

تم إجراء البلمرة المباشرة لثنائي الفينول A مع ثاني أكسيد الكربون باستخدام نظام محفز مكون من محفز كربونيل Pd ، حيث أدى استخدام خلات النحاس كمحفز للأكسدة والاختزال غير العضوي إلى اصطناع البولي كربونات ولكن أدى تكوين مجموعات أورثو فينيلين كربونات (O-PC) وحمض الساليسيليك في نهايات السلسلة إلى تشكل بوليمرات منخفضة الوزن الجزيئي، ومن أجل منع تشكل هذه المجموعات للحصول على بوليمر بوزن جزيئي أعلى يحوي زمر طرفية OH، تم إجراء تعديلات مختلفة في نظام المحفز، أمكن التخلص من تشكيل o-PC تمامًا باستبدال Cu بـ Ce، بالإضافة إلى استخدام ثنائي (ثلاثي فينيل فوسفورانيليدين) بروميد الأمونيوم (PPNBr) بدلاً من بروميد رباعي الأمونيوم $[\text{n}(\text{Bu})_4\text{NBr}]$ من أجل التخلص من تشكل المجموعة الحمضية ، وحددت بنية البوليمر بالتفصيل من خلال دراسة أطياف IR و NMR و MALDI-TOF-MS [6-7].

كما تم تحضير بوليمرات ثنائي الفينول A تريازين (T-BPA)، التي تميزت بخواص ميكانيكية وحرارية مثيرة للاهتمام، وذلك عن طريق استخدام محفز نقل الطور المتعدد التكتيف البيني (بين سطحين)، ولتحسين ظروف التفاعل درست العديد من المعاملات مثل درجة الحرارة ووقت التفاعل ونوع وتركيز محفز نقل الطور، تركيز المونومرات ، نوع المذيب ،

والقاعدة ، و إضافة الملح ، و تأثير تركيز الوزن الجزيئي على اللزوجة النوعية المخفضة ومردود T-BPA ، حيث كانت ظروف التفاعل مواتية لاصطناع T-BPA بأقل تكلفة [8]. اكتسبت البوليمرات المشتركة التي تحتوي على وحدات متتالية من الستايرين وكربونات ثنائي الفينول A بعض الاهتمام كمواد لتخزين البيانات الضوئية. نظراً للعلامة المختلفة للشواهد الانسيابية للبوليسترين (PS) والبولي (كربونات PC) (bispheno1-A) ، يجب أن تُظهر البوليمرات المشتركة التي تحتوي على كلا المونومرين انكساراً ضوئياً منخفضاً ناتجاً عن الإجهاد مقارنةً بالكربونات المتجانسة [9-13].

لذا في هذا الإطار تم اصطناع بولي كربونات ثنائي فينول A - كرافت - بوليسترين باستخدام تقنية macromonomer ، التكتيف المشترك لبولي سترين (مكرومونومر) ، يحمل وظائف هيدروكسيل عطرية، مع ببسفينول A وثلاثي فوسجين في محلول بييريدين و كلوريد الميثيلين، حيث أظهرت مركبات البولي كربونات على النقيض من مزيج البوليسترين / البولي كربونات المتماثلة الأوزان والتركيب الجزيئي درجة حرارة تترجج واحدة فقط ، والتي ثبت أنها كذلك محتوي البولي سترين يقلل الانكسار الناجم عن الإجهاد مقارنة بالبولي كربونات [14]. سنركز في هذا العمل على اصطناع مونومير ثنائي فينول أكريلات يحوي زمر استيرية وروابط مزدوجة كربون- كربون وبلمرته.

2- الهدف من البحث:

لم يصادف في المراجع والأدبيات العلمية دراسات تجريبية تناولت اصطناع بوليمرات استيرية انطلاقاً من ثنائي الفينول A ، لذا يهدف هذا العمل إلى ما يلي:

- اصطناع بوليمر ثنائي الفينول أكريلات مخبرياً وفصل الناتج وتنقيته .
- التأكد من هوية الناتج من خلال تحديد بنيته الجزيئية باستخدام طيوف (IR) و $^1\text{H-NMR}$ و طيف الأشعة تحت الحمراء (IR) .
- دراسة خصائص البوليمر المصنع.

3- مواد وطرق البحث:

3-1- الأجهزة والأدوات المستخدمة:

- جهاز طيف الطنين النووي المغناطيسي بروتوني نموذج 400MHz من شركة Bruker السويسرية.
- جهاز طيف الامتصاص الضوئي ما تحت الأحمر نموذج FT-IR-4100 من شركة Jasco اليابانية.
- جهاز المسح التفاضلي الحراري DSC (Differential Scanning Calorimetry) الذي يحمل الرمز (DSC-60) من شركة (SHIMADZU) صنع اليابان- مخبر الهندسة البيئية، كلية الهندسة المدنية، جامعة البعث.
- صفائح كرماتوغرافيا الطبقة الرقيقة من الألمنيوم مطلية بالسليكا جل 60F₂₅₄ قياس 20 X 20 من شركة Merck الألمانية.
- جهاز قياس درجة الانصهار Electrothermal Melting Point Apparatus .
- ميزان حساس من النوع Sartorius BL-210S.
- سخان مزود بمحرك مغناطيسي Agimatic P-Selecta 243.
- مخبر دوار نموذج 4.91 من شركة Normschiff الألمانية.
- مصباح UV مزود بلمبتين 254nm, 366nm من شركة DESAGA الألمانية.
- حوجة 100ml ثنائية الفتحة، محرك مغناطيسي، سخانة، أرلينة 1000ml، مكثف، دين ستارك خاص بالاسترة، ميزان حرارة، اسطوانة أزوت، أنبوب اختبار 150*20mm، قضبان زجاجية للتحريك، ورق ترشيح، قمع ترشيح، حمام مائي، مؤقت زمني، اجاصة مطاطية.

3-2-المواد الكيميائية المستخدمة:

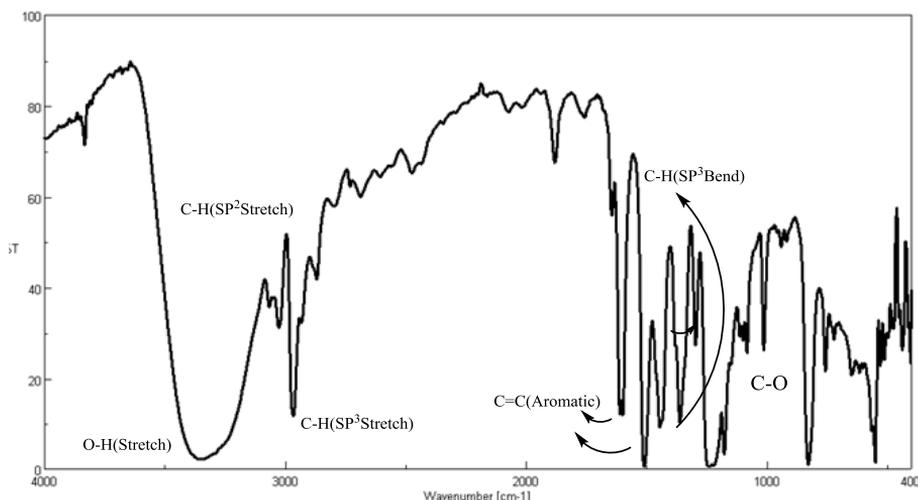
- حمض الأكرليك، فينول، أمبرلست الحمضي-15، هيدروكسيد الصوديوم، ايتانول، أسيتون، تتراهيدروفوران، ماء مقطر. هيدروكسيد الصوديوم من انتاج شركة BDH.
- زيت بارافين من شركة GPR، ماء مقطر.
- أوكسيد الزنك (0.1 ميكرون) .

3-3- تحضير ثنائي الفينول A :

يضاف إلى حوجة سعة 50 ml مجهزة بسخانة وحمام مائي ومبرد عكوس ومحرك مغناطيسي كمية زائدة (0.5mol, 4.7gr) فينول و (0.01mol, 0.58gr) أسيتون مع

اصطناع وتوصيف بولي[2,2-ثنائي (4-أكريلات فينيل) بروبان]

التحريك بدون مذيب وتحت الضغط الجوي وحفاز أمبرلست -15 (50mg)، وتم تسخين المواد المتفاعلة إلى الدرجة (70-125°C) لمدة 24 ساعة، يحل الناتج بالإيثانول جيداً وعلى البارد، ويرشح للتخلص من الحفاز، ويطرد المذيب بالتبخير تحت التفريغ . فتم الحصول على راسب أبيض درجة انصهاره $m.p= 155-156^{\circ}C$ بمرود 70% .
سجل طيف الأشعة تحت الحمراء للناتج وقورن بالطيف المرجعي لثنائي الفينول أ، فلوحظ توافق بين الطيفين الشكل (1) .



الشكل(1): طيف ال IR لثنائي الفينول A المحضر مخبرياً

4-3- تحضير بولي[2,2-ثنائي (4-أكريلات فينيل) بروبان] من مونومير أكريلات ثنائي فينول A (AABPA):

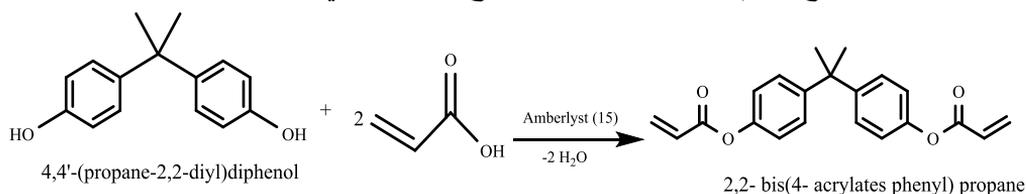
تم تحضيره على مرحلتين:

المرحلة الأولى: تشكل الأستر:

يضاف إلى حوجلة ثنائية الفتحة مزودة بحمام زيتي ومحرك مغناطيسي ومكثف ومدخل لغاز الأزوت بحيث يمرر على شكل فقاعات غازية وجهاز دين ستارك وميزان حرارة (1mmol, 0.228g) من ثنائي الفينول A و (2mmol, 0.144 gr) حمض الأكرليك (بحيث يتشكل محلول متجانس) و من ثم يضاف 0.012 g من الأمبير لست -15 ، وترفع درجة الحرارة وتثبت عند الدرجة (135°C) وبعد مرور ستين دقيقة من الثبات عند

هذه الدرجة لوحظ تحول لون المحلول من شفاف إلى أحمر ياقوتي وازدياد اللزوجة. وباستمرار التسخين لمدة ثلاثة ساعات لم يلاحظ أي تغير آخر.

يحل الناتج بالإيثانول جيداً وعلى البارد، ويرشح للتخلص من الحفاز، ويطرد المذيب بالتبخير تحت التفريغ، فتم الحصول على سائل لزج أحمر ياقوتي:

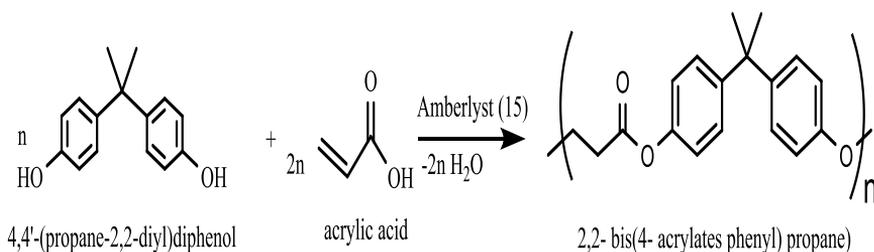


تم تتبع سير تفاعل الأسترة باستخدام كروماتوغرافيا الطبقة الرقيقة TLC وجملة جرف (ميثانول : دي كلورو الايثان) (80:20)، واعتماداً عليها تم اختيار النسب المولية للمواد الأولية، فكانت 1 mol من BPA و 2 mol من حمض الأكرليك و (0.4%) من وزن المزيج التفاعلي الحفاز الحمضي الأمبرليست -15.

كما تم الاستدلال على نهاية تفاعل الأسترة بطريقة كيفية، ذلك بأخذ عينة من وسط التفاعل في أنبوب اختبار ويضاف لها كمية مماثلة حجماً من الكحول المطلق فإذا لم تشكل أي عكر فإن ذلك يدل على نهاية تفاعل الأسترة.

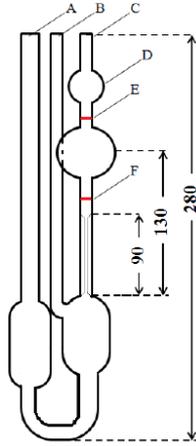
المرحلة الثانية: تشكل البوليمير :

تم سحب عينات من وسط الكتلة المتفاعلة خلال أزمنة مختلفة واذابتها بمذيب مناسب (الكلوروفورم)، ثم تعين قرينة اليود لكل عينة بطريقة وفق الطريقة المرجعية (ASTM D 555 -95).



3-5- القياسات:

تم تسجيل طيف الأشعة تحت الحمراء للمونومير باستخدام جهاز مطيافية الأشعة تحت الحمراء IR من نوع (JENA-4100) بطريقة أقراص KBr. كما تم تسجيل طيف الرنين النووي المغناطيسي البروتوني ($^1\text{H-NMR}$) باستخدام الكلوروفورم المديتر كمذيب. تم تتبع تفاعل البلمرة باستخدام المسح الحراري التفاضلي DSC في مجال درجات حرارة (25-350°C) بسرعة تسخين 5°C/min في جو من الأرجون، كما تم حساب معدل الوزن الجزيئي للبوليمير ودرجة البلمرة عن طريق تعيين قرينة اليود عند فترات زمنية مختلفة خلال سير التفاعل ومن ثم تعيين درجة التحول، و تعيين اللزوجة النسبية $[\eta]$.
تم تعيين اللزوجة النسبية η_{rel} (Relative viscosity) باستخدام جهاز UBBELOHDE Viscometer عند درجة حرارة (30 °C) الموضح بالشكل (5).



UBBELOHDE Viscomete

الشكل (2)

3-6- اختبار البوليمير المصنع كمعجون لطلاء السيارات :

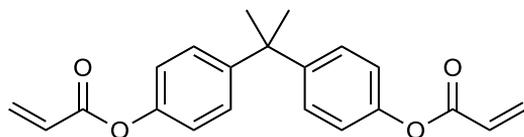
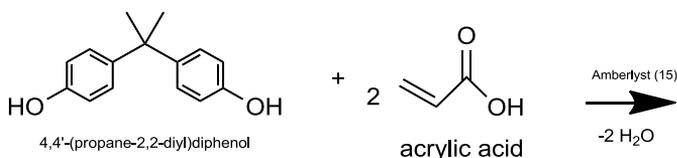
تم إجراء تطبيق للبوليمير المصنع كمعجونة لطلاء السيارات بتجهيز عجينة الحديد اللاصقة من خلال تحميل البوليمير الناتج على أكسيد الزنك (طول الحجم البلوري للحبيبة 0.1 ميكرون) بنسبة 50% وزناً.
يؤخذ مقداراً من المادة المصنعة ويضاف إليها بحدز وبالتدرج كميات مناسبة من أكسيد الزنك مع التحريك ببطء حتى التجانس، و الحصول على عجينة لينة طيبة القوام.

ينظف قطعة السطح المراد طلي العجينة عليه باستخدام ورق زجاج خاص ، ويدلك السطح حتى النعومة الكافية، ويطلى السطح المعدني الناعم والمصقول بأداة مطاوية غير مخرشه مع المحافظة على أن يكون سطحاً مستوياً في جميع الاتجاهات، ويترك الطلاء حتى يجف لمدة 24 ساعة ثم يصقل سطح الطلاء.

4- النتائج والمناقشة:

4-1- التوصيف البنوي للبوليمر المحضر باستخدام مطيافيتي IR, NMR:

تم اصطناع مونومير أكريلات ثنائي فينول A (AABPA) انطلاقاً من ثنائي فينول A وحمض الأكرليك بوجود حفاز الأمبرلست-15. حيث تبين بأنه يمكن لزمرة الهيدروكسيل الطرفية في مركب ثنائي فينول A أن تتفاعل مع الزمرة الكربوكسيلية لحمض الأكرليك وتتشكل أكثر من زمرة استيرية واحدة في المونومير، بالتالي يتشكل مونومير ثنائي استر أكريلات ثنائي الفينول A.



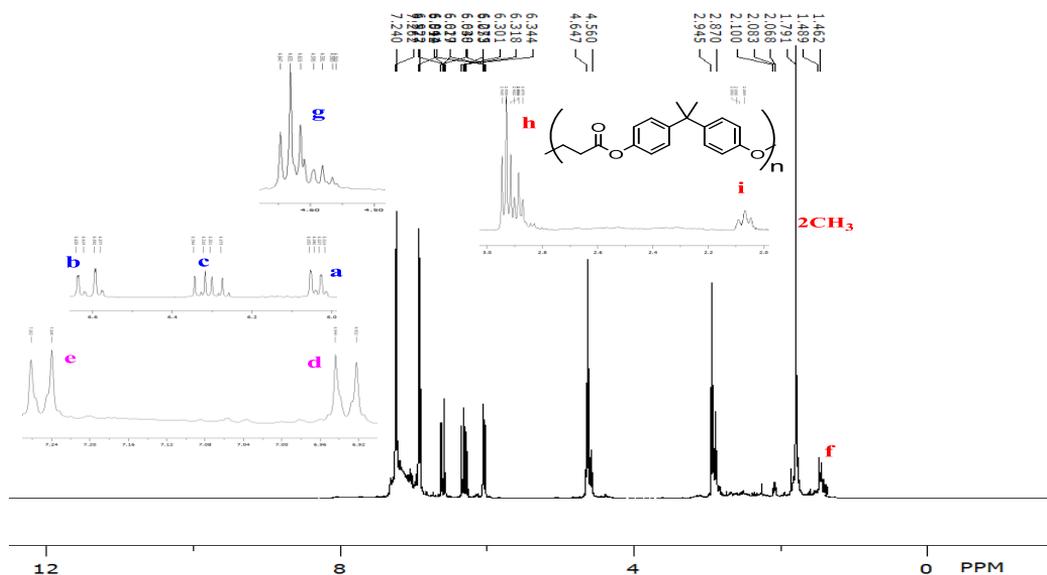
2,2- bis(4- acrylates phenyl) propane

تم التحقق من تشكل مونومير ثنائي استر أكريلات ثنائي فينول A باستخدام الرنين النووي المغناطيسي البروتوني $^1\text{H-NMR}$ حيث يلاحظ في طيف الرنين النووي البروتوني الشكل (3)، اختفاء بروتون زمرة الهيدروكسيل لثنائي الفينول A و اختفاء بروتون زمرة الكربوكسيل في حمض الأكرليك.

تم تسجيل طيف الطنين النووي المغناطيسي البروتوني $^1\text{H-NMR}$ في CDCl_3 للبوليمر الناتج الشكل (5)، حيث ظهرت اشارة المذيب (CDCl_3) متداخلة مع البروتونات العطرية عند

اصطناع وتوصيف بولي[2,2-ثنائي (4-أكريلات فينيل) بروبان]

الانزياح (7.26ppm)، كما يُظهر الطيف إشارة ثنائية عند الانزياح (1.49ppm, 3H) تعود لبروتونات مجموعات الميثيل f الناتجة عن عملية البلمرة. كما يُظهر الطيف إشارة أحادية عند الانزياح (1.75ppm, 6H) تعود لبروتونات مجموعات الميثيل الواقعة بين حلقتي البنزن التابعة للمونومير، وثلاثية عند الانزياح (2.10 ppm, 2H) و تعود لبروتونات المثلين i ، وثلاثية مضاعفة عند الانزياح (2.87-2.95ppm, 2H) تعود لبروتونات المثلين h، ومتعددة عند الانزياح (4.56-4.65 ppm, 1H) تعود للبروتون g و وثنائية مضاعفة عند الانزياح (6.01 – 6.05ppm, 1H) تعود للبروتون a ، وثنائية مضاعفة عند الانزياح (6.58 – 6.64 ppm, 1H) تعود للبروتون b ، وثنائية مضاعفة عند الانزياح (6.28 – 6.34 ppm, 1H) تعود للبروتون c وثنائية عند الانزياح (6.94 ppm, 1H) تعود للبروتونات العطرية d ، وثنائية عند الانزياح (7.26 ppm, 1H) تعود للبروتونات العطرية e .



الشكل (3): طيف $^1\text{H-NMR}$ للبوليمر الناتج

ويوضح الجدول (1) قيم الانزياحات للبوليمير الناتج.

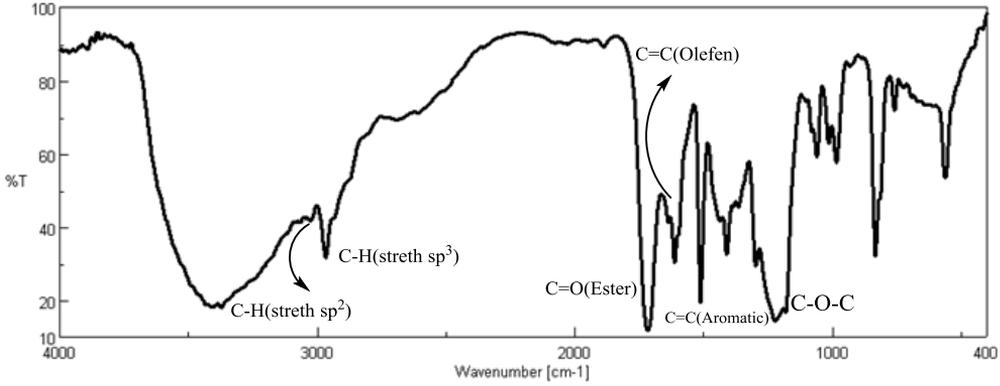
الجدول (1): قيم الانزياحات للبلمير الناتج

¹ H-NMR(δ,ppm)	No
1.75(d, 3H)	f
1.79 (s , 6H)	CH ₃
2.10 (t , 2H)	i
2.87 -2.95 (dt, 1H)	h
4.56 – 4.65 (m, 1H)	g
6.01-6.05(dd, 1H)	a
6.58-6.64(dd, 1H)	b
6.28-6.34(dd, 2H)	c
6.94 (d,2H)	d
7.26 (d,2H)	e

يبين طيف IR الشكل(5) للبلمير امتطاط الروابط C-H العطرية عند 3040 cm^{-1} ، وامتطاط الروابط CH₂ الأليفاتية عند 2966 cm^{-1} ، يقع امتطاط الروابط C=C للحلقة العطرية عند 1520 و(C=C) الأوفينية عند 1618 cm^{-1} ، كما يظهر الامتطاط غير المتناظر والامتطاط المتناظر للرابطة C-O-C عند 1220 cm^{-1} وعند 1060 cm^{-1} على التوالي.

كما يظهر امتطاط الزمرة C=O الاستيرية عند العدد الموجي 1715 cm^{-1} .

اصطناع وتوصيف بولي [2,2-ثنائي (4-أكريلات فينيل) بروبان]

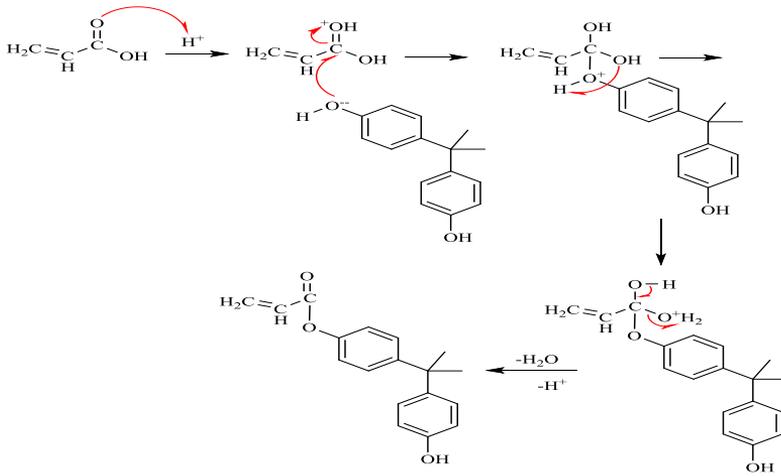


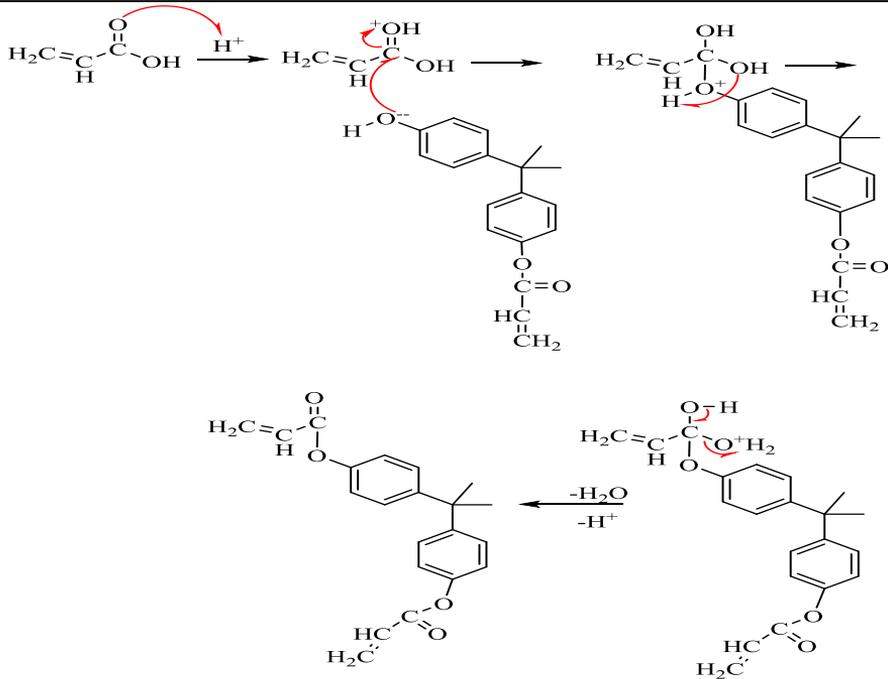
الشكل (5): طيف الأشعة تحت الحمراء للناتج

كما يظهر المخططان (I) و (II) الآلية المقترحة لتفاعل ثنائي الفينول A مع حمض الأكرليك

: [15]

1- تفاعل الأسترة (تشكل المونومير):

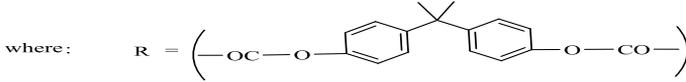
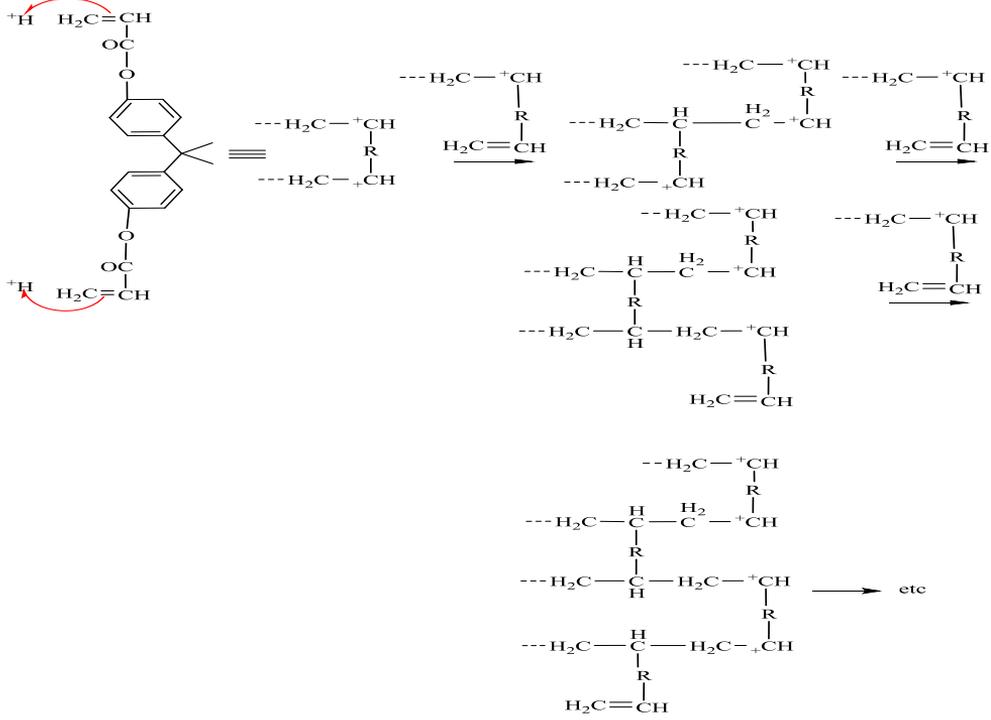




المخطط(I): آلية تشكل مونومير ثنائي فينول أكريلات

(2) تفاعل البلمرة (تشكل البوليمير):

اصطناع وتوصيف بولي[2,2-ثنائي (4-أكريلات فينيل) بروبان]



المخطط(II): آلية تشكل البولومير ثنائي فينول أكريلات

4-2- حساب معدل الوزن الجزيئي للبولي (AABPA) :

تم حساب معدل الوزن الجزيئي العددي والوزني ودرجة البلمرة عن طريق تعيين قرينة اليود عند فترات زمنية مختلفة أثناء سير التفاعل [16,17].

حيث تم تعيين قرينة اليود وفق طريقة (ASTM D 5554 – 95 (2006) كإيلي :

$$\text{iodine value} = \frac{(B - S) \times N \times 12.69}{\text{weight of sample}}$$

B : حجم محلول ثيوكبريتات الصوديوم المستهلك في معايرة الشاهد مقدراً (ml).

S: حجم محلول ثيوكبريتات الصوديوم المستهلك في معايرة العينة مقدراً (ml).

N : نظامية محلول ثيوكبريتات الصوديوم .

weight of sample: وزن العينة المستخدمة مقدراً (g).

ثم تعين درجة التحول وفق العلاقة الآتية [18]:

$$p = \frac{n \cdot I^\circ - n \cdot I}{n \cdot I^\circ} \times 100$$

$n \cdot I^\circ$: قرينة اليود للكتلة المتفاعلة في اللحظة t_0 (قبل بدء التفاعل)

$n \cdot I$: قرينة اليود للكتلة المتفاعلة في اللحظة t (أثناء إجراء التفاعل)

كما تمّ تعيين معدل الوزن الجزيئي العددي M_n ومعدل الوزن الجزيئي الوزني M_w وفق العلاقات الآتية [16]:

$$M_n = X_n M_o = \frac{M_o}{(1 - p)}$$

$$X_n = \frac{1}{(1 - p)}$$

X_n : درجة البلمرة

p : درجة التحول كنسبة من الواحد .

M_o : الوزن الجزيئي للمونومر .

$$M_w = X_w M_o$$

$$X_w = \frac{1 + P}{1 - P}$$

وعينت درجة البلمرة وفق العلاقة الآتية [19]:

$$X_n = \frac{M_n}{M_o} = \frac{1}{1 - P}$$

كما تمّ تعيين درجة التبعثر (توزع الوزن الجزيئي) (Molecular Weight Distribution, MWD) وفق العلاقة التالية:

$$MWD = \frac{\bar{M}_w}{\bar{M}_n}$$

تتغير قيم دليل التوزع من الواحد بالنسبة للعينات ذات السلاسل البوليميرية متساوية الكتلة الجزيئية وحتى عدة عشرات بالنسبة للعينات ذات السلاسل مختلفة الكتل الجزيئية [20].

اصطناع وتوصيف بولي [2,2- ثنائي (4- أكريلات فينيل) بروبان]

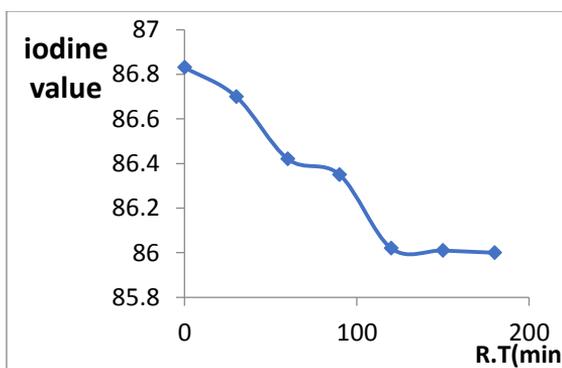
ويوضح الجدول (2) تغيير قرينة اليود و تغيير درجة التحول ودرجة البلمرة ومعدل الوزن الجزيئي العددي والوزني ودرجة التبعثر للكتلة المتفاعلة خلال زمن تفاعل البلمرة عند درجة حرارة (135°C).

الجدول (2)

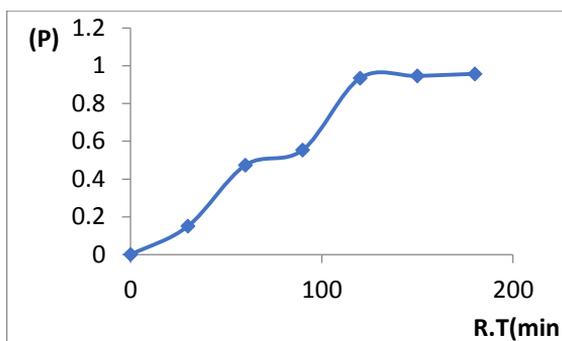
درجة التبعثر MWD	معدل الوزن الجزيئي الوزني (Mw)	معدل الوزن الجزيئي العددي (Mn)	درجة البلمرة (Xn)	درجة التحول (P)	قرينة اليود (n . I)	زمن التفاعل (min) R . T(min)	درجة الحرارة °C
1	336.14	336.14	1.0	0.000	86.8309	0	135°C
1.150752785	455.4787	395.8094	1.177513	0.150753	86.7	30	
1.473218635	940.0631	638.1015	1.898321	0.473219	86.42	60	
1.553835098	1170.657	753.3986	2.241324	0.553835	86.35	90	
1.933884136	9832.07	5084.105	15.12496	0.933884	86.02	120	
1.945400773	11976.85	6156.497	18.31528	0.945401	86.01	150	
1.956917411	15268.31	7802.224	23.21123	0.956917	86	180	

نلاحظ من الجدول السابق أنه

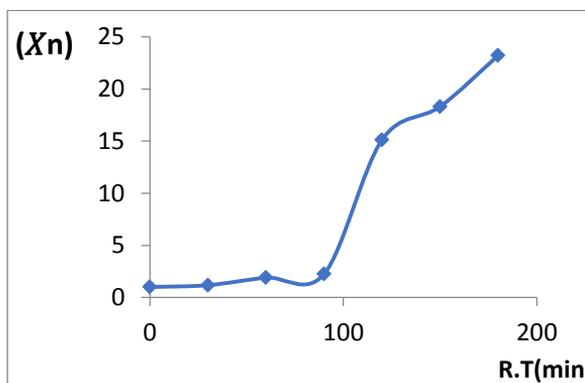
وتوضح المنحنيات الآتية: (1-2-4)، (2-2-4)، (3-2-4)، (4-2-4)، (5-2-4) و (6-2-4) الآتية العلاقة بين قرينة اليود و درجة التحول ودرجة البلمرة ومعدل الوزن الجزيئي العددي والوزني ودرجة التبعثر مع زمن التفاعل عند درجة حرارة 135°C. تم الوصول إلى درجة بلمرة (23) ومعدل وزن جزيئي (7802) ومعدل وزن جزيئي (15268) ودرجة تبعثر (1.9569)، وذلك عند إجراء التفاعل عند درجة حرارة 135°C خلال زمن تفاعل مقداره 180 min .



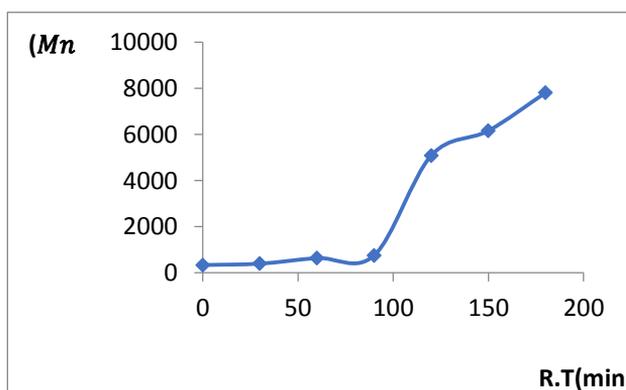
المنحني البياني (1-2-4): العلاقة بين زمن التفاعل وقرينة اليود



المنحني البياني (2-2-4): العلاقة بين زمن التفاعل ودرجة التحول

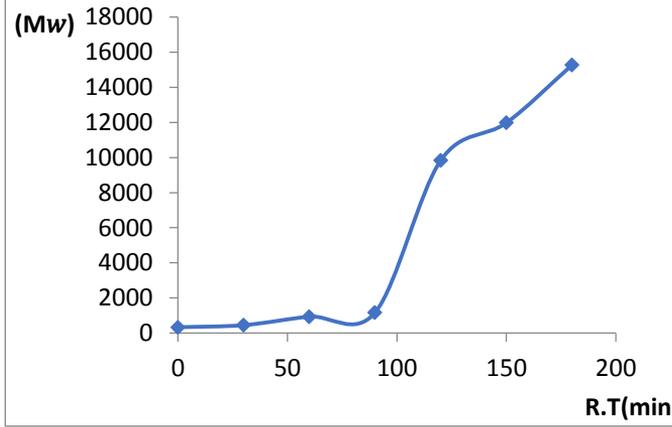


المنحني البياني (3-2-4): العلاقة بين زمن التفاعل ودرجة البلمرة

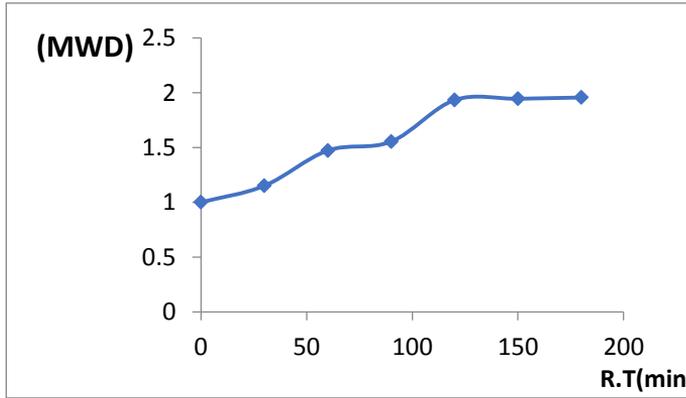


المنحني البياني (4-2-4): العلاقة بين زمن التفاعل ومعدل الوزن الجزيئي العددي

اصطناع وتوصيف بولي[2,2-ثنائي (4-أكريلات فينيل) بروبان]



المنحني البياني (4-2-5): العلاقة بين زمن التفاعل ومعدل الوزن الجزيئي الوزني



المنحني البياني (4-2-6): العلاقة بين زمن التفاعل ودرجة التبعثر

نلاحظ من المنحنيات السابقة: أن قرينة اليود تتناقص بازدياد زمن التفاعل أي ان هناك تناقص في عدد الروابط المزدوجة للمونوميرات، وهذا يؤكد عملية البلمرة. كما تبين المنحنيات ازدياد كل من درجة التحول ودرجة البلمرة ومعدل الوزن الجزيئي العددي والوزني ودرجة التبعثر بازدياد زمن التفاعل، ويعود سبب ثبات معدل الوزن الجزيئي العددي ومعدل الوزن الجزيئي الوزني لارتفاع لزوجة الوسط.

4-3- تعيين اللزوجة النسبية للبولي (AABPA) :

تعين كل من اللزوجة المميزة $[\eta]$ والدالة الصناعية $Kwert - Value$ نظراً لأهميتهما في الحالة السائلة للبوليميرات وخاصة في المجالات التطبيقية كالمساقمة والمتانة وسرعة التدفق .

وذلك باستخدام جهاز UBBELOHDE وعلاقة فيكنشر Fikentscher، تحسب $Kwert - Value$ من علاقة فيكنشر بالاعتماد على قيم تجريبية للزوج النسبية η_{rel} ثم بطريقة كمبيوترية تزايداً وتناقصاً بمقدار 0.5 حتى 100 لقيمة $Kwert - Value$ ، وعينت η_{rel} المقابلة لقيمة $Kwert - Value$ للبوليمير.

إن العلاقة بين $Kwert - Value$ واللزوجة المميزة تخضع لسلوكية قانون الاستطاعة Power Law ولا تعتمد هذه العلاقة على التركيز ولا على نوع البوليمير.

تعين اللزوجة النسبية (Relative viscosity) η_{rel} باستخدام جهاز UBBELOHDE Viscometer عند درجة حرارة (30 °C) والكلوروفورم كمحل وفق العلاقات [21]:

$$\eta_{rel} = \frac{\eta_{solution}}{\eta_{solvent}}$$

حيث أن η اللزوجة المطلقة أو التحريكية (Kinematic viscosity)، وباعتبار أن جهاز قياس اللزوجة المستخدم هو نفسه للمحل والمحلول وأن محلول البوليمير المستخدم ممدد حيث التركيز C (0.005 g/ml)، تصبح العلاقة السابقة [22]:

$$\eta_{rel} = \frac{t_{solution}}{t_{solvent}} = \frac{12.7}{12.5} = 1.016$$

$t_{solution}$: زمن مرور المحلول (s).

$t_{solvent}$: زمن مرور المحل (s).

تعين اللزوجة النوعية (Specific viscosity) η_{SP} وفق العلاقة [23]:

$$\eta_{sp} = \frac{t_{solution} - t_{solvent}}{t_{solvent}} = \frac{12.7 - 12.5}{12.5} = 0.016$$

تعين اللزوجة المميزة (Intrinsic viscosity) $[\eta]$ وفق العلاقة [24]:

$$[\eta] = \frac{0.25(\eta_{rel} - 1) + (1.725 \text{ Log} \eta_{rel})}{C} \\ = \frac{0.25(1.016 - 1) + (1.725 \text{ Log} 1.016)}{0.005} \\ = 3.17705$$

تعين قيمة الدالة الصناعية $Kwert - Value$ وفق علاقة فيكنشر Fikentscher [25]:

$$\begin{aligned} \text{Log}\eta_{\text{rel}} &= \left(\frac{75k^2}{1 + 1.5 \times K \times C} + K \right) C = \text{Log}1.016 \\ &= \left(\frac{75k^2}{1 + 1.5 \times K \times 0.5} + K \right) 0.5 \end{aligned}$$

بالحساب نجد أن $K = 0.0084537$

$$C = 0.5 \text{ (g/100ml)}$$

$$\text{Kwert - Value} = 1000 \times K = 8.4$$

تعيين اللزوجة المطلقة η باستخدام باستخدام جهاز UBBELOHDE Viscometer عند درجة حرارة (30 °C) من قانون بوازيبه بعد اصطلاحه بعد الأخذ بعين الاعتبار أن جهاز قياس اللزوجة المستخدم هو نفسه للمحل والمحلول وأن محلول البوليمير المستخدم ممدد وفق العلاقة [26]:

$$\begin{aligned} \frac{t_{\text{solution}}}{\eta_{\text{solution}}} &= \frac{t_{\text{solvent}}}{\eta_{\text{solvent}}} \\ \frac{12.7}{\eta_{\text{solution}}} &= \frac{16.2}{1} \end{aligned}$$

$$\eta_{\text{solution}} = 0.783 \text{ cp}$$

و يوضح الجدول (3) قيم كل من η_{rel} ، Kwert-Value ، $[\eta]$ ، η_{sp} للعينة

المحضرة من البوليمر (AABPA):

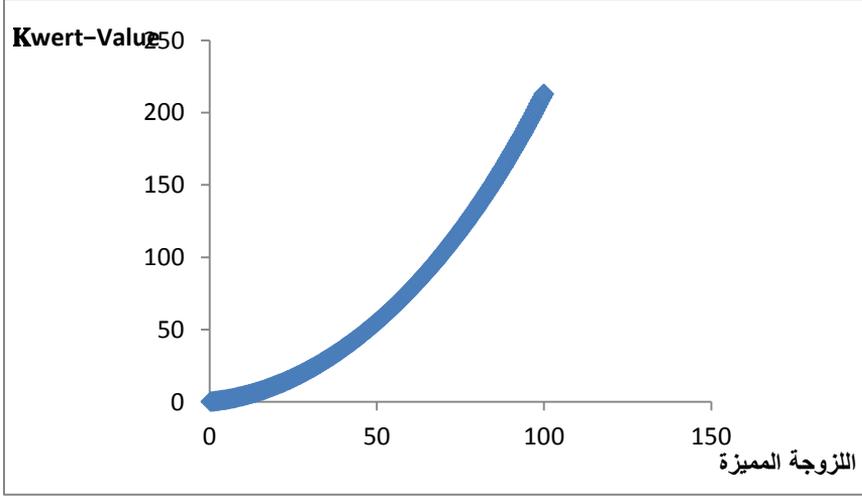
الجدول

محل	محل	K	Kwert-Value	η_{rel}	$[\eta]$ (100ml/g)	η_{sp}	
t1	t1	12.6	0.5	0.0005	1.000597403	0.119353327	0.000597
t2	t2	12.8	1	0.001	1.001238341	0.247344849	0.001238
t3	t3	12.7	1.5	0.0015	1.001922847	0.383969035	0.001923
			2	0.002	1.002650963	0.529220649	0.002651
T	T0	12.5	2.5	0.0025	1.003422734	0.683094747	0.003423
			3	0.003	1.004238211	0.845586675	0.004238
C		0.005	3.5	0.0035	1.005097453	1.016692075	0.005097
η_{rel}		1.016	4	0.004	1.00600052	1.196406878	0.006001
η_{sp}		0.016	4.5	0.0045	1.006947483	1.384727309	0.006947
			5	0.005	1.007938415	1.581649887	0.007938
			5.5	0.0055	1.008973395	1.787171421	0.008973
			6	0.006	1.01005251	2.001289015	0.010053
			6.5	0.0065	1.01117585	2.224000067	0.011176
C	0.5		7	0.007	1.012343511	2.455302269	0.012344
			7.5	0.0075	1.013555597	2.695193606	0.013556
			8	0.008	1.014812215	2.94367236	0.014812
			8.5	0.0085	1.016113478	3.200737108	0.016113
			9	0.009	1.017459508	3.466386724	0.01746
			9.5	0.0095	1.018850427	3.740620377	0.01885
			10	0.01	1.020286369	4.023437538	0.020286
			10.5	0.0105	1.021767468	4.314837972	0.021767
			11	0.011	1.023293869	4.614821748	0.023294
			11.5	0.0115	1.024865718	4.923389233	0.024866
			12	0.012	1.026483171	5.240541096	0.026483
			12.5	0.0125	1.028146387	5.566278311	0.028146
			13	0.013	1.029855532	5.900602153	0.029856
			13.5	0.0135	1.031610777	6.243514205	0.031611
			14	0.014	1.033412301	6.595016354	0.033412
			14.5	0.0145	1.035260288	6.955110797	0.03526
			15	0.015	1.037154925	7.323800038	0.037155
			15.5	0.0155	1.03909641	7.701086895	0.039096
			16	0.016	1.041084944	8.086974494	0.041085
			16.5	0.0165	1.043120735	8.48146628	0.043121
			17	0.017	1.045203996	8.884566009	0.045204
			17.5	0.0175	1.047334947	9.296277756	0.047335
			18	0.018	1.049513815	9.716605915	0.049514
			18.5	0.0185	1.051740832	10.1455552	0.051741
			19	0.019	1.054016236	10.58313065	0.054016
			19.5	0.0195	1.056340273	11.02933763	0.05634
			20	0.02	1.058713193	11.48418183	0.058713
			20.5	0.0205	1.061135255	11.94766926	0.061135

وبالمقارنة بين النتائج التجريبية والنتائج الحاسوبية نستطيع تجاوز الخطأ التجريبي للحصول على نتائج أكثر دقة .

ومن الجدير بالذكر أن إن العلاقة بين $Kwert - Value$ واللزوجة المميزة تخضع لسلوكية قانون الاستطاعة Power Law ولا تعتمد هذه العلاقة على التركيز ولا على نوع البوليمر [27].

ويوضح المنحنى البياني (3-4) التالي العلاقة بين $Kwert - Value$ واللزوجة المميزة :



المنحني البياني (3-4): العلاقة بين Kwert – Value واللزوجة المميزة

4-4- التوصيف الميكانيكي للبوليمير (AABPA) :

تم إجراء تطبيق للبوليمير المصنع كمعجونة طلاء السيارات بتجهيز عجينة الحديد اللاصقة من خلال تحميل البوليمير الناتج على أوكسيد الزنك (نصف قطر الحبيبة 0.1 ميكرون) بنسبة 50% وزناً ومن ثم طلي السطح المعدني الناعم والمصقول بها. يبين الشكل (6) صور سطح الحديد قبل وبعد الطلاء بالمعجونة المحضرة من البوليمير المصنع.



بعد عملية الطلي



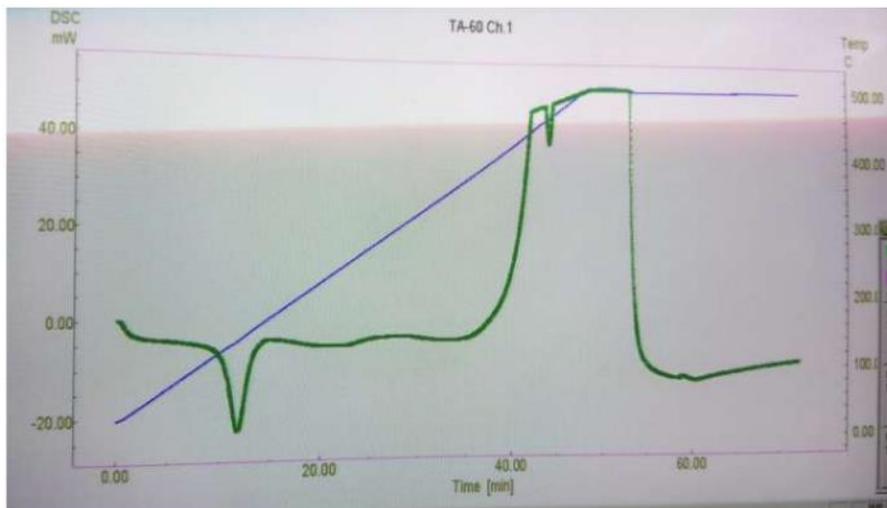
قبل عملية الطلي

الشكل (6): صور سطح الحديد المطلي بالمعجونة المحضرة من البوليمير

يلاحظ من الشكل السابق: أن المعجونة تتميز بقوام ملائم ومتجانس ويمكن استخدامها بالدهان الخاص بالسيارات.

4-5- التوصيف الحراري للبوليمير (AABPA) :

سجل منحنى (DSC) لعينة من البوليمير المحضر، بشروط تضمنت أخذ كتلة من العينة تتراوح ما بين (7-8 mgr) وبسرعة مسح حراري (10°C/min) وضمن مجال حراري [25-500°C] في جو من الهواء، فتم الحصول على المنحنى (4-5) التالي:



المنحنى (4-5): المسح التفاضلي الحراري للبوليمير AABPA

يبين المنحنى السابق أن :

- مرحلة الانتقال الزجاجي تمت وفق مجال تدفق حراري mW [0, -5] ومجال حراري $^{\circ}C$ [25,122] وذلك خلال فترة زمنية [0, 8 min] .
- ومرحلة التبلور حدثت وفق مجال تدفق حراري mW [-5, -21] ومجال حراري $^{\circ}C$ [122, 20] وذلك خلال فترة زمنية [8, 14] min .
- مرحلة الانصهار تمت وفق مجال تدفق حراري mW [-21, 47] ومجال حراري $^{\circ}C$ [20, 500] وذلك خلال فترة زمنية [14, 53] min .
- مرحلة الأكسدة تمت وفق مجال تدفق حراري mW [47, -10] ومجال حراري $^{\circ}C$ [500, 100] وذلك خلال فترة زمنية [53, 57] min .

- مرحلة التفسير تمت وفق مجال تدفق الحراري mW [-6 , -10] ومجال حراري $^{\circ}C$ [100 , 104] وذلك خلال فترة زمنية min [57 , 72] .
من خلال ماسبق نستنتج أن البوليمير يتمتع بثنائية حرارية عالية من خلال ملاحظة درجات حرارة بداية التفكك.

5- الاستنتاجات والمقترحات:

- تم اصطناع مونومير ثنائي الفينول A مخبرياً انطلاقاً من الفينول والأسيتون بوجود حفاز حمضي الأمبرلست (15)، تم اصطناع مونومير أكريلات ثنائي فينول انطلاقاً من ثنائي الفينول A وحمض الأكريليك ومن ثم بلمرته والحصول على بوليمير AABPA واثبات بنيتها بالرنين النووي المغناطيسي البروتوني ومطيافية الأشعة تحت الحمراء.
- واقتُرحت آلية مناسبة لشرح اصطناع كل من مونومير أكريلات ثنائي فينول والبوليمير AABPA.
- تم حساب معدل الوزن الجزيئي العددي والوزني ودرجة البلمرة عن طريق تعيين قرينة اليود عند فترات زمنية مختلفة أثناء سير التفاعل، حيث وجد أن قرينة اليود تتناقص بازدياد زمن التفاعل، بينما تزداد كل من درجة التحول ودرجة البلمرة ومعدل الوزن الجزيئي العددي والوزني ودرجة التبعثر.
- تم إجراء تطبيق للبوليمير المصنع كمعجونة لطلاء السيارات، فتبين أنها تتميز بقوام ملائم ومتجانس ويمكن استخدامها بالدهان الخاص بالسيارات.
- سجل منحنى (DSC) لعينة من البوليمير المحضر، وحددت قيم درجات الانتقال الزجاجي والتبلور والانصهار و الأكسدة و التكسير، فتبين أن البوليمير يتمتع بثنائية عالية.
- نقترح التوسع بدراسة الخصائص الميكانيكية للبوليمر الناتج، كطبقات متينة وصلبة مقاومة للاحتكاك الميكانيكي.
- كما نقترح دراسة امكانية تشكيل مواد مركبة مع الأنواع المختلفة من المواد المالئة والألياف لاستخدامها كمواد لاصقة ومالئة ومقاومة للتحلل المائي والمواد الكيميائية.

- [1]. Jerabek K. ., Odnaha J., Setinek K.,(1988), Kinetics of the Synthesis of Bisphenol A, Applied Catalysis, V. 37 ,P. 129-138.
- [2]. Zhe W., Huiyu L., Sijin L.,(2016), Low-Dose Bisphenol A Exposure: A Seemingly Instigating Carcinogenic Effect on Breast Cancer, Advanced. Science, DOI: 10.1002/advs.201600248,P.1-14.
- [3]. Bao-He W., Jin-Shi D., Shuang CH., Li-Li W., Jing Z.,(2014), ZnCl₂-modified ion exchange resin as an efficient catalyst for the bisphenol-A production, Chinese Chemical Letters, N.3037, P.1-5.
- [4]. Jing G., Ming-Hui Z., Kyung-Tae Sh., Ying-Jie N., Yong- Dae A., Nam-Hyung K., Xiang-Shun C.,(2017), The possible molecular mechanisms of bisphenol A action on porcine early, scientific reports, N. 8632, P.23-52.
- [5]. Mariya B.,Galena A., Albert K.,(2019), BIODEGRADATION OF BISPENOL A DURING SUBMERGED CULTIVATION OF TRAMETES VERSICOLOR, Journal of microbiology, V.9,N.2, P.204-207.
- [6]. Goyala M., . Nagahataa R., Sugiyama J., Asai M., Ueda M., Takeuchi K.,(2000), Pd catalyzed polycarbonate synthesis from bisphenol A and CO: control of polymer chain—end structure, Polymer Communication,V. 41, P. 2289–2293.
- [7]. Sabrina C., Concetto P., Giorgio M.,(2002), Mechanisms of Thermal Oxidation of Poly(bisphenol A carbonate), Macromolecules , V. 35, P. 4297-4305.
- [8]. Braun D., Ziser T.,(1994), Synthesis of poly[(2,4-dichloro-6-ethoxy-s-triazine)-alt-(bisphenol A)], Die Angewandte Makromolekulare Chemie, V. 219., N.3774., P.27-42.
- [9]. Siebourg W., Schmid H., Rateike F.M., Anders S., Grigo U., . Ldwer H., (1990), Sci, V.30, P.1133.
- [10]. Wimberger-Friedl, R.,(1990), Polym. Eng. Sci., V.30, P.813.
- [11]. Emmelius M., Pawlowski G., Vollmann H.W., (1989), Angew. Chem., V.101, P. 1475 .
- [12]. Jones R.S., Kuder J. E., (1988), Polym. Prepr. (Am. Chem. Soc., Div. Polym. Chem.), V.29, N.2, P. 195.

- [13]. Werumeus Buning G.H., Gijssen, R. M. R., (1988), *Polymer Prepr. (Am. Chem. Soc, Div. Polym.Chem.)*, V. 29, N. 2, P. 211 .
- [14]. Peter R., Thomas H., Helmut K., Hartwig H., (1993), Synthesis of poly(bispheno1-A carbonate)-graft-polystyrene via the macromonomer technique, *Makromol. Chem*,V.194, P. 1627-1638.
- [15]. Berlin A.A. ; Kefeli . T. Ya. , Korolev G.V. , Poly ether acrylate ,Publisher "Nauk" ,1967.
- [16]. Salim , T, Still, M, Nyholm , p, Narhi, K and Paatero, Salim , T, Still, M, Nyholm , p, Narhi, K and Paatero, E, 1994- Kinetics of melt polymerization of maleic and phthalic acids with propylene glycol . *Chem . Eng. Sci* , 49,5053- 5070.
- [17]. Whorlow, R. W, (1979) *Rheological Technic* , John Wiley and Sons.
- [18]. Malroptseva , A,(1972) *Laboratory practice in chemistry and Technology of macromolecular compound*, Khemya , Mosco.
- [19]. Parker, E, 1966- *Unsaturated Polyester* . *Eng. Chem. J*, 58: 53- 58, Ind.
- [20]. Gnanou Y, Fontanille M. *Organic and physical chemistry of polymers*. John Wiley & Sons; 2008 Mar 3.
- [21]. Ebewele RO. (2000). *Polymer science and technology*. CRC Press LLC Publication, Florida.
- [22]. Crawford RJ. (1998). *Plastic engineering*, Third Edition. Elsevier, London.
- [23]. Teraoka I. (2002). *Polymer solution*. Wiley inter science, New York.
- [24]. Bower, D. (2002). *An introduction to polymer physics*, Cambridge press, Cambridge.
- [25]. Miles DC, Bristion JH. (1968). *Polymers technology*. George Newnes Ltd.London.
- [26]. Gooch, Jan W. (2010). *Encyclopedia (2nd)*. Berlin dictionary of polymers Springer. ISBN 978-1-4419-6246-1.
- [27]. Al-Ahmad, T., Al-Deri, F.,(2012), Intrinsic viscosity $[\eta]$, Kwert-Value and viscosity average molecular relationship

شروط Sommerfeld المقاربية لكمونات Nowacki المتوافقة مع الحالة الديناميكية لجسم Koiter-Mindlin الخاضع لحمول حجمية متغيرة توافقياً مع الزمن

حسام شقوف †

أ.د.منتجب الحسن †

ملخص البحث:

المسألة قيد الدراسة هي مسألة كمونات Nowacki للجسم المرن المتجانس (Homogeneous) والمتماثل المناحي (Isotropic)، والمتساوي درجات الحرارة (Isothermal)، والمؤلف من نقاط مادية موجهة (Oriented Material Points)، وذوي تشوهات مرنة صغيرة (Infinitesimal elastic Strains)، ذلك ضمن نظرية العزوم المعدلة. وضع الأساس الرياضي لمثل هذا الجسم كلاً من الباحثين: Koiter [1] و Mindlin [2,3]، والذي سمي فيما بعد باسمهما ورُمز له اختصاراً بالرمز (K-M). في البداية، سنعرض كلاً من معادلات Lamé غير المتجانسة ومعادلات كمونات Nowacki الموافقة، ذلك لأجل الجسم (K-M)، الذي يشغل في لحظة البدء، منطقة ثنائية الترابط ومحدودة في الفضاء الإقليدي R^3 . بعدها، سنعرض المعادلات الناتجة عن معادلات Lamé، وعن معادلات كمونات Nowacki الموافقة لها، لأجل سعات الإزاحات وسعات كمونات Nowacki، الموافقة، وذلك في الحالة التي تتغير فيها كلاً من الإزاحات وكمونات Nowacki، الموافقة، توافقياً مع الزمن. وبعد عرض ميرهنيتين هامتين، نتردانا بتحويلات تكاملية، سطحية-حجمية، لأجل مؤثري Helmholtz التفاضليين المضاعفين من المرتبتين الأولى والثانية، سنستنتج التمثيلات التكاملية، لحلول معادلات كمونات Nowacki على شكل تكاملات سطحية، على حدود المنطقة ثنائية الترابط التي يشغلها جزء من الجسم في

† أستاذ في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

‡ طالب دكتوراه في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

الكلمات المفتاحية: شروط Sommerfeld المقاربية لكمونات Nowacki، مسألة Lamé للجسم المرن، المؤلف من نقاط مادية موجهة، من نوع Koiter-Mindlin بوجود حمول حجمية غير معدومة.

شروط Sommerfeld المقاربية لكمونات Nowacki المتوافقة مع الحالة الديناميكية
لجسم Koiter-Mindlin الخاضع لحمول حجمية متغيرة توافقياً مع الزمن

لحظة البدء. ومن ثم، سنناقش الشروط المقاربية، من نوع Sommerfeld، للحلول السابقة
(الموافقة لوجود حمول حجمية)، ذلك عندما تتباعد الحدود الخارجية للمنطقة، إلى اللانهاية.

The Sommerfeld asymptotic conditions for Nowacki's potentials corresponding to the solution for the Koiter-Mindlin elastic body with no vanishing body loads harmonically varying in time

Dr. Mountajab Al-Hasan [†] & Husam Shakkouf [‡]

Abstract

The considerable problem is the Nowacki's potential one for the homogeneous, isotropic, and isothermal dynamic elastic body consisting of oriented material points, and of infinitesimal elastic strains in the frame of the couple stress theory. The mathematical foundations of this theory are established by the two researchers ; Koiter [1], and Mindlin [2,3], so the body in the frame of this theory called (K-M) model. First, we introduce the Lamé equations, and the related Nowacki's potential ones for the (K-M) elastic body, which initial configuration is a bounded, two-order connected region in R^3 . Next, we write the resulting equations from Lamé equations, and from its related Nowacki's potential ones, for the displacement amplitudes and Nowacki's potentials amplitudes, in the case when the displacements and related Nowacki's potentials varying harmonically in time. Then, after demonstrating 2 important theorems, that give volume-surface integral transforms for the first and second order, Helmholtz differential operators, we derive an integral representations for the Nowacki's potentials related to the nonhomogeneous Lamé equations, all these in form of surface integrals on the boundary of the two-order connected region, occupied by a part of the body, in the initial moment. Finally, we study the asymptotic

[†] Professor At Department of Mathematics – Faculty of Science – Al-Baath University.

[‡] Ph.D. Student in Department of Mathematics – Faculty of Science – Al-Baath University.

Key words: The Sommerfeld asymptotic conditions for the Nowacki's Potentials, the Lamé's problem for the Koiter-Mindlin elastic body consisting of oriented material points, with no vanishing body loads.

conditions of Sommerfeld type for the above mentioned potentials (which relate to the nonzero body loads), in the case when the external surface of the tow-order connected region tends to infinity.

1. مقدمة :

ناقش العديد من الباحثين الرياضيين ، مثل Ignaczak و Nowacki (1962) و Kupradse (1963) ، ناقشوا ما يسمى بالشروط المقاربية من نوع Sommerfeld من أجل معادلات كمونات Nowacki ، المتجانسة، بشكل Nowacki، في المرونة الخطية، التقليدية، المتجانسة، المتماثلة المناحي، والمتساوية درجات الحرارة، وفي المرونة الخطية، المتجانسة، المتماثلة المناحي، والمترابطة مع حقل حرارة. كل ذلك لأجل حالة عدم وجود حمول حجمية. بعدها درس Ignaczak (1970) و (1972) الشروط المقاربية من نمط Sommerfeld من أجل معادلات كمونات Nowacki، المتجانسة، بشكلي Nowacki و Ignaczak، وذلك ضمن المرونة الخطية، دقيقة الاستقطاب، والمتجانسة، والمتماثلة المناحي، ومركزية التناظر، ومتساوية درجات الحرارة. أيضاً، كان ذلك من أجل حالة الحمول الحجمية، المعدومة. وبعدها درس Al-Hasan و Dyszlewicz ما بين العامين (2001) و(2004)، درسوا الشروط المقاربية لأجل معادلات كمونات Nowacki، المتجانسة، بشكل Ignaczak، وذلك ضمن المرونة الخطية، دقيقة الاستقطاب، والمتجانسة، متماثلة المناحي، ومركزية التناظر، والمترابطة مع حقل حراري. وما سبق كان من أجل حالة عدم وجود حمول حجمية، وعدم وجود مصادر حرارية. وفي عام (2014) درست الباحثة Kazem، الشروط المقاربية من نمط Sommerfeld لأجل معادلات كمونات Nowacki ، بوجود حمول حجمية غير معدومة، ذلك ضمن المرونة الخطية، التقليدية، المتجانسة، المتماثلة المناحي، والمتساوية درجات الحرارة. أخيراً في عام (2016) ، درس الباحثان Shakkouf و Al-Hasan ، شروط Sommerfeld المقاربية للإزاحات مباشرة، في جسم Hooke الخاضع لحمول حجمية، متغيرة توافقياً مع الزمن.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى استنتاج تلك الشروط المقاربية من نمط Sommerfeld لأجل كمونات Nowacki، للجسم المرن (K-M)، والتي تسمح بتمثيل هذه الكمونات على شكل تكاملات

شروط Sommerfeld المقاربية لكمونات Nowacki المتوافقة مع الحالة الديناميكية
لجسم Koiter-Mindlin الخاضع لحمول حجمية متغيرة توافقياً مع الزمن

سطحية على سطح منطقة بسيطة الترابط، وغير محدودة، يشغلها الجسم المرن (K-M) في لحظة البدء، علماً بأن الجسم يخضع لحمول حجمية غير معدومة، تتغير توافقياً مع الزمن.

3. طرق لبحث:

سنستنتج فيما يلي، شروط Sommerfeld المقاربية لأجل كمونات Nowacki للجسم المرن (K-M) مع التمثيلات التكاملية السطحية المناسبة، المذكورة، بإتباع طريقة هي تعميم الطريقة المستخدمة في [5] و [6] و [10] و [12] و [13]، ومستخدمين في ذلك مبرهنتين مساعدتين، هامتين، تتعلقان بمؤثري Helmholtz الاشتقاقيين، من المرتبين الأولى والثانية [6,7].

ولهذا الغرض، نعتبر الجسم المرن المؤلف من نقاط مادية موجهة، وذوي التشوهات الصغيرة والمتجانس والمتماثل المناحي، والمتساوي درجات الحرارة، والذي له ثلاث درجات حرية وأربعة ثوابت مادية: $\mu > 0$ و $\lambda > 0$ و $\ell^* \geq 0$ و η (حيث: $|\eta| < 1$)، والمدرّوس من قبل الباحثين Koiter [1] و Mindlin [2,3]، والذي نرّمز له اختصاراً بـ (K-M). ولأجل هذا الجسم سنفترض أن الحالة البدئية Ω للجسم هي المنطقة وحيدة الترابط، وغير المحدودة، التالية من الفضاء الإقليدي ثلاثي البعد R^3 : $\Omega := R^3 - N(O, a)$ ، حيث: $N(O, a)$ هي الكرة المفتوحة في R^3 ، التي مركزها O ، ونصف قطرها a . كما سنفترض أيضاً أن كافة الحقول الفيزيائية التي تصف الحالة الديناميكية للجسم المرن (K-M)، هي دوال حقيقية ملساء بالقدر الكافي، تتبع لمتحولات نقاط Ω وتتبع للزمن t أيضاً. من أجل متطلبات البحث، سعرض فيمايلي معادلات Lamé للجسم المرن (K-M)، ومعادلات كمونات Nowacki الموافقة لها ([17]).

(أ) إن معادلات Lamé للجسم المرن (K-M)، هي جملة المعادلات الاشتقاقية الجزئية التالية، المحققة في $[0, \infty[\times \Omega^\circ$ (حيث: Ω° هي داخلية Ω):

$$\mu u_{i,jj}^* + (\mu + \lambda) u_{j,ji}^* + \mu \ell^{*2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{knp} u_{p,njss}^* + F_i^* = \rho \ddot{u}_i^* \quad (3.1)$$

حيث:

$$F_i^* = X_i^* + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} Y_{k,j}^* \quad (3.2)$$

حيث $\vec{Y}^* \equiv (Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*)$ و $\vec{X}^* \equiv (X_1^*, X_2^*, X_3^*)$ و $\vec{u}^* \equiv (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ على الترتيب، تمثل المركبات الديكارتية في النظام الإحداثي الديكارتي $Ox_1x_2x_3$ ، لكل من متجه الإزاحة \vec{u}^* لنقطة مادية لاغرانجية $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ من الجسم المرن (K-M)، ولمتجه القوة الحجمية \vec{X}^* ، ولمتجه العزم الحجمي \vec{Y}^* ، في هذه النقطة المادية اللاغرانجية. كما أن: $\epsilon_{ijk} \in$ هي المركبات في النظام الاحداثي الديكارتي المعتبر، لنصف تنسور Levi-Civita، و $\rho > 0$ هي الكثافة الحجمية للجسم (وهي كمية ثابتة لأن الجسم متجانس)، كما أن الأدلة اللاتينية i, j, k ، تأخذ القيم 1, 2, 3، حيث سنستخدم رموز Einstein (اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة). كما أن النقطة تدل

$$\text{على المشتق الجزئي بالنسبة للزمن و } \partial_t := \frac{\partial}{\partial t} \text{ و } \partial_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

من أجل متطلبات هذا البحث، سنكتب فيمايلي معادلات Lamé (3.1)، بدلالة

$$\text{المؤثر الاشتقاقي الديناميكي: } \partial_t^2 + \frac{1}{\hat{c}_2^2} \nabla^2 = (\ell^{*2} \nabla^2 - 1) \nabla^2 + \square_0 \text{، حيث:}$$

$$\hat{c}_2 := \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \text{، و } \nabla^2 \text{ يمثل مؤثر Laplace الاشتقاقي السلمي ثلاثي الأبعاد، الذي يعطى في}$$

$$\text{النظام الاحداثي الديكارتي المعتبر بالعلاقة: } \nabla^2(\dots) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} (\dots) = (\dots)_{,i i}$$

بما أن:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{knp} = \delta_{jp} \delta_{in} - \delta_{jn} \delta_{ip} \quad (3.3)$$

فتأخذ بذلك المعادلة (3.1) الشكل التالي في $]\infty, 0[\times \Omega$:

$$\begin{aligned} \mu u_{i,jj}^* + (\mu + \lambda) u_{j,ji}^* + \mu \ell^{*2} (u_{j,jiss}^* - u_{i,jjss}^*) + \\ + F_i^* = \rho \ddot{u}_i^* \end{aligned} \quad (3.4)$$

أو:

$$\begin{aligned} (\mu \nabla^2 u_i^* - \mu \ell^{*2} \nabla^2 \nabla^2 u_i^* - \rho \ddot{u}_i^*) + \\ + \left[(\mu + \lambda) u_{j,ji}^* + \mu \ell^{*2} \nabla^2 u_{j,ji}^* \right] + F_i^* = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

شروط Sommerfeld المقاربة لكمونات Nowacki المتوافقة مع الحالة الديناميكية
لجسم Koiter-Mindlin الخاضع لحمول حجمية متغيرة توافقياً مع الزمن

وبالتبسيط والاختصار، نحصل على المعادلة الاشتقاقية التالية، في $]\Omega^\circ \times]0, \infty[$:

$$-\mu \square_0 u_i^* - \mu \left(\frac{1}{2\nu-1} - \ell^{*2} \nabla^2 \right) u_{j,ji}^* + F_i^* = 0 \quad (3.6)$$

بالتالي نحصل على المعادلة الاشتقاقية التالية، المحققة في $]\Omega^\circ \times]0, \infty[$:

$$\square_0 u_i^* + \left(\frac{1}{2\nu-1} - \ell^{*2} \nabla^2 \right) u_{j,ji}^* - \frac{1}{\mu} F_i^* = 0 \quad (3.7)$$

حيث: $\nu := \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$ هي نسبة Poisson.

(ب) معادلات كمونات Nowacki للجسم المرن (K-M) وفقاً لمبرهنة Stokes - Helmholtz، كتب Nowacki، الازاحات u_i^* والحمول

الحجمية F_i^* بالشكل التالي في $]\Omega^\circ \times]0, \infty[$:

$$u_i^* = \Phi_{,i}^* + \epsilon_{ijk} \psi_{k,j}^* \quad , \quad \text{such that } \psi_{k,k}^* \quad (3.8)$$

$$F_i^* = \rho \left(\nu_{,i}^* + \epsilon_{ijk} \chi_{k,j}^* \right) \quad , \quad \text{such that } \chi_{k,k}^* \quad (3.9)$$

حيث: $\Phi^* \equiv (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*)$ و $\bar{\psi}^* \equiv (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*)$ ، على الترتيب، هما كمونا Nowacki

المجهولين، السلمي والمتجهي، كما أن: $\nu^* \equiv (\chi_1^*, \chi_2^*, \chi_3^*)$ و $\bar{\chi}^* \equiv (\chi_1^*, \chi_2^*, \chi_3^*)$ ، على الترتيب،

هما كمونا Nowacki المعلومين، السلمي والمتجهي. أخيراً ندعو الجزء $\Phi_{,i}^*$ (الجزء $\rho \nu_{,i}^*$)

بالجزء الكموني لـ u_i^* (لـ F_i^*)، كما ندعو الجزء $\epsilon_{ijk} \psi_{k,j}^*$ (الجزء

$\rho \epsilon_{ijk} \chi_{k,j}^*$)، بالجزء الدوار لـ u_i^* (لـ F_i^*). لإيجاد معادلات الحقل الاشتقاقية

بتوابع كمون Nowacki، المجهولة: $\bar{\psi}$ و Φ ، وفقاً لطريقة كمونات Nowacki،

نعوض (3.8) و (3.9) في معادلات Lamé (3.7)، فنحصل على المعادلة الاشتقاقية

التالية المحققة في $]\Omega^\circ \times]0, \infty[$:

$$\square_0 \left(\Phi_{,i}^* + \epsilon_{ijk} \psi_{k,j}^* \right) + \left(\frac{1}{2\nu-1} - \ell^{*2} \nabla^2 \right) \left(\nabla^2 \Phi_{,i}^* + 0 \right) \quad (3.10)$$

$$- \frac{1}{\hat{c}_2^2} \left(\nu_{,i}^* + \epsilon_{ijk} \chi_{k,j}^* \right) = 0$$

أو:

$$\left\{ \left[\square_0 + \left(\frac{1}{2\nu-1} - \ell^{*2} \nabla^2 \right) \nabla^2 \right] \Phi^* - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \nu^* \right\}_{,i} + \epsilon_{ijk} \left(\square_0 \psi_k^* - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \chi_k^* \right)_{,j} = 0 \quad (3.11)$$

وبما أن:

$$\square_0 + \left(\frac{1}{2\nu-1} - \ell^{*2} \nabla^2 \right) \nabla^2 = -\frac{1}{\mu} \square_1$$

حيث: $\square_1 := (\lambda + 2\mu) \nabla^2 - \rho \partial_t^2$ ، فنأخذ المعادلة السابقة الشكل التالي في $\Omega^\circ \times]0, \infty[$:

$$\left(\square_1 \Phi^* + \rho \nu^* \right)_{,i} + \epsilon_{ijk} \left[-\mu \left(\square_0 \psi_k^* - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \chi_k^* \right) \right]_{,j} = 0 \quad (3.12)$$

الآن، وفقاً لـ Nowacki ، فإن (3.12) تكون محققة ، إذا حققت كمونات Nowacki : Φ و $\bar{\psi}$ ، معادلات الحقل التالية في $\Omega^\circ \times]0, \infty[$:

$$\begin{aligned} \square_1 \Phi^* + \rho \nu^* &= 0 , \\ \square_0 \psi_k^* - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \chi_k^* &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

ندعوا المعادلتين (3.13) بمعادلتين كمونات Nowacki للجسم المرن (K-M) ، المتجانس والمتماثل المناحي والمتساوي درجات الحرارة، والذي يشغل في لحظة البدء، المنطقة بسيطة الترابط وغير المحدودة Ω° .

ج) المعادلات الناتجة عن معادلات Lamé ، وعن معادلات كمونات Nowacki ، للجسم المرن المدروس (K-M) ، عندما تتغير الحقول الفيزيائية، توافقاً مع الزمن - حالة الحمول الحجمية غير المعدومة:

شروط Sommerfeld المقاربية لكمونات Nowacki المتوافقة مع الحالة الديناميكية
 لجسم Koiter-Mindlin الخاضع لحمول حجمية متغيرة متوافقياً مع الزمن

في هذه الفقرة سنفترض أن حقلية الإزاحات، والحمول الحجمية، المتجهيين، و كذلك
 كمونات Nowacki المجهولة والمعلومة، المتجهية والسلمية، جميعها تتغير مع الزمن
 توافقاً بتردد ω ، وفقاً لمايلي:

$$u_i^* = u_i \cos \omega t \quad , \quad X_i^* = X_i \cos \omega t \quad (3.14)$$

$$Y_i^* = Y_i \cos \omega t \quad , \quad F_i^* = F_i \cos \omega t \quad (3.15)$$

$$\Phi^* = \Phi \cos \omega t \quad , \quad \psi_i^* = \psi_i \cos \omega t \quad (3.16)$$

$$v^* = v \cos \omega t \quad , \quad \chi_i^* = \chi_i \cos \omega t \quad (3.17)$$

حيث:

$$\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3) \quad , \quad \vec{X} \equiv (X_1, X_2, X_3) \quad (3.18)$$

$$\vec{Y} \equiv (Y_1, Y_2, Y_3) \quad , \quad \vec{F} \equiv (F_1, F_2, F_3) \quad (3.19)$$

$$\vec{\psi} \equiv (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \quad , \quad \vec{\chi} \equiv (\chi_1, \chi_2, \chi_3) \quad (3.20)$$

وللحصول، الآن، على المعادلات المطلوبة، نعوض (3.14)-(3.17) في معادلات
 Lamé (3.7)، وفي معادلات كمونات Nowacki (3.13)، فنحصل بعد الاختصار،
 على المعادلات التالية المحققة في Ω° :

$$\left[\left(\ell^{*2} \nabla^2 - 1 \right) \nabla^2 - \frac{\omega^2}{\hat{c}_2^2} \right] u_i + \quad (3.21)$$

$$+ \left(\frac{1}{2\nu-1} - \ell^{*2} \nabla^2 \right) u_{j,j i} - \frac{1}{\mu} F_i = 0 \quad ,$$

$$\left[(\lambda + 2\mu) \nabla^2 + \rho \omega^2 \right] \Phi + \rho v = 0 \quad ,$$

$$\left[\left(\ell^{*2} \nabla^2 - 1 \right) \nabla^2 - \frac{\omega^2}{\hat{c}_2^2} \right] \psi_k - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \chi_k = 0 \quad (3.22)$$

فإذا رمزنا بـ $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$ ، و بـ $\sigma_1 = \omega / c_1$ و $\hat{\sigma}_2 = \omega / \hat{c}_2$

فتأخذ المعادلات (3.21) و (3.22) الشكل التالي في Ω° :

$$\left[\left(\nabla^2 - \ell^{*-2} \right) \nabla^2 - \ell^{*-2} \hat{\sigma}_2^2 \right] u_i + \quad (3.23)$$

$$+ \left(\frac{\ell^{*-2}}{2\nu-1} - \nabla^2 \right) u_{j,j i} - \frac{\ell^{*-2}}{\mu} F_i = 0 \quad ,$$

$$(\nabla^2 + \sigma_1^2) \Phi + \frac{V}{c_1^2} = 0, \quad (3.24)$$

$$\left[(\nabla^2 - \ell^{*-2}) \nabla^2 - \ell^{*-2} \hat{\sigma}_2^2 \right] \psi_k - \frac{\ell^{*-2}}{\hat{c}_2^2} \chi_k = 0$$

وإذا فرضنا، الآن أن:

$$(\nabla^2 - \ell^{*-2}) \nabla^2 - \ell^{*-2} \hat{\sigma}_2^2 = (\nabla^2 + \lambda_1^{*2}) (\nabla^2 + \lambda_2^{*2}), \quad (3.25)$$

$$\lambda_3^{*2} := -\frac{\ell^{*-2}}{2\nu-1}$$

فيكون:

$$\lambda_1^{*2} + \lambda_2^{*2} = -\ell^{*-2} < 0, \quad \lambda_1^{*2} \lambda_2^{*2} = -\ell^{*-2} \hat{\sigma}_2^2 < 0, \quad (3.26)$$

$$\lambda_3^{*2} > 0$$

و:

$$\lambda_1^{*2} = \frac{\ell^{*-2}}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4\ell^{*2} \hat{\sigma}_2^2} \right) > 0, \quad (3.27)$$

$$\lambda_2^{*2} = -\frac{\ell^{*-2}}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\ell^{*2} \hat{\sigma}_2^2} \right) < 0$$

وعندئذ إذا رمزنا بـ $\square_C^2 = \nabla^2 + C^2$ ، حيث هنا C أي عدد حقيقي أو عقدي، فتأخذ

عندئذ المعادلات (3.23) و (3.24) الشكل التالي في Ω° :

$$\square_{\lambda_1^*}^2 \square_{\lambda_2^*}^2 u_i - \square_{\lambda_3^*}^2 u_{j,ji} = \frac{\ell^{*-2}}{\mu} F_i, \quad (3.28)$$

$$\square_{\sigma_1}^2 \Phi = -\frac{V}{c_1^2}, \quad (3.29)$$

$$\square_{\lambda_1^*}^2 \square_{\lambda_2^*}^2 \psi_k = \frac{\ell^{*-2}}{\hat{c}_2^2} \chi_k$$

أو تأخذ الشكل التالي في Ω° :

$$\square_{\lambda_1^*}^2 \square_{\lambda_2^*}^2 u_i - \square_{\lambda_3^*}^2 u_{j,ji} = -A_i, \quad (3.30)$$

شروط Sommerfeld المقاربية لكمونات Nowacki المتوافقة مع الحالة الديناميكية
لجسم Koiter-Mindlin الخاضع لحمول حجمية متغيرة توافقياً مع الزمن

$$\square_{\sigma_1}^2 \Phi = -B, \quad (3.31)$$

$$\square_{\lambda_1}^2 \square_{\lambda_2}^2 \psi_i = -E_i$$

$$A_i = -\frac{\ell^{*-2}}{\mu} F_i, \quad B = \frac{\nu}{c_1^2}, \quad E_i = -\frac{\ell^{*-2}}{c_2^2} \chi_i \quad \text{حيث:}$$

قبل الدخول في الفقرة القادمة، نلزمنا المبرهنتان التاليتان، اللتان تعطيانا تحويلان حجميان-سطحيان، لأجل مؤثري Helmholtz، الاشتقاقيين المضاعفين من المرتبتين الأولى والثانية، في منطقة ثنائية الترابط، يشغلها جزء من الجسم في لحظة البدء، (انظر [7,6,5,9,14]). لهذا الغرض، سنرمز بـ S_a لسطح الكرة $N(O, a)$ ، ولنأخذ $\xi \in \Omega$ نقطة مادية لاغرانجية، كيفية، تقع خارج S_a ، ولنختار r كبير بالقدر الكافي، بحيث أن الكرة المفتوحة $N(\xi, r)$ ، التي مركزها ξ ، ونصف قطرها r ، تحوي على الكرة المفتوحة $N(O, a)$ ، ولنرمز بـ S_r لسطح الكرة المفتوحة $N(\xi, r)$ ، وبـ Ω_r للمنطقة ثنائية الترابط في R^3 ، والمحدودة ما بين السطحين S_a و S_r ، والتي يشغلها جزء من الجسم المرن (K-M) في لحظة البدء. وفيما يلي، ومن أجل متطلبات هذا البحث، نعرض المبرهنتين التاليتين، في المنطقة ثنائية الترابط Ω_r ([7,6,5,9,14]).

مبرهنة مساعدة I:

لنفرض أن الدوال الحقيقية U و V ملساء بالقدر الكافي في $\bar{\Omega}_r$ ($\bar{\Omega}_r = S_a \cup \Omega_r \cup S_r$)، عندئذٍ تتحقق كل من المتطابقات التكاملية التالية [7,6]:

$$\int_{\Omega_r} [U(\mathbf{x}) \square_{C_3}^2 V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}) \square_{C_3}^2 U(\mathbf{x})] d\Omega(\mathbf{x}) =$$

$$= \left(\int_{S_a} + \int_{S_r} \right) [U(\mathbf{x}) \frac{\partial V}{\partial n}(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}) \frac{\partial U}{\partial n}(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}), \quad (3.32)$$

$$\int_{\Omega_r} [U(\mathbf{x}) \square_{C_1}^2 \square_{C_2}^2 V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}) \square_{C_1}^2 \square_{C_2}^2 U(\mathbf{x})] d\Omega(\mathbf{x})$$

$$= \left(\int_{S_a} + \int_{S_r} \right) \{ [\square_C^2 U(\mathbf{x})] \frac{\partial V}{\partial n}(\mathbf{x}) - [\square_C^2 V(\mathbf{x})] \frac{\partial U}{\partial n}(\mathbf{x}) \} \quad (3.33)$$

$$+ U(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} [\nabla^2 V(\mathbf{x})] - V(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} [\nabla^2 U(\mathbf{x})] \} dS(\mathbf{x})$$

حيث: $d\Omega(\mathbf{x}) = dx_1 dx_2 dx_3$ ، أما $\frac{\partial V}{\partial n}$ فهو مشتق الدالة V وفق متجه واحدة الناظم $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ، على كلٍ من السطحين S_a و S_r ، والموجه نحو داخل S_a (في حال كونه ناظماً لـ S_a) ، ونحو خارج S_r (في حال كونه ناظماً لـ S_r) ؛ $\left(\frac{\partial V}{\partial n} = \vec{n} \cdot \text{grad} V = n_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)$. كما أن: C_1 و C_2 و C_3 أي أعداد عقدية، وهنا: $C^2 = C_1^2 + C_2^2$.

مبرهنة مساعدة II :

أولاً : لتكن لدينا معادلة Helmholtz الاشتقاقية، البسيطة التالية المحققة في Ω_r :

$$\square_{C_3}^2 U(\mathbf{x}) = -P(\mathbf{x}) \quad (3.34)$$

حيث $U(\mathbf{x})$ الدالة السلمية المجهولة و $P(\mathbf{x})$ دالة سلمية مفروضة. عندئذٍ فإن المعادلة السابقة تكافئ في Ω_r ، المعادلة التكاملية التالية [7]:

$$U(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_r} P(\mathbf{x}) \frac{e^{iC_3 R}}{R} d\Omega(\mathbf{x}) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \left(\int_{S_a} + \int_{S_r} \right) \left[\frac{e^{iC_3 R}}{R} \frac{\partial U}{\partial n}(\mathbf{x}) \right. \quad (3.35)$$

$$\left. - U(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iC_3 R}}{R} \right) \right] dS(\mathbf{x})$$

حيث: $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ و $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega_r$.

ثانياً: لتكن لدينا معادلة Helmholtz الاشتقاقية المضاعفة من المرتبة الثانية التالية، المحققة في Ω_r [6]:

شروط Sommerfeld المقاربة لكمونات Nowacki المتوافقة مع الحالة الديناميكية
لجسم Koiter-Mindlin الخاضع لحمول حجمية متغيرة متوافقاً مع الزمن

$$\square_{C_1}^2 \square_{C_2}^2 V(\mathbf{x}) = -H(\mathbf{x}) \quad (3.36)$$

حيث $V(\mathbf{x})$ دالة سلمية مجهولة و $H(\mathbf{x})$ دالة سلمية معلومة في Ω_r ، أما C_1 و C_2 فهما عدنان عقديان اختياريان. عندئذٍ المعادلة التفاضلية السلمية (3.36) تكافئ المعادلة التكاملية التالية في Ω_r :

$$\begin{aligned} 4\pi(C_2^2 - C_1^2)V(\mathbf{y}) &= \int_{\Omega_r} \frac{e^{iC_1R} - e^{iC_2R}}{R} H(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) + \\ &+ \left(\int_{S_a} + \int_{S_r} \right) \left\{ \frac{e^{iC_1R} - e^{iC_2R}}{R} \frac{\partial}{\partial n} [\square_C^2 V(\mathbf{x})] \right. \\ &- [\square_C^2 V(\mathbf{x})] \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{iC_1R} - e^{iC_2R}}{R} + \\ &+ \frac{C_2^2 e^{iC_2R} - C_1^2 e^{iC_1R}}{R} \frac{\partial V}{\partial n}(\mathbf{x}) \\ &- V(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{C_2^2 e^{iC_2R} - C_1^2 e^{iC_1R}}{R} \left. \right\} dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.37)$$

حيث: $C^2 = C_1^2 + C_2^2$

4. النتائج والمناقشة:

أولاً) التمثيلات التكاملية في Ω_r ، لكمونات Nowacki للجسم المرن (K-M)، عندما تتغير هذه الكمونات، توافقاً مع الزمن - حالة الحمول الحجمية غير المعدومة. من أجل إيجاد هذه التمثيلات التكاملية المطلوبة، يكفي تطبيق البند الأول من المبرهنة السابقة على معادلة Helmholtz الاشتقاقية، البسيطة₁ (3.31)، والبند الثاني من هذه المبرهنة على معادلة Helmholtz الاشتقاقية المضاعفة من المرتبة الثانية₂ (3.31)، في Ω_r .

- فإذا طبقنا البند الأول من المبرهنة السابقة على معادلة Helmholtz الاشتقاقية، البسيطة (3.31)₁، في Ω_r ، نحصل على التمثيل التكاملي المكافئ التالي في Ω_r :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{y}) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_r} B(\mathbf{x}) \frac{e^{i\sigma_1 R}}{R} d\Omega(\mathbf{x}) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \left(\int_{S_a} + \int_{S_r} \right) \left[\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \right. \\ & \left. - \Phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R} \right) \right] dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

بالتالي، من أجل $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi}$ ، يصبح لدينا:

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\xi}) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_r} B(\mathbf{x}) \frac{e^{i\sigma_1 R}}{R} d\Omega(\mathbf{x}) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \left(\int_{S_a} + \int_{S_r} \right) \left[\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \right. \\ & \left. - \Phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R} \right) \right] dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

حيث: $R = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ ؛

- أما إذا طبقنا البند الثاني من المبرهنة السابقة على معادلة Helmholtz الاشتقاقية، المضاعفة من المرتبة الثانية (3.31)₂، في Ω_r ، فنحصل على التمثيل التكاملي المكافئ التالي في Ω_r :

شروط Sommerfeld المقاربية لكمونات Nowacki المتوافقة مع الحالة الديناميكية
لجسم Koiter-Mindlin الخاضع لحمول حجمية متغيرة توافقياً مع الزمن

$$\begin{aligned}
 4\pi(\lambda_2^{*2} - \lambda_1^{*2})\psi_i(\mathbf{y}) = & \int_{\Omega_r} \frac{e^{i\lambda_1^*R} - e^{i\lambda_2^*R}}{R} E_i(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) + \\
 & + \left(\int_{S_a} + \int_{S_r} \right) \left\{ \frac{e^{i\lambda_1^*R} - e^{i\lambda_2^*R}}{R} \frac{\partial}{\partial n} [\square_C^2 \psi_i(\mathbf{x})] \right. \\
 & - [\square_C^2 \psi_i(\mathbf{x})] \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{i\lambda_1^*R} - e^{i\lambda_2^*R}}{R} + \\
 & + \frac{\lambda_2^{*2} e^{i\lambda_2^*R} - \lambda_1^{*2} e^{i\lambda_1^*R}}{R} \frac{\partial \psi_i}{\partial n}(\mathbf{x}) \\
 & \left. - \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{\lambda_2^{*2} e^{i\lambda_2^*R} - \lambda_1^{*2} e^{i\lambda_1^*R}}{R} \right\} dS(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

حيث هنا: $C^2 = \lambda_1^{*2} + \lambda_2^{*2} = -\ell^{*-2}$

بالتالي، من أجل $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{y}$ ، يصبح لدينا:

$$\begin{aligned}
 4\pi(\lambda_2^{*2} - \lambda_1^{*2})\psi_i(\boldsymbol{\xi}) = & \int_{\Omega_r} \frac{e^{i\lambda_1^*R} - e^{i\lambda_2^*R}}{R} E_i(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) + \\
 & + \left(\int_{S_a} + \int_{S_r} \right) \left\{ \frac{e^{i\lambda_1^*R} - e^{i\lambda_2^*R}}{R} \frac{\partial}{\partial n} [\square_C^2 \psi_i(\mathbf{x})] \right. \\
 & - [\square_C^2 \psi_i(\mathbf{x})] \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{i\lambda_1^*R} - e^{i\lambda_2^*R}}{R} + \\
 & + \frac{\lambda_2^{*2} e^{i\lambda_2^*R} - \lambda_1^{*2} e^{i\lambda_1^*R}}{R} \frac{\partial \psi_i}{\partial n}(\mathbf{x}) \\
 & \left. - \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{\lambda_2^{*2} e^{i\lambda_2^*R} - \lambda_1^{*2} e^{i\lambda_1^*R}}{R} \right\} dS(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

حيث: $R = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$

ثانياً) الشروط المقاربية والتمثيلات التكاملية الموافقة في Ω° لكمونات Nowacki للجسم المرن (K-M)، عندما تتغير جميع الحقول الفيزيائية، توافقاً مع الزمن - حالة الحمل الحجمية غير المعدومة.

من أجل استنتاج الشروط المقاربية المذكورة، لنرمز بـ $K_{S_r}^{(1)}$ و $K_{S_r}^{(2)}$ ، على الترتيب، لجزء التكامل السطحي في (4.2) و لجزء التكامل السطحي في (4.4)، على السطح S_r ، فيكون عندئذ:

$$K_{S_r}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_r} \left[\frac{e^{i\sigma_1 r}}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{i\sigma_1 r}}{r} \right) \right] dS(\mathbf{x}), \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} K_{S_r}^{(2)} = & \int_{S_r} \left\{ \frac{e^{i\lambda_1^* r} - e^{i\lambda_2^* r}}{r} \frac{\partial}{\partial n} [\square_C^2 \psi_i(\mathbf{x})] \right. \\ & - [\square_C^2 \psi_i(\mathbf{x})] \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{i\lambda_1^* r} - e^{i\lambda_2^* r}}{r} + \\ & + \frac{\lambda_2^{*2} e^{i\lambda_2^* r} - \lambda_1^{*2} e^{i\lambda_1^* r}}{r} \frac{\partial \psi_i}{\partial n}(\mathbf{x}) \\ & \left. - \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{\lambda_2^{*2} e^{i\lambda_2^* r} - \lambda_1^{*2} e^{i\lambda_1^* r}}{r} \right\} dS(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.6)$$

ولندرس الآن كلاً من: $K_{S_r}^{(1)}$ و $K_{S_r}^{(2)}$ و عندما $r \rightarrow \infty$. فإذا اعتبرنا الإحداثيات الكروية: $\mathbf{x} \equiv (r, \theta, \varphi)$ ، يكون: $dS(\mathbf{x}) = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ ، كما يكون: $\frac{\partial f}{\partial n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial r}(\mathbf{x}) = \partial_r f(\mathbf{x})$ ، حيث: $0 \leq \theta \leq \pi$ و $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ، و $f(\mathbf{x})$ دالة حقيقية تتبع للإحداثيات الكروية المعتمدة[§].

بهذا الشكل، تصبح (4.5) و (4.6)، بعد إجراء الحسابات على التتابع الكاملة، على الشكل التالي:

[§] عندما يكون r كبيراً بالقدر الكافي تصبح كمونات Nowacki تابعة فقط لـ r .

شروط Sommerfeld المقاربية لكمونات Nowacki المتوافقة مع الحالة الديناميكية
لجسم Koiter-Mindlin الخاضع لحمول حجمية متغيرة توافقياً مع الزمن

$$\mathbf{K}_{S_r}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_r} e^{i\sigma_1 r} [\Phi(\mathbf{x}) + r(\partial_r - i\sigma_1)\Phi(\mathbf{x})] \frac{dS(\mathbf{x})}{r^2}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{K}_{S_r}^{(2)} = \int_{S_r} \left(e^{i\lambda_1^* r} \left\{ \square_{\lambda_2^*}^2 \psi_i(\mathbf{x}) + r(\partial_r - i\lambda_1^*) \left[\square_{\lambda_2^*}^2 \psi_i(\mathbf{x}) \right] \right\} - \right. \quad (4.8)$$

$$\left. e^{i\lambda_2^* r} \left\{ \square_{\lambda_1^*}^2 \psi_i(\mathbf{x}) + r(\partial_r - i\lambda_2^*) \left[\square_{\lambda_1^*}^2 \psi_i(\mathbf{x}) \right] \right\} \right) \frac{dS(\mathbf{x})}{r^2},$$

بالأخذ بعين الاعتبار أن: $\lambda_1^{*2} > 0$ و $\lambda_2^{*2} < 0$ ، فيكون عدداً حقيقياً قد يكون موجباً وقد يكون سالباً (في هذه الحالة نختار أحدهما وليكن على سبيل المثال، الموجب؛ أي: $\lambda_1^* > 0$)، كما يكون عدداً تخيلياً بحتاً ومرافقه، (في هذه الحالة حصراً سنختار العدد التخيلي البحت ذي الجزء التخيلي الموجب). لهذا الغرض نضع:

$$\lambda_2^* = i\beta; \quad \beta := \sqrt{-\lambda_2^{*2}} > 0 \quad (4.9)$$

وتصبح بذلك العلاقة (4.8) بالشكل:

$$\mathbf{K}_{S_r}^{(2)} = \int_{S_r} \left(e^{i\lambda_1^* r} \left\{ \square_{i\beta}^2 \psi_i(\mathbf{x}) + r(\partial_r - i\lambda_1^*) \left[\square_{i\beta}^2 \psi_i(\mathbf{x}) \right] \right\} - \right. \quad (4.10)$$

$$\left. e^{-\beta r} \left\{ \square_{\lambda_1^*}^2 \psi_i(\mathbf{x}) + r(\partial_r + \beta) \left[\square_{\lambda_1^*}^2 \psi_i(\mathbf{x}) \right] \right\} \right) \frac{dS(\mathbf{x})}{r^2},$$

$$\cdot \square_{i\beta}^2 = \nabla^2 - \beta^2 \quad \text{حيث:}$$

ولنركز اهتمامنا الآن، على العلاقتين (4.7) و (4.10)، اللتان فيهما: $\sigma_1 > 0$ و $\lambda_1^* > 0$ و $\beta > 0$.

(أ) الشروط المقاربية لأجل الكمون السلمي Φ والتمثيل التكاملي الموافق في Ω° :

في (4.7)، لنفرض أنه عندما $r \rightarrow \infty$ ، فإن:

$$\Phi = 0(1), \quad (\partial_r - i\sigma_1)\Phi = 0(r^{-1}) \quad (4.11)$$

حيث الرمز $f = 0(1)$ يعني أن $f \rightarrow 0$ عندما $r \rightarrow \infty$ ، أما الرمز $f = 0(r^{-1})$ ، فيعني أن $r f = 0(1)$. التالي إذا جعلنا $r \rightarrow \infty$ في العلاقة

التكاملية (4.2)، فإن $\Omega_r \rightarrow \Omega^\circ$ ، وعندئذٍ تحقق (4.11) يجعل $\mathbf{K}_{S_r}^{(1)} \rightarrow 0$ ، ويصبح

عندئذٍ التمثيل التكاملي (4.2) بالشكل التالي في Ω° :

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega^\circ} B(\mathbf{x}) \frac{e^{i\sigma_1 R}}{R} d\Omega(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{S_a} \left[\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{i\sigma_1 R}}{R} \right) \right] dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

حيث $\xi \in \Omega^\circ$ و $\mathbf{x}, \xi = |\mathbf{x} - \xi|$ ، وبشرط أن يكون أيضاً، التكامل الحجمي التالي متقارباً:

$$\int_{\Omega^\circ} B(\mathbf{x}) \frac{e^{i\sigma_1 R}}{R} d\Omega(\mathbf{x}) \quad (4.13).$$

في المراجع العلمية، ندعو الشروط المقاربية من النوع (4.11) التي تعدم $K_{S_r}^{(1)}$ عندما $r \rightarrow \infty$ ، وبالتالي تتحقق (4.12)، ندعوها بشروط Sommerfeld، حيث ندعو الشرط من النوع $(4.11)_1$ بشرط اللانهاية، أما الشرط من النوع $(4.11)_2$ ، فيدعى بشرط الإشعاع.

ب) الشروط المقاربية لأجل الكمون المتجهي \vec{A} ، والتمثيل التكاملية الموافق في Ω° :

في (4.10)، لنفرض أنه عندما $r \rightarrow \infty$ ، فإن:

$$\square_{i\beta}^2 \psi_i = 0(1) \quad , \quad e^{-\beta r} \square_{\lambda_1^*}^2 \psi_i = 0(1) \quad (4.14)$$

$$(\partial_r - i\lambda_1^*) \left(\square_{i\beta}^2 \psi_i \right) = 0(r^{-1}) \quad , \quad (4.15)$$

$$e^{-\beta r} (\partial_r + \beta) \left(\square_{\lambda_1^*}^2 \psi_i \right) = 0(r^{-1}) \quad (4.16)$$

فإذا جعلنا $r \rightarrow \infty$ في العلاقة التكاملية (4.4)، فإن $\Omega^\circ \rightarrow \Omega_r$ ، وعندئذٍ تحقق

(4.14)-(4.16) يجعل $K_{S_r}^{(2)} \rightarrow 0$ ، ويصبح التمثيل التكاملية (4.4) بالشكل التالي في Ω° :

شروط Sommerfeld المقاربية لكمونات Nowacki المتوافقة مع الحالة الديناميكية
لجسم Koiter-Mindlin الخاضع لحمول حجمية متغيرة توافقياً مع الزمن

$$\begin{aligned}
 4\pi(\lambda_2^{*2} - \lambda_1^{*2})\psi_i(\xi) &= \int_{\Omega^\circ} \frac{e^{i\lambda_1^*R} - e^{i\lambda_2^*R}}{R} E_i(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) + \\
 &+ \int_{S_a} \left\{ \frac{e^{i\lambda_1^*R} - e^{i\lambda_2^*R}}{R} \frac{\partial}{\partial n} [\square_C^2 \psi_i(\mathbf{x})] \right. \\
 &- [\square_C^2 \psi_i(\mathbf{x})] \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{i\lambda_1^*R} - e^{i\lambda_2^*R}}{R} + \\
 &+ \frac{\lambda_2^{*2} e^{i\lambda_2^*R} - \lambda_1^{*2} e^{i\lambda_1^*R}}{R} \frac{\partial \psi_i(\mathbf{x})}{\partial n} \\
 &\left. - \psi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{\lambda_2^{*2} e^{i\lambda_2^*R} - \lambda_1^{*2} e^{i\lambda_1^*R}}{R} \right\} dS(\mathbf{x}) \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

حيث هنا $\xi \in \Omega^\circ$ و $R = |\mathbf{x} - \xi|$ ، ويشترط أن يكون أيضاً، التكامل الحجمي التالي مقارباً:

$$\int_{\Omega^\circ} \frac{e^{i\lambda_1^*R} - e^{i\lambda_2^*R}}{R} E_i(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (4.18)$$

تجدر الإشارة هنا إلى الشيء التالي. عندما يكون r كبيراً بالقدر الكافي، تصبح كمونات Nowacki Φ و ψ_i تابعة فقط لـ r ، في الوقت الذي يصبح فيه:

$$\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r, \quad \square_{\lambda_1^*}^2 = \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \lambda_1^{*2}, \quad (4.19)$$

$$\square_{i\beta}^2 = \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \beta^2$$

بالتالي فإن المؤثرين الاشتقاقيين $\square_{\lambda_1^*}^2$ و $\square_{i\beta}^2$ ، الموجودين في الشروط المقاربية: (4.16) - (4.14)، يعطيان من خلال (4.19).

ومنه يمكن صياغة المبرهنة التالية حول شروط Sommerfeld لكمونات Nowacki، للجسم المرن (K-M)، ذلك عندما تتغير الحقول الفيزيائية، توافقياً مع الزمن - حالة الحمل الحجمية غير المعدومة.

مبرهنة: لنفرض أن الدوال $\Phi(\mathbf{x})$ و $\psi_i(\mathbf{x})$ من الصف من الصف C^5 في Ω ، عندئذ:
 (1) إذا كان التكامل الحجمي (4.13)، متقارباً وتحققت شروط Sommerfeld (4.11)،
 عندئذ $K_{S_r}^{(1)} \rightarrow 0$ عندما $r \rightarrow \infty$ ، ويتحقق التمثيل التكاملي (4.12) في Ω° ؛
 (2) إذا كان التكامل الحجمي (4.18)، متقارباً وتحققت شروط Sommerfeld
 (4.16) - (4.14)، عندئذ $K_{S_r}^{(2)} \rightarrow 0$ عندما $r \rightarrow \infty$ ، ويتحقق التمثيل التكاملي
 (4.17) في Ω° .

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولاً: الاستنتاجات: في البحث تم استنتاج تلك الشروط الحدية في اللانهاية، التي تجعل
 كمونات Nowacki للجسم المرن (K-M) تقبل تمثيلاً تكاملياً، حيث التكامل السطحي
 على سطح الكرة S_a التي يقع خارجها الجسم، وذلك في حالة الحمل الحجمية غير
 المعدومة، والمتغيرة توافقياً بالنسبة للزمن.

ثانياً: المقترحات: فيما يلي يمكن أن نقترح المسائل التالية، الجديدة، للمناقشة:

المسألة الأولى: إجراء الدراسة السابقة لأجل (K-M)، المتربط مع حقل درجات
 حرارة، بوجود مصادر حرارية غير معدومة، ومتغيرة توافقياً مع الزمن.

المسألة الثانية: إجراء الدراسة السابقة أيضاً لأجل (K-M)، المتربط مع حقل
 كهروستاتيكي، بوجود مصادر كهروستاتيكية، ومتغيرة توافقياً مع الزمن.

المسألة الثالثة: دراسة الشروط المقاربية لأجل كمونات Nowacki، ولأجل كمونات
 Nowacki-Ignaczak، ولأجل الازاحات للجسم المرن دقيق الاستقطاب، بوجود حمل
 حجمية غير معدومة، وعندما تتغير جميع الحقول الفيزيائية توافقياً مع الزمن، وفي حالة
 وجود وعدم وجود حقل درجات حرارة.

المراجع

- [1]- Koiter ,W.T. ,**1964** – Couple-Stresses in the theory of elasticity, Koninkl. Nederl. Akad .Van Wetensehappen. Proc . Ser . 8,1-1964 , 67 ,1,17;1964,67,1,30 .
- [2]- Mindlin ,R.D. ,**1962** – Tiersten , H.F., Effects of couple–Stresses in linear elasticity , Arch . Rat.Mech.Anal. , 1962,11,5,415.
- [3]- Mindlin , R.D. ,**1963** – Influence of couple-Stresses on stress concentration , Exper . Mech .,1963,3,1.
- [4] Sommerfeld A., **1950-** Mechanics of Deformable Bodies, New York.
- [5]-Hanaa Kazem, , **2014** – The Sommerfeld radiation conditions for the Nowacki's potential problem of the Hooke elastic body in the case of nonzero body loads, harmonically varying in time, Journal of Al-Baath University, Vol.36.
- [6]-Mountajab Al-Hasan and Husam Shakkouf , **2016** – The Sommerfeld asymptotic conditions for displacements in Hooke elastic body with no vanishing body loads harmonically varying in time, Journal of Al-Baath University, Vol.38, Nr.4, p. 11-24.
- [7]- Kamel Mouhamad, Mountajab Al-Hasan, **2011** – An integral – differential mathematical model of elastic body in the frame of

- linear dynamic thermoelasticity, Journal of Al-Baath University, Vol.33, Nr.25, p.119 -148.
- [8]- Rasha Tulemat , **2010** – Transforming the Partial Differential Equations of Elastic Body into Integral Equations on Spherical Surface, **Dissertation** , Faculty of Science , Al-Baath University.
- [9]-Taleb Gareeba, Mountajab Al-Hasan , Rasha Tulemat , **2009** – Using volume – surface transforms for translating the differential equations of elastic body into integral equations, , Journal of Al-Baath University, Vol.31, Nr.20, p.175 -192.
- [10] Al-Hasan M., Dyszlewicz J., **2001**- Radiation conditions and integral representations of a solution in coupled micropolar thermoelasticity, **J. Thermal Stresses**, **24** (2001), 1007 – 1018.
- [11]- kupradse , Gegelya ,Bashelishili , Burchuladse, **1968 & 1976** – Three Dimensional Problems of The Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity , Izd.Nauka.Moscow.
- [12]-Ignaczak , **1972** - Radiation conditions in asymmetric elasticity, **J.Ela.****2**,307-321.
- [13]-Ignaczak , **1970**- Radiation conditions of Sommerfeld type for elastic materials with microstructure,**Bull.Acad.Polon.Sci.Sér.Sci.** **18**,6-473,
- [14]- Ignaczak i Nowacki, **1965** - Osobliwe równania całkowe termosprężystości, **Rozprawy Inżynierskie**,**13(1965)**,655-670.
- [15]-Kupradse , **1963** - Dynamical problems in elasticity , **Progress in Solid Mech.**,vol.3,North-Holland Publ.Co.,Amsterdam.
- [16] Ignaczak J. , Nowacki W., **1962** -The Sommerfeld radiation conditions for coupled thermoelasticity, **Arch. Mech. Stos.****14**,3– 13.
- [17]-Nowacki , **1970** - Theory of Elasticity , Warsaw PWN.

شروط Sommerfeld المقاربية لكمونات Nowacki المتوافقة مع الحالة الديناميكية
لجسم Koiter-Mindlin الخاضع لحمول حجمية متغيرة توافقياً مع الزمن

جامعة البعث

كلية العلوم

قسم رياضيات

دراسة استقرار حل جملة معادلات تكاملية _ تفاضلية من مرتبة كسرية باستخدام مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة

إعداد

الطالبة ايمان احمد حسين

إشراف

الدكتور سامح العرجه

أستاذ في قسم الرياضيات - كلية العلوم

1442هـ - 2021 م

ملخص

نعرف المفاهيم الأساسية في البحث: الاشتقاق الكسري، التكامل الكسري، النقطة الثابتة، تابع ميتاج- ليفلر، وندرس الخواص والقواعد الأساسية للمشتقات من مراتب كسرية. نقدّم أيضاً بعض العلاقات الأساسية المتعلقة بتحويل لابلاس وخواصه. في هذا البحث حصلنا على الشروط اللازمة لاستقرار حل جملة معادلات تفاضلية كسرية إضافةً إلى الشروط اللازمة لاستقرار حل جملة معادلات تكاملية- تفاضلية كسرية مدعماً ذلك بأمثلة.

الكلمات المفتاحية: مشتق كابتو، تكامل ريمان ليوفيل، تحويل لابلاس، دالة ميتاج ليفلر، مبرهنة النقطة الثابتة، الاستقرار .

Study of Stability Solution System of Fractional Integro- Differential Equations by Using Banach Fixed Point Theorem

Abstract:

In this paper, we define the basic concepts related in research: fractional derivation, fractional integration, fixed point, Mittag- Leffler function, and study some basic properties and rules for derivatives of fractional order. Also we present some basic relationships about Laplace transform and its properties.

We obtain necessary conditions for stability of solution of a fractional differential system, in addition to the necessary conditions for the stability of the solution of a fractional integro- differential system, supported by examples.

Keywords: Caputo derivative, Riemann-Liouville integral, Laplace transform, Mittag Leffler function, fixed point theorem, stability.

1- مقدمة:

يعد حساب التفاضل و التكامل الكسري فرع من فروع الرياضيات و قد جذب هذا الفرع الكثير من الاهتمام من قبل الباحثين و الدارسين لما له من أهمية تطبيقية في العديد من مجالات الحياة مثل الهندسة و العلوم و التطبيقات الفيزيائية [5] و الكيميائية [8] و البيولوجية [7]، إن التفاضل و التكامل الكسري هو تعميم للتفاضل من المرتبة $n \in \mathbb{N}$ ، و قد شهد هذا المجال تطورات بالغة الأهمية على يد عدة علماء و باحثين مثل ليوفيل، كابتو، لايبنز، أولر و غيرهم من العلماء.

تطرق الباحثون إلى إيجاد حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية من خلال عدة طرائق نذكر منها تحويل لابلاس، والتأكد من وجود الحل ووحداية الحل باستخدام مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة ومبدأ باناخ للتطبيقات الضاغطة، إن مبرهنة النقطة الثابتة أداة مهمة لتقدير وجود الحل ووحداية الحل أيضاً لجمال المعادلات التفاضلية الكسرية، كما تمّ توظيف فكرة التطبيقات الضاغطة للحصول على استقرار حل جملة المعادلات التفاضلية الكسرية.

استخدام الباحثون تقنيات النقطة الثابتة لدراسة خواص الاستقرار للجمال المدروسة [10,11]، نلاحظ من خلال الاطلاع على الأبحاث والدراسات السابقة بأن الباحثين قد درسوا أشكال مختلفة من جمال المعادلات التفاضلية، وتمّ الحصول على شروط استقرار مكافئة لشروط استقرار الحلول المقاربة تحت تأثير اضطرابات صغيرة.

2- أهمية البحث:

يهدف البحث إلى إظهار أهمية النقطة الثابتة وأهمية التطبيقات الضاغطة في دراسة استقرار حل الجمال المدروسة.

3- مشكلة البحث:

نظراً للاهتمام المتزايد بموضوع التفاضل والتكامل الكسري لما له من أهمية بالغة في الحياة العملية والدراسات التطبيقية، تأتي مشكلة البحث لتسلط الضوء على هذا الموضوع ولتوضح كيفية استخدام تقنيات وخواص النقطة الثابتة في دراسة جمال المعادلات التفاضلية الكسرية،

وتوظيف مبدأ النقطة الثابتة للحصول على استقرار حل جملة معادلات تكاملية- تفاضلية من مرتبة كسرية.

4- مواد البحث:

مفاهيم وتعريف: [9]

تعريف (1): إن الدالة غاما تعرّف بالشكل:

$$\Gamma(Z) = \int_0^{\infty} t^{Z-1} e^{-t} dt \quad ; \operatorname{Re}(Z) > 0$$

وتحقق الدالة غاما الخواص التالية:

$$\Gamma(Z+1) = Z\Gamma(Z)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

تعريف (2): من أجل التابع $f(t) \in L^1[a, b]$ نعرّف تكامل ريمان _ ليوفيل للتابع $f(t)$ بالعلاقة:

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \dots \dots (1)$$

حيث: $n \in \mathbb{N}$, $\alpha, t_0, t \in \mathbb{R}^+$, $n-1 < \alpha < n$

ويتحقق أن:

$$1) I^0 f(t) = f(t) \quad ; \quad I^0 = I$$

$$2) I^{\alpha} (\lambda f(t) \pm \beta g(t)) = \lambda I^{\alpha} f(t) \pm \beta I^{\alpha} g(t) \quad ; \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

حيث I مؤثر المطابقة.

مثال (1): لنوجد تكامل ريمان - ليوفيل للتابع $f(t) = t$ باعتبار أن: $t_0 = 0, \alpha = \frac{1}{2}$

حسب العلاقة (1) نكتب:

$$I^\alpha t = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t \tau (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \quad ; t-\tau=u$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t (t-u) u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} t^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$$

تعريف (3): الاشتقاق الكسري حسب ريمان - ليوفيل:

من أجل التابع $f(t) \in L^1[a, b]$ نعرّف مشتق ريمان - ليوفيل للتابع $f(t)$ بالعلاقة:

$$D^\alpha f(t) = D^n I^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t f(\tau) (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \dots \dots (2)$$

حيث:

$$; \alpha, t_0, t \in \mathbb{R}^+, \quad n-1 < \alpha < n \in \mathbb{Z}$$

ويتحقق ما يلي:

$$1) D^0 f(t) = f(t) \quad ; D^0 = I$$

$$2) D^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \gamma D^\alpha g(t) \quad ; \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$$

مثال (2): لنوجد مشتق ريمان - ليوفيل للتابع: $f(t) = t$ باعتبار أن:

$$t_0 = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

حسب العلاقة (2) نكتب:

$$\begin{aligned}
 D^{\frac{1}{2}}t &= \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t \tau(t-\tau)^{\frac{1}{2}-1} d\tau = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t \tau(t-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t (t-v)v^{-\frac{1}{2}} dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t \left(tv^{-\frac{1}{2}} - v^{\frac{1}{2}}\right) dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d}{dt} \left[2tv^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}\right]_0^t \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{d}{dt} \left[2t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{d}{dt} \left[t^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

تعريف (4): الاشتقاق الكسري حسب كابيتو:

يعرف مشتق كابيتو لتابع ما $f(t) \in L^1[a, b]$ بالعلاقة:

$$D_*^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \dots (3)$$

$$; \alpha, t_0, t \in \mathbb{R}^+, \quad n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}$$

ويتحقق لدينا:

$$1) D_*^0 f(t) = f(t) \quad ; D_*^0 = I$$

$$2) D_*^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda D_*^\alpha f(t) + \gamma D_*^\alpha g(t) \quad ; \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$$

مثال (3): لنوجد مشتق كابيتو للتابع: $f(t) = t^2$ باعتبار أن: $\alpha = \frac{1}{3}$, $t_0 = 0$

بالاعتماد على العلاقة (3) نكتب:

$$\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)} \int_0^t 2 \cdot \tau(t-\tau)^{\frac{1}{3}-1} d\tau = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^t \tau(t-\tau)^{\frac{1}{3}} d\tau = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^t (t-v)v^{-\frac{1}{3}} dv \quad ; t-\tau = v$$

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^t \left(tv^{-\frac{1}{3}} - v^{\frac{2}{3}}\right) dv = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left[\frac{3}{2}tv^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5}v^{\frac{5}{3}}\right]_0^t = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left[\frac{3}{2}t^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}\right] = \frac{6}{5} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} t^{\frac{5}{3}}$$

تعريف (5): الجداء الالتفافي لتابعين:

نسمي الجداء التالي للتابع $f(t)$ مع التابع $g(t)$ بالجداء الالتفافي:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

تعريف (6): تابع ميتاج ليفلر:

يعرّف تابع ميتاج ليفلر بوسيط واحد α بالعلاقة:

$$E_\alpha(Z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{Z^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa+1)} \quad ; \alpha \in \mathbb{R}^+, Z \in \mathbb{C}$$

كما يعطى تابع ميتاج ليفلر بوسيطين α, β بالعلاقة:

$$E_{\alpha,\beta}(Z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{Z^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa+\beta)} \quad ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, Z \in \mathbb{C}$$

و الصيغة العامة لتابع ميتاج ليفلر المعرّف بمصفوفة A من الشكل:

$$E_{\alpha,\beta}(AZ) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(AZ)^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa+\beta)} \quad ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, Z \in \mathbb{C}$$

بعض الحالات الخاصة:

$$E_0(Z) = \frac{1}{1-Z} \quad ; |Z| < 1 \quad , \quad E_1(Z) = e^Z$$

$$E_2(Z) = ch(\sqrt{Z}) \quad , \quad E_{1/2}(Z) = \frac{e^Z - 1}{Z}$$

من تعريف تابع ميتاج- ليفلر يمكننا الحصول على أنّ:

$$E_{\alpha,1}(Z) = E_\alpha(Z) : (1)$$

(2): إنّ دالة ميتاج ليفلر $E_{\alpha,1}(-t^\alpha)$ هي دالة متناقصة بالنسبة ل t كما أنها محدودة بالعدد

واحد أيّ أنّ: $E_{\alpha,1}(-t^\alpha) \leq 1$ ($0 < \alpha \leq 1$)، يوضّح ذلك الرسم البياني التالي:

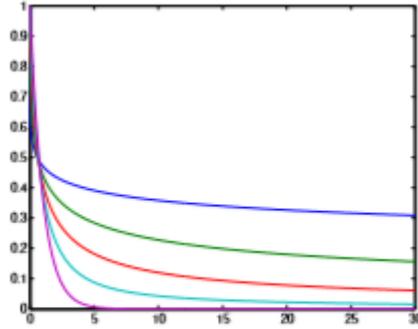


Figure 1: Graphs of $E_{\alpha,1}(-t^\alpha)$ for $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

تعريف (7): تحويل لابلاس:

يعطى تحويل لابلاس لتابع $f(t)$ بالصورة:

$$F(s) = \mathbf{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad ; s \in \square$$

من خواصه:

$$1) \mathbf{L}\{\alpha f(t) \pm \beta g(t)\} = \alpha \mathbf{L}\{f(t)\} \pm \beta \mathbf{L}\{g(t)\} \quad ; \alpha, \beta \in \square$$

$$2) \mathbf{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathbf{L}\{f(t)\} \cdot \mathbf{L}\{g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$$

تعريف (8): تحويل لابلاس العكسي:

يعطى تحويل لابلاس العكسي وفق العلاقة:

$$f(t) = \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \cdot F(s) \cdot ds \quad ; c = \text{Re}(s) > s_0 \dots\dots(4)$$

من خواصه:

$$1) \mathbf{L}^{-1}\{\alpha F(s) \pm \beta G(s)\} = \alpha \mathbf{L}^{-1}\{F(s)\} \pm \beta \mathbf{L}^{-1}\{G(s)\} \quad ; \alpha, \beta \in \square$$

$$2) \mathbf{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = f(t) * g(t)$$

تحويلات لابلاس المستخدمة في الدراسة: [1]

$$1) \mathbf{L} \{J^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s)$$

$$2) \mathbf{L} \{D_*^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} s^{\alpha-\kappa-1} f^{(\kappa)}(0) \quad ; n-1 < \alpha < n$$

$$3) \mathbf{L} \{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} s^\kappa f^{(\alpha-\kappa-1)}(0) \quad ; n-1 < \alpha < n$$

$$4) \mathbf{L} \{t^{\alpha p + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(p)}(\pm \lambda t^\alpha)\} = \frac{p! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp \lambda)^{p+1}} \quad ; \operatorname{Re}(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}$$

نذكر حالات خاصة للعلاقة الأخيرة:

• من أجل $p=0$ نحصل على

$$\mathbf{L} \{t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\pm \lambda t^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp \lambda}$$

• من أجل $p=0, \beta=\alpha$ نحصل على

$$\mathbf{L} \{t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\pm \lambda t^\alpha)\} = \frac{1}{s^\alpha \mp \lambda}$$

• من أجل $p=0, \beta=1$ نحصل على

$$\mathbf{L} \{E_{\alpha, 1}(\pm \lambda t^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha \mp \lambda}$$

تعريف(9): النقطة الثابتة:

ليكن F تطبيقاً لمجموعة M في نفسها ندعو النقطة نقطة ثابتة بالنسبة للتطبيق F إذا كانت صورتها وفق التطبيق F هي النقطة ذاتها أي أن $F(x) = x$.

تعريف (10): التطبيق الضاغط:

ليكن (X, d) فضاءً مترياً وليكن التطبيق:

$$F : X \rightarrow X$$

$$(x, y) \rightarrow F(x, y) ; x, y \in X$$

ندعو التطبيق F تطبيقاً ضاعطاً إذا وجد عدد $0 < \alpha < 1$ ومستقل عن x, y ويحقق

$$d(Fx, Fy) \leq \alpha d(x, y)$$

تعريف 11: يكون الحل الصفري للمنظومة المدروسة مستقراً إذا وجد من أجل كل

$$\varepsilon > 0 \text{ عدد موجب } \delta = \delta(\varepsilon) \text{ بحيث إذا كان } \|x(t_0)\| < \delta \text{ عندئذ}$$

$$\|x(t)\| < \varepsilon \text{ وذلك من أجل كل } t > 0$$

تعريف 12: يكون الحل الصفري للمنظومة المدروسة مستقر استقراراً مقارباً إذا كان

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \text{ مستقراً ووجد عدد } \delta > 0 \text{ بحيث أنه إذا كان } \|x(t_0)\| < \delta \text{ فإن: } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

مبرهنة (1): مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة:

بفرض أن (X, d) فضاء متري تام و F تطبيق ضاعط من الفضاء المتري في نفسه عندئذ التطبيق الضاعط F يملك نقطة ثابتة وحيدة.

تمهيدية: [2] لنفرض أنه من أجل التابعين $\phi(t)$ و $g(t)$ المستمرين على الفترة $[t_0, t]$ وحيث $g(t) \geq 0$ و $\lambda \geq 0, r \geq 0$ حيث λ, r ثوابت وإذا كان:

$$\phi(t) \leq \lambda + \int_{t_0}^t [g(\tau)\phi(\tau) + r] d\tau$$

عندئذ نستطيع أن نكتب:

$$\phi(t) \leq (\lambda + r(t_1 - t_0)) \exp\left(\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau\right) ; t_0 \leq t \leq t_1 \dots \dots (4)$$

المتراجحة (4) تدعى متراجحة جرونوال وهي أداة هامة لتقدير تقارب الحل.

لازمة 1: تحقق دالة ميتاج- ليفلر الخواص التالية:

$$(1) \|E_{\alpha} (At^{\alpha})\| \leq M_1 \|e^{At}\| \quad ; 0 < \alpha < 1$$

$$\|E_{\alpha,\alpha} (At^{\alpha})\| \leq M_2 \|e^{At}\|$$

$$(2) \|E_{\alpha,\beta} (At^{\alpha})\| \leq \|e^{At^{\alpha}}\| \quad ; \alpha \geq 1, \beta = 1, 2, \alpha$$

حيث M_1, M_2 ثوابت موجبة.

لازمة 2: بفرض أنّ جميع القيم الذاتية للمصفوفة A تحقق: $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}$

عندئذٍ توجد ثوابت موجبة $\kappa_2 > 0, \kappa_1 > 0$ بحيث أنّ:

$$1) \int_0^t \|\theta^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} (A\theta^{\alpha})\| d\theta \leq \kappa_1$$

$$2) \int_0^t \|\theta^{2\alpha-1} E_{\alpha,2\alpha} (A\theta^{\alpha})\| d\theta \leq \kappa_2$$

سنقوم الآن بدراسة منظومة المعادلات

$$D_*^{\alpha} x(t) + x(t) = A \cdot x(t) + f(t, x(t)) \quad ; \quad 0 < \alpha \leq 1$$

حيث سنوجد حل هذه المنظومة مستخدمين تحويل لابلاس لهذا الغرض، نوضح ذلك من خلال المبرهنة القادمة.

مبرهنة (2): [6,10] بفرض أنه لدينا منظومة المعادلات:

$$\begin{cases} D_*^{\alpha} x(t) + x(t) = A \cdot x(t) + f(t, x(t)) & ; \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \dots\dots\dots(5)$$

حيث A مصفوفة الأمتثال الموافقة للمنظومة المدروسة $(A \in \mathbb{R}^n)$ ، $t \in [0, \infty)$ ، $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ وأنّ:

$f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ تابع معطى فرضاً، إنّ حل المنظومة (5) موجود ويعطى وفق العلاقة:

$$x(t) = E_{\alpha,1}(-t^\alpha)x(0) + A \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-\tau)^\alpha)x(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-\tau)^\alpha)F(\tau, x(\tau)) d\tau \dots \dots \dots (6)$$

الإثبات: بأخذ تحويل لابلاس لطرفي العلاقة (5):

$$\mathbf{L}\{D_*^\alpha x(t)\} + \mathbf{L}\{x(t)\} = \mathbf{L}\{A \cdot x(t)\} + \mathbf{L}\{f(t, x(t))\}$$

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1}x(0) + X(s) = A \cdot X(s) + F(s, x(s))$$

$$X(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}x(0) + \frac{A}{s^\alpha + 1}X(s) + \frac{1}{s^\alpha + 1}F(s, x(s))$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي:

$$\mathbf{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}x_0\right\} + \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s^\alpha + 1}X(s)\right\} + \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha + 1}F(s, x(s))\right\}$$

$$x(t) = E_{\alpha,1}(-t^\alpha) \cdot x_0 + A \cdot t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha) * x(t) + t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha) * F(t, x(t))$$

$$\Rightarrow x(t) = E_{\alpha,1}(-t^\alpha) \cdot x_0 + A \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-\tau)^\alpha) \cdot x(\tau) d\tau$$

$$+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-\tau)^\alpha) F(\tau, x(\tau)) d\tau$$

ملاحظة: باعتبار أن $\beta = 1$ حل منظومة المعادلات (5) يصبح بالشكل:

$$x(t) = E_{\alpha,1}(-t^\alpha) \cdot x_0 + A \int_0^t E_{\alpha,1}(-(t-\tau)^\alpha) \cdot x(\tau) d\tau + \int_0^t E_{\alpha,1}(-(t-\tau)^\alpha) F(\tau, x(\tau)) d\tau \dots \dots \dots (7)$$

مبرهنة (3): [1,2,6] ليكن f تابع مستمر حيث: $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، وبفرض وجود

تابع موجب $\gamma(t)$ ، إذا حقق التابع f الشروط التالية:

$$1) f(t, 0) = 0$$

$$2) \|f(t, x(t))\| \leq \gamma(t) \cdot \|x\|$$

$$3) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \gamma(\tau) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

وبفرض أنّ المصفوفة A مستقرة (القيم الذاتية لـ A قسمها الحقيقي سالب) عندئذٍ يكون الحل الصفري للمنظومة (5) مستقرًا.

الإثبات: إنّ حل المنظومة (5) يعطى بالعلاقة (6)

بأخذ تنظيم الطرفين نحصل على:

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \|A\| \int_0^t \|(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-\tau)^\alpha)\| \cdot \|x(\tau)\| d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \gamma(\tau) \|E_{\alpha,\alpha}(-(t-\tau)^\alpha)\| \cdot \|x(\tau)\| d\tau$$

بفرض أنّ:

$$\|(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-\tau)^\alpha)\| \leq M_1 \quad \& \quad \|E_{\alpha,\alpha}(-(t-\tau)^\alpha)\| \leq M_2$$

$$(\| (t-\tau)^{\alpha-1} \| \cdot M_2 \leq M_1 \quad \text{لاحظ هنا أنّ})$$

حسب متراجحة جرونوال نكتب:

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_0^t (\|A\| \cdot M_1 + M_2 \cdot (t-\tau)^{\alpha-1} \gamma(\tau)) \cdot \|x(\tau)\| d\tau \leq \|x_0\| \exp\left(\int_0^t (M_2 (t-\tau)^{\alpha-1} \gamma(\tau) + \|A\| \cdot M_1) d\tau\right)$$

$$M_2 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \gamma(\tau) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{نجد} \quad \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \gamma(\tau) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{باستخدام شرط المبرهنة}$$

$$e^{\int_0^t \|A\| M_1 d\tau} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{وحيث أنّ A مصفوفة مستقرة}$$

حيث أنّ: M_1, M_2 ثوابت موجبة.

مما سبق نجد بأن $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ ، إذا الحل الصفري للمنظومة (5) مستقر .

مبرهنة (4): [4,10] بفرض أنه لدينا التابع المستمر: $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، والذي يحقق الشروط التالية:

$$(1) \quad f(t, 0) = 0$$

$$(2) \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \gamma(t) \cdot \|x - y\|$$

$$(3) \quad \int_0^t \gamma(\tau) d\tau \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

حيث أن $\gamma(t)$ تابع موجب، عندئذٍ المنظومة المدروسة (5) تملك حل وحيد $x(t)$ والحل الصفري لها يكون مستقراً.

الإثبات: لنفرض أن: $r \geq \frac{\|x_0\|}{1 - M_1 - M_2}$ حيث $M_1 + M_2 < 1$ ، لنأخذ المجموعة:

$\mathcal{E} = \mathcal{E}([0, T], \mathbb{R}^n)$ وهي عبارة عن فضاء كل التوابع المتجهية المستمرة والمعروفة على الفترة

$$\|x\| = \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\| \quad \mathbb{R}^n \quad \text{مع التنظيم:}$$

$$\text{حيث: } x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

إن \mathcal{E} عملياً يمثل فضاء باناخ مع التنظيم السابق.

لنعرف التطبيق: $F: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ بالشكل:

$$F(x(t)) = x_0 E_{\alpha,1}(-t^\alpha) + A \int_0^t E_{\alpha,1}(-(t-\tau)^\alpha) x(\tau) d\tau + \int_0^t E_{\alpha,1}(-(t-\tau)^\alpha) f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

لنأخذ كرة مغلقة B_r نصف قطرها r في الفضاء \mathcal{E} :

$$B_r = \{x \in \mathcal{E}; \|x\| \leq r\}$$

نلاحظ أن:

$$\|f(t, x) - f(t, 0) + f(t, 0)\| \leq \|f(t, x) - f(t, 0)\| + \|f(t, 0)\| \leq \gamma(t) \cdot \|x - 0\| + 0 = \gamma(t) \|x\|$$

من أجل $x \in B_r$ لنثبت الآن أن: $F(x) \in B_r$ أي لنثبت أن: $F(B_r) \subseteq B_r$

$$\|F(x(t))\| \leq \|x_0 E_{\alpha,1}(-t^\alpha)\| + \|A\| \int_0^t E_{\alpha,1}(-(t-\tau)^\alpha) \cdot \|x(\tau)\| \cdot d\tau + \int_0^t E_{\alpha,1}(-(t-\tau)^\alpha) \cdot \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau$$

$$\leq \|x_0\| + r \cdot \|A\| \cdot T + r \int_0^t \gamma(\tau) d\tau \leq r(1 - M_1 - M_2) + r(M_1 + M_2) = r$$

$$\Rightarrow F(x(t)) \in B_r$$

$$\|A\| \cdot T \leq M_2 \quad ; \quad \int_0^t \gamma(\tau) d\tau \leq M_1 \quad \text{حيث اعتبرنا}$$

لنثبت الآن بأن F ضاغط:

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(y)\| &\leq \|A\| \int_0^t E_{\alpha,1}(-(t-\tau)^\alpha) \cdot \|x - y\| d\tau + \int_0^t E_{\alpha,1}(-(t-\tau)^\alpha) \gamma(\tau) \|x - y\| d\tau \\ &\leq (\|A\| \cdot T + M_1) \cdot \|x - y\| \\ &\leq \underbrace{(M_2 + M_1)}_{<1} \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$

كون $M_1 + M_2 < 1$ إذاً F ضاغط إذن المنظومة (5) تملك حلاً وحيداً.

لنثبت الآن بأن $F(x(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

لدينا:

$$\left\| \int_0^t E_{\alpha,1}(-t-\tau)^\alpha f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_0^t \left\| E_{\alpha,1}(-t-\tau)^\alpha \right\| \cdot \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau$$

$$\leq \int_0^t \gamma(\tau) \cdot \|x(\tau)\| d\tau \leq r \int_0^t \gamma(\tau) d\tau$$

باستخدام شرط المبرهنة $\int_0^t \gamma(\tau) d\tau \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

نجد أن:

$$\left\| \int_0^t E_{\alpha,1}(-t-\tau)^\alpha f(\tau, x(\tau)) d\tau \right\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\|x_0\| E_{\alpha,1}(-t^\alpha) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{كما أن}$$

$$\Rightarrow F(x(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

كون F ضاغط حسب مبرهنة باناخ للنقطة الثابتة $F(x(t)) = x(t)$ إذن $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

إذاً الحل الصفري للمنظومة (5) مستقر.

مبرهنة (5): بفرض أنه لدينا المنظومة:

$$D_*^\alpha x(t) + x(t) = Ax(t) + I^\alpha f(t, x(t)) \dots\dots\dots (8)$$

مع الشرط الابتدائي: $x(0) = x_0$ ، $0 < \alpha \leq 1$

إنّ حل المنظومة (8) موجود ويعطى وفق العلاقة:

$$x(t) = E_{\alpha,1}(-t^\alpha) x_0 + A \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t-\tau)^\alpha x(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1} E_{\alpha,2\alpha}(-t-\tau)^\alpha f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

الإثبات: نطبق تحويل لابلاس على طرفي العلاقة (8) فنحصل على:

$$\mathbf{L} \left\{ D_*^\alpha x(t) \right\} + \mathbf{L} \left\{ x(t) \right\} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} \left\{ x(t) \right\} + \mathbf{L} \left\{ I^\alpha f(t, x(t)) \right\}$$

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1} x_0 + X(s) = \mathbf{A} X(s) + s^{-\alpha} F(s, x(s))$$

$$X(s) = x_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} + \mathbf{A} \frac{X(s)}{s^\alpha + 1} + \frac{1}{s^\alpha + 1} s^{-\alpha} F(s, x(s))$$

نطبق تحويل لابلاس العكسي:

$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ X(s) \right\} = \mathbf{L}^{-1} \left\{ x_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \right\} + \mathbf{L}^{-1} \left\{ \mathbf{A} \frac{X(s)}{s^\alpha + 1} \right\} + \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + 1} s^{-\alpha} F(s, x(s)) \right\}$$

$$x(t) = x_0 E_{\alpha,1}(-t^\alpha) + \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathbf{A}}{s^\alpha + 1} \right\} * \mathbf{L}^{-1} \left\{ X(s) \right\} + \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + 1} \right\} * \mathbf{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} F(s, x(s)) \right\}$$

$$x(t) = x_0 E_{\alpha,1}(-t^\alpha) + \mathbf{A} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha) * x(t) + t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha) * I^\alpha f(t, x(t))$$

$$= x_0 E_{\alpha,1}(-t^\alpha) + \mathbf{A} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-\tau)^\alpha) x(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-s)^\alpha) I^\alpha f(s, x(s)) ds$$

$$= x_0 E_{\alpha,1}(-t^\alpha) + \mathbf{A} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-\tau)^\alpha) x(\tau) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[(t-s)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha,\alpha}(-(t-s)^\alpha) \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right] ds$$

لنحسب التكامل:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[(t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-s)^\alpha) \int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right] ds$$

$$\mathbf{I} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \int_0^s (t-s)^{\alpha-1} (s-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-s)^\alpha) f(\tau, x(\tau)) d\tau ds$$

$$I = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau, x(\tau)) \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa + \alpha)} \int_\tau^t (t-s)^{\alpha\kappa + \alpha - 1} (s-\tau)^{\alpha-1} ds d\tau$$

حيث:

$$E_{\alpha, \alpha}(-(t-s)^\alpha) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa (t-s)^{\alpha\kappa}}{\Gamma(\alpha\kappa + \alpha)}$$

لنحسب التكامل:

$$I_1 = \int_\tau^t (t-s)^{\alpha\kappa + \alpha - 1} (s-\tau)^{\alpha-1} ds$$

$$ds = -dy \Leftrightarrow t-s = y \quad \text{بفرض}$$

إذا:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{t-\tau}^0 y^{\alpha\kappa + \alpha - 1} (t-\tau-y)^{\alpha-1} (-dy) = \int_0^{t-\tau} y^{\alpha\kappa + \alpha - 1} (t-\tau-y)^{\alpha-1} dy \\ &= (t-\tau)^{\alpha-1} \int_0^{t-\tau} y^{\alpha\kappa + \alpha - 1} \left(1 - \frac{y}{t-\tau}\right)^{\alpha-1} dy \end{aligned}$$

$$\frac{y}{t-\tau} = z \quad \text{باعتبار}$$

$$I_1 = (t-\tau)^{\alpha-1} \int_0^1 (t-\tau)^{\alpha\kappa + \alpha - 1} z^{\alpha\kappa + \alpha - 1} (1-z)^{\alpha-1} (t-\tau) dz$$

$$= (t-\tau)^{\alpha\kappa + 2\alpha - 1} \beta(\alpha\kappa + \alpha, \alpha) = (t-\tau)^{\alpha\kappa + 2\alpha - 1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha\kappa + \alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha\kappa + 2\alpha)}$$

نعوض فنحصل على:

$$I = \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1} \cdot \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-(t-\tau)^\alpha)^\kappa}{\Gamma(\alpha\kappa + 2\alpha)} f(\tau, x(\tau)) d\tau = \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1} E_{\alpha, 2\alpha}(-(t-\tau)^\alpha) f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

إذن حل المنظومة المدروسة

$$x(t) = E_{\alpha,1}(-t^\alpha)x_0 + A \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-\tau)^\alpha) x(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1} E_{\alpha,2\alpha}(-(t-\tau)^\alpha) f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

مبرهنة (6): بفرض أنه لدينا التابع المستمر: $f: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

والذي يحقق الشرط $f(t, 0) = 0$ وبفرض وجود تابع موجب: $\gamma(t)$ فإذا تحققت الشروط التالية:

$$1) \|f(t, x)\| \leq \gamma(t) \cdot \|x\|$$

$$2) \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1} \gamma(\tau) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

وبفرض أنّ المصفوفة A مستقرة (القيم الذاتية لـ A قسمها الحقيقي سالب)، عندئذ الحل الصفري للمنظومة (8) مستقر.

الإثبات: إنّ حل المنظومة (8) يعطى بالشكل:

$$x(t) = E_{\alpha,1}(-t^\alpha)x_0 + A \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-\tau)^\alpha) x(\tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1} E_{\alpha,2\alpha}(-(t-\tau)^\alpha) f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

بأخذ تنظيم الطرفين نحصل على:

$$\|x(t)\| \leq \|E_{\alpha,1}(-t^\alpha)x_0\| + \|A\| \int_0^t \|(t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(t-\tau)^\alpha)\| \cdot \|x(\tau)\| d\tau + \int_0^t \|E_{\alpha,2\alpha}(-(t-\tau)^\alpha)\| (t-\tau)^{2\alpha-1} \gamma(\tau) \|x(\tau)\| d\tau$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \leq \|x_0\| + M_1 \cdot \|A\| \int_0^t \|x(\tau)\| d\tau + M_2 \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1} \gamma(\tau) \|x(\tau)\| d\tau$$

حسب متراجحة جرونوال:

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| \exp\left(\int_0^t (M_2(t-\tau)^{2\alpha-1} \gamma(\tau) + M_1 \cdot \|A\|) d\tau\right)$$

نجد باستخدام شرط المبرهنة $\int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1} \gamma(\tau) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

$$M_2 \int_0^t (t-\tau)^{2\alpha-1} \gamma(\tau) d\tau \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

وحيث أن A مصفوفة مستقرة $e^{\int_0^t \|A\| M_1 d\tau} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

حيث أن: M_1, M_2 ثوابت موجبة.

مما سبق نجد بأن $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ ، إذاً الحل الصفري للمنظومة (8) مستقر.

مثال (1): بفرض أنه لدينا منظومة المعادلات التفاضلية الكسرية:

$$D_*^\alpha x(t) + x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)) \quad ; x(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

مع الشرط الابتدائي: $x(0) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, f(t, x(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{11}{4}} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}(t+1)^{-\frac{11}{4}} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \alpha = \frac{1}{2}$$

نلاحظ أن: $f(t, 0) = 0$

$$\|f(t, x(t))\| = \sqrt{\frac{1}{2} \left((t+1)^{-\frac{11}{4}} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left((t+1)^{-\frac{11}{4}} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2} \leq \gamma(t) \cdot \|x\|$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{2} (t+1)^{-\frac{11}{4}} \quad \text{حيث أن:}$$

كما أن:

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \gamma(s) ds = \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (s+1)^{-\frac{11}{4}} ds \leq \frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{11}{4}} ds = \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{5}{4}\right)} t^{-\frac{9}{4}}$$

حيث أن:

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{7}{4}\right) \Gamma\left(-\frac{7}{4}\right) \quad , \quad \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right) \left(-\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \gamma(s) ds = \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(-\frac{5}{4}\right)} = \frac{5\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{42\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \sqrt{\pi} t^{-\frac{9}{4}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \gamma(s) ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{إذاً:}$$

والحل مستقر بحسب المبرهنة (3)

مثال (2): بفرض أنه لدينا منظومة المعادلات التفاضلية التكاملية الكسرية:

$$D_*^\alpha x(t) + x(t) = Ax(t) + I^\alpha f(t, x(t)) \quad ; \quad x(x_1(t), x_2(t))^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, f(t, x(t)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(t+1)^{-\frac{3}{4}} \frac{|x_1(t)|}{1+|x_1(t)|} \\ \frac{1}{5}(t+1)^{-\frac{3}{4}} \frac{|x_2(t)|}{1+|x_2(t)|} \end{pmatrix}, \alpha = \frac{1}{4}$$

نلاحظ بأن: $f(t, 0) = 0$

$$\begin{aligned} \|f(t, x(t))\|^2 &= \left(\frac{1}{5}(t+1)^{-\frac{3}{4}} \frac{|x_1(t)|}{1+|x_1(t)|} \right)^2 + \left(\frac{1}{5}(t+1)^{-\frac{3}{4}} \frac{|x_2(t)|}{1+|x_2(t)|} \right)^2 \\ &\leq \left[\frac{1}{5}(1+t)^{-\frac{3}{4}} \right]^2 \left[|x_1(t)|^2 + |x_2(t)|^2 \right] = \left[\frac{1}{5}(1+t)^{-\frac{3}{4}} \right]^2 \|x\|^2 \\ \Rightarrow \|f(t, x(t))\| &\leq \left[\frac{1}{5}(1+t)^{-\frac{3}{4}} \right] \|x\| ; \gamma(t) = \frac{1}{5}(1+t)^{-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\int_0^t (t-s)^{2\alpha-1} \gamma(s) ds = \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{5} (s+1)^{-\frac{3}{4}} ds \leq \frac{1}{5} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{3}{4}} ds = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{5\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} t^{-\frac{1}{4}}$$

$$\int_0^t (t-s)^{2\alpha-1} \gamma(s) ds \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{إذاً:}$$

والحل مستقر حسب المبرهنة (6).

الخلاصة:

من خلال هذه الدراسة توصلنا إلى إمكانية تطبيق مبدأ النقطة الثابتة لباناخ المستخدم في دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة $n \in \mathbb{N}$ على دراسة استقرار حل جملة معادلات تفاضلية من مرتبة كسرية

- [1].Abu Skhail, E. and Mater, M. M., 2018-On Stability Of Nonautonomous Perturbed Semilinear Fractional Differential Systems Of Order $\alpha \in (1,2)$, Journal Of Mathematics, 2018(1): 10p.
- [2].Agarwal, R. P, Li, C., Qian, M. and Wong, J. Y., 2010- Stability Analysis Of Fractional Differential System With Riemann-Liouville Derivative, Mathematical And Computer Modeling, 52: 862-874.
- [3].Concezzi, M. and Spigler, R., 2015-Some Analytical And Numerical Properties Of The Mittag Leffler Functions, Fractional Calculus And Applied Analysis, 18(1): 64-94.
- [4].Chen, F. and Zhou, Y., 2011-Attractivity Of Fractional Differential Equations, Computers And Mathematics With Applications, 62: 1359-1369.
- [5].Hilfer, R., 2000-Applications Of Fractional Calculus In Physics, World Scientific, Germany, 472p.
- [6].Li, C. and Zhang, F., 2011-Stability Analysis Of Fractional Differential Systems With Order Lying In (1,2), Advances In Difference Equations, 17p.
- [7].Magin, R. L., 2010-Fractional Calculus Models Of Complex Dynamics In Biological Tissues, Computers And Mathematics With Applications, 59(5): 1586- 1593.
- [8].Oldham, K.B.,2010-Fractional Differential Equations In Electrochemistry, Advances In Engineering Software, 41(1): 9-12.
- [9].Podlubny, I., 1999-Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 340p.
- [10].Seemb, A. and UR Rehman, M., 2018-Exitence And Stability Analysis By Fixed Point Theorems For A Class Of Non Linear Caputo Fractional Differential Equations, Dynamic systems and applications, 27(3): 445-456.

[11]. ZHOU, Y., 2009-Existence And Uniqueness Of Solutions For A System Of Fractional Differential Equations, An International Journal For Theory And Applications, 12(2): 195-204

تعميم طريقة متجه تشيفر في حل مسائل الحالة المستوية، الأولى لانفعالات الجسم الصلب المرن الخاضع لحرارة

أ.د. منتجب الحسن¹

ط. علي جودت لولو²

ملخص البحث:

يتعلق البحث بالنموذج الرياضي للحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم الصلب دقيق الاستقطاب، والمتجانس، والمتماثل المناحي والخاضع لحرارة، والمناقش رياضياً من خلال الباحثين إرينغين [1] و ونوفاتسكي [2]، والذي يرمز له اختصاراً بـ $2D(E-N:6)$.

في البحث سنعمم طريقة متجه تشيفر لحل مسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية للجسم $2D(E-N:6)$ الخاضع لحرارة، والذي يشغل في لحظة البدء منطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية R^2 . في النهاية سنهي البحث باقتراح عدد من المسائل للمناقشة.

¹ أستاذ في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

² خريج ماجستير من قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

Generalizing the Schaefer vector method for solving first plane state problems of micropolar elastic solid subjected to temperature field

Prof. Mountajab Al-Hasan [†] & Ali Jawdat Loulou [‡]

Abstract

This paper concerns the mathematical model of first plane state of elastic strains of micropolar homogeneous and isotropic solid, subjected to temperature field, mathematically discussed by Eringen [1] and Nowacki [2], and shortly called 2D (E-N:6).

In this paper, we generalize the Schaefer vector method to solve the Lamé initial-boundary value problem for the 2D (E-N:6) body, subjected to temperature field for which initial configuration is simple-connected region Ω in the Euclidean manifold R^2 . Finally, we end this paper by suggesting new problems for discussing.

[†] Professor At Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.

[‡] Master Student At Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.

Key words: Schaefer vector method , the Lamé initial-boundary value problem for the 2D (E-N:6) body subjected to temperature field.

1. مقدمة:

في [4] استُخدمت طريقة متجه تشيفر، في حل مسائل القيم الحدية لمعادلات لامي ضمن الحالة المستوية الأولى لانفعالات الجسم (E-N:6)، وذلك انطلاقاً من متجه تشيفر:

$$\zeta \equiv \left(0, 0, \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} u_{\beta, \alpha} \right)$$

حيث: $(\alpha, \beta = 1, 2)$ ، وحيث $\epsilon_{\alpha\beta}$ هو تتسور ليفي- تشيفيتا النسبي على الفضاء الاقليدي ثنائي البعد R^2 . بعدها تم وبنفس الطريقة، حل مسائل القيم الحدية لمعادلات لامي للحالة ثنائية البعد للانفعالات المرنة للجسم من النموذج (E-N:6)، حيث الانفعالات المرنة متناظرة محورياً (انظر مثلاً: [5,7])، كما أشار نفس الباحثين إلى إمكانية حل نفس هذه المسائل، أي مسائل القيم الحدية لمعادلات لامي للحالة ثنائية البعد وكذلك الحالة ثلاثية البعد للانفعالات المرنة للجسم من النموذج (E-N:6)، بوجود حقل درجات حرارة، وبوجود حقل لدونة. وفي عام 2004 قام الباحث ديشليفيتش في [3] باستخدام طريقة متجه تشيفر، في حل مسائل القيم الحدية والابتدائية لمعادلات لامي للحالة المستوية الأولى لانفعالات المرنة للجسم من نموذج (E-N:6)، بما يتوافق مع الحالة الديناميكية، المتساوية درجات الحرارة لهذا الجسم.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى تعميم طريقة متجه تشيفر [3] إلى حل مسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية للجسم (E-N:6) 2D، المتجانس والمتماثل المناحي والخاضع لحرارة، ويشغل في لحظة البدء منطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية R^2 .

3. طرق البحث:

سنستخدم طريقة تمثل تعميماً لطريقة متجه تشيفر الموجودة في إلى الحالة الترموديناميكية للجسم (E-N:6) 2D، المتجانس والمتماثل المناحي والخاضع لحرارة. من أجل متطلبات البحث، سنعرض بدايةً وبشكل مختصر، نتائج البحث [3] المتمثلة بالنموذج الرياضي التقليدي ونموذج لامي الرياضي للجسم (E-N:6) 2D، الخاضع لحرارة، والذي سنفرض أنه متجانس ومتماثل المناحي ويشغل في لحظة البدء منطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الإقليدية R^2 .

تعميم طريقة متجه تشيفر في حل مسائل الحالة المستوية، الأولى لانفعالات الجسم الصلب
المرن الخاضع لحرارة

3-1 مسألنا الوصف التقليدي ووصف لامي للحالة الترموديناميكية للجسم المرن
(6-N:E) 2D، المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية
الأولى للانفعالات المرنة، حيث يشغل الجسم في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω
في المتنوعة الإقليدية ثنائية البعد R^2 :

توطئة: سنفترض أن جميع الأدلة الإغريقية $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ تأخذ القيم 1, 2،
وسنعمد رموز Einstein في المتنوعة الإقليدية ثنائية البعد R^2 ، ولتكن $Ox_1 x_2 x_3$
جملة إحداثية ديكارتية قائمة، ومباشرة، وعطالية، وقاعدتها هي (e_1, e_2, e_3) .
لأجل الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم المدروس، تكون كافة المقاطع
التسورية الحاكمة للحالة الترموديناميكية للجسم المعتبر، تكون مستقلة عن الاحداثي
الديكارتي الثالث x_3 ، حيث توصف العملية الترموديناميكية للجسم المعتبر المتجانس
والمتماثل المناحي بواسطة مجموعة المقاطع التسورية:

$(\mathbf{u}, \varphi, \theta, \sigma, \mu, \gamma, \kappa)$ ، حيث أن: \mathbf{u} و φ مقطعان متجهيان مستقلان، وهما
على الترتيب، مقطع الإزاحات ومقطع التوجهات، و $\theta := T - T_0$ حقل سلمي؛ يمثل
تغير حقل الحرارة؛ حيث T الحرارة المطلقة في الجسم و T_0 حرارة الحالة الطبيعية له.
إضافةً إلى ماتقدم ذكره فإن: $\sigma, \mu, \gamma, \kappa$ ، مقاطع تسورية من المرتبة الثانية، هي
على الترتيب: مقطع إجهادات القوة، ومقطع إجهادات العزم، ومقطع الانفعالات، ومقطع
الانفعالات دقيقة الاستقطاب. وإذا رمزنا بـ $[0, \infty[$ و $]0, \infty[$ ، و $T := [0, \infty[$ ،
فيمكن أن تمثل الحقول السابقة في $\Omega \times T^+$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي e_i ، بالشكل:

$$\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, 0), \quad \varphi \equiv (0, 0, \varphi_3) \quad (3.1)$$

$$\gamma \equiv \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa_{13} \\ 0 & 0 & \kappa_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad \mu \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

حيث:

$$\sigma_{33} = \nu \sigma_{\alpha\alpha} - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \nu_T \theta, \quad \mu_{3\alpha} = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \mu_{\alpha 3} \quad (3.4)$$

كما أن: $\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$ تمثل نسبة بواسون، و $\nu_T = (3\lambda + 2\mu) a_t$ و a_t يمثل

معامل التمدد الخطي الحراري للجسم، و $\varepsilon, \gamma, \lambda, \mu \in R_+$ تمثل ثوابت مادية للجسم المدروس، أخيراً ننوه إلى أن جميع المركبات الموجودة في العلاقات السابقة تتبع للموضع: $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2) \in \Omega$ وللزمن t .

أولاً) الوصف التقليدي: يتألف الوصف التقليدي للحالة الترموديناميكية للجسم $2D(E-N:6)$ المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، يتألف من المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [3]:
معادلات الحركة، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma_{\beta\alpha, \beta} + X_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \mu_{\beta 3, \beta} + Y_3 = J \ddot{\varphi}_3 \quad (3.5)$$

حيث: J, ρ ، على الترتيب تمثلان الكثافة الحجمية والعتالة الدورانية للجسم المعتبر و $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, 0)$ هو مقطع القوة الحجمية و $\mathbf{Y} \equiv (0, 0, Y_3)$ مقطع العزم الحجمي. نرمز بواسطة الفاصلة الدليلية للمشتق الجزئي بالنسبة لمنحولات الموضع: $f_{, \beta} = \frac{\partial f}{\partial x_\beta}$ ، كما نرمز بالنقطة للمشتق الجزئي بالنسبة للزمن: $\dot{f} \equiv \partial f / \partial t$. أخيراً

الرموز $\varepsilon_{\alpha\beta}$ تمثل المركبات الديكارتية لتتسور ليفي- تشيفيتا، النسبي، من المرتبة الثانية.

معادلات انسجام الانفعالات، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\kappa_{23, 1} - \kappa_{13, 2} = 0, \quad \kappa_{13} - \gamma_{21, 1} + \gamma_{11, 2} = 0, \quad (3.6)$$

$$\kappa_{23} + \gamma_{12, 2} - \gamma_{22, 1} = 0$$

العلاقات الهندسية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = u_{\beta, \alpha} + \varepsilon_{\beta\alpha} \varphi_3, \quad \kappa_{\alpha 3} = \varphi_{3, \alpha} \quad (3.7)$$

العلاقات التأسيسية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\sigma_{\alpha\beta} = (\mu + \alpha) \gamma_{\alpha\beta} + (\mu - \alpha) \gamma_{\beta\alpha} + (\lambda e_1 - \nu_T \theta) \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.8)$$

$$\mu_{\alpha 3} = (\gamma + \varepsilon) \kappa_{\alpha 3}$$

تعميم طريقة متجه تشيفر في حل مسائل الحالة المستوية، الأولى لانفعالات الجسم الصلب
المرن الخاضع لحرارة

حيث $\alpha \in R_+$ الثابت المادي الخامس للجسم، و $e_1 = \gamma_{\varepsilon\varepsilon}$ ، أما $\delta_{\alpha\beta}$ فهو رمز دلتا كرونكا،

معادلات الحرارة والانفعال، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\theta_{,\alpha\alpha} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} - \eta_0 \dot{e}_1 = -\frac{Q}{\kappa} \quad (3.9)$$

$$Q = \frac{\kappa W}{\lambda_0}, \quad \kappa = \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}, \quad \eta_0 = \frac{v_T T_0}{\lambda_0} \quad \text{حيث :}$$

علماً أن Q يمثل المصادر الحرارية في الجسم المعتبر، و W كمية الحرارة المشكلة في وحدة الحجم ووحدة الزمن، و λ_0 معامل التوصيل الحراري، و c_ε تمثل الحرارة النوعية من أجل تشوه ثابت، كما أن: $\dot{e}_1 = \dot{\gamma}_{\varepsilon\varepsilon}$

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\sigma_{\beta\alpha} n_\beta = p_\alpha, \quad \mu_{\alpha 3} n_\alpha = m_3, \quad \theta = \vartheta \quad (3.10)$$

حيث التتابع $[(p_\alpha, m_3, \vartheta) : \partial\Omega \times T \rightarrow R]$ معروفة، و $\partial\Omega$ هي الحدود الملساء للمنطقة Ω ($\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$)، أما n_β فهي المركبات الديكارتيّة لمتجه واحدة الناظم على $\partial\Omega$ ، والموجه نحو خارج $\partial\Omega$.

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_\alpha = f_\alpha, \quad \varphi_3 = f_3, \quad \theta = l, \quad \dot{u}_\alpha = g_\alpha, \quad \dot{\varphi}_3 = g_3 \quad (3.11)$$

حيث التتابع $[(f_\alpha, f_3, l, g_\alpha, g_3) : \Omega \rightarrow R]$ معروفة.

ثانياً) وصف لامي: يتألف وصف لامي للحالة الترموديناميكية للجسم (E-N:6) 2D المتجانس والمتماثل المناحي، والخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى لانفعالات المرنة، يتألف من المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [3]:

معادلات لامي للحركة، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\square_2 u_\alpha + (\lambda + \mu - \alpha) u_{\beta,\beta\alpha} + 2\alpha \varepsilon_{\alpha\gamma} \varphi_{3,\gamma} - v_T \theta_{,\alpha} + X_\alpha = 0 \quad (3.12)$$

$$\square_4 \varphi_3 + 2\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} + Y_3 = 0, \quad (3.13)$$

$$D \theta - \eta_0 \dot{u}_{\varepsilon,\varepsilon} = -\frac{Q}{\kappa} \quad (3.14)$$

حيث: $\square_4 = (\gamma + \varepsilon) \Delta_1 - 4\alpha - J \partial_t^2$ و $\square_2 = (\mu + \alpha) \Delta_1 - \rho \partial_t^2$ و $D = \Delta_1 - \frac{1}{\kappa} \partial_t$ و Δ_1 هو مؤثر لابلاس الاشتقاقي السلمي ثنائي البعد:

$$(\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2})$$

العلاقات الهندسية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = u_{\beta,\alpha} + \varepsilon_{\beta\alpha} \varphi_3, \quad \kappa_{\alpha 3} = \varphi_{3,\alpha} \quad (3.15)$$

العلاقات التي تعطي الإجهادات بدلالة الإزاحات والحرارة والدورانات، والمحققة

في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma_{\alpha\beta} = (\mu + \alpha) u_{\beta,\alpha} + (\mu - \alpha) u_{\alpha,\beta} - 2\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} \varphi_3 + (\lambda u_{\varepsilon,\varepsilon} - \nu_T \theta) \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.16)$$

$$\mu_{\alpha 3} = (\gamma + \varepsilon) \varphi_{3,\alpha} \quad (3.17)$$

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$[(\mu + \alpha) u_{\alpha,\beta} + (\mu - \alpha) u_{\beta,\alpha} - 2\alpha \varepsilon_{\beta\alpha} \varphi_3] n_\beta + (\lambda u_{\varepsilon,\varepsilon} - \nu_T \theta) n_\alpha = p_\alpha, \quad (3.18)$$

$$(\gamma + \varepsilon) \varphi_{3,\alpha} n_\alpha = m_3, \quad \theta = \vartheta \quad (3.19)$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_\alpha = f_\alpha, \quad \varphi_3 = f_3, \quad \theta = \ell, \quad \dot{u}_\alpha = g_\alpha, \quad \dot{\varphi}_3 = g_3 \quad (3.20)$$

4. النتائج والمناقشة:

فيمايلي سنناقش تعميم طريقة متجه تشيفر [3.pp.217] إلى حل مسألة لامبي للجسم 2D (E-N:6) الخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، باتباع الآتي:

بتعويض المركبة: $\zeta_3 = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} - \varphi_3$ لمتجه تشيفر: $\zeta_3 \equiv (0, 0, \zeta_3)$ في

المعادلتين (3.12) و (3.13)، من ثم بالاستفادة من العلاقة:

$$\varepsilon_{\alpha\gamma} \varepsilon_{\varepsilon\delta} = \delta_{\alpha\varepsilon} \delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\gamma\varepsilon} \quad (4.1)$$

تعميم طريقة متجه تشيفر في حل مسائل الحالة المستوية، الأولى لانفعالات الجسم الصلب
المرن الخاضع لحرارة

نحصل على المعادلتين التاليتين المحققتين في $\Omega \times T^+$:

$$\square_2^* u_\alpha + (\lambda + \mu) u_{\beta, \beta \alpha} - \nu_T \theta_{, \alpha} + X_\alpha = 2\alpha \in_{\alpha \gamma} \zeta_{3, \gamma} \quad (4.2)$$

$$\square_4^* \in_{\alpha \beta} u_{\beta, \alpha} + 2Y_3 = 2 \square_4 \zeta_3 \quad (4.3)$$

حيث \square_2^* و \square_4^* ، على الترتيب هما \square_2 و \square_4 بعد تعويض $\alpha = 0$.

لنفترض الآن أن:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_\alpha^0 + u'_\alpha, \quad \varphi_3 = \varphi_3^0 + \varphi'_3, \quad \theta = \theta^0 + \theta', \\ \zeta_3 &= \zeta_3^0 + \zeta'_3, \quad Y_3 = Y_3^0 + Y'_3, \end{aligned} \quad (4.4)$$

حيث المقاطع: $u_\alpha^0, \varphi_3^0, \theta^0$ تتعلق بجسم هوك ضمن المرونة التقليدية المترابطة مع حقل حراري. عندئذٍ بوضع: $\zeta_i^0 = 0$ ، نصل إلى مسألة القيم الحدية-الابتدائية للجسم في إطار المرونة الخطية التقليدية المترابطة مع حقل حرارة، حيث نحصل من المعادلة

(4.2) على معادلات لامي التقليدية التالية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\square_2^* u_\alpha^0 + (\lambda + \mu) u_{\beta, \beta \alpha}^0 - \nu_T \theta^0_{, \alpha} + X_\alpha = 0 \quad (4.5)$$

إن المعادلة (4.5) مترابطة مع المعادلة (3.14)، التي هنا لأجل: θ^0, u_α^0 تأخذ الشكل التالي في $\Omega \times T^+$:

$$D \theta^0 - \eta_0 \dot{u}_{\varepsilon, \varepsilon}^0 = -\frac{Q}{\kappa} \quad (4.6)$$

إلى ذلك نضيف الشروط الحدية والابتدائية، التقليدية التالية، التي نحصل عليها من الشروط الحدية والابتدائية (3.10) و (3.11):

الشروط الحدية المحققة على $\partial \Omega \times T$:

$$\sigma_{\beta \alpha}^0 n_\beta = p_\alpha, \quad \theta^0 = \vartheta \quad (4.7)$$

حيث $\sigma_{\beta \alpha}^0$ هي المركبات الديكارتية لمقطع الإجهادات التقليدي σ^0 .

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_\alpha^0 = f_\alpha, \quad \theta^0 = \ell, \quad \dot{u}_\alpha^0 = g_\alpha \quad (4.8)$$

الآن من المعادلة (4.3) ، لأجل $(\zeta_3^0 = 0$ و $Y_3^0 = 0)$ ، تفصل أو تخرج المعادلة التالية، المحققة في: $\Omega \times T^+$:

$$2 \square_2^* \varphi_3^0 + \epsilon_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} = 0 \quad (4.9)$$

الناجمة عن المعادلة (4.5)، والعلاقة التقليدية:

$$2\varphi_3^0 = \epsilon_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha}^0 \quad (4.10)$$

من نظام المعادلات (4.2) و(4.3) و(3.14) و(4.5) و(4.6) و(4.9) نحصل على جملة المعادلات التالية المحققة في $\Omega \times T^+$ لأجل θ' ، ζ_3 ، u'_α :

$$\square_2^* u'_\alpha + (\lambda + \mu) u'_{\beta,\beta} - \nu_T \theta'_{,\alpha} + \hat{X}_\alpha = 2\alpha \epsilon_{\alpha\gamma} \zeta_{3,\gamma} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \square_4^* \epsilon_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha} + 2\bar{Y}_3 - 2 \square_4 \zeta_3 = \\ = 2(\gamma + \epsilon) (c_4^{-2} - \hat{c}_2^{-2}) \ddot{\varphi}_3^0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$D \theta' - \eta_0 \dot{u}'_{\epsilon,\epsilon} = -\frac{\hat{Q}}{\kappa} \quad (4.13)$$

حيث:

$$c_4^2 = \frac{\gamma + \epsilon}{J} , \hat{c}_2^2 = \frac{\mu}{\rho} , \hat{X}_\alpha = 0 , \hat{Q} = 0 , \quad (4.14)$$

$$\bar{Y}_3 = Y_3 - \frac{\gamma + \epsilon}{2\mu} \epsilon_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha}$$

إلى جملة المعادلات (4.13) - (3.12) نضيف الشروط الحدية والابتدائية التالية:

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\sigma'_{\beta\alpha} n_\beta = 0 , \mu'_{\alpha 3} n_\alpha = m_3 - m_3^0 , \theta' = 0 \quad (4.15)$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u'_\alpha = 0 , \varphi'_3 = f_3 - f_3^0 , \theta' = 0 , \dot{u}'_\alpha = 0 , \dot{\varphi}'_3 = g_3 - g_3^0 \quad (4.16)$$

حيث المقادير: m_3^0 و f_3^0 و g_3^0 تنتج عن حل مسألة القيم الحدية والابتدائية التقليدية (4.8) - (4.5) وعن العلاقات التقليدية:

تعميم طريقة متجه تشيفر في حل مسائل الحالة المستوية، الأولى لانفعالات الجسم الصلب
المرن الخاضع لحرارة

$$\begin{aligned} \varphi_3^0 &= \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha}^0, \quad \kappa_{\alpha 3}^0 = \varphi_{3,\alpha}^0, \\ \mu_{\alpha 3}^0 &= (\gamma + \varepsilon) \kappa_{\alpha 3}^0, \quad m_3^0 = \mu_{\alpha 3}^0 n_\alpha \end{aligned} \quad (4.17)$$

حيث:

$$f_3^0(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_3^0(\mathbf{x}, t), \quad g_3^0(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \varphi_3^0}{\partial t}(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.18)$$

إن المعادلات (4.6)-(4.5) و (4.13)-(4.11) مرتبطة ليس فقط عبر الشروط

الحدية والابتدائية (4.16)-(4.15)، وإنما أيضاً من خلال ظهور الدوران التقليدي:

$$\varphi_3^0 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha}^0 \text{ أمام المؤثر: } \partial_t^2 (c_4^{-2} - \hat{c}_2^{-2}), \text{ في المعادلة (4.12).}$$

آلية حل المسألة: تتلخص آلية حل المسألة (3.1)-(3.11) بالخطوات الثلاث التالية:

أولاً: بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية، التقليدية، نحصل على الإزاحات التقليدية u_α^0 والحقل الحراري التقليدي θ^0 . باستخدام العلاقات $(4.17)_{1,2}$ نحصل على الدوران

التقليدي φ_3^0 وعلى انفعال العزم التقليدية $\kappa_{\alpha 3}^0$. باستخدام العلاقة $(4.17)_3$ نحصل على

انفعالات العزم التقليدية $\mu_{\alpha 3}^0$. أما باستخدام $(4.17)_4$ و (4.18) فنحصل، على الترتيب،

على كل من m_3^0 و f_3^0 و g_3^0 . أما باستخدام العلاقات الهندسية $(3.7)_1$ ، مكتوبةً بالنسبة

للإزاحات التقليدية u_α^0 والانفعالات التقليدية $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ ، نحصل على الانفعالات التقليدية $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$.

وباستخدام العلاقة $(3.8)_1$ ، مكتوبةً بالنسبة للانفعالات التقليدية $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ والحقل الحراري

التقليدي θ^0 والإجهادات التقليدية $\sigma_{\alpha\beta}^0$ ، نحصل على الإجهادات التقليدية $\sigma_{\alpha\beta}^0$.

ثانياً: وبحل مسألة القيم الحدية والابتدائية المتممة (4.16)-(4.11)، نحصل على الحل

المتمم: $\theta', \varphi'_3, u'_\alpha$. باستخدام العلاقات الهندسية (3.7) مكتوبةً بالنسبة للإزاحات

المتممة u'_α والدوران المتمم φ'_3 والانفعالات المتممة $\gamma'_{\alpha\beta}$ و $\kappa'_{\alpha 3}$ ، فإننا نحصل على

الانفعالات المتممة المذكورة. وباستخدام العلاقات التأسيسية (3.8) ، مكتوبةً بالنسبة

للانفعالات المتممة $\gamma'_{\alpha\beta}$ و $\kappa'_{\alpha 3}$ والحقل الحراري المتمم θ' ، و الإجهادات المتممة $\sigma'_{\alpha\beta}$

و $\mu'_{\alpha 3}$ ، فإننا نحصل على الإجهادات المتممة $\sigma'_{\alpha\beta}$ و $\mu'_{\alpha 3}$.

ثالثاً: بعد الحصول على جميع الحقول الفيزيائية التقليدية والتممة ، نعوض في:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_\alpha^0 + u'_\alpha , & \varphi_3 &= \varphi_3^0 + \varphi'_3 , & \theta &= \theta^0 + \theta' , \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \gamma'_{\alpha\beta} , & \kappa_{\alpha 3} &= \kappa_{\alpha 3}^0 + \kappa'_{\alpha 3} , \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \sigma_{\alpha\beta}^0 + \sigma'_{\alpha\beta} , & \mu_{\alpha 3} &= \mu_{\alpha 3}^0 + \mu'_{\alpha 3} \end{aligned} \quad (4.19)$$

ونستخدم العلاقة (3.4)، فنحصل على الحل $(\mathbf{u}, \varphi, \theta, \sigma, \mu, \gamma, \kappa)$ لمسألة القيم الحدية والابتدائية (3.11)-(3.1).

فيمايلي سنستنتج النظام المعادلاتي الاشتقاقي الجزئي لأجل المقاطع: $\theta', \varphi'_3, u'_\alpha$ ،

والذي لا يحتوي الدوران التقليدي φ_3^0 . ولهذا الغرض نطبق المؤثر \square_2^* على طرفي

المعادلة (4.3)، فنحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\square_2^* (\square_4^* \in_{\alpha\beta} u_{\beta, \alpha} + 2Y_3 - 2\square_4^* \zeta_3) = 0 \quad (4.20)$$

الآن عن المعادلة (4.20) ، لأجل $(\zeta_3^0 = 0$ و $Y_3^0 = 0)$ ، تنفصل أو تخرج المعادلة التالية، المحققة في $\Omega \times (0, \infty)$:

$$\square_4^* (2\square_2^* \varphi_{3+}^0 \in_{\alpha\beta} X_{\beta, \alpha}) = 0 \quad (4.21)$$

والمحققة على التطابق في $\Omega \times T^+$ ، وينتج ذلك من تحقق المعادلة (4.9) في $\Omega \times T^+$

الآن، ينتج من المعادلات (4.2) و (4.20) ومعادلة التوصيل الحراري (3.14)، أن

جملة المعادلات التالية محققة في $\Omega \times T^+$ ، لأجل $\theta', \zeta_3, u'_\alpha$:

$$\square_2^* u'_\alpha + (\lambda + \mu) u'_{\beta, \beta \alpha} - \nu_T \theta'_{, \alpha} + \hat{X}_\alpha = 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \zeta_{3, \gamma} , \quad (4.22)$$

$$\square_2^* (\square_4^* \in_{\alpha\beta} u'_{\beta, \alpha} - 2\square_4^* \zeta_3) + 2\hat{Y}_3 = 0 , \quad (4.23)$$

$$D \theta' - \eta_0 u'_{\varepsilon, \varepsilon} = -\frac{\hat{Q}}{\kappa} \quad (4.24)$$

حيث:

$$\hat{Y}_3 = \square_2^* Y_3 - \frac{1}{2} \square_4^* \epsilon_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} \quad (4.25)$$

ونلاحظ هنا اختفاء الدوران التقليدي φ_3^0 من جملة المعادلات السابقة. أخيراً باستخدام العلاقة:

$$\zeta_3 = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha} - \varphi'_3 \quad (4.26)$$

تأخذ جملة المعادلات (4.22)-(4.24) الشكل التالي في $\Omega \times T^+$ ، لأجل

$$: u'_\alpha, \varphi'_3, \theta'$$

$$\square_2 u'_\alpha + (\lambda + \mu - \alpha) u'_{\beta,\beta\alpha} + 2\alpha \epsilon_{\alpha\gamma} \varphi'_{3,\gamma} - \nu_T \theta'_{,\alpha} + \hat{X}_\alpha = 0 \quad (4.27)$$

$$\square_2^* (\square_4 \varphi'_3 + 2\alpha \epsilon_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha}) + \hat{Y}_3 = 0 \quad (4.28)$$

$$D \theta' - \eta_0 u'_{\epsilon,\epsilon} = -\frac{\hat{Q}}{\kappa} \quad (4.29)$$

إلى جملة المعادلات السابقة نضيف الشروط الحدية والابتدائية (4.15)-(4.16).

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولاً) الاستنتاجات: في البحث عممنا طريقة متجه تشيفر المستخدمة في [4] إلى حل مسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية للجسم $2D(E-N:6)$ ، المتجانس والمتمائل المناحي، والخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى لانفعالات المرنة، حيث يشغل الجسم في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω في المتنوعة الاقليدية ثنائية البعد R^2 ، وتكمن أهمية ذلك بأن المسألة الأصلية تؤول إلى مجموع مسألتين حلها أسهل من حل المسألة الأصلية.

ثانياً) المقترحات: يمكن أن نختتم هذا البحث بمسائل للمناقشة، هي الآتية:

مسألة 1: إعادة نفس الدراسة لأجل الوصف التقليدي العام ضمن الحالة المستوية الثانية (الحالة المستوية العكسية) لانفعالات المرنة للجسم.

مسألة 2: تعميم طريقة Papkovitch-Neuber إلى حل مسألتين الحالة المستوية الأولى والثانية لانفعالات المرنة للجسم $2D(E-N:6)$ ، المتجانس والمتمائل المناحي، والخاضع لحرارة، حيث الجسم يشغل في لحظة البدء المنطقة Ω بسيطة الترابط في R^2 .

مسألة 3: إعادة ماتقدم ذكره إلى المسألتين الأولى والثانية لانفعالات اللدنة.

المراجع

- [1] – Eringen , A . C , **1966** - Linear theory of micropolar elasticity, J.Math. Mech., 15 , 909 – 930.
- [2] –Nowacki, W , **1986** - Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.
- [3]- Dyszlewicz , J, **2004** - Micropolar Theory of Elasticity , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .
- [4]-Dyszlewicz J., **1973** - A method of solving static problems of linear asymmetric elasticity,Mech. Teor. Stos., **11,2,143158** (in Polish).
- [5]-Dyszlewicz J., Matysiak S., **1973**- Singularity of stresses in micropolar elastic semispace due to discontinuous boundary load, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci.Techn., 21, 12, 605-610.
- [6]–Dyszlewicz , J ,1996 - Selected problems of linear asymmetrical thermoelasticity, Journal of Thermal Stresses,19, 185-206.
- [7]-Dyszlewicz , J ,1986-Fundamental solutions of micropolar elastostatics , Bull. Pol. Ac.: Tech. , I-1986 , 34 , 179-190 ; II-1986 , 34 , 191-202.

تعميم طريقة متجه تشيفر في حل مسائل الحالة المستوية، الأولى لانفعالات الجسم الصلب
المرن الخاضع لحرارة
