مجلة جامعة البعث

سلسلة العلوم الأساسية

مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 42 . العدد 19

1442 هـ - 2021 م

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة البعث

سورية . حمص . جامعة البعث . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : 2138071 31 963 ++

. موقع الإنترنت : www.albaath-univ.edu.sy

. البريد الالكتروني : magazine@ albaath-univ.edu.sy

ISSN: 1022-467X

شروط النشر في مجلة جامعة البعث

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
- طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
- **اذا كان الباحث طالب دراسات عليا:**

يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقته على النشر في المجلة.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:**

يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.

- **اذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :**

يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.

- **اذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :**

يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):**

عنوان البحث . . ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1- مقدمة
2- هدف البحث
3- مواد وطرق البحث
4- النتائج ومناقشتها .
5- الاستنتاجات والتوصيات .
6- المراجع.

- **يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (الآداب – الاقتصاد– التربية – الحقوق – السياحة – التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):**
- عنوان البحث . . ملخص عربي و إنكليزي (كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).

1. مقدمة.
2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
3. أهداف البحث و أسئلته.
4. فرضيات البحث و حدوده.
5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
7. منهج البحث و إجراءاته.
8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
9. نتائج البحث.
10. مقترحات البحث إن وجدت.
11. قائمة المصادر والمراجع.

7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:

أ- قياس الورق 17.5×25 B5.

ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 – يمين 2.5- يسار 2.5 سم

ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8

ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20

. كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي . العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.

ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.

8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.

9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.

10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة . الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة . سنة النشر . وتتبعها معترضة (-) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة . دار النشر وتتبعها فاصلة . الطبعة (ثانية . ثالثة) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة.

وفيما يلي مثال على ذلك:

-MAVRODEANUS, R1986- **Flame Spectroscopy**. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

. بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة . المجلد والعدد (كتابة مختزلة) وبعدها فاصلة . أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة.

مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases **Clinical Psychiatry News** , Vol. 4. 20 – 60

ج. إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد

بالبنود (أ و ب) ويكتب في نهاية المراجع العربية: (المراجع In Arabic)

رسوم النشر في مجلة جامعة البعث:

1. دفع رسم نشر (20000) ل.س عشرون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (50000) ل.س خمسون الف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (3000) ل.س ثلاثة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

المحتوى

تقريب دوال الفضاء $L_{(-\infty,+\infty)}$ باستخدام كثيرات حدود هرميت وكثيرات حدود تشيبيشف – هرميت

طالب الدكتوراه: عمر محمود نتوف

إشراف الأستاذ الدكتور: محمد عامر

جامعة البعث – كلية العلوم – قسم الرياضيات

الملخص

سنثبت في هذا البحث صحة مبرهنتين ، تتحدث الأولى عن درجة تقريب منشور فورييه ـ هرميت في النقطة $x = 0$ ، وتتحدث الثانية عن درجة تقريب منشور فورييه ـ تشيبيشيف ـ هرميت في النقطة $x = 0$ أيضاً ، معتمدين في كلا المبرهنتين على المؤثر المصفوفي وذلك في الفضاء $\boldsymbol{L}_{(-\infty,+\infty)}$.

كلمات مفتاحية:

كثيرات حدود هرميت، كثيرات حدود تشيبيشف – هرميت، متسلسلة فورييه– هرميت، متسلسلة فورييه – تشيبيشف – هرميت، الدالة المولدة، درجة التقريب.

Approximation of Functions of Space $L_{(-\infty,+\infty)}$ Using Hermite polynomials and Chebyshev Hermite polynomials

Abstract

In this research paper we will prove two theorems, the first one talks about the approximation`s degree of Fourier – Hermite series at the point x=0, and the second talks about the approximation`s degree of Fourier- Chebyshev –Hermite series at the point x=0 too, using the matrix operator in both cases and in the space $L_{(-\infty,+\infty)}$.

Key words:

Hermite Polynomial, Chebyshev - Hermite Polynomial, Fourier - Hermite Series, Fourier - Chebyshev - Hermite Series, Matrix Operator, the generated function, Degree of Approximation.

مقدمة:

إن تقريب دوال الفضاء $L_{(-\infty,+\infty)}$ باستخدام متسلسلات فورييه ــ هرميت ومتسلسلات فورييه ــ تشيبيشف ــ هرميت يتم عن طريق بعض التحويلات الخطية المتعلقة بهذه المتسلسلات وهي عبارة عن مؤثرات خطية محدودة تؤثر على متتالية المجاميع الجزئية لتلك المتسلسلات فتنقلها لمتتاليات أخرى تقرب باستخدام النظيم في الفضاء $L_{(-\infty,+\infty)}$ إلى الدوال نفسها وبدرجات تقريب متفاوتة.

هدف البحث:

إيجاد درجة تقريب كلاً من منشور فورييه – هرميت ومنشور فورييه – تشيبيشف – هرميت وذلك باستخدام وسائط المؤثر المصفوفي وتطبيقها على الحد العام لمتتالي المجاميع الجزئية لكلٍ من متسلسلة فورييه ــ هرميت ومتسلسلة فورييه – تشيبيشف – هرميت.

مواد وطرائق البحث:

تعريف (1) المؤثر المصفوفي : $(\boldsymbol{Matrix\ Operator})[\mathbf{4}]$

لتكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ولتكن $\{S_n\}$ متتالية مجاميعها الجزئية، عندئذٍ نعرف المؤثر المصفوفي (A)بالشكل الآتي:

$$t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, S_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k}\, S_{n-k} \qquad ; \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

والمصفوفة $A = \left(a_{n,k}\right)$ هي مصفوفة مثلثية سفلى لا نهائية من الثوابت الحقيقية.

وسنعتبر في هذا البحث أن المصفوفة $A = \left(a_{n,k}\right)$ نظامية أي أنها تحقق الشروط الآتية:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0 \quad ; k = 0,1,2,\ldots$$

$\sum_{k=0}^{n} \left|a_{n,k}\right| \leq M \;\; ; \;\; n = 1,2,\ldots$ (حيث إن M ثابت لا يتعلق بـ n)

حيث نقول عن مؤثر إنه نظامي إذا أدى تطبيقه على متسلسلة متقاربة إلى المجموع المعتاد لهذه المتسلسلة.

تعريف (2) النظيم في الفضاء $L_{(-\infty,\infty)}$:

إذا كانت الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ قابلة للمكاملة على □ فإن النظيم في الفضاء $L_{(-\infty,\infty)}$ يأخذ الشكل:

$$\|f(x)\|_{L_{(-\infty,\infty)}} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

تعريف (3) كثيرات حدود هرميت [1, 2]:

نعرف كثير حدود هرميت $H_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالشكل الآتي:

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \quad ؛ n = 0,1,2 \ldots$$

وهي حلول لمعادلة هرميت التفاضلية:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

تعريف (4) الدالة المولدة لكثيرات حدود هرميت $[1]$:

تعطى الدالة المولدة لكثيرات حدود هرميت والنشر الموافق لها يعطى بالشكل الآتي:

$$e^{(2xt-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

حيث إن دوال هرميت متعامدة على الفترة $]-\infty, \infty[$ مع دالة الوزن $W(x) = e^{-x^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n . H_m \, dx = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & ; \quad m = n \end{cases}$$

ولنكتب بعض حدوديات هرميت: $H_0(x) = 1$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

تعريف (5) كثيرات حدود تشيبيشف – هرميت$[3]$:

نعرف كثير حدود تشيبشيف ـ هرميت $He_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالشكل الآتي:

$$He_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \text{؛ } n = 0,1,2 \dots$$

وهي حلول لمعادلة تشيبشيف ـ هرميت التفاضلية:

$$y'' - xy' + ny = 0$$

تعريف (6) الدالة المولدة لكثيرات حدود تشيبيشف – هرميت $[3]$:

تعطى الدالة المولدة لكثيرات حدود تشيبيشف – هرميت بالشكل الآتي:

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} He_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{xt-\frac{t^2}{2}}$$

حيث إن دوال هرميت ـ تشيبشيف متعامدة على الفترة $]-\infty,\infty[$ مع دالة الوزن

$$W(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, He_n.He_m\, dx = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ n!\sqrt{2\pi} & ; \quad m = n \end{cases}$$

كما أن كثيرات حدود تشيبيشف – هرميت تحقق:

$$\frac{He_n^{(n)}(x)}{n!} = 1$$

$$He_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{n!\,2^n}\ , \qquad He_{2n+1}(0) = 0$$

$$He_n(-x) = (-1)^n He_n(x)$$

وتحقق كثيرات حدود تشيبيشف – هرميت المعادلتين الآتيتين:

$$\acute{He}_n(x) = nHe_{n-1}(x) \quad for \;\; n \geq 1$$

$$He_{n+1}(x) - xHe_n(x) + nHe_{n-1}(x) = 0 \;\; for \;\; n \geq 1$$

الجدول التالي يعطي كثيرات الحدود $He_n(x)$ حسب قيمة الدليل n:

n	$He_n(x)$
0	1
1	x
2	$x^2 - 1$
3	$x^3 - 3x$
4	$x^4 - 6x^2 + 3$
5	$x^5 - 10x^3 + 15x$

ملاحظة: تعطى العلاقة التي تربط بين كثيرات حدود هرميت وكثيرات حدود تشيبشيف ـ هرميت بالشكل الآتي [3]:

$$He_n(x) = 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

ملاحظة: علاقة كثيرات حدود هرميت وكثيرات حدود تشيبيشيف – هرميت مع متسلسلات القوى [3]:

$$He_n(x) = n! \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j x^{n-2j}}{2^j (n-2j)!\, j!}$$

$$H_n(x) = n! \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j (2x)^{n-2j}}{(n-2j)!\, j!}$$

تعريف (7) :

يمكننا انَّ نعرف $(\boldsymbol{Big-O})$ $\left(\boldsymbol{O}\right.$_الكبيرة$\left.\right)$و$\left(\boldsymbol{o}-\right.$ الصغيرة$\left.\right)-$ $(\boldsymbol{Little}$ $\boldsymbol{o})$ كما يلي [5]:

1- نقول إن $f(x) = O\big(g(x)\big)$ عندما $x \to a$ إذا وجد ثابت cيحقق ما يلي:

$$\boldsymbol{|f(x)| \leq c|g(x)|}$$

2- نقول إن $f(x) = o\big(g(x)\big)$ عندما $x \to a$ إذا تحقق ما يلي

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

النتائج ومناقشتها:

تقريب دوال الفضاء $\boldsymbol{L}_{(-\infty,+\infty)}$ باستخدام كثيرات حدود هرميت:

لتكن $T \equiv \left(a_{n,k}\right)$ مصفوفة مثلثية سفلى لانهائية من الأعداد غير السالبة والتي تحقق

$$A_{n,k} = \sum_{r=k}^{n} a_{n,r} \;, A_{n,n} = 1 \,; n \geq 0$$

$$t_n^T = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k(f;x)$$

إن منشور فورييه – هرميت للدالة f حيث $f \in L_{(-\infty,+\infty)}$ يكتب بالشكل:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x)$$

حيث إن:

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(y) H_n(y)\, dy$$

تمهيدية (1) [3]:

لتكن $H_n(x)$ كثيرات حدود هرميت من الدرجة n.

عندئذٍ توجد ثوابت موجبة C، D، E تحقق:

1. $H_n{}^2(x) e^{-x^2} \leq \dfrac{C}{\sqrt{2n+1-x^2}} \;;\; |x| \leq \sqrt{2n+1}$

2. $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} H_n{}^2(x) e^{-x^2} \leq D n^{-\frac{1}{6}}$

3. $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} H_n{}^2(x) e^{-x^2} \geq E n^{-\frac{1}{6}}$

تمهيدية$[6]$:(2)

لتكن $H_n(x)$ كثيرات حدود هرميت من الدرجة n عندئذٍ يتحقق ما يلي:

$$|H_n(x)| = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}\sqrt{2^n n!}\right) \;\; ; \quad |x| \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$$

مبرهنة (1): إن درجة تقريب منشور فورييه – هرميت في النقطة $x = 0$ باستخدام المؤثر المصفوفي ذي المصفوفة T يعطى كما يلي:

$$\|t_n^T(0) - f(0)\|_{L_{(-\infty,+\infty)}} = o\big(\varphi(n)\big)$$

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi(y)|dy = O\left(t^{\alpha+1}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\right) \; ; \;\; t \longrightarrow 0$$

وبحيث تتحقق الفرضيات:

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} e^{\frac{y^2}{2}}|\phi(y)|\,dy = o\big(\varphi(n)\big)$$

$$\int_{\sqrt{4n+1}}^{+\infty} e^{\frac{y^2}{2}}|\phi(y)|\,dy = o\big(\varphi(n)\big)$$

$$\int_{-\sqrt{4n+1}}^{\sqrt{4n+1}} \frac{e^{\frac{y^2}{2}}|\phi(y)|}{\sqrt[4]{4n+1-y^2}}\,dy = o(\varphi(n)2^{2n}n!)$$

حيث إن $\varphi(t)$ دالة موجبة متزايدة باطراد بالنسبة إلى t وتحقق:

$$\varphi(n) \to \infty \,; n \to \infty$$

تقريب دوال الفضاء $L_{(-\infty,+\infty)}$ باستخدام كثيرات حدود تشيبيشيف ـ هرميت:

إن منشور فورييه – تشيبيشيف– هرميت للدالة f حيث $f \in L_{(-\infty,+\infty)}$ يكتب بالشكل:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n He_n(x) \; \dots \; (1)$$

حيث إن:

$$a_n = \frac{1}{n!\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} f(y) He_n(y)\, dy$$

ـ نعلم أن كثيرات حدود هرميت وكثيرات حدود هرميت ـ تشيبيشيف ترتبط مع بعضها بعلاقة مهمة وهي $H_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} He_n\left(\sqrt{2}x\right)$ واعتماداً على هذا الارتباط واعتماداً على كلاً من التمهيدية (1) و (2) نستطيع استنتاج التمهيديات الآتية:

تمهيدية (3):

لتكن $He_n(x)$ كثيرات حدود تشيبيشيف – هرميت من الدرجة n.

عندئذٍ يوجد ثابت موجب C يحقق:

$$2^n {He_n}^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{4n+2-x^2}} \;\; ; \; |x| \leq \sqrt{4n+2}$$

تمهيدية (4):

لتكن $He_n(x)$ كثيرات حدود تشيبيشيف – هرميت من الدرجة n عندئذٍ يتحقق ما يلي:

$$|He_n(x)| \leq O\left(e^{\frac{x^2}{4}}\sqrt{n!}\right) \;\; ; \; |x| \geq \sqrt{n}$$

مبرهنـة (2): إن درجة تقريب منشور فورييه – تشيبيشيف – هرميت فـي النقطـة $x = 0$ باستخدام المؤثر المصفوفي ذي المصفوفة A يعطى كما يلي:

$$\|t_n^A(f,0) - f(0)\|_{L_{(-\infty,+\infty)}} = o\big(\xi(n)\big)$$

$$\Psi(t) = \int_0^t |\psi(y)| dy = O\left(t^{\alpha+1}\xi\left(\frac{1}{t}\right)\right) \; ; \;\; t \longrightarrow 0$$

وبحيث تتحقق الفرضيات:

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{8n+2}} e^{\frac{y^2}{4}} |\psi(y)| \, dy = o\left(\frac{\xi(n)}{(2n)!}\right) \;\; ; \;\; n \longrightarrow \infty$$

$$\int_{\sqrt{8n+2}}^{+\infty} e^{\frac{y^2}{4}} |\psi(y)| \, dy = o\left(\frac{\xi(n)}{(2n)!}\right) \;\; ; \;\; n \longrightarrow \infty$$

$$\int_{-\sqrt{8n+2}}^{\sqrt{8n+2}} \frac{e^{\frac{y^2}{4}} |\psi(y)|}{\sqrt[4]{8n+2-y^2}} dy = o\left(\xi(n)\frac{2^n}{(2n-1)!!}\right) \;\; ; \;\; n \longrightarrow \infty$$

حيث إن $\xi(t)$ دالة موجبة متزايدة باطراد بالنسبة إلى t وتحقق:

$$\xi(n) \to \infty \, ; n \to \infty$$

إثبات المبرهنة (1):

من المعلوم أن الدالة المولدة لكثيرات حدود هرميت تأخذ الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{2xt-t^2}$$

$$x = 0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(0)}{n!}t^n = e^{-t^2}$$

لكن من المعلوم أن: $e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$ وبالتالي يكون:

$$1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n} + \cdots = \frac{H_0(0)t^0}{0!} + \frac{H_1(0)t^1}{1!} + \frac{H_2(0)t^2}{2!} + \cdots + \frac{H_n(0)t^n}{n!} + \cdots$$

وبالمطابقة يكون:

$$H_0(0) = 1$$

$$H_1(0) = H_3(0) = \cdots = H_{2i+1}(0) = 0$$

$$H_2(0) = -2 \quad , \quad H_4(0) = 12$$

$$\frac{H_6(0)}{6!} = -\frac{1}{3!} \Longrightarrow H_6(0) = -\frac{6!}{3!} = -6 \times 5 \times 4 = -120 = -2^3 \times 1 \times 3 \times 5$$

وبصورة عامة فإن:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n . 1.3 \dots (2n-1)$$

لكن:

$$(2n+1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)(2n+1) \Longrightarrow$$

$$1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) = \frac{(2n+1)!!}{2n+1} \Longrightarrow$$

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n \frac{(2n+1)!!}{2n+1}$$

وبالتالي نحصل على:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \quad , \qquad H_{2n+1}(0) = 0$$

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f) H_k(0)$$

$$\|H_n(x)\|_{e^{-x^2}}^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

لذا نستطيع أن نكتب الآتي:

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}(f) H_{2k}(0)$$

حيث قمنا بتبديل كل k بـ $2k$، ومنه:

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2k}(2k)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(y) H_{2k}(y) dy \frac{(-1)^k (2k)!}{k!}$$

$$S_n(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(y) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!} H_{2k}(y) dy$$

وبما أن:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!} H_{2k}(y) = O\left[\frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(y)\right]$$

$$S_n(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(y)\, O\left[\frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(y)\right] dy$$

$$t_n^T(f,0) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[\frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(y)\, H_{2k}(y) dy\right]$$

ولنضع العلاقة المفيدة الآتية:

$$\phi(y) = \frac{e^{-y^2}[f(y) - f(0)]}{\sqrt{\pi}}$$

$$t_n^T(f,0) - f(0) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[\frac{(-1)^k}{2^{2k} k!} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)\, H_{2k}(y) dy\right]$$

$$\begin{aligned} &t_n^T(f,0) - f(0) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[\frac{(-1)^k}{2^{2k} k!} \left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} + \int_{-\sqrt{4n+1}}^{\sqrt{4n+1}} + \int_{\sqrt{4n+1}}^{+\infty}\right) \phi(y) H_{2k}(y) dy\right] \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

$$|I_1| \leq \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[\frac{1}{2^{2k}k!}\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} |\phi(y)|\,|H_{2k}(y)|dy\right]$$

وحسب التمهيدية (2) نجد:

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[\frac{1}{2^{2k}k!}O\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} |\phi(y)|\, e^{\frac{y^2}{2}}\sqrt{2^{2k}(2k)!}\, dy\right)\right] \\
&= O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!}\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} |\phi(y)|\, e^{\frac{y^2}{2}} dy\right) \\
&= O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{\sqrt{(2k)!}}{(2k)!!}\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} |\phi(y)|\, e^{\frac{y^2}{2}} dy\right) \\
&\leq O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} e^{\frac{y^2}{2}}|\phi(y)|\, dy\right) \\
&= O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} e^{\frac{y^2}{2}}|\phi(y)|\, dy\right)
\end{aligned}$$

حيث إن:

$$\frac{\sqrt{(2k)!}}{(2k)!!} = \frac{\sqrt{(2k)!!}\sqrt{(2k-1)!!}}{(2k)!!} = \frac{\sqrt{(2k-1)!!}}{\sqrt{(2k)!!}} = \sqrt{\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2k-1)(2k-3)(2k-3)\times \ldots \times 5\times 3\times 1}{(2k)(2k-2)(2k-4)\times \ldots \times 6\times 4\times 2}} < 1$$

وحسب الفرضية (1):

$$I_1 = |I_1| \leq O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, o\big(\varphi(n)\big)\right) = o\big(\varphi(n)\big)\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}$$
$$= o\big(\varphi(n)\big)$$

وبطريقة مماثلة تماماً نحصل على:

$$I_3 = |I_3| \leq o\big(\varphi(n)\big)$$

$$I_2 = |I_2| \leq \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\; O\left[\frac{1}{2^{2k}k!}\int_{-\sqrt{4n+1}}^{\sqrt{4n+1}} |\phi(y)|\,|H_{2k}(y)|dy\right]$$

لدينا من التمهيدية (1): $H_n{}^2(y)e^{-y^2} \leq \frac{c}{\sqrt{2n+1-y^2}}\;\; ; \;\; |y| \leq \sqrt{2n+1}$

ومنه نحصل على:

$$H_{2n}{}^2(y) \leq \frac{ce^{y^2}}{\sqrt{4n+1-y^2}} \quad ; \;\; |y| \leq \sqrt{4n+1}$$

$$|I_2| \leq \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\; O\left[\frac{1}{2^{2k}k!}\int_{-\sqrt{4n+1}}^{\sqrt{4n+1}} |\phi(y)|\frac{\sqrt{c}e^{\frac{y^2}{2}}}{\sqrt[4]{4n+1-y^2}}dy\right]$$

ولنفرض أن: $4n+1 = a^2 > 0$

$$|I_2| \leq \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} O\left[\frac{\sqrt{c}}{2^{2k}k!}\int_{-a}^{+a} \frac{|\phi(y)|e^{\frac{y^2}{2}}}{\sqrt[4]{a^2-y^2}}dy\right]$$

وحسب الفرضية الثالثة $\int_{-a}^{+a} \frac{|\phi(y)|\, e^{\frac{y^2}{2}}}{\sqrt[4]{a^2-y^2}}\, dy = o\big(2^{2n} n!\, \varphi(n)\big)$

نجد ما يلي:

$$|I_2| \le \frac{\sqrt{c}}{2^{2n} n!} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} O\big[o\big(2^{2n} n!\, \varphi(n)\big) dy\big] = o\big(\varphi(n)\big)$$

واعتماداً على ما سبق نجد:

$$\|t_n^T(0) - f(0)\|_{L_{(-\infty,+\infty)}} = o\big(\varphi(n)\big)$$

وبهذا يكتمل إثبات المبرهنة الأولى.

إثبات المبرهنة الثانية:

نعلم أنَ:

$$He_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!\, 2^n} \quad , \qquad H_{2n+1}(0) = 0$$

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f) He_k(0)$$

$$\|H_n(x)\|^2_{e^{-\frac{x^2}{2}}} = \sqrt{2\pi}\, n!$$

لذا نستطيع أن نكتب الآتي:

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}(f) He_{2k}(0)$$

$$S_n(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}f(y)He_{2k}(y)dy\,\frac{(-1)^k(2k)!}{k!\,2^k}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}f(y)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k k!}He_{2k}(y)dy\ \ldots\ (*)$$

لكن:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k k!}He_{2k}(x)=O\ \left[\frac{(2n)!\,(-1)^n}{2^n n!}He_{2n}(x)\right]$$

ومن العلاقة $(*)$ نحصل على:

$$S_n(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}f(y)\ O\left[\frac{(2n)!\,(-1)^n}{2^n n!}He_{2n}(y)\right]dy$$

$$t_n^A(f,0)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\ O\left[\frac{(2k)!\,(-1)^k}{2^k k!\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}f(y)\,He_{2k}(y)dy\right]$$

ولنضع العلاقة المفيدة الآتية:

$$\psi(y)=\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}[f(y)-f(0)]}{\sqrt{2\pi}}$$

$$t_n^A(f,0)-f(0)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\ O\left[\frac{(2k)!\,(-1)^k}{2^k k!}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(y)\,He_{2k}(y)dy\right]$$

حيث أنَّ

$$2^k k! = (2k)!!\,, (2k)! = (2k)!!\,(2k-1)!!$$

$$t_n^A(f,0) - f(0) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[(2k-1)!!\,(-1)^k\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{8n+2}} + \int_{-\sqrt{8n+2}}^{\sqrt{8n+2}} + \int_{\sqrt{8n+2}}^{+\infty}\right)\psi(y) He_{2k}(y)\,dy\right]$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

$$|I_1| \le \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[(2k-1)!!\int_{-\infty}^{-\sqrt{8n+2}} \left|\psi(y)\right|\,|He_{2k}(y)|\,dy\right]$$

وحسب التمهيدية (4):

$$|I_1| = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[(2k-1)!!\, O\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{8n+2}} \left|\psi(y)\right| e^{\frac{y^2}{4}}\sqrt{(2k)!}\,dy\right)\right]$$

$$= O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{\sqrt{(2k)!}\,(2k)!}{(2k)!!}\int_{-\infty}^{-\sqrt{8n+2}} \left|\psi(y)\right| e^{\frac{y^2}{4}}\,dy\right)$$

وحسب الفرضية (1) نجد:

$$I_1 = |I_1| \leq O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} o\big(\xi(n)\big)\right) = o\big(\xi(n)\big) \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}$$
$$= o\big(\xi(n)\big)$$

وبالمثل نجد:

$$I_3 = |I_3| = o\big(\xi(n)\big)$$

$$I_2 = |I_2| \leq \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[(2k - 1)!! \int_{-\sqrt{8n+2}}^{\sqrt{8n+2}} \big|\psi(y)\big|\, |He_{2k}(y)| dy\right]$$

واعتماداً على التمهيدية (3) نستطيع أن نكتب:

$$|I_2| \leq \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[(2k - 1)!! \int_{-\sqrt{8n+2}}^{\sqrt{8n+2}} \big|\psi(y)\big| \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{c} e^{\frac{y^2}{4}}}{2^k \sqrt[4]{8k + 2 - y^2}} dy\right]$$

ولنفرض أن $8n + 2 = b^2 > 0$ ومنه نجد:

$$|I_2| \leq \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[\frac{\sqrt{c}(2k - 1)!!\, \sqrt[4]{2}}{2^k} \int_{-b}^{+b} \big|\psi(y)\big| \frac{e^{\frac{y^2}{4}}}{\sqrt[4]{b^2 - y^2}} dy\right]$$

وحسب الفرضية الثالثة: $\int_{-b}^{+b}|\psi(y)|\frac{e^{\frac{y^2}{4}}}{\sqrt[4]{b^2-y^2}}dy=o\left(\frac{2^n}{(2n-1)!!}\xi(n)\right)$

نجد ما يلي:

$$|I_2|\leq\frac{\sqrt{c}(2n-1)!!\sqrt[4]{2}}{2^n}\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\,O\left[o\left(\frac{2^n}{(2n-1)!!}\xi(n)\right)\right]$$
$$=o\big(\xi(n)\big)\ ;$$

$$n\longrightarrow\infty$$

حيث:

$$O(1)o(1)=o(1)\ \text{،}\sqrt{c}\sqrt[4]{2}=O(1)$$

واعتماداً على ما سبق نجد:

$$\|t_n^A(f,0)-f(0)\|_{L_{(-\infty,+\infty)}}=o\big(\xi(n)\big)$$

وبهذا يكتمل إثبات المبرهنة الثانية.

التوصيات والمقترحات:

يمكننا دراسة التقريب باستخدام كثيرات حدود هرميت بمتغيرين ودليل واحد، حيث نستطيع أن نكتب[7]:

$$H_n(x,y) = n!\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{y^r x^{n-2r}}{r!\,(n-2r)!} \quad ,H_n(x,0) = x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x,y) = e^{xt-yt^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H_n(x,y) = n(n-1)H_{n-2}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H_n(x,y) = nH_{n-1}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H_n(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H_n(x,y) = e^{y\frac{\partial^2}{\partial x^2}}(x^n)$$

$$H_n(2x,-1) = H_n(x) = n!\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^r x^{n-2r}}{r!\,(n-2r)!}$$

$$H_n\left(x,-\frac{1}{2}\right)=He_n(x)=n!\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^r x^{n-2r}}{2^r r!\,(n-2r)!}$$

$$He_n(x)=2^{-\frac{n}{2}}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$H_n(cx,dy)=\left(\frac{c}{a}\right)^n e^{\frac{a^2d-c^2b}{(ac)^2}y\frac{\partial^2}{\partial x^2}}H_n(ax,by)$$

$$He_n(x)=\frac{1}{2^n}e^{-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}H_n(x,y)$$

$$H_n^{(m)}(x,y)=n!\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\frac{y^r x^{n-mr}}{r!\,(n-mr)!}\quad ,H_n^{(m)}(x,0)=x^n$$

$$\frac{\partial}{\partial y}H_n^{(m)}(x,y)=\frac{n!}{(n-m)!}H_{n-m}^{(m)}(x,y)$$

$$H_n(-x)=(-1)^n H_n(x)$$

المراجع:

1. T.H Fay and p.Hendrik Kloppers, 2006,"The Gibbs phenomenon for series of orthogonal polynomials " international journal of mathematical education
2. G. Szego, 1975, " Orthogonal polynomials ", New York, NY Press Colloquium Publication American Mathematical Society, (440).
3. K.Y. Patarroyo,2020, "A digression on Hermite polynomials".$(1-43)$.

4. **A. Alotaibi, M. Mursaleen, 2013 " Applications of Hankel and Regular Metrices in Fourier series ", (1-3)**
5. **Gradshteyn and I. M. Ryzhik " Table of integrals series and products seventh edition "**
6. **E. Kogbetliantz ,1932, "Annales scientifiques de E.N.S. "$(\mathbf{137-221})$**
7. **G. Dattoli , S.Lorenzutta ,and D.Sacchettl,2000 "A note on operational rules for Hermite and Laguerre polynomials " $(\mathbf{7-17})$**

التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر في فضاءات كيلير المكافئية

طالب الدراسات العليا: نمر حسن إيبو
دكتوراه رياضيات بحتة – كلية العلوم – جامعة البعث
بإشراف الدكتور : محسن شيحة

الملخص

نُدخل أهم المفاهيم المتعلقة بالبحث: فضاء كيلير المكافئي والمنحني الهولومورفي والتطبيق الهولومورفي الإسقاطي، ثم نعرّف التشوّه اللامتناهي في الصغر في فضاءات كيلير المكافئية والتشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر في فضاءات كيلير المكافئية ونثبت المبرهنات التي تعطي الشروط اللازمة والكافية لوجود تشوّه هولومورفي إسقاطي لامتناهٍ في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية والنتائج الهامة عنها، ونحدد فضاءات كيلير التي تسمح بتشوّه هولومورفي إسقاطي لامتناهٍ في الصغر غير مبتذل و كذلك نحدد فضاءات كيلير التي لا تسمح بتشوّه هولومورفي إسقاطي لامتناهٍ في الصغر غير مبتذل، و ندرس أيضاً تغيّر تنسوري ريمان و ريتشي لفضاء كيلير المكافئي بتأثير التشوهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر.

كلمات مفتاحية :

تشوّه هولومورفي إسقاطي لامتناهٍ في الصغر، فضاء كيلير المكافئي.

Infinitesimal Holomorphically projective Deformations in Kahler's Parabolic Spaces

Abstract

We introduce the most important concepts related to the research: Kahler's parabolic space, the holomorphic curve and the projective holomorphic application, then define the infinitesimal distortion in Kahler's parabolic spaces and the infinitesimally projective holomorphic Deformations in Kahler's parabolic spaces and prove the theorems that give the necessary and sufficient holomorph to the existence of a holomorph for a Deformations. Kahler's parabolic spaces and the significant consequences therefrom, and we define : Kahler's spaces that permit Infinitesimal projective holomorphic Deformations not vulgar and also define Kahler's spaces that do not allow Infinitesimal projective holomorphic Deformations not vulgar, and also study Riemann and Ritchie equivalent tensor variation of space Infinitesimal projective holomorphism.

Key words and phrases :

An Infinitesimal Holomorphically projective Deformation, Kahler's parabolic space,.

مقدمة :

تمت دراسة التطبيقات الجيوديزية والتشوّهات الجيوديزية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات ريمان من قبل العديد من العلماء أمثال يفيموف و باغاريلف و فيكوا وغيرهم [5,6,12,13]. وتمت دراسة التطبيقات الهولومورفية الإسقاطية من قبل العديد من العلماء [1,2,3,4,8,9, 10,11].

نتابع في هذا البحث دراسة التشوهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية و التي هي تعميم للتشوّهات الجيوديزية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات ريمان.

هدف البحث :

1) إيجاد الشروط اللازمة و الكافية لوجود تشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في الصغر بين فضائي كيلير المكافئيين.
2) تحديد بعض فضاءات كيلير التي تسمح بتشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في الصغر غير مبتذل و فضاءات كيلير التي لا تسمح بتشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في الصغر غير مبتذل.
3) ندرس تغيّر تنسوري ريمان و ريتشي في فضاء كيلير المكافئي $K_n^{0(m)}$ بتأثير التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر.

إن لدراسة التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر تطبيقات هامة في الفيزياء النظرية (الحقول التجاذبية و الكهربائية و المغناطيسية) وفي الحركات الميكانيكية و غيرها.

العمل و النتائج :

نعرض فيما يأتي أهم المفاهيم و المبرهنات المتعلّقة بفضاءات كيلير المكافئية :

تعريف (1): (فضاء كيلير المكافئي) $[1,2,3,4]$

يسمى فضاء ريمان V_n ، $m-$ فضاء كيلير المكافئي و نرمّزه بـ $K_{\mathrm{n}}^{0(\mathrm{m})}$ إذا وجد فيه بالإضافة إلى التنسور

المتري $g_{ij}(x)$ تركيب أفيني $F_i^h(x)$ رتبته $(m \geq 2)$ يحقق الشروط الآتية:

$$a)\quad F_\alpha^h F_i^\alpha = 0$$

$$b)\quad F_\alpha^h g_{\alpha j} + F_j^\alpha g_{\alpha i} = 0 \qquad (1)$$

$$c)\quad F_{i,j}^h = \frac{\partial F_i^h}{\partial x^j} + F_i^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h - F_\alpha^h \Gamma_{ij}^\alpha = 0$$

حيث "," تعني المشتق موافق التغير ، و Γ_{ij}^h رموز كريستوفيل من النوع الثاني للفضاء $K_{\mathrm{n}}^{0(\mathrm{m})}$.

تعريف (2): (المنحني الهولومورفي) $[8]$

نسمي المنحني $\ell: x^h = x^h(t)$ في فضاء كيلير المكافئي $K_n^{0(m)}$ منحنياً مستوياً تحليليّاً (هولومورفياً) إذا

تحققت على طول المنحني الشروط:

$$\frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta = \rho_1(t)\lambda^h + \rho_2(t)\bar{\lambda}^h$$

حيث $\lambda^h = \frac{dx^h}{dt}$ متجه المماس للمنحني ℓ ، و $\bar{\lambda}^h = \lambda^\alpha F_\alpha^h$ ، و ρ_1, ρ_2 دالتان ما تتبعان للمتغيّر t.

تعريف (3): (التطبيق الهولومورفي الإسقاطي) [9]

ليكن لدينا فضاءي كيلير المكافئيين $K_n^{0(m)}\left(g_{ij}, F_i^h\right)$ و $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}\left(\bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h\right)$ يُسمى التطبيق من فضاء كيلير

المكافئي $K_n^{0(m)}$ إلى فضاء كيلير المكافئي $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}$ ، تطبيقاً هولومورفياً إسقاطياً إذا نقل كل منحنٍ مستوٍ تحليلي

من $K_n^{0(m)}$ إلى منحنٍ مستوٍ تحليلي في $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}$.

نعرض فيما يأتي المبرهنات التي تعطي الشروط اللازمة والكافية لوجود تطبيق هولومورفي إسقاطي غير مبتذل:

مبرهنة (1): $[10]$

يُطبق فضاء كيلير المكافئي $K_n^{0(m)}$ هولومورفياً إسقاطياً على فضاء كيلير المكافئي $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}$ ، إذا وفقط إذا

تحققت الشروط الآتية في أي نظام إحداثي عام x :

$$a)\quad \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_{(i}^h\bar{\psi}_{j)} + F_{(i}^h\psi_{j)}$$

$$b)\quad \bar{F}_i^h(x) = \alpha F_i^h(x) \qquad (2)$$

حيث $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ مركبات الصلة للفضاءين $K_n^{0(m)}$ و $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}$ على الترتيب، ψ_i متجه تدرّج ما، و $\bar{\psi}_i \equiv \psi_{\bar{i}}$ ،

و α ثابت غير معدوم.

مبرهنة $(\mathbf{2})$:$[\mathbf{10}]$

يُطبّق فضاء كيلير المكافئي $K_n^{0(m)}$ تطبيقاً هولومورفياً إسقاطياً على الفضاء $\overline{K}_n^{0(\overline{m})}$ إذا وفقط إذا تحققت

في $K_n^{0(m)}$ العلاقات:

$$a)\quad \bar{g}_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k \bar{g}_{ij} + \bar{\psi}_{(i}\bar{g}_{j)k} + \psi_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

$$b)\quad \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0 \qquad (3)$$

حيث : $\bar{F}_{ij} \equiv \bar{g}_{i\alpha}F_j^{\alpha}$، وَ $det\|\bar{g}_{ij}\| \neq 0$ ، $\bar{g}_{ij}$ التنسور المتري للفضاء $\overline{K}_n^{0(m)}$.

مبرهنة $(\mathbf{3})$: $[\mathbf{11}]$

الشرط اللازم و الكافي ليكون فضاء كيلير المكافئي $K_n^{0(m)}$ منطلقاً لتطبيق هولومورفي إسقاطي، هو أن يوجد

في هذا الفضاء تنسور a_{ij} من النوع $\binom{0}{2}$ متناظر غير صفري، ويحقق الشروط:

$$a)\ a_{ij,k} = \lambda_{(\bar{\imath}}g_{j)k} + \lambda_{(i}g_{\bar{\jmath})k}$$

$$b)\ \ a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} = 0 \qquad (4)$$

حيث: λ_{i} متجه ما، والتطبيق يكون غير مبتذل ضمن الشرط $\lambda_{\mathrm{i}} \neq 0$.

مبرهنة $(\mathbf{4})$: $[\mathbf{11}]$

يكون فضاء كيلير المكافئي $K_n^{0(m)}$ منطلقاً لتطبيق هولومورفي إسقاطي بشكل غير مبتذل إذا كانت جملة

المعادلات الخطية الآتية من نوع كوشي تمتلك حلاً بالنسبة للتنسور المتناظر وغير الصفري

$a_{ij}\left(a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} = 0\right)$ وبالنسبة للمتجه غير الصفري λ_i والصامد τ :

$$\left.\begin{array}{l} a)\ \ a_{ij|k} = \bar{\lambda}_{(i}g_{j)k} + \lambda_{(i}g_{j)\bar{k}} \\ b)\quad \lambda_{i|j} = \tau g_{\bar{\imath}j} + a_{\alpha\beta}M_{ij}^{\alpha\beta} \\ c)\quad \tau_{,i} = \lambda_\alpha M_i^\alpha + a_{\alpha\beta}M_i^{\alpha\beta} \end{array}\right\} \quad (5)$$

من أجل القيم الابتدائية في النقطة χ_0 :

$$a_{ij}(\chi_0) = a_{ij}^0\,, \qquad \lambda_i(\chi_0) = \lambda_i^0\,, \qquad \tau(\chi_0) = \tau^0 \qquad (6)$$

والتي بالحقيقة تحقق الخواص :

$$a_{ij}^0 = a_{ji}^0\ , \qquad a_{\alpha(i}^0 F_{j)}^\alpha(\chi_0)\,, det\left\|a_{ij}^0\right\| \neq 0 \qquad (7)$$

حيث: $M_{ij}^{\alpha\beta} \equiv \mathrm{T}_{ij}^{\alpha\beta} + \varepsilon_{\bar{\jmath}}\left\{\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta}\varepsilon^j\varepsilon^k\eta^\ell - \varepsilon_{\bar{\imath}}\mathrm{T}_{\vartheta jk}^{\alpha\beta}\eta^\vartheta\eta^j\varepsilon^k\eta^\ell\right\}$

$$M_k^\alpha \equiv M_{ij\vartheta}^\alpha\varepsilon^i\eta^j\varepsilon^\vartheta\eta_{\bar{k}} - M_{ijk}^\alpha\varepsilon^i\eta^j$$

$$M_k^{\alpha\beta} \equiv M_{ij\vartheta}^{\alpha\beta}\varepsilon^i\eta^j\varepsilon^\vartheta\eta_{\bar{k}} - M_{ijk}^{\alpha\beta}\varepsilon^i\eta^j$$

$$M_{ijk}^{\alpha\beta} \equiv M_{ij|k}^{\alpha\beta} - M_{ik|j}^{\alpha\beta}$$

$$M_{ij}^{\gamma} \equiv -R_{ijk}^{\gamma} + M_{i[j}^{\bar{\gamma}\beta}g_{k]\beta} + M_{i[j}^{\beta\bar{\gamma}}g_{k]\beta} + M_{i[j}^{\gamma\beta}g_{\bar{k}]\beta} + M_{i[j}^{\beta\gamma}g_{\bar{k}]\beta}$$

$$M_{ijk}^{\alpha\beta} \equiv M_{ijk}^{\alpha\beta}\varepsilon^j\eta^i + \left[M_{\ell mj}^{\alpha\beta}g_{\bar{\imath}k} - M_{\ell mk}^{\alpha\beta}g_{\bar{\imath}j}\right]\eta^\ell\varepsilon^m$$

$$M_{ijk}^{\alpha} \equiv M_{ijk}^{\alpha}\varepsilon^{j}\eta^{i} + \left[M_{\ell mj}^{\alpha}g_{\bar{\imath}k} - M_{\ell mk}^{\alpha}g_{\bar{\imath}j}\right]\eta^{\ell}\varepsilon^{m}$$

$$\mathrm{T}_{j\ell}^{\alpha\beta} \equiv -\tfrac{1}{2}\eta_{\bar{\jmath}}\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta}\varepsilon^{j}\varepsilon^{k}\eta^{k} + \mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta}\varepsilon^{j}\eta^{k}$$

$$\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta} \equiv \mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta} - g_{k(\bar{\imath}}\mathrm{T}_{j)\ell}^{\alpha\beta} + g_{k(\bar{\imath}}\mathrm{T}_{j)k}^{\alpha\beta}$$

$$\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta} \equiv \delta_{(i}^{\alpha}R_{j)k\ell}^{\beta} - \frac{1}{2n}\left\{g_{k(i}M_{j)\ell}^{\alpha\beta} - g_{\ell(i}M_{j)k}^{\alpha\beta}\right\}$$

سوف نرمز اختصاراً للفضاء $K_n^{0(m)}$ بالرمز k_m فيما يأتي:

التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر لفضاءات كيلير المكافئية:

ليكن k_m فضاء كيليرالمكافئي المنسوب إلى نظام إحداثي محلي $(y^1, \dots, y^m)$ عندئذٍ تحدد العلاقات :

$$y^{\alpha} = f^{\alpha}(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n) \qquad ; Rang \left\| \frac{\partial f}{\partial \chi^i} \right\| = n < m \qquad (8)$$

فضاءً جزئياً $k_n \subset k_m$.

إذا كان $a_{\alpha\beta}$ وَ g_{ij} التنسور المتري ل k_m وَ k_n على الترتيب فإنّه من[13] نجد:

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial \chi^i}\frac{\partial y^{\beta}}{\partial \chi^i} \qquad (9)$$

حيث: $\alpha, \beta = 1,2, \dots, m$ وَ $i, j = 1,2, \dots, n$ إذا لم نشر إلى غير ذلك.

ليكن $\xi^{\alpha}(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n)$ حقل متجهي مخالف التغير في k_m مُعطى في النقطة M من k_n .

عندئذٍ تُحدد العلاقات :

$$\tilde{y}^{\alpha} = y^{\alpha}(\chi) + \varepsilon\xi^{\alpha}(\chi) \quad ; \; \alpha = 1,2, \dots, m \qquad (10)$$

حيث: ε وسيط ذو قيمة صغيرة ، فضاءً $\tilde{k}_n$ يُسمى التشوّه اللامتناهي في الصغر للفضاء k_n ويُسمى الحقل

$\xi^{\alpha}(\chi)$ حقل الإزاحة وَ ξ^{α} يُسمى متجه الإزاحة.

في دراستنا للفضاء $\tilde{k}_n$ سوف نسقط ε^2 وكل ما يزيد عن ε^2 على اعتبار أنّ ε مقدار صغير.

لندرس ضمن هذه التشوّهات، التشوّهات الهولومورفية اللامتناهية في الصغر من المرتبة الأولى:

بفرض $A = A(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n)$ مقدار ما في الفضاء k_n (تنسور، صلة، دالة، ...)

عندئذٍ يوجد في $\tilde{k}_n$ ما يقابله $\tilde{A} = \tilde{A}(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n, \varepsilon)$ الذي يمكن التعبير عنه بالشكل :

$$\tilde{A}(\chi, \varepsilon) = A(\chi) + \varepsilon\delta A + \varepsilon^2\delta^2 A + \cdots + \varepsilon^n\delta^n A + \cdots \qquad (11)$$

قيمة وسيط التشوّه ε في العلاقة (11) تُحدد على اعتبار أن المتسلسلة في (11) متقاربة دون النظر إلى $A(\chi)$.

تُسمى المعاملات في العلاقة (11) : $\delta^2 A, \delta A$, ... على الترتيب القيمة الأولى والثانية لتغير A بتأثير التشوّهات اللامتناهية في الصغر ل k_n. [2]

سوف نهتم بمبرهنة التغيّر التي نوهنا عنها أعلاه . عندما تنتهي هذه المتسلسلة عند الحد الثاني، أي سوف ندرس

التشوّهات اللامتناهية في الصغر من المرتبة الأولى ل k_n وفي كثير من الأحيان نُطلق عليها اسم التشوّهات

اللامتناهية في الصغر أو التشوهات للاختصار.

عندئذٍ يُكتب التنسور المتري ل $\tilde{k}_n$ على النحو :

$$\tilde{g}^{ij} = g^{ij} + \varepsilon\delta g^{ij} \quad \text{وَ} \quad \tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \varepsilon\delta g_{ij} \qquad (12)$$

تمهيدية $(\mathbf{1})$:

تتحقق في التشوّه اللامتناهي في الصغر للفضاء k_n في الفضاء $\tilde{k}_n$ العلاقات :

$$\text{a)}\ \ \delta y^{\alpha} = \xi^{\alpha}$$

$$b)\ \ \delta a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\xi^{\gamma} \qquad (13)$$

$$c)\ \ \delta g_{ij} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\xi^{\gamma} y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} + a_{\alpha\beta}(\xi^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{j})$$

حيث: g_{ij} ، $a_{\alpha\beta}$ التنسوران المتريان للفضاءين k_n , k_m على الترتيب .

الإثبات :

a) من العلاقة (10) : $\tilde{y}^{\alpha} = y^{\alpha}(\chi) + \varepsilon\xi^{\alpha}(\chi)$ ، حيث $\alpha = 1,2,\dots,m$

وبما أنّ: $\tilde{y}^{\alpha} = y^{\alpha}(\chi) + \varepsilon\delta y^{\alpha}$

نجد: $.\delta y^{\alpha} = \xi^{\alpha}(\chi)$

b) من العلاقة (10) نجد :

$$\tilde{a}_{\alpha\beta}(\tilde{y}^{\gamma}) = a_{\alpha\beta}(\tilde{y}^{\gamma}) = a_{\alpha\beta}(y^{\gamma} + \varepsilon\xi) = a_{\alpha\beta}(y^{\gamma}) + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\xi^{\gamma}\varepsilon + \cdots$$

وبما أنّ: $\tilde{a}_{\alpha\beta}(\tilde{y}^{\gamma}) = a_{\alpha\beta}(y^{\gamma}) + \varepsilon\delta a_{\alpha\beta}(y^{\gamma})$

فإنّ: $\xi^{\gamma}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}} = \delta a_{\alpha\beta}$.

c) استناداً إلى العلاقة (9) والفقرة (b) نجد:

$$\begin{aligned}\delta g_{ij} = \delta\left(a_{\alpha\beta}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}\right) &= \delta a_{\alpha\beta}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + a_{\alpha\beta}\delta y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + a_{\alpha\beta}y^{\alpha}_{,i}\delta y^{\beta}_{,j}\\ &= \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\xi^{\gamma}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + a_{\alpha\beta}\left(\xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{,j}\right).\end{aligned}$$

أي :

$$\delta g_{ij} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\xi^{\alpha}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + a_{\alpha\beta}\left(\xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{,j}\right). \qquad (14)$$

تعريف (4):

يُسمى التشوّه اللامتناهي في الصغر تشوّهاً هولومورفياً إسقاطياً إذا حافظ على الخطوط الهولومورفية .

أي بمعنى أنّ الفضاءين k_n وَ $\tilde{k}_n$ يكونا هولومورفيين فيا بينهما حيث k_n وَ $\tilde{k}_n$ منسوبين إلى نظام إحداثي

مشترك (χ^i). وبالتالي يحققان العلاقات :

$$a)\ \tilde{g}_{ij,k} = 2\bar{\Psi}_k \tilde{g}_{ij} + \bar{\Psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \psi_{(i}\tilde{F}_{j)k}$$

$$b)\ \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0 \qquad (15)$$

حيث: $\bar{F}_{ij} \equiv \tilde{g}_{i\alpha}F_j^{\alpha}$ ، $\det\|\tilde{g}_{ij}\| \neq 0$ ، $\tilde{g}_{ij}$ التنسور المتري للفضاء $\tilde{k}_n$ و"," المشتق الموافق التغيّر في

الفضاء k_n و $\bar{\psi}_i = \frac{1}{2(n+2)}\partial_i \ln\left|\frac{\tilde{g}}{g}\right|$ متجه تدرّج وَ ψ_i متجه ما وَ $\tilde{g} =$ $\det\|\tilde{g}_{ij}\|$ وَ $g = \det\|g_{ij}\|$

وَ $\bar{\psi}_i \equiv \psi_{\bar{\imath}}$.

مبرهنة (5):

إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيليرالمكافئي k_n مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهياً في الصغر هو تحقق العلاقات :

$$a)\ \delta g_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_{(i}g_{j)k} + \psi_{(i}F_{j)k}$$

$$b)\ \delta g_{\bar{\imath}j} + \delta g_{i\bar{\jmath}} = 0 \qquad (16)$$

حيث: "," المشتق الموافق التغيّر في الفضاء k_n وَ $\delta g_{\bar{\imath}j} = \delta g_{i\alpha}F_j^{\alpha}$ وَ $\bar{\psi}_i \equiv \psi_{\bar{\imath}}$ وَ $\bar{F}_{ij} \equiv g_{i\alpha}F_j^{\alpha}$.

الإثبات :

$(\Leftarrow)$(الشرط لزوم)

بفرض k_n وَ $\tilde{k}_n$ هولومورفيان فيما بينهما ومنسوبان إلى نظام إحداثي مشترك (χ^i) .

وبالتالي يحققان

العلاقات:

a) $\tilde{g}_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k \tilde{g}_{ij} + \bar{\psi}_i \tilde{g}_{jk} + \bar{\psi}_j \tilde{g}_{jk} + \psi_i \bar{F}_{jk} + \psi_j \bar{F}_{jk}$ (17)

b) $\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0$

حيث : $\bar{\psi}_i = \frac{1}{2(n+2)} \partial_i \ln \left|\frac{\tilde{g}}{g}\right|$ وَ $\bar{F}_{ij} \equiv \tilde{g}_{i\alpha} F_j^{\alpha}$.

وبما أنّ : $\bar{\psi} = \frac{1}{2(n+2)} \ln \left|\frac{\tilde{g}}{g}\right|$ حيث $g = \det\|g_{ij}\|$ وَ $\tilde{g} = \det\|\tilde{g}_{ij}\|$

ومن ناحية أخرى: $\tilde{g} = g + \varepsilon\delta g$ فإنّ:

$$2(n+2)\bar{\psi} = \ln \left|\frac{\tilde{g}}{g}\right| =$$
$$= \ln \left|\frac{g + \varepsilon\delta g}{g}\right|$$
$$= \ln \left|1 + \frac{\delta g}{g}\varepsilon\right| = \ln\left(1 + \frac{\delta g}{g}\varepsilon\right) = \varepsilon\frac{\delta g}{g} + \cdots$$

حيث $\bar{\psi}_i$ في $(17a)$ يجب تغييرها إلى $\varepsilon\bar{\psi}_i$ ، وَ استناداً إلى المبرهنة (1) وَ تحديداً

الشرط $\tilde{F}_i^h = \alpha F_i^h$

حيث نعوضه في العلاقة :

$$\tilde{F}_i^h = \alpha F_i^h + \varepsilon\delta F_i^h \Rightarrow \alpha F_i^h = \alpha F_i^h + \varepsilon\delta F_i^h \Rightarrow (\alpha - 1)F_i^h = \varepsilon\delta F_i^h$$

$$\Rightarrow F_i^h = \varepsilon \frac{\delta F_i^h}{\alpha - 1}$$

لذلك نستبدل εF_i^h ب F_i^h. ولدينا أيضاً:

$$\tilde{g}_{ij,k} = \underbrace{\tilde{g}_{ij,k}}_{0} + \varepsilon\delta g_{ij,k}$$

$$\tilde{g}_{ij,k} = \varepsilon\delta g_{ij,k} \qquad (18)$$

وأيضاً :

$$\tilde{F}_{jk} = \tilde{g}_{j\alpha}F_k^\alpha \quad \text{وَ} \quad \psi_{\bar{k}} = \psi_\alpha F_k^\alpha \qquad (19)$$

نعوض(18) و(19) في $(17a)$ ونستبدل $\varepsilon\psi_i$ ب ψ_i و كذلك نستبدل εF_i^h ب F_i^h

فنجد أنّ :

$$\delta g_{ij,k} = \varepsilon\left(2\bar{\psi}_k\left(g_{ij} + \varepsilon\delta g_{ij}\right)\right) + \bar{\psi}_i\left(g_{kj} + \varepsilon\delta g_{kj}\right) + \bar{\psi}_j(g_{ik} + \varepsilon\delta g_{ik}) + \left(\psi_i\bar{F}_{jk} + \psi_j\bar{F}_{ik}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon\left(2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_i g_{kj} + \bar{\psi}_j g_{ik}\right) \\
&\qquad + \varepsilon^2\left(2\bar{\psi}_k - \delta g_{ij} + \psi_{\bar{\imath}}\delta g_{kj} + \psi_{\bar{\jmath}}\delta g_{ik}\right) \\
&\qquad + \varepsilon\left(\psi_i\left(g_{j\alpha} + \varepsilon\delta g_{j\alpha}\right)F_k^\alpha + \psi_j(g_{i\alpha} + \varepsilon\delta g_{i\alpha})F_k^\alpha\right) \\
&\qquad = \varepsilon\left(2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_i g_{kj} + \bar{\psi}_j g_{ik}\right) + \varepsilon^2(\dots) \\
&\qquad + \varepsilon\left(\psi_i g_{j\alpha}F_k^\alpha + \psi_j g_{i\alpha}F_k^\alpha\right) + \varepsilon^2(\dots)
\end{aligned}$$

وبما أنّ دراستنا في التشوّهات اللامتناهية في الصغر من المرتبة الأولى وبالتالي نهمل ε^2 ، فإنّ:

$$\varepsilon\delta g_{ij,k} = \varepsilon\big(2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_i g_{ik} + \bar{\psi}_j g_{ik} + \psi_i F_{jk} + \psi_j F_{jk}\big)$$

$$\Rightarrow \delta g_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_{(i} g_{j)k} + \psi_{(i} F_{j)k}$$

نجد من العلاقات $(17b)$ أنّ: $\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0$

$$\Rightarrow \tilde{g}_{i\alpha} F_j^\alpha + \tilde{g}_{j\alpha} F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow (g_{i\alpha} + \varepsilon\delta g_{i\alpha}) F_j^\alpha + \big(g_{j\alpha} + \varepsilon\delta g_{j\alpha}\big) F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow g_{i\bar{j}} + g_{\bar{i}j} + \varepsilon\big(\delta g_{i\alpha} F_j^\alpha + \varepsilon\delta g_{j\alpha} F_i^\alpha\big) = 0$$

وحسب تعريف فضاء كيلير نجد: $g_{i\bar{j}} + g_{\bar{i}j} = 0$ إذاً:

$$\delta g_{i\alpha} F_j^\alpha + \delta g_{j\alpha} F_i^\alpha = 0 \Rightarrow \delta g_{i\bar{j}} + \delta g_{\bar{i}j} = 0$$

وهو الشرط $(16b)$ تم إثبات لزوم الشرط.

$(\Rightarrow)$ (كفاية الشرط)

لنفرض تحقق العلاقات (16):

$$\varepsilon\delta g_{ij|k} = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_{(i} g_{j)k} + \psi_{(i} F_{j)k}$$

نضرب طرفي العلاقة ب ε نجد :

$$\varepsilon\delta g_{ij|k} = \varepsilon\big(2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_{(i} g_{j)k} + \psi_{(i} F_{j)k}\big) \qquad (20)$$

ومن ناحية أخرى لدينا :

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \varepsilon\delta g_{ij}$$

نضرب طرفي العلاقة ب ε فنجد :

$$\varepsilon\tilde{g}_{ij} = \varepsilon g_{ij} + \underbrace{\varepsilon^2\delta g_{ij}}_{0} \Rightarrow \varepsilon\tilde{g}_{ij} = \varepsilon g_{ij}$$

نستبدل $\varepsilon\tilde{g}_{ij}$ ب εg_{ij} في العلاقة (20) نجد :

$$\underbrace{g_{ij,k}}_{0} + \varepsilon\delta g_{ij,k} = 2\varepsilon\bar{\psi}_k\tilde{g}_{ij} + \varepsilon\bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \varepsilon\bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

$$= 2\varepsilon\bar{\psi}_k g_{ij} + \varepsilon\bar{\psi}_{(i}g_{j)k} + \varepsilon\psi_i\tilde{g}_{j\alpha}F_k^\alpha + \varepsilon\psi_i\tilde{g}_{k\alpha}F_j^\alpha$$

باستبدال ψ_i ب $\varepsilon\psi_i$ واستبدال F_i^h ب εF_i^h نجد :

$$\tilde{g}_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k\tilde{g}_{ij} + \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

حيث : $\bar{F}_{jk} = \tilde{g}_{j\alpha}F_k^\alpha$.

استناداً إلى العلاقة $(16b)$ نجد :

$$\delta g_{i\bar{j}} + \delta g_{\bar{i}j} = 0 \Rightarrow \varepsilon\delta g_{i\alpha}F_j^\alpha + \varepsilon\delta g_{j\alpha}F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{g_{i\bar{j}} + g_{\bar{i}j}}_{0} + \varepsilon\delta g_{i\alpha}F_j^\alpha + \varepsilon\delta g_{j\alpha}F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow g_{i\alpha}F_j^\alpha + \varepsilon\delta g_{j\alpha}F_i^\alpha + g_{j\alpha}F_i^\alpha + \varepsilon\delta g_{j\alpha}F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \left(g_{i\alpha} + \varepsilon\delta g_{j\alpha}\right)F_j^\alpha + \left(g_{j\alpha} + \varepsilon\delta g_{j\alpha}\right)F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{g}_{i\alpha}F_j^\alpha + \tilde{g}_{j\alpha}F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0$$

وبالتالي استناداً إلى المبرهنة (2) فالتشوه هولومورفي إسقاطي. تم إثبات كفاية الشرط.

وللسهولة سوف نرمز للتنسور المتناظر δg_{ij} ب h_{ij} فنكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية :

مبرهنة (6):

إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيليرالمكافئي k_n مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهياً في الصغر هو

أن يتواجد فيه تنسور متناظر h_{ij} يحقق الشروط :

$$a)\ \ h_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k \tilde{g}_{ij} + \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

$$b)\ \ h_{\bar{\imath}j} + h_{i\bar{\jmath}} = 0 \qquad (21)$$

حيث: $\bar{\psi}_i$ متجه تدرّج وَ $\bar{\psi}_i = \psi_{\bar{\imath}} = \psi_\alpha F_i^\alpha$ وَ ψ_i متّجه ما .

إذا فرضنا في الشروط (21) أنّ $\psi_i = 0$ و بالتالي $\bar{\psi}_i = 0$ عندئذٍ $h_{ij,k} = 0$ وهذا يتحقق في الحالتين الآتيتين :

<u>الحالة الأولى:</u> $h_{ij} = \mathrm{c}g_{ij}$ حيث $c = const$ ،عندئذٍ استناداً إلى (12) نجد:

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \varepsilon\delta g_{ij} = g_{ij} + \varepsilon h_{ij} = g_{ij} + \varepsilon \mathrm{c} g_{ij} = (1+\varepsilon c) g_{ij}$$

وعندئذٍ يتطابق التشوّه مع التحاكي اللامتناهي في الصغر.

<u>الحالة الثانية:</u> $h_{ij} \neq \mathrm{c}g_{ij}$ عندئذٍ في هذه الحالة يوجد في k_n تنسور متناظر ومشتقه ثابت.

وفي كلتا الحالتين من (15) ينتج أنّ: $\tilde{g} = cg$ أي أنّ التشوّه هو تحاكٍ لا متناهٍ في الصغر .

وسوف نعتبر أنّ هذه الحالات مبتذلة .

مبرهنة (7):

إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيليرالمكافئيk_n مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهٍ في الصغر هو

تحقق الشروط:

$$\left.\begin{array}{ll} a) & \delta\Gamma_{ij}^h = \delta_{(i}^h\bar{\varphi}_{j)} + F_{(i}^h\varphi_{j)} \\ b) & \delta g_{\bar{\imath}j} + \delta g_{i\bar{\jmath}} = 0 \end{array}\right\} \quad (22)$$

الإثبات :

($\Leftarrow$) **(**لزوم الشرط**)** .

بفرض أنّ k_n وَ $\tilde{k}_n$ هولومورفيان فيا بينهما ومنسوبان إلى نظام إحداثي مشترك (χ^i)

عندها استناداً إلى المبرهنة (1) تتحقق العلاقات :

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h(\chi) = \Gamma_{ij}^h(\chi) + \delta_{(i}^h\bar{\varphi}_{j)} + F_{(i}^h\varphi_{j)} \qquad (23)$$

حيث : $\bar{\varphi}_i = \frac{1}{2(n+2)}\partial_i \ln\left|\frac{\tilde{g}}{g}\right|$

وبما أنّ : $\bar{\varphi} = \frac{1}{2(n+2)}\ln\left|\frac{\tilde{g}}{g}\right|; \tilde{g} = det\|\tilde{g}_{ij}\|, g = det\|g_{ij}\|$

و أنّ $\tilde{g} = g + \varepsilon\delta g$ فإنّ:

$$2(n+2)\bar{\varphi} = \ln\left|\frac{\tilde{g}}{g}\right| = \ln\left|\frac{g+\varepsilon\delta g}{g}\right| = \ln\left|1+\varepsilon\frac{\delta g}{g}\right|$$
$$= \ln\left(1+\varepsilon\frac{\delta g}{g}\right) = \varepsilon\frac{\delta g}{g} + \cdots$$

حيث $\bar{\varphi}_i$: في (23) يجب تغييرها إلى $\varepsilon\bar{\varphi}_i$ ،واستناداً إلى المبرهنة (1) نجد :

$$\tilde{F}_i^h = \alpha F_i^h$$

نعوض في العلاقة : $\tilde{F}_i^h = F_i^h + \varepsilon\delta F_i^h$

نجد : $\alpha F_i^h = F_i^h + \varepsilon\delta F_i^h$

$$\Rightarrow F_i^h = \varepsilon\frac{\delta F_i^h}{\alpha - 1}$$

لذلك نستبدل εF_i^h ب F_i^h ، وبما أنّ $\tilde{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \varepsilon\delta\Gamma_{ij}^h$ نعوض في (23) نجد :

$$\Gamma_{ij}^h + \varepsilon\delta\Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \varepsilon\delta_{(i}^h\bar{\varphi}_{j)} + \varepsilon F_{(i}^h\varphi_{j)}$$
$$\Rightarrow \delta\Gamma_{ij}^h = \delta_{(i}^h\bar{\varphi}_{j)} + F_{(i}^h\varphi_{j)}$$

وهي العلاقة نفسها $(22a)$.

واستناداً إلى المبرهنة (5) نجد تحقق الشروط $(22b)$ $\delta g_{\bar{\imath}j} + \delta g_{i\bar{\jmath}} = 0$.

$(\Rightarrow)$ (كفاية الشرط) :

وبالعكس لنفرض تحقق العلاقات (22) :

$$\delta\Gamma_{ij}^h = \delta_{(i}^h\bar{\varphi}_{j)} + F_{(i}^h\varphi_{j)}$$

نضرب الطرفين ب ε نجد:

$$\varepsilon\delta\Gamma_{ij}^{h} = \varepsilon\delta_{(i}^{h}\bar{\varphi}_{j)} + \varepsilon F_{(i}^{h}\varphi_{j)}$$

نضيف Γ_{ij}^{h} إلى الطرفين نجد :

$$\Gamma_{ij}^{h} + \varepsilon\delta\Gamma_{ij}^{h} = \Gamma_{ij}^{h} + \varepsilon\delta_{(i}^{h}\bar{\varphi}_{j)} + \varepsilon F_{(i}^{h}\varphi_{j)}$$

باستبدال $\bar{\varphi}_j$ ب $\varepsilon\bar{\varphi}_j$ وَ F_i^j ب εF_i^j وَبما أنّ $\tilde{\Gamma}_{ij}^{h} = \Gamma_{ij}^{h} + \varepsilon\delta\Gamma_{ij}^{h}$ نجد:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{h} = \Gamma_{ij}^{h} + \delta_{(i}^{h}\bar{\varphi}_{j)} + F_{(i}^{h}\varphi_{j)} \qquad (24)$$

بقي لدينا إثبات أنّ $\tilde{g}_{ij}$ هو تنسور قياس لفضاء كيليرالمكافئي $\tilde{k}_n$ تركيبه هو التنسور F_i^h أي $(\tilde{F}_i^h = F_i^h)$

والذي يجب أن يحقق شروط تعريف فضاء كيليرالمكافئي(1) والتي هي في هذه الحالة من الشكل :

$$1)\ F_{\alpha}^{h}F_{i}^{\alpha} = 0, \qquad 2)\ F_{(i}^{\alpha}\tilde{g}_{j)\alpha} = 0 \quad , \qquad 3)\ F_{i\|j}^{h} = 0$$

الشرط الأول محقق ل F_i^h حسب تعريف الفضاء k_n.

والشرط الثاني محقق لأنه استناداً إلى العلاقة $(22b)$: $\delta g_{\bar{\imath}j} + \delta g_{i\bar{\jmath}} = 0$ نجد:

$$\varepsilon\left[\delta g_{\bar{\imath}j} + \delta g_{i\bar{\jmath}}\right] = 0 \Rightarrow \underbrace{F_{ij} + F_{ji}}_{=0} + \varepsilon\left[\delta g_{i\alpha}F_{j}^{\alpha} + \delta g_{i\alpha}F_{i}^{\alpha}\right] = 0$$

$$\Rightarrow g_{i\alpha}F_{j}^{\alpha} + \varepsilon\delta g_{i\alpha}F_{j}^{\alpha} + g_{i\alpha}F_{i}^{\alpha} + \varepsilon\delta g_{j\alpha}F_{i}^{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow (g_{i\alpha} + \varepsilon\delta g_{i\alpha})F_{j}^{\alpha} + \left(g_{i\alpha} + \varepsilon\delta g_{j\alpha}\right)F_{i}^{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{g}_{i\alpha}F_{j}^{\alpha} + \tilde{g}_{j\alpha}F_{i}^{\alpha} = 0 \Rightarrow F_{(i}^{\alpha}\tilde{g}_{j)\alpha} = 0$$

والشرط الثالث محقق لأنّ :

$$F_{i\|j}^{h} = \frac{\partial F_i^h}{\partial \chi^y} + F_i^\alpha \bar{\Gamma}_{\alpha j}^h - F_\alpha^h \bar{\Gamma}_{ij}^h =$$

$$= \frac{\partial F_i^h}{\partial \chi^j} + F_i^\alpha \left[\Gamma_{\alpha j}^h + \delta_{(\alpha}^h \bar{\varphi}_{j)} + F_{(\alpha}^h \varphi_{j)}\right] - \Gamma_\alpha^h \left[\Gamma_{ij}^\alpha + \delta_{(i}^\alpha \bar{\varphi}_{j)} + F_{(i}^\alpha \varphi_{j)}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{\partial F_i^h}{\partial \chi^j} + F_i^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h - F_\alpha^h \Gamma_{ij}^\alpha}_{=0} + F_i^\alpha \delta_{(\alpha}^h \bar{\varphi}_{j)} + F_i^\alpha F_{(\alpha}^h \varphi_{j)} - F_\alpha^h \delta_{(i}^\alpha \bar{\varphi}_{j)} - F_\alpha^h F_{(i}^\alpha \varphi_{j)}$$

$$= 0 + F_i^h \bar{\varphi}_j + F_i^\alpha \varphi_{\bar{\alpha}} \delta_i^h + \underbrace{F_i^\alpha F_\alpha^h \varphi_i}_{0} + F_i^\alpha \varphi_\alpha F_j^h - F_i^h \bar{\varphi}_j - F_j^h \bar{\varphi}_i - \underbrace{F_\alpha^h F_i^\alpha \varphi_j}_{=0} - \underbrace{F_\alpha^h F_j^\alpha \varphi_i}_{=0}$$

$$= \underbrace{\varphi_{\bar{\bar{\imath}}} \delta_i^h}_{=0} + \bar{\varphi}_i F_j^h - \bar{\varphi}_i F_j^h = 0$$

وبالتالي نستنتج أنّ :

$$\tilde{F}_i^h(\chi) = \alpha F_i^h(\chi) \qquad (25)$$

من العلاقات (24) وَ (25) واستناداً إلى المبرهنة (1) نجد أنّ التشوّه هو هولومورفي إسقاطي. تم إثبات المبرهنة.

مبرهنة (8):

إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيليرالمكافئي k_n مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهٍ في الصغر غير

مبتذل هو أن يكون مطبقاً هولومورفياً إسقاطياً غير مبتذلاً .

الإثبات :

($\Leftarrow$)(لزوم الشرط):

لنفرض أنّ فضاء كيليرالمكافئي k_n مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهياً في الصغر غير مبتذلاً ، عندئذٍ الشروط

$(21a)$ تُكتب بالشكل :

$$h_{ij,k} - 2\bar{\psi}_k \tilde{g}_{ij} = \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

$$\Rightarrow \left(h_{ij} - 2\bar{\psi}\tilde{g}_{ij}\right)_{,k} = \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k} \qquad (26)$$

حيث : $\psi_i \neq 0$ متجه ما و $\bar{\psi}_i \neq 0$ متجه تدرّج (التشوه غير مبتذل فرضاً) .

أي أنّه يوجد في k_n تنسور متناظر $a_{ij} = h_{ij} - 2\bar{\psi}g_{ij}$ يحقق الشرط :

$$a_{ij,k} = \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

وبما أنّ $F_{jk} = -F_{kj} = -g_{k\alpha}F_j^{\alpha} = -g_{\bar{j}k}$ نعوض في العلاقة السابقة نجد:

$$a_{ij,k} = \bar{\psi}_{(i}g_{j)k} - \psi_{(i}g_{\bar{j})k} \qquad (27)$$

من العلاقة : $a_{ij} = h_{ij} - 2\bar{\psi}g_{ij}$ نجد :

$$a_{\bar{\imath}j} = h_{\bar{\imath}j} - 2\bar{\psi}g_{\bar{\imath}j} \qquad (28)$$

$$a_{i\bar{j}} = h_{i\bar{j}} - 2\bar{\psi}g_{i\bar{j}} \qquad (29)$$

بجمع هاتين العلاقتين (29) وَ (28) طرفاً لطرف نجد :

$$a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{j}} = \underbrace{h_{\bar{\imath}j} + h_{i\bar{j}}}_{=0} - 2\bar{\psi}\underbrace{\left(g_{\bar{\imath}j} + g_{i\bar{j}}\right)}_{=0}$$

وبما أنّ $g_{\bar{\imath}j} + g_{i\bar{\jmath}} = 0$ حسب تعريف فضاء كيلير المكافئي وَ $h_{\bar{\imath}j} + h_{i\bar{\jmath}} = 0$ حسب $(21b)$.

إذاً : $$a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} = 0 \qquad (30)$$

من العلاقات (30) وَ (27) واستناداً إلى المبرهنة (3) حيث $\lambda_i = \psi_i \neq 0$، نستنتج أنّ فضاء كيلير المكافئي k_n يُطبق هولومورفياً إسقاطياً غير مبتذل. تم إثبات لزوم الشرط.

$(\Rightarrow)$(كفاية الشرط):

والعكس صحيح، لنفرض أنّ فضاء كيلير المكافئي k_n يطبق هولومورفياً إسقاطياً غير مبتذل، عندئذٍ استناداً إلى

المبرهنة (3) يوجد في هذا الفضاء تنسور a_{ij} من النوع $\binom{0}{2}$ متناظر غير صفري ويحقق الشروط :

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \ a_{ij|k} = \lambda_{(\bar{\imath}}g_{j)k} - \lambda_{(i}g_{\bar{\jmath})k} \\ &b)\ \ a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

حيث $\lambda_i \neq 0$ متجه ما، لأن التطبيق غير مبتذل وَ $\bar{\lambda}_i = \lambda_{\bar{\imath}} = \lambda_\alpha F_i^\alpha$ وَ $F_{jk} = -g_{\bar{\jmath}k}$.

يمكن كتابة الشروط $(31a)$ بالشكل :

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i}g_{j)k} - \lambda_{(i}F_{j)k}$$

$$\Rightarrow a_{ij,k} + 2\bar{\lambda}_k g_{ij} = 2\bar{\lambda}_k g_{ij} + \lambda_{(i}g_{j)k} - \lambda_{(i}F_{j)k}$$

$$\Rightarrow \left(a_{ij} + 2\bar{\lambda}g_{ij}\right)_{|k} = 2\bar{\lambda}_k g_{ij} + \lambda_{(i}g_{j)k} - \lambda_{(i}F_{j)k}$$

بفرض: $\psi_i = \lambda_i \neq 0$ وَ $h_{ij} = a_{ij} + 2\bar{\lambda} g_{ij}$ نعوض في العلاقة السابقة نجد :

$$h_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_{(i} g_{j)k} + \lambda_{(i} F_{j)k} \qquad (32)$$

وأيضاً :

$$h_{\bar{\imath}j} = a_{\bar{\imath}j} + 2\bar{\lambda} g_{\bar{\imath}j}$$

$$h_{i\bar{\jmath}} = a_{i\bar{\jmath}} + 2\bar{\lambda} g_{i\bar{\jmath}}$$

$$\Rightarrow h_{\bar{\imath}j} + h_{i\bar{\jmath}} = a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} + 2\bar{\lambda} \underbrace{\left(g_{\bar{\imath}j} + g_{i\bar{\jmath}}\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow h_{\bar{\imath}j} + h_{i\bar{\jmath}} = 0 \qquad (33)$$

من العلاقات (33) و (32) واستناداً إلى المبرهنة (6) نجد أنّ k_n مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهياً في

الصغر غير مبتذل. تم إثبات كفاية الشرط.

نتيجة $(\mathbf{1})$:

يسمح فضاء كيلير المكافئي k_n بتشوّه هولومورفي إسقاطي غير مبتذل إذا امتلكت جملة المعادلات الخطية الآتية

من نوع كوشي حلاً بالنسبة للتنسور المتناظر وغير الصفري $a_{ij}\left(a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} = 0\right)$ وبالنسبة للمتجه

غير الصفري λ_i والصامد τ :

$$\left.\begin{aligned} &a)\ a_{ij,k} = \bar{\lambda}_{(i}g_{j)k} + \lambda_{(i}g_{j)\bar{k}} \\ &b)\ \lambda_{i,k} = \tau g_{\bar{\imath}j} + a_{\alpha\beta}M_{ij}^{\alpha\beta} \\ &c)\ \tau_{,i} = \lambda_{\alpha}M_{i}^{\alpha} + a_{\alpha\beta}M_{i}^{\alpha\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

من أجل القيم الابتدائية في النقطة χ_0 :

$$a_{ij}(\chi_0) = a_{ij}^{0}\,, \qquad \lambda_i(\chi_0) = \lambda_i^{0}\,, \qquad \tau(\chi_0) = \tau^{0} \qquad (35)$$

والتي بالحقيقة تحقق الخواص :

$$a_{ij}^{0} = a_{ji}^{0}\ , \qquad a_{\alpha(i}^{0}F_{j)}^{\alpha}(\chi_0)\,, \qquad det\left\|a_{ij}^{0}\right\| \neq 0 \qquad (36)$$

حيث: $M_{ij}^{\alpha\beta} \equiv \mathrm{T}_{ij}^{\alpha\beta} + \varepsilon_{\bar{j}}\left\{\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta}\varepsilon^{j}\varepsilon^{k}\eta^{\ell} - \varepsilon_{\bar{\imath}}\mathrm{T}_{\vartheta jk}^{\alpha\beta}\eta^{\vartheta}\eta^{j}\varepsilon^{k}\eta^{\ell}\right\}$

$$M_{k}^{\alpha} \equiv M_{ij\vartheta}^{\alpha}\varepsilon^{i}\eta^{j}\varepsilon^{\vartheta}\eta_{\bar{k}} - M_{ijk}^{\alpha}\varepsilon^{i}\eta^{j}$$

$$M_{k}^{\alpha\beta} \equiv M_{ij\vartheta}^{\alpha\beta}\varepsilon^{i}\eta^{j}\varepsilon^{\vartheta}\eta_{\bar{k}} - M_{ijk}^{\alpha\beta}\varepsilon^{i}\eta^{j}$$

$$M_{ijk}^{\alpha\beta} \equiv M_{ij|k}^{\alpha\beta} - M_{ik|j}^{\alpha\beta}$$

$$M_{ij}^{\gamma} \equiv -R_{ijk}^{\gamma} + M_{i[j}^{\bar{\gamma}\beta}g_{k]\beta} + M_{i[j}^{\beta\bar{\gamma}}g_{k]\beta} + M_{i[j}^{\gamma\beta}g_{\bar{k}]\beta} + M_{i[j}^{\beta\gamma}g_{\bar{k}]\beta}$$

$$M_{ijk}^{\alpha\beta} \equiv M_{ijk}^{\alpha\beta}\varepsilon^{j}\eta^{i} + \left[M_{\ell mj}^{\alpha\beta}g_{\bar{\imath}k} - M_{\ell mk}^{\alpha\beta}g_{\bar{\imath}j}\right]\eta^{\ell}\varepsilon^{m}$$

$$M_{ijk}^{\alpha} \equiv M_{ijk}^{\alpha}\varepsilon^{j}\eta^{i} + \left[M_{\ell mj}^{\alpha}g_{\bar{\imath}k} - M_{\ell mk}^{\alpha}g_{\bar{\imath}j}\right]\eta^{\ell}\varepsilon^{m}$$

$$\mathrm{T}_{j\ell}^{\alpha\beta} \equiv -\tfrac{1}{2}\eta_{\bar{j}}\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta}\varepsilon^{j}\varepsilon^{k}\eta^{k} + \mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta}\varepsilon^{j}\eta^{k}$$

$$\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta} \equiv \mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta} - g_{k(\bar{\imath}}\mathrm{T}_{j)\ell}^{\alpha\beta} + g_{k(\bar{\imath}}\mathrm{T}_{j)k}^{\alpha\beta}$$

$$\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta} \equiv \delta_{(i}^{\alpha}R_{j)k\ell}^{\beta} - \tfrac{1}{2n}\left\{g_{k(i}M_{j)\ell}^{\alpha\beta} - g_{\ell(i}M_{j)k}^{\alpha\beta}\right\}$$

الإثبات :

ينتج مباشرةً من المبرهنة (8) ومن المبرهنة (4).

العلاقة بين فضاء كيلير المكافئي k_n وفضاءه المجسم k_m ومتّجه الإزاحة :

إنّ المسألة الأساسية في دراسة التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية هي دراسة العلاقة بين k_n و فضائه

المجسّم k_m و متّجه الإزاحة $\xi^{\alpha}(\chi)$.

المهم في هذه الحالة الحصول على المتجه $\xi^{\alpha}(\chi)$، و بالتالي الحصول على معادله تخصّه وذلك

بتعويض (14) في $(16a)$ نجد :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\vartheta}} y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,k} y^{\vartheta}_{,j} \xi^{\gamma} + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left(y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} \xi^{\gamma}_{,k} + y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,jk} \xi^{\gamma} + y^{\alpha}_{,ik} y^{\beta}_{,j} \xi^{\gamma}\right) \\
&\qquad + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left(\xi^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j}\right) y^{\gamma}_{,k} \\
&\qquad + a_{\alpha\beta}\left(\xi^{\alpha}_{,ik} y^{\beta}_{,j} + \xi^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,jk} + y^{\alpha}_{,i} \xi^{\beta}_{,jk} + y^{\alpha}_{,ik} \xi^{\beta}_{,j}\right) \\
&\qquad = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_{(i} g_{j)k} + \psi_{(i} F_{j)k} \qquad (35)
\end{aligned}$$

حيث بتغيير في الإحداثيات للفضاء k_n يجب أن تكون جميع y^{α} وَ ξ^{α} صامدة لذلك فإنّ المشتقات الجزئية

الأولى لها تتطابق مع المشتقات موافقة التغيّر، واستفدنا من أنّ $a_{\alpha\beta}$ صامد في k_n .

المعادلات (35) أكثر تعقيداً وذلك لأنّها تولد حقل إزاحة ثنائي $\xi^{\alpha}_{,ik}$ و للتخلّص من ذلك تجزئ العملية الآتية

على الأدلة i,k,j :

$$(i,,j,k\,)+(i,k,j\,)-(j,k,i)$$

نحصل على العلاقات:

$$A_{ijk}+B_{ijk}+C_{ijk}=D_{ijk} \qquad (36)$$

حيث:

$$A_{ijk}=\xi^{\gamma}\left(\underbrace{\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\vartheta}}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\vartheta}_{,k}}_{1}+\underbrace{\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\vartheta}}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,k}y^{\vartheta}_{,j}}_{2}-\underbrace{\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\alpha}}y^{\beta}_{,j}y^{\vartheta}_{,k}y^{\alpha}_{,i}}_{3}\right)$$

نبدل في الحد الثاني بين الدليلين $\beta \leftrightarrow \vartheta$ وفي الحد الثالث نجري المبادلة الآتية:

$$\vartheta\longrightarrow\alpha\,,\quad \beta\longrightarrow\vartheta,\quad \alpha\longrightarrow\beta$$

نجد:

$$A_{ijk}=\xi^{\gamma}\left(\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\vartheta}}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\vartheta}_{,k}+\frac{\partial^2 a_{\alpha\vartheta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\beta}}y^{\alpha}_{,i}y^{\vartheta}_{,k}y^{\beta}_{,j}-\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\alpha}}y^{\beta}_{,j}y^{\vartheta}_{,k}y^{\alpha}_{,i}\right)$$

$$=\xi^{\gamma}\frac{\partial}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\vartheta}}+\frac{\partial a_{\alpha\vartheta}}{\partial y^{\beta}}-\frac{\partial a_{\beta\vartheta}}{\partial y^{\alpha}}\right)y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\vartheta}_{,k}$$

$$=2\xi^{\gamma}\frac{\partial \Gamma_{\alpha,\beta\vartheta}}{\partial y^{\gamma}}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\vartheta}_{,k} \qquad (37)$$

حيث: $\Gamma_{\alpha,\beta\vartheta}$ رموز كريستوفل من النوع الأول للفضاء k_n .

$$
\begin{aligned}
B_{ijk} = \partial a_{\alpha\beta}\left(y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} \xi^{\gamma}_{,k} + y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,jk} \xi^{\gamma} + y^{\alpha}_{,ik} y^{\beta}_{,j} \xi^{\gamma}\right) \\
+ \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left(\xi^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} y^{\gamma}_{,k} + \xi^{\beta}_{,j} y^{\alpha}_{,j} y^{\gamma}_{,k}\right) \\
+ \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left(y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,k} \xi^{\gamma}_{,j} + y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,kj} \xi^{\gamma} + y^{\alpha}_{,ij} y^{\beta}_{,k} \xi^{\gamma}\right) \\
+ \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left(\xi^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} y^{\gamma}_{,k} + \xi^{\beta}_{,j} y^{\alpha}_{,j} y^{\gamma}_{,k}\right) \\
- \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left(y^{\alpha}_{,j} y^{\beta}_{,k} \xi^{\gamma}_{,i} + y^{\alpha}_{,j} y^{\beta}_{,ki} \xi^{\gamma} + y^{\alpha}_{,ji} y^{\beta}_{,k} \xi^{\gamma}\right) \\
- \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left(\xi^{\alpha}_{,j} y^{\beta}_{,k} y^{\gamma}_{,i} + \xi^{\beta}_{,k} y^{\alpha}_{,j} y^{\gamma}_{,i}\right)
\end{aligned}
$$

نستطيع كتابة B_{ijk} بالشكل :

$$B_{ijk} = B^{1}_{ijk} + B^{2}_{ijk} + B^{3}_{ijk} + B^{4}_{ijk} \qquad (38)$$

حيث :

$$B^{1}_{ijk} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left[y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} \xi^{\gamma}_{,k} + \xi^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} y^{\gamma}_{,k} + \xi^{\beta}_{,j} y^{\alpha}_{,j} y^{\gamma}_{,k}\right]$$

$$B^{2}_{ijk} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left[y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,k} \xi^{\gamma}_{,j} + \xi^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,k} y^{\gamma}_{,j} + \xi^{\beta}_{,k} y^{\alpha}_{,i} y^{\gamma}_{,j}\right]$$

نبادل بين الدليلين $\gamma \leftrightarrow \beta$ نجد:

$$B^{2}_{ijk} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left[y^{\alpha}_{,i} y^{\gamma}_{,k} \xi^{\beta}_{,j} + \xi^{\alpha}_{,i} y^{\gamma}_{,k} y^{\beta}_{,j} + \xi^{\gamma}_{,k} y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j}\right]$$

$$B^{3}_{ijk} = -\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left[y^{\alpha}_{,j} y^{\beta}_{,k} \xi^{\gamma}_{,i} + \xi^{\gamma}_{,j} y^{\beta}_{,j} y^{\gamma}_{,\chi} + \xi^{\beta}_{,k} y^{\alpha}_{,j} y^{\gamma}_{,i}\right]$$

نجري عملية المبادلة الآتية : $\alpha \longrightarrow \beta$ ، $\beta \longrightarrow \gamma$ ، $\gamma \longrightarrow \alpha$ نجد:

$$B_{ijk}^{3} = -\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial y^{\alpha}}\left[y_{,j}^{\beta} y_{,k}^{\gamma} \xi_{,i}^{\gamma} + \xi_{,j}^{\beta} y_{,k}^{\gamma} y_{,i}^{\alpha} + y_{,j}^{\beta} \xi_{,k}^{\gamma} y_{,i}^{\alpha}\right]$$

$$B_{ijk}^{4} = \xi^{\gamma}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left[y_{,i}^{\alpha} y_{,jk}^{\beta} + y_{ik}^{\alpha} y_{,j}^{\beta} + y_{,i}^{\alpha} y_{,kj}^{\beta} + y_{,ij}^{\alpha} y_{k}^{\beta} - y_{,j}^{\alpha} y_{,ki}^{\beta} - y_{,ji}^{\alpha} y_{,k}^{\beta}\right]$$

$$= \xi^{\gamma}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left[\underbrace{2y_{,i}^{\alpha} y_{,jk}^{\beta}}_{1} + \underbrace{y_{,ik}^{\alpha} y_{,j}^{\beta}}_{2} - \underbrace{y_{,kj}^{\beta} y_{,j}^{\alpha}}_{3}\right]$$

نبادل في الثالث بين الدليلين $\alpha \leftrightarrow \beta$ علماً أنّ $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ نجد:

$$B_{ijk}^{4} = \xi^{\gamma}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left[2y_{,j}^{\alpha} y_{,jk}^{\beta} + \underbrace{y_{,ik}^{\alpha} y_{,j}^{\beta} - y_{,ki}^{\alpha} y_{,j}^{\beta}}_{=0}\right]$$

$$\Rightarrow B_{ijk}^{4} = 2\xi^{\gamma}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}} y_{,i}^{\alpha} y_{,jk}^{\beta}$$

نعوض: B_{ijk}^{4} ,B_{ijk}^{3} ,B_{ijk}^{2} ,B_{ijk}^{1} في العلاقة (38) نجد:

$$B_{ijk} = \left[\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}} + \frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial y^{\beta}} - \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial y^{\alpha}}\right]\left(y_{,i}^{\alpha} y_{,j}^{\beta} \xi_{,k}^{\gamma} + y_{,i}^{\alpha} \xi_{,j}^{\beta} y_{,k}^{\gamma} + \xi_{,i}^{\alpha} y_{,j}^{\beta} y_{,k}^{\gamma}\right) + 2\xi^{\gamma}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}} y_{,i}^{\alpha} y_{,jk}^{\beta}$$

$$\Rightarrow B_{ijk} = 2\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}\left(y_{,i}^{\alpha} y_{,j}^{\beta} \xi_{,k}^{\gamma} + y_{,i}^{\alpha} \xi_{,j}^{\beta} y_{,k}^{\gamma} + \xi_{,i}^{\alpha} y_{,j}^{\beta} y_{,k}^{\gamma}\right) + 2\xi^{\gamma}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}} y_{,i}^{\alpha} y_{,jk}^{\beta} \qquad (39)$$

$$C_{ijk} = a_{\alpha\beta}\left[\xi_{,ik}^{\alpha} y_{,j}^{\beta} + \xi_{,i}^{\alpha} y_{,jk}^{\beta} + y_{,i}^{\alpha} \xi_{,j}^{\beta} + y_{,ik}^{\alpha} \xi_{,j}^{\beta} + \xi_{,ij}^{\alpha} y_{,k}^{\beta} + \xi_{,i}^{\alpha} y_{,kj}^{\beta} + y_{,i}^{\alpha} \xi_{,kj}^{\beta} + y_{,ij}^{\alpha} \xi_{,k}^{\beta} - \xi_{,ji}^{\alpha} y_{,k}^{\beta} - \xi_{,j}^{\alpha} y_{,ki}^{\beta} - \xi_{,j}^{\alpha} y_{,ki}^{\beta} - y_{,ji}^{\alpha} \xi_{,k}^{\beta}\right]$$

$$\Rightarrow C_{ijk} = a_{\alpha\beta}\left[2y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{,jk} + 2\xi^{\alpha}_{i}y^{\beta}_{,jk} + \left(\xi^{\alpha}_{,ik}y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,ik}\xi^{\beta}_{,j}\right) - \underbrace{\xi^{\beta}_{,ki}y^{\alpha}_{,j} + y^{\beta}_{,ki}\xi^{\alpha}_{,j}}_{1}\right]$$

نبادل في الحد الأول بين الدليلين $\alpha \leftrightarrow \beta$ علماً أنّ $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ نجد :

$$\Rightarrow C_{ijk} = a_{\alpha\beta}\left[2y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{,jk} + 2\xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,jk} + \underbrace{\left(\xi^{\alpha}_{,ik}y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,ik}\xi^{\beta}_{,j}\right) - \left(\xi^{\alpha}_{,ik}y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,ik}\xi^{\beta}_{,j}\right)}_{=0}\right]$$

$$C_{ijk} = 2a_{\alpha\beta}\left[y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{,jk} + \xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,jk}\right] \qquad (40)$$

$$D_{ijk} = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_i g_{jk} + \bar{\psi}_j g_{ik} + \psi_i F_{jk} + \psi_j F_{ik} + 2\bar{\psi}_j g_{ik} + \bar{\psi}_i g_{kj} + \bar{\psi}_k g_{ij} + \psi_i F_{kj} + \psi_k F_{ij} - 2\bar{\psi}_i g_{jk} - \bar{\psi}_j g_{ki} - \bar{\psi}_k g_{ji} - \psi_j F_{ki} - \psi_k F_{ji}$$

بما أنّ k_n فضاء كيلير المكافئي فحسب تعريف الفضاء k_n نجد: $F_{ij} = -F_{ji}$ ، وبما أنّ $g_{ij} = g_{ji}$ نجد:

$$D_{ijk} = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + 2\bar{\psi}_j g_{ik} + 2\psi_j F_{ik} + 2\psi_k F_{ij} + \bar{\psi}_i g_{jk} + \bar{\psi}_i g_{jk} - 2\bar{\psi}_i g_{jk} + \bar{\psi}_j g_{ik} - \bar{\psi}_j g_{ik} + \bar{\psi}_k g_{ji} - \bar{\psi}_k g_{ij} + \psi_i F_{jk} - \psi_i F_{jk}$$

$$\Rightarrow D_{ijk} = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + 2\bar{\psi}_j g_{ik} - 2\psi_j F_{ki} - 2\psi_k F_{ji}:$$

$$\Rightarrow D_{ijk} = 2\left[\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_j g_{ik} - \psi_{(j}F_{k)i}\right] \qquad (41)$$

نعوض العلاقات (37) , (39) , (40) , (41) في العلاقات (36) وبعد تقسيم الطرفين على 2 نحصل على العلاقات :

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta}\left(y_{,i}^{\alpha}\xi_{,jk}^{\beta}+\xi_{,i}^{\alpha}y_{,jk}^{\beta}\right)+\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}\left(y_{,i}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}\xi_{,k}^{\gamma}+y_{,i}^{\alpha}\xi_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\gamma}+\xi_{,i}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\gamma}\right) \\ +\xi^{\gamma}\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}y_{,i}^{\alpha}y_{,jk}^{\beta}+\frac{\partial\Gamma_{\alpha,\beta\vartheta}}{\partial y^{\gamma}}y_{,i}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\vartheta}\right) \\ =\bar{\psi}_k g_{ij}+\bar{\psi}_j g_{ik}-\psi_{(j}F_{k)i} \qquad (42) \end{aligned}$$

حيث: $\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}$ مركبات كريستوفل للفضاء k_m وَ $F_{ij}=g_{i\alpha}F_j^{\alpha}$ وَ $\bar{\psi}_i=\psi_{\bar{\imath}}$ وَ $F_{ij}+F_{ji}=0$.

وأيضاً لدينا من الشروط $(16b)$ أنّ: $\delta g_{\bar{\imath}j}+\delta g_{i\bar{\jmath}}=0$. المعادلات (35) وَ (42) متكافئة. وبالتالي نصل إلى صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة (9):

إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيلير المكافئي k_n المحتوى في فضاء كيلير المكافئي k_m ذو حقل الإزاحة $\xi^{\alpha}(\chi)$ مشوّهاً هومولورفياً إسقاطياً لا متناهٍ في الصغر هو تحقق الشروط :

$$\left.\begin{aligned} &a)\ a_{\alpha\beta}\left(y_{,i}^{\alpha}\xi_{,jk}^{\beta}+\xi_{,i}^{\alpha}y_{,jk}^{\beta}\right) \\ &\quad+\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}\left(y_{,i}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}\xi_{,k}^{\gamma}+y_{,i}^{\alpha}\xi_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\gamma}+\xi_{,i}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\gamma}\right) \\ &\quad+\xi^{\gamma}\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}y_{,i}^{\alpha}y_{,jk}^{\beta}+\frac{\partial\Gamma_{\alpha,\beta\vartheta}}{\partial y^{\gamma}}y_{,i}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\vartheta}\right) \\ &\quad=\bar{\psi}_k g_{ij}+\bar{\psi}_j g_{ik}-\psi_{(j}F_{k)i} \\ &b)\ \delta g_{\bar{\imath}j}+\delta g_{i\bar{\jmath}}=0 \end{aligned}\right\}\ (43)$$

حيث : $\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}$ مركبات كريستوفل من النوع الأول للفضاء k_n. ψ_i متجه ما، $\bar{\psi}_i$ متجه تدرّج

$$\bar{\psi}_i = \psi_{\bar{\imath}} = \psi_\alpha F_i^\alpha \ . \ F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha \ \text{وَ} \ \delta g_{\bar{\imath}j} = \delta g_\alpha F_i^\alpha \ .$$

تعريف $(\mathbf{5})$: $[\mathbf{3}]$

يُسمى فضاء كيليرالمكافئي k_n فضاءً متقايساً **(تقايسياً)** إذا وجد فيه حقل متجهي دوراني ξ^n يحقق الشروط :

$$\xi^h_{,i} = \rho \delta^h_i \qquad (44)$$

حيث: ρ صامد ما.

إذا كان $\rho \neq 0$ ، فإن الفضاء k_n عندئذٍ يُسمى فضاءً متماثلاً تقايسياً من النوع الأساسي.

تمهيدية $(\mathbf{2})$:$[3]$

تُطبق فضاءات كيلير المكافئية المتماثلة تقايسياً من النوع الأساسي تطبيقياً هولومورفياً إسقاطياً غير مبتذل.

مبرهنة $(\mathbf{10})$:

تسمح فضاءات كيلير المكافئية المتماثلة تقايسياً من النوع الأساسي بتشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في

الصغر غير مبتذل.

الإثبات:

بما أنّ فضاءات كيلير المكافئية المتماثلة تقايسياً من النوع الأساسي تسمح بتطبيق هولومورفي إسقاطي غير

مبتذل حسب التمهيدية (2) وبالتالي فهي تسمح بتشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في الصغر غير مبتذل حسب

المبرهنة (8). تم إثبات المبرهنة.

تغيّر تنسوري ريمان و ريتشي لفضاء كيلير المكافئي k_n بتأثير التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية

اللامتناهية في الصغر:

يعطى تنسور ريمان R_{ijk}^{h} للفضاء k_n بالعلاقة:

$$R_{ijk}^{h} = \partial_j \Gamma_{ik}^{h} - \partial_k \Gamma_{ij}^{h} + \Gamma_{j\alpha}^{h} \Gamma_{ik}^{\alpha} - \Gamma_{k\alpha}^{h} \Gamma_{ij}^{\alpha}$$

حيث Γ_{ij}^{h} رموز كريستوفيل.

يعطى تنسور ريتشي R_{ij} للفضاء k_n بالعلاقة:

$$R_{ij} = R^{\alpha}_{ij\alpha}$$

تمهيدية (3):

تتحقق بتأثير التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهٍ في الصغر للفضاء k_n العلاقات الآتية:

$$\delta R^h_{ijk} = \left(\delta \Gamma^h_{ik}\right)_{,j} - \left(\delta \Gamma^h_{ij}\right)_{,k} \qquad (45)$$

حيث: R^h_{ijk} تنسور ريمان للفضاء k_n، وَ Γ^h_{ij} رموز كريستوفيل.

الإثبات :

$$\left(\delta \Gamma^h_{ik}\right)_{,j} - \left(\delta \Gamma^h_{ij}\right)_{,k} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\left[\tilde{\Gamma}^\ell_{ik} - \Gamma^\ell_{ik}\right]_{,j} - \left[\tilde{\Gamma}^\ell_{ij} - \Gamma^\ell_{ij}\right]_{,k}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\partial_j \tilde{\Gamma}^\ell_{ik} - \tilde{\Gamma}^\ell_{\alpha k}\tilde{\Gamma}^\alpha_{ij} - \tilde{\Gamma}^\ell_{i\alpha}\tilde{\Gamma}^\alpha_{kj} - \partial_j \Gamma^\ell_{ik} + \Gamma^\ell_{\alpha k}\Gamma^\alpha_{ij} + \Gamma^\ell_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{kj} - \partial_k \tilde{\Gamma}^\ell_{ij}\right. \\ &\qquad \left. + \tilde{\Gamma}^\ell_{\alpha j}\tilde{\Gamma}^\alpha_{ik} + \tilde{\Gamma}^\ell_{i\alpha}\tilde{\Gamma}^\alpha_{jk} + \partial_k \Gamma^\ell_{ij} - \Gamma^\ell_{\alpha j}\Gamma^\alpha_{ik} - \Gamma^\ell_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{jk}\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\tilde{R}^\ell_{ijk} - R^\ell_{ijk}\right] = \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon\delta\, R^\ell_{ijk} = \delta\, R^\ell_{ijk} \end{aligned}$$

حيث : $\tilde{R}^h_{ijk}$ تنسور ريمان للفضاء $\tilde{k}_n$،

$$R^h_{ijk} = \partial_j \Gamma^h_{ik} - \partial_k \Gamma^h_{ij} + \Gamma^h_{j\alpha}\Gamma^\alpha_{ik} - \Gamma^h_{k\alpha}\Gamma^\alpha_{ij}$$

$$\tilde{R}^h_{ijk} = \partial_j \Gamma^h_{ik} - \partial_k \tilde{\Gamma}^h_{ij} + \tilde{\Gamma}^h_{j\alpha}\tilde{\Gamma}^\alpha_{ik} - \tilde{\Gamma}^h_{k\alpha}\tilde{\Gamma}^\alpha_{ij}$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial \chi^i}$$

مبرهنة $(\mathbf{11})$:

إنّ تغيّر تنسوري ريمان وَ ريتشي للفضاء k_n بتأثير التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر

للفضاء k_n يُعطى بالعلاقات :

$$\left.\begin{array}{l} a)\ \delta\, R^h_{ijk} = \delta^h_k \bar{\varphi}_{i,j} - \delta^h_j \bar{\varphi}_{i,k} + F^h_k \varphi_{i,j} - F^h_j \varphi_{i,k} + F^h_i \varphi_{[k,j]} \\ b)\ \delta R_{ij} = -n\bar{\varphi}_{j,i} \end{array}\right\} (46)$$

حيث :" , " تعني المشتق الموافق التغيّر في الفضاء k_n. وَ $\bar{\varphi}_i = \varphi_{\bar{\imath}}$ متّجه تدرّج .

الإثبات :

استناداً إلى العلاقات $(22a)$ نجد :

$$\delta\Gamma^h_{ik} = \delta^h_{(i}\bar{\varphi}_{k)} + F^h_{(i}\varphi_{k)} = \delta^h_i \bar{\varphi}_k + \delta^h_k \bar{\varphi}_i + F^h_i \varphi_k + F^h_k \varphi_i$$

$$\delta\Gamma^h_{ij} = \delta^h_{(i}\bar{\varphi}_{j)} + F^h_{(i}\varphi_{j)} = \delta^h_i \bar{\varphi}_j + \delta^h_j \bar{\varphi}_i + F^h_i \varphi_j + F^h_j \varphi_i$$

$$\begin{aligned} \left(\delta\Gamma^h_{ik}\right)_{,j} &= \overbrace{\delta^h_{i,j}\bar{\varphi}_k}^{=0} + \delta^h_i \bar{\varphi}_{k,j} + \overbrace{+\delta^h_{k,j}\bar{\varphi}_i}^{=0} + +\delta^h_k \bar{\varphi}_{i,j} + \overbrace{F^h_{i,j}\varphi_k}^{=0} + F^h_i \varphi_{k,j} \\ &\quad + \underbrace{F^h_{k,j}\varphi_i}_{=0} + F^h_k \varphi_{i,j} \\ &= \delta^h_i \bar{\varphi}_{k,j} + \delta^h_k \bar{\varphi}_{i,j} + F^h_i \varphi_{k,j} + F^h_k \varphi_{i,j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\delta\Gamma^h_{ik}\right)_{,k} &= \delta^h_{i,k}\bar{\varphi}_j + \delta^h_i \bar{\varphi}_{j,k} + \delta^h_{j,k}\bar{\varphi}_i + \delta^h_j \bar{\varphi}_{i,k} + F^h_{i,k}\varphi_j + F^h_i \varphi_{j,k} \\ &\quad + F^h_{j,k}\varphi_i + F^h_j \varphi_{i,k} \\ &= \delta^h_i \bar{\varphi}_{j,k} + \delta^h_j \bar{\varphi}_{i,k} + F^h_i \varphi_{j,k} + F^h_j \varphi_{i,k} \end{aligned}$$

حيث : $F^h_{i,j} = 0$ وَ $\delta^h_{i,j} = 0$ حسب تعريف فضاء كيليرالمكافئي.

نعوض العلاقات السابقة في العلاقة : (45) نجد:

$$\delta\, R_{ijk}^{h} = \delta_i^h \overbrace{\left[\bar{\varphi}_{k,j} - \bar{\varphi}_{j,k}\right]}^{=0} + F_i^h\left[\varphi_{k,j} - \varphi_{j,k}\right] + \delta_k^h \bar{\varphi}_{i,j} - \delta_j^h \bar{\varphi}_{i,k} + F_k^h \varphi_{i,j} - F_j^h \varphi_{i,k}$$
$$= \delta_k^h \bar{\varphi}_{i,j} - \delta_j^h \bar{\varphi}_{i,k} + F_k^h \varphi_{i,j} - F_j^h \varphi_{i,k} + F_i^h \varphi_{[k,j]}$$

$$\Rightarrow \delta\, R_{ijk}^{h} = \delta_k^h \bar{\varphi}_{i,j} - \delta_j^h \bar{\varphi}_{i,k} + F_k^h \varphi_{i,j} - F_j^h \varphi_{i,k} + F_i^h \varphi_{[k,j]}$$

وهي العلاقة $(46a)$. حيث : $\bar{\varphi}_{i,j} = \bar{\varphi}_{j,i}$ لأنّ $\bar{\varphi}_i$ متّجه تدرّج.بتقليص العلاقة $(46a)$ بالدليلين h, k نجد:

$$\delta R_{ij} = -n\bar{\varphi}_{j,i}$$

المراجع :

[1] Hinterleitner I, (2012)−**On holomorphically projective mappings of e−K¨ahler manifolds**. Arch. Mat. (Brno) 48, 333−338.

[2] Курчатова И.Н., М икеш Й, (1985)− **Голоморфно_проективные отображения келеровых пространств.** УЧ. пособие.− Одесса: ОГУ,

69 с.

[3] Hinterleitner I, (2015)− **Holomorphically projective mappings of (pseudo−) K¨ahler manifolds preserve**

the class of differentiability.Filomat.

[4] Mikeˇs J., Chud´a H., Hinterleitner I, (2014)- **Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition. Int. J. Geom. Methods Mod**. Phys. 11:5, 1450044,8p.

[5] VEKUA, I.N, 1959- **Generalized analytic functions**. (Russian) Moscow, Fizmatgiz.

[6] Gavril'chenko, M.L 1989-**Geodesic deformations of Riemannian space. Diff.Geom. and its Applications**, World Sci., Singapore, 47-53.

[7] Chud´a H., Chodorov´a M., Shiha M, (2012)-**On composition of conformal and Holomorphically projective mappings between conformally K¨ahlerian spaces**. J. Appl. Math. Bratislava, 5:3, 91-96.

[8] Микеш Й, (1979)- **Геодезические и голоморфно_проективные отображения специалных римановых пространств**: дисс; канд. наук._Одесса, c.107.

[9] Yano K , (1965)- **"Differential geometry on complex**

and almost complex spaces," Oxford–London –New York–Paris–Frankfurt: Pergamon Press. XII, 323 p.

[10] Al Lamy Raad J., ˇSkodov´a M., Mikeˇs J, (2006)- **Onholomorphically projective mappings from equiaffine generally recurrent spaces onto K¨ahlerian spaces**. Arch. Math. Brno 42:5, 291–299.

[11] Mikeˇs, J. and Shiha M. and Vanˇzurov´a A , (2009)- **"Invariant objects by holomorhpically projective mappings of parabolically K¨ahler spaces**." J. Appl. Math. 2:1, pp. 135–141.

[12] Velimirović, Lj. S, (2009- **Infinitesimal bending, Faculty of Science and Mathematics**, Nis), ISBN 86-83481-42-5.

[13] Gavril'chenko, M. L, (1972)-**On geodesic deformations of hypersurfaces**, Proc. Conf. Samarkand.

التغيرات النوعية والكمية النسبية للعوالق الحيوانية تحت تأثير التلوث بمياه الصرف الصحي خلال فصل الربيع في المياه الشاطئية لمدينة اللاذقية

أ.د. كمال الحنون*

حيدر بسام حسن**

ملخّص

جرت عملية الاعتيان من الطبقة السطحية للمياه في ثلاث محطات مختلفة في بعدها عن الشاطئ وقربها من مصدر التلوث و من ثلاث مناطق مختلفة بخصائصها البيئية في المياه الشاطئية لمدينة اللاذقية وهي : منطقة نظيفة نسبياً (A) ومنطقتين ملوثتين (B) و (C) مختلفتين من حيث شدة تلوثهما بمياه الصرف الصحي، في الفترة الممتدة مابين 23 آذار 2020 و 18 أيار 2020 خلال فصل الربيع ، وترافق جمع العينات مع قياس بعض العوامل البيئية وهي درجة حرارة المياه ، درجة الحموضة pH ،الملوحة ،تركيز الأكسجين المنحل بالماء ،مقدار الحاجة الحياتية للأكسجين(Biological oxygen demand(BOD والشفافية.

بلغ العدد الإجمالي للعينات 27 عينة وتم تحديد 136 نوعاً و 9 أجناس من العوالق الحيوانية تنتمي إلى 22 زمرة تصنيفية ، منها 71 نوعاً تنتمي إلى مجموعة مجذافيات الأرجل Copepoda .

لوحظ من خلال الدراسة أن معظم الأنواع والزمر التصنيفية ظهرت في جميع مناطق الدراسة خلال فصل الربيع ، ولم يكن هناك فروقات كبيرة في توزع العوالق الحيوانية بين مناطق الدراسة خلال هذا الفصل ، إلّا بعض الأنواع المميزة لجودة المياه ومستوى تلوثها بالمواد العضوية ، إذ وجدت بعض أنواع العوالق الحيوانية في المنطقة النظيفة فقط نذكر منها النوعان *Calanus gracilis* ، *Euchaeta hebes*،في حين وجدت الأنواع *Acartia* , *Pleopis polyphemoides , Podon intermedius grani*، في المناطق الملوثة فقط ، بالإضافة إلى تغيرات الكمية النسبية للأنواع وذلك تبعاً لمناطق الدراسة ومحطاتها المختلفة .

الكلمات المفتاحية : العوالق الحيوانية ، التلوث ، مياه الصرف الصحي ، فصل الربيع .

***أستاذ–قسم علم الحياة الحيوانية–كلية العلوم–جامعة تشرين–اللاذقية– سوريا .**

****طالب دراسات عليا(ماجستير)– قسم علم الحياة الحيوانية–كلية العلوم–جامعة تشرين–اللاذقية– سوريا .**

E–mail : Hhaidar.has@gmail.com .

Relative qualitative and quantitative changes of zooplankton under the Influence of pollution with sewage water during the spring in coastal waters of Lattakia city.

Abstract

The sampling prosses took place from the surface layer of water in three different station in its distance from the beach and its proximity to the source of pollution in each of the three regions that differed with their environmental characterstics,which is : Relatively clean regions (A) and two regions (B) and (C) with diferent levels of severity of sewage water pollution , in the coastal waters of Lattakia City , in the period between 23 March 2020 and 18 May 2020 during the spring season , and the sampling was accompanied with measurement of some environmental factors , which is water temperature , pH , salinity , dissolved oxygen in the water ,Biological oxygen demand (BOD) and transparency .

The total numer of samples reached 27 samples , and 136 species and 9 genus of zooplankton have been identified belonging to 22 taxonomic groups , 71 of which belong to Copepoda .

Observed during the study that most of the species and taxonomic groups appeared in all regions of the study during the spring , and there were no siginificant differences in the distribution of zooplankton between the study regions during this season , except for some species that distinguished the quality of water and the level of water pollution with organic matter , where some species of zooplankton were found in the clean region only , among them : ***Calanus gracilis* , *Euchaeta hebes*** ,whereas other species , which is : ***Acartia grani* , *Pleopis* polyphemoides , *Podon intermedius*** were found in polluted regions only , inaddition to changes in relative quantity of some species accordimg to the study regions and their different stations .

Keywords : Zooplankton , pollution , Sewage water , Spring .

1 – مقدمة :

تعد العوالق الحيوانية ذات أهمية بالغة في النظم البيئية لحساسيتها العالية للاضطرابات وتغيرات النظام البيئي المائي بما في ذلك التلوث ، والذي يمكن أن يغير من مكونات النظام البيئي البحري (Vidjak,2016) ، كما وتعد العوالق الحيوانية في غاية الأهمية كونها تشكل القاعدة الغذائية الرئيسة لغالبية الأسماك البحرية وصغارها ويرقاتها ، بالإضافة إلى العديد من القشريات الأخرى، ومساهمتها في إغناء التنوع الحيوي البحري الشاطئي، ولذلك تزايدت أهمية الحفاظ على العوالق الحيوانية وتنميتها وحمايتها من تأثيرات الظروف البيئية وخاصة تأثيرات الأنشطة البشرية المختلفة ، لكونها تعطي معلومات دقيقة عن إنتاجية المادة الحية في النظم المائية ، و تساعد على تقييم مستوى التلوث بالمواد العضوية والكيميائية في النظم المائية (Williamson and Reid,2001) .

ونظراً للأهمية الكبيرة التي تتمتع بها العوالق الحيوانية ، كانت موضوعاً لكثير من الأبحاث والدراسات في مختلف بحار العالم ومحيطاته ، و تمت دراسة العوالق الحيوانية في المياه الشاطئية السورية منذ بداية التسعينيات ، نذكر منها دراسة Hamameh(1995) التي درست التركيب النوعي للعوالق الحيوانية وتغيراتها الزمانية والمكانية في شاطئ مدينة اللاذقية ، ودراسة AL–Hanoun(2004) والتي تناولت التغيرات الفصلية والسنوية للعوالق الحيوانية في المنطقة الشاطئية شمال مدينة اللاذقية ، وأيضاً دراسة Hamameh(2014) للتوزع العمودي للعوالق الحيوانية وتغيراتها المكانية و الزمانية في المياه الشاطئية لمدينة جبلة ، وكذلك دراسة Mayya(2018) على القشريات البلانكتونية في المياه الشاطئية لمدينة طرطوس ، كما تمت دراسة العوالق الحيوانية بصورة عامة ، وبالنسبة لكل الصفوف الحيوانية تقريباً في المياه الشاطئية والإقليمية العربية السورية (AL–Hanoun and Zaeni,2017) ، (AL–Hanoun and Zaeni,2020) .

أما فيما يتعلق بدراسة تأثير التلوث على العوالق الحيوانية ، كانت الدراسات المحلية التي تناولت موضوع التلوث قليلة جداً ، نذكر منها دراسة Baker and NourEddin(1993) واللذين درسا تأثير التلوث على مجموعة العوالق الحيوانية في المياه الساحلية السورية مقابل مدينة اللاذقية ، كما أجريت دراسة تجريبية حول تأثير التلوث بالنفط وبعض مشتقاته على عدة أنواع من العوالق الحيوانية البحرية في منطقة اللاذقية (AL–Hanoun,1998) ، أما في المياه الشاطئية اللبنانية المجاورة ، أجريت العديد من الدراسات على العوالق الحيوانية نذكر

منها دراسة (Lakkis and Kouyoymjian(1974 و التي تناولت تركيب وغزارة العوالق الحيوانية في أماكن الصرف الصحي لمياه مدينة بيروت ، وكذلك دراسة Lakkis and (Abboud(1976 على العوالق الحيوانية والتلوث في القطاع اللبناني من شرق المتوسط ، كما قام (Lakkis(2011 بإجراء مسح شامل لزمر العوالق الحيوانية البحرية ودراسة توزعها العمودي وتغيراتها الزمانية والمكانية في المياه اللبنانية .

كانت هناك العديد من الدراسات في أجزاء وأحواض مائية مختلفة من البحر المتوسط والتي تناولت دراسة العوالق الحيوانية وتغيراتها تبعاً لتأثير العوامل البيئية والملوثات ، نذكر منها في المياه اليونانية دراسات كل من (Apostolopoulu(1981 و Siokou and (Papathanssrou(1991 و (Pitta *et al* (2009 ، و في خليج اسكندرون شمال شرق بحر الليفتين (Terbiyik kurt and Polat ,2013,2014,2015) و (Toklu and Sarihan ,2016) ، و في المياه الشاطئية المصرية جنوب شرق المتوسط (Zakaria,2007) ، (Abdel-Aziz,2001) .

1-1. أهمية البحث وأهدافه :

أهمية البحث تعود لكون هذه الدراسة من الدراسات القليلة جداً لمياه الساحل السوري والتي تتعلق بدراسة أثر التلوث العضوي على العوالق الحيوانية وتغيراتها النوعية وكميتها النسبية .

و يهدف البحث إلى دراسة التركيب النوعي للعوالق الحيوانية وتغيراتها المكانية ومقارنتها بين مناطق التلوث بمياه الصرف الصحي والمنطقة النظيفة نسبياً والبعيدة عن مصادر التلوث .

2- مواد البحث و طرائقه :

تم الاعتيان من ثلاثة مناطق في المياه الشاطئية لمدينة اللاذقية ، تتصف كل منطقة بخواصها البيئية والجغرافية المختلفة .

1-2. مناطق الدراسة ومحطاتها :

1 - منطقة المعهد العالي للبحوث البحرية :

تقع شمالي مدينة اللاذقية بجوار الشاطئ الأزرق وهي منطقة مفتوحة وعرضة للتيارات البحرية وتعد نظيفة نسبياً كونها بعيدة عن مصادر التلوث .

2 - جنوب ميناء الصيد والنزهة(المينا اليوغسلافية) :

تقع شمالي مرفأ اللاذقية للنقل البحري والتجاري وشمال المنطقة الحرة مقابل المشروع العاشر،وهي منطقة مغلقة تقريباً ومعزولة نسبياً وحركة التيارات فيها ضعيفة جداً لوقوعها خلف رصيف المرفأ و تُعدّ منطقة ملوثة إذ يصب فيها قناتان للصرف الصحي الأكبر منهما تخدم قسم كبير من أحياء و مناطق مدينة اللاذقية وبعض البلدات القريبة .

3 – مقابل الرمل الجنوبي وجنوبي مسبح الشعب :

تعد المنطقة القريبة من الشاطئ قليلة التأثر بالتيارات لوقوعها ضمن خليج ،وتُعدّ منطقة ملوثة يصب فيها عدد كبير من قنوات الصرف الصحي قريبة من بعضها البعض ، وتخدم عدة أحياء سكنية كبيرة من مدينة اللاذقية ، الشكل (1) .

واختلفت أعماق المحطات وذلك بسبب الاختلافات والخواص الجغرافية لكل منطقة وكانت الأعماق كما يلي : A1:4m, A2:9m, A3:45m, B1:3m, B2:6m, B3:32m, C1:2.50m, C2:3m, C3:26m.

جمعت العينات في الفترة بين 23/3/2020 وحتى 18/5/2020 ضمناً ، وذلك بمعدل طلعة بحرية واحدة شهرياً وبلغ عدد العينات 27 عينة ، وتم الاعتيان من الطبقة المائية السطحية (0–40) سم ، باستخدام شبكة جمع العوالق الحيوانية ذات ثقوب قياس 200µ من نمط ايبيشتين ، وترافق جمع العينات مع إجراء القياسات لبعض العوامل البيئية (درجة الحرارة،الملوحة،درجة الحموضة pH،الأكسجين المنحل بالماء) ، بينما تم قياس مقدار الحاجة الحياتية للأكسجين (BOD_5) في المختبر بواسطة جهاز (BOD) من نمط OxiTop شركة WTW، واستخدم قرص سيكي لقياس الشفافية ، وتم تحديد أنواع وزمر العوالق الحيوانية في المختبر باستخدام المراجع و المفاتيح التصنيفية المستخدمة عالمياً مثل : (AL–Yamani *et al.,2011*)، (Bouillon *et al.*,2004) ، (Rose,1933) ، (Tregoubboff and Rose I,II ,1978) ، (AL–Hanoun and Zaeni ,2020) .

شكل(1): مصوراً جغرافياً لشاطئ مدينة اللاذقية ويظهر مناطق الاعتيان ومواقعها حيث أن: (A)المنطقة الأولى،(B)المنطقة الثانية،(C)المنطقة الثالثة والمحطات في كل منطقة على الشكل التالي :

- **المحطة الأولى (C1,B1,A1)على بعد 25م من الشاطئ .**
- **المحطة الثانية (C2,B2,A2)على بعد 50م من الشاطئ .**
- **المحطة الثالثة (C3,B3,A3) على بعد 2000م من الشاطئ.**

3- النتائج والمناقشة :

3-1. النظام الهيدرولوجي لمنطقة الدراسة :

تُعدّ الطبقة المائية السطحية أكثر الطبقات المائية عرضةً للتغيرات البيئية والمناخية الخارجية، بما فيها تأثير الأشكال المختلفة للتلوث، وبالتالي الطبقة التي تحدث فيها تغيرات ملحوظة أكثر من باقي الطبقات المائية ، ويوضح الجدول (1) التغيرات في قيم العوامل البيئية المختلفة المذكورة أعلاه .

لوحظ ارتفاع تدريجي لدرجات الحرارة خلال فصل الربيع ، إذ تراوحت ما بين 17,80 و 21.80 مْ ، وكانت درجات الحرارة في المناطق الملوثة أعلى بمقدار طفيف من المناطقة النظيفة خلال شهور هذا الفصل ، حيث سجلت القيمة المتوسطة الأدنى (17.85) مْ في شهر آذار في المحطتين القريبتين من الشاطئ (A2,A1) للمنطقة النظيفة نسبياً (A) ، بينما كانت القيمة المتوسطة (18.2) مْ للمحطتين الملوثتين القريبتين من الشاطئ (B2,B1) و

(C2,C1) من المنطقتين الملوثتين (C,B) خلال الشهر ذاته، وسجلت القيمة المتوسطة الأعلى (21.70) مْ في المحطتين الملوثتين القريبتين من الشاطئ (B2,B1) خلال شهر أيار ، وكانت (20.65) مْ في المحطتين القريبتين من الشاطئ (A2,A1) للمنطقة النظيفة من الشهر نفسه الشكل (2).

توافقت هذه النتائج إلى حد كبير مع نتائج الدراسات لكل من Hamameh(1995) في المياه الشاطئية لمدينة اللاذقية، و AL–Hanoun(2004) في المياه الشاطئية شمال مدينة اللاذقية و نتائج Hamameh(2014) في المياه الشاطئية لمدينة جبلة ،و نتائج Zakaria(2007) في خليج أبي قير في المياه الشاطئية المصرية .

أما فيما يتعلق بالملوحة ، لوحظت تغيرات كبيرة في قيم الملوحة بين مناطق الدراسة والمحطات المختلفة خلال فصل الربيع ، إذ تراوحت القيم ما بين 31.96 و 36.79 ‰ ، وكانت القيم الأدنى في المناطق القريبة من الشاطئ ، وبشكل خاص في المناطق الملوثة ، ويعود ذلك إلى كميات المياه العذبة (مياه أمطار وثلوج ذائبة ، مياه صرف صحي) الواردة الى البحر من قنوات الصرف الصحي والسواقي والأنهار التي تصب في البحر ، سجلت أدنى قيم للملوحة في شهر نيسان في المحطات الملوثة القريبة من الشاطئ (B2,B1)،(C2,C1) من المنطقتين الملوثتين (C,B) وكانت القيمة المتوسطة الأدنى في هذه المحطات (32.22),(32.05)‰ على التوالي ، بينما كانت قيم الملوحة للمحطات (C3,B3) البعيدة عن الشاطئ (34.97),(35.24)‰ على التوالي خلال الشهر نفسه ، أمّا في المنطقة النظيفة نسبياً (A) في المحطتين القريبتين من الشاطئ (A2,A1) كانت القيمة المتوسطة للملوحة (35.45)‰ و(35.73)‰ في المنطقة البعيدة عن الشاطئ (A3) وذلك خلال الشهر ذاته ، في حين سجلت القيمة الأعلى للملوحة (36.79)‰ في المحطة البعيدة عن الشاطئ (A3) من المنطقة النظيفة نسبياً وذلك خلال شهر آذار ، وسجلت القيمة المتوسطة للملوحة (36.64)‰ في المحطتين القريبتين من الشاطئ (A2,A1) خلال الشهر نفسه ، أمّا في المحطات الملوثة القريبة من الشاطئ (B2,B1)،(C2,C1) من المنطقتين الملوثتين (C,B) فكانت القيم المتوسطة للملوحة (34.35),(34.24)‰ على التوالي خلال الشهر ذاته ،الشكل (3) .

توافقت هذه النتائج إلى حد كبير مع نتائج الدراسات لكل من Hamameh(1995) و دراسة AL–Nesser(2009) في المياه الشاطئية لمدينة اللاذقية ، ودراسة Lakkis and

Kouyoymjian(1974) في المياه اللبنانية المجاورة لمياهنا ، ودراسة كل من Terbiyik kurt and Polat(2015) و Toklu and Sarihan(2016) في خليج اسكندرون .

ارتفعت قيم الأكسجين المنحل في الماء خلال فصل الربيع ، إذ تراوحت القيم ما بين 5.12 و 7.28 ملغ/ل ، وسجلت القيم الأدنى لتراكيز الأكسجين المنحل في الماء في المنطقتين الملوثتين (C,B) وخاصة في المحطات القريبة من الشاطئ (B2,B1)،(C2,C1) ، حيث كانت القيم المتوسطة الأدنى فيها (5.16),(5.24) ملغ/ل على التوالي خلال شهر آذار و(5.60),(6.76) ملغ/ل في المحطات (B3),(C3) البعيدة عن الشاطئ ، أمّا في المحطتين (A2,A1) من المنطقة النظيفة نسبياً فكانت القيمة المتوسطة لتركيز الأكسجين المنحل في الماء (6.20) ملغ/ل و (7.13) ملغ/ل في المحطة (A3) وذلك خلال الشهر نفسه ، بينما كانت القيم الأعلى في المنطقة النظيفة نسبياً وسجلت أعلى قيمة لها (7.28) ملغ/ل في المحطة (A3) البعيدة عن الشاطئ وكانت القيمة المتوسطة لتركيز الأكسجين المنحل في الماء (6.36) ملغ/ل في المحطتين (A2,A1) القريبتين من الشاطئ وذلك في شهر نيسان، بينما سجلت (5.9),(6.8) ملغ/ل في المحطتين (B3),(C3) على التوالي و (5.19) ملغ/ل لكل من المحطات (B2,B1)،(C2,C1) القريبة من الشاطئ في المناطق الملوثة (C,B) ، ويعود ذلك إلى زيادة في نمو العوالق النباتية التي كانت تزود المياه بالأكسجين من خلال عملية التركيب الضوئي ، كما لوحظ اختلاف في قيم الأكسجين المنحل في الماء بين المنطقة النظيفة و المناطق الملوثة خلال فصل الربيع ، الشكل (4) .

أمّا بالنسبة لدرجة الحموضة pH تراوحت القيم خلال فصل الربيع ما بين 7.45 و 8.24، وكانت القيم الأدنى لها في المناطق الملوثة وخاصةً القريبة من قنوات الصرف الصحي ، ويعود ذلك إلى تراكم نواتج العمليات الاستقلابية للجراثيم المفككة للمادة العضوية والتي تغزر بشكل كبير في المناطق الملوثة بالمواد العضوية والتي تزيد من حامضية الوسط المائي ، إذ سجلت القيمة المتوسطة الأدنى لدرجة الحموضة (7.47),(7.48) في المحطات الملوثة القريبة من الشاطئ (B2,B1)،(C2,C1) على التوالي من المنطقتين الملوثتين (C,B) ، وكانت (7.65),(7.71) في المحطات (B3) و (C3) على التوالي وذلك خلال شهر نيسان ، بينما سجلت القيمة المتوسطة لدرجة الحموضة (7.83) في المحطتين (A2,A1) من المنطقة النظيفة نسبياً و (7.92) في المحطة (A3) وذلك خلال الشهر نفسه ، أمّا القيمة المتوسطة الأعلى في المحطات الملوثة القريبة من الشاطئ

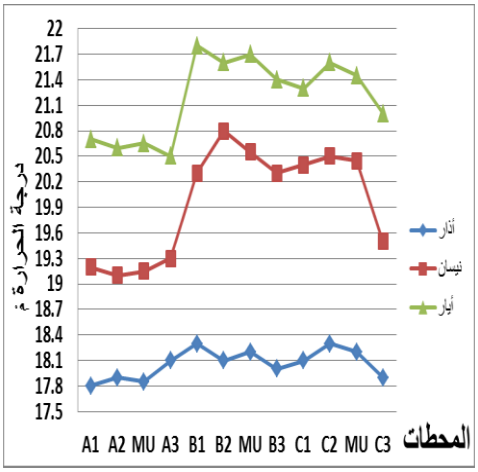
(B2,B1)،(C2,C1) للمنطقتين الملوثتين (C,B) سجلت (7.59),(7.64) على التوالي في شهر آذار ، وكانت (7.93),(8.08) في المحطات البعيدة عن الشاطئ (B3) و(C3) على التوالي ، في حين سجلت القيمة المتوسطة لدرجة الحموضة (8.14) في المحطتين (A2,A1) من المنطقة النظيفة نسبياً و (8.24) في المحطة (A3) البعيدة عن الشاطئ وذلك خلال الشهر ذاته ، الشكل (5) .

توافقت هذه النتائج إلى حد كبير مع نتائج الدراسات لكل من Hamameh(1995) في المياه الشاطئية لمدينة اللاذقية، و AL-Hanoun(2004) في المياه الشاطئية شمال مدينة اللاذقية ، و Hamameh(2014) في المياه الشاطئية لمدينة جبلة ،

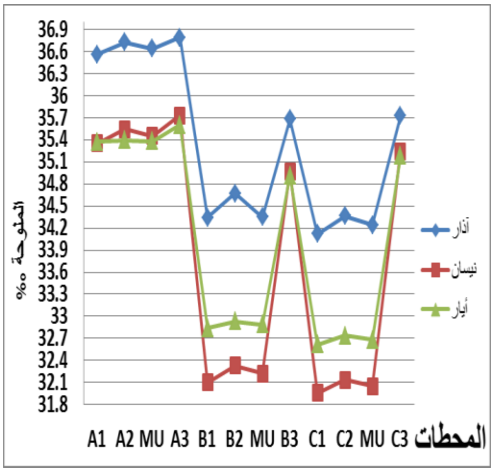
لوحظت تغيرات كبيرة في قيم ال BOD بين المنطقة النظيفة نسبياً والمناطق الملوثة ، كما لوحظ انخفاض قيمها كلّما ابتعدنا عن مصب قناة الصرف الصحي ، و قد كانت التغيرات غير ملموسة في قيم الـBOD_5 في المنطقة النظيفة و تراوحت مابين 1 و 3 ملغ/ل خلال فصل الربيع ، أمّا في المناطق الملوثة كانت التغيرات كبيرة وتراوحت القيم ما بين 1 و 24 ملغ/ل ، إذ سجلت القيم الأعلى في المحطات الملوثة القريبة من الشاطئ (B2,B1) و (C2,C1) من المنطقتين الملوثتين (C,B) وكانت (21),(22) ملغ/ل على التوالي ، في حين كانت (6),(5) ملغ/ل في المحطتين (B3)،(C3) على التوالي وذلك خلال شهر أيار ، بينما كانت القيم المتوسطة الأدنى للـBOD_5 في المحطات الملوثة القريبة من الشاطئ (B2,B1)،(C2,C1) من المنطقتين الملوثتين (C,B) وسجلت (16),(15) ملغ/ل على التوالي ، و كانت (5) و (3) ملغ/ل في المحطتين البعيدتين (B3) و (C3) على التوالي ، وذلك في شهر نيسان ، الشكل (6) .

تباينت قيم الشفافية بشكل واضح خلال فصل الربيع مابين المنطقة النظيفة نسبياً والمناطق الملوثة ، إذ لوحظ انخفاض في قيمها وخاصةً في المحطات القريبة من الشاطئ ، في حين كانت التغيرات بشكل طفيف في المناطق النظيفة نسبياً خلال هذا الفصل ، ويعود ذلك إلى كثافة المواد العضوية في المناطق الملوثة ، كما تأثرت قيم الشفافية بزيادة كمية العوالق النباتية والحيوانية في الماء والتي تنمو بغزارة خلال هذا الفصل ، بالإضافة لحركة الأمواج و التيارات المائية ، وتراوحت قيم الشفافية مابين 1.40 و 2 متر في المحطة B1 ذات العمق 3 متر ، وما بين 2.20 و 3 متر في المحطة B2 ذات العمق 6 متر ، ومابين 10.20 و 14.40 متر في المحطة B3 ذات العمق 32 متر ، بينما تراوحت قيم الشفافية

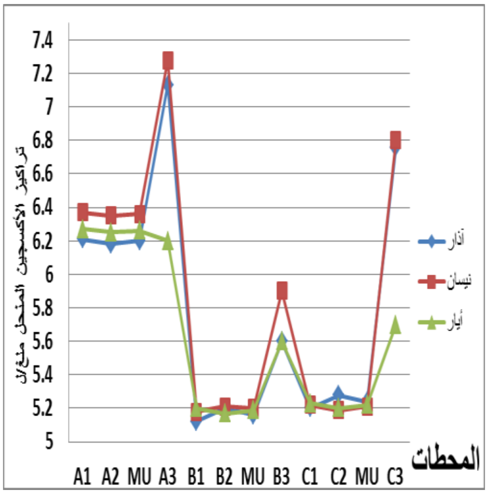
مابين 1.60 و 2.20 متر في المحطة C1 ذات العمق 2.50 متر ، ومابين 1.80 و 2.50 متر في المحطة C2 ذات العمق 3 متر ، ومابين 11.60 و 13.80 متر في المحطة C3 ذات العمق 26 متر ، في حين لم يلاحظ وجود تغيرات كبيرة في قيم الشفافية في المحطتين A2,A1 من المنطقة النظيفة نسبياً ، في حين تراوحت القيم في المحطة A3 ذات العمق 45 مابين 14 و 15.60 متر خلال هذا الفصل الشكل (7) .

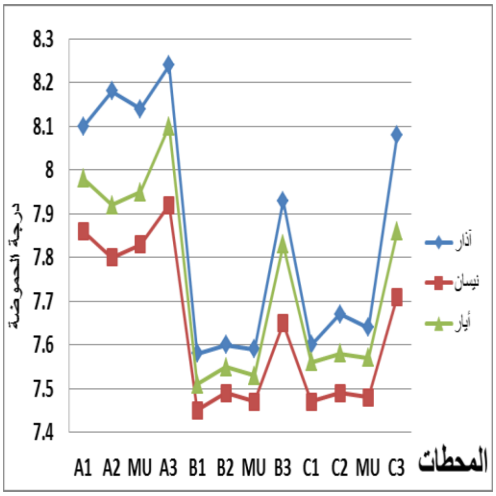


الشكل(2): تغيرات درجة الحرارة خلال فصل الربيع .

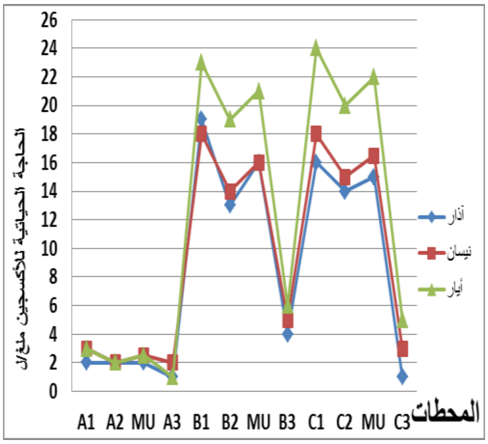


الشكل(3): تغيرات قيم الملوحة خلال فصل الربيع .

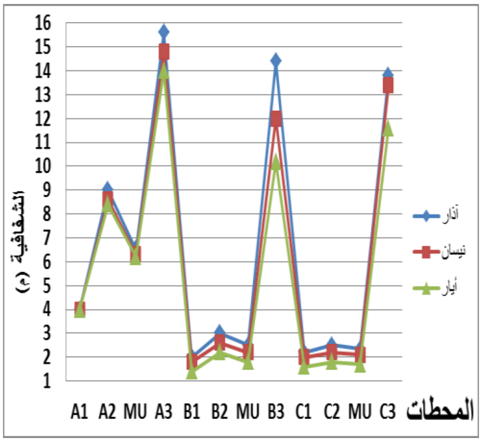




الشكل(4):تغيرات تراكيزالأكسجين المنحل بالماء خلال فصل الربيع. الشكل(5): تغيرات درجة حموضة المياه خلال فصل الربيع .



الشكل(6): تغيرات قيم (BOD) خلال فصل الربيع .



الشكل(7): تغيرات قيم الشفافية خلال فصل الربيع .

3-2. التركيب النوعي للعوالق الحيوانية خلال فترة الدراسة :

من خلال الدراسة النوعية للعينات التي جمعت خلال فصل الربيع ، تم تحديد(136) نوعاً و 9 أجناس من العوالق الحيوانية تنتمي إلى (22) زمرة تصنيفية كما يوضحها الجدول رقم (2) وهي كما يلي : (5) أنواع تنتمي إلى المنخربات Foraminifera ، و(6) أنواع و(2) جنسان تنتمي إلى زمرة الميدوزات الهيدرية Hydromedusa موزعة على الشكل التالي : (2) نوعان و(1) جنس واحد تنتمي إلى رتبة الميدوزات الزهرية Anthomedusa ، (1) نوع و(1) جنس واحد ينتميان إلى رتبة الميدوزات الرفيعة Leptomedusa ، (2) نوعان ينتميان إلى رتبة الميدوزات القاسية Trachymedusa ، (1) نوع واحد ينتمي إلى رتبة الميدوزات المجوفة Nacromedusa ، و (12) نوعاً تنتمي إلى الأنبوبيات Siphonophora ، (6) أنواع تنتمي إلى كثيرات الأهلاب ويرقاتها Polychaeta ، (4) أنواع تنتمي إلى متفرعات القرون Cladocera ، (2) نوعان ينتميان إلى محاريات القصعة Ostracoda ، و (71) نوعاً تنتمي إلى مجذافيات الأرجل Copepoda موزعة على الشكل التالي : (44) نوعاً تنتمي إلى رتبة Calanoida ، (24) نوعاً تنتمي إلى رتبة Cyclopoida ، (2) نوعان ينتميان إلى رتبة Harpacticoida ، و (1) نوع واحد ينتمي إلى ذؤابيات الأرجل Cirripedia ، (2) نوعان ينتميان إلى اليفوزيات Euphausiaceae ، (7) أنواع و (6) أجناس تنتمي إلى رتبة عشاريات الأرجل Decapoda ويرقاتها ، (1) نوع واحد ينتمي إلى بطنيات القدم Gastropoda ، (5) أنواع تنتمي إلى جناحيات القدم

Pteropoda ، (6) أنواع تنتمي إلى شوكيات الفكوك Chaetognatha ، (5) أنواع تنتمي إلى الزائديات Appendiculria ، (1) نوع واحد ينتمي للساليبات (المزماريات) Salpida ، (1) جنس واحد ينتمي للبرميليات Doliolida بالإضافة إلى بيوض ويرقات الأسماك Pisces .

جدول رقم (2):التركيب النوعي للعوالق الحيوانية وتغيراتها (الكمية النسبية) خلال فصل الربيع.

	مناطق الدراسة / الأنواع والزمر التصنيفية	المعهد العالي للبحوث البيئية			ميناء الصيد والنزهة			مقابل الرمل الجنوبي ومسبح الشعب		
		المحطات / الكمية النسبية			المحطات / الكمية النسبية			المحطات / الكمية النسبية		
		A1	A2	A3	B1	B2	B3	C1	C2	C3
I	**Foraminifera**									
1	Globigerina *bolloides*	VR	R	R	VR	VR	VR	VR	VR	VR
2	*G. inflate*	L	L	L	R	R	R	VR	R	L
3	Globigerinoides *helicina*	–	–	–	–	–	–	R	R	–
4	Gl. *conglobata*	R	R	R	VR	VR	R	VR	R	R
5	Iridia *lucida*	R	R	R	VR	VR	VR	VR	VR	R
	Hydromedusa									
II	**Anthomedusa**									
1	Corymorpha *nutans*	–	–	–	R	R	–	VR	R	–
2	Podocoryn *carnea*	R	L	L	–	–	–	–		R
3	Zanclea sp.	R	R	R	VR	VR	R	R	R	R
III	**Leptomedusa**									
1	Hypsorophus *quadratus*	R	R	R	VR	VR	VR	VR	VR	VR

2	Obilia sp.	R	R	R	R	R	R	R	R	R
IV	**Trachymedusa**									
1	Aglaura *hemistoma*	L	L	M	L	M	L	L	M	L
2	Liriopetera *phyla*	R	R	R	VR	VR	R	VR	R	R
V	**Nacro medusa**									
1	Solmundella *bitentaculata*	R	R	L	_	VR	L	R	R	L
VI	**Siphonophora**									
1	Abylopsis *eschscholtzii*	R	R	R	VR	R	R	VR	R	R
2	A. *tetragona*	L	L	L	L	L	L	L	L	L
3	Agalma *elegans*	VM	VM	VM	M	VM	VM	M	VM	M
4	A. *okeni*	V	V	V	V	V	V	V	V	V
5	Bassia *bassensis*	R	L	L	R	R	R	R	R	L
6	Chelophyes *appendiculata*	L	L	L	L	L	L	L	L	L
7	Lensia *conoidea*	R	R	VR	R	L	VR	R	L	VR
8	L. *multicristata*	VR	VR	VR	VR	VR	VR	VR	VR	VR
9	L. *subtilis*	L	L	R	L	L	R	L	L	R
10	Muggiaea *kochi*	VR	VR	_	VR	VR	_	VR	VR	_
11	Physophora *hydrostatica*	L	L	L	R	L	L	L	L	L
12	Sulculeolaria *boliba*	VR	VR	VR	_	VR	VR	_	VR	VR
VII	**Polychaeta**									
1	Rhynchonella *fulgens*	L	L	L	R	R	R	R	R	L
2	Sagitella *kovaleveskyi*	L	L	L	L	L	L	L	L	L
3	Tomopteris *levipes*	L	M	M	R	L	L	L	L	M
	Larvae polychaeta									
4	Nerin *foliosa*	VR	VR	R	_	_	VR	_	VR	R
5	Pygaspio *elegans*	L	L	L	VR	R	R	R	R	L
6	Magelona *papillicornis*	R	L	L	R	R	R	R	R	R
VIII	**Cladocera**									
1	Pinilia *avirostris*	L	L	R	_	_	_	_	VR	R
2	Podon *intermedius*	_	_	_	L	L	R	R	R	_

3	Pleopis *polyphemoides*	_	_	_	R	R	_	VR	VR	_
4	Evadne *spinifera*	L	L	L	R	R	R	R	R	L
IX	**Ostracoda**									
1	Conchoecia. *elegans*	L	L	R	R	R	R	R	L	R
2	Cypridina *mediterranea*	VR	R	VR	VR	R	R	VR	VR	VR
	Copepoda									
X	**CALANOIDA**									
1	Calanus *gracilis*	_	R	R	_	_	_	_	_	R
2	C. *minor*	L	L	R	R	R	R	R	L	R
3	C. *tenuicornis*	R	R	R	VR	VR	R	VR	VR	R
4	Subcalanus *subcrassus*	R	R	R	VR	VR	R	VR	VR	R
5	Acrocalanus *gibber*	L	L	R	R	L	R	L	L	R
6	Mecynocera *clausi*	L	L	L	R	L	R	R	L	L
7	Paracalanus *denudatus*	L	L	R	L	L	R	L	L	R
8	P. *indicus*	L	L	R	R	R	R	R	R	R
9	P. *nanus*	M	M	M	M	M	M	M	M	L
10	P. *parvus*	V	V	V	VM	VM	V	VM	VM	V
11	P. *pygmeaeus*	L	M	R	R	L	R	L	L	R
12	Calocalanus *pavo*	M	M	R	L	L	R	L	L	R
13	C. *pavoninus*	R	R	R	R	R	R	R	R	R
14	C. *plumulosus*	R	R	VR	VR	VR	VR	R	R	VR
15	C. *styliremis*	V	V	M	M	M	M	M	V	M
16	Clausocalanus *arcuicornis*	VM	VM	M	V	VM	M	VM	VM	M
17	C. *furcatus*	VM	VM	V	VM	VM	V	VM	VM	V
18	C. *paululus*	V	V	M	M	M	M	M	M	M
19	C. *minor*	L	L	R	L	L	R	L	L	R
20	Spinocalanus *caudatus*	R	R	VR	VR	VR	VR	VR	R	VR
21	Euchaeta *hebes*	VR	R	VR	_	_	_	_	_	_
22	E. *marina*	L	L	R	R	R	R	R	R	R
23	Temora *discaudata*	L	L	R	L	L	R	L	L	R

24	T. *stylifera*	V	V	M	V	V	M	V	V	M
25	Pleuromamma *abdominals*	VR	VR	_	_	VR	VR	_	VR	_
26	P. *gracilis*	_	R	VR	_	_	VR	_	R	VR
27	P. *indica*	_	_	_	VR	VR	_	R	VR	_
28	Centropages *kroyeri*	R	L	_	VR	R	_	R	R	VR
29	C. *furcatus*	R	R	_	VR	R	_	R	R	_
30	C. *violaceus*	L	L	R	_	R	R	R	L	_
31	Lucicutia *flavicornis*	M	M	M	M	M	M	M	M	M
32	L. *longicornis*	R	R	VR	VR	VR	VR	VR	VR	VR
33	L. *ovalis*	L	L	R	L	L	R	R	L	R
34	Haloptilus *longicornis*	R	R	VR	_	_	_	_	_	VR
35	Candica *bispinosa*	R	R	L	R	L	L	R	R	L
36	C. *simplex*	_	_	R	_	_	R	_	_	R
37	Calanopia elleptica	_	_	R	_	_	VR	_	_	VR
38	C. *minor*	_	_	_	R	R	_	R	R	_
39	Labidocera *kroyeri*	R	R	R	_	_	VR	_	_	R
40	Acartia *clausi*	M	M	L	V	V	M	V	V	L
41	A. *dana*	L	L	R	L	L	R	L	L	R
42	A. *grani*	_	_	_	M	M	_	L	L	_
43	A. *longiremis*	L	L	R	M	M	L	M	M	R
44	A. *negligens*	R	VR	R	L	L	R	L	L	R
X I	**CYCLOPOIDA**									
45	Oithona *similis*	M	M	M	M	M	M	M	M	M
46	O. *linearis*	L	L	L	L	L	L	L	L	L
47	O. *nana*	V	V	M	M	M	M	V	V	M
48	O. *plumifera*	VM	VM	V	V	V	V	V	V	V
49	O. *setigera*	L	L	L	L	L	L	L	L	L
50	Oncaea *curta*	_	_	_	VR	VR	_	VR	VR	_
51	O. *media*	V	V	V	L	L	M	L	L	V
52	O. *mediterranea*	L	L	R	R	R	R	R	R	R

53	O. *minuta*	L	L	R	L	L	R	L	L	R
54	O. *obscura*	_	R	VR	VR	VR	_	VR	_	VR
55	O. *simlis*	L	L	R	VR	R	R	R	R	R
56	Sapphirina *anagusta*	R	R	_	VR	VR	_	VR	R	_
57	S. *opalina*	VR	VR	_	VR	R	_	R	R	_
58	S. *ovatolanceolata*	R	R	VR	R	R	VR	R	R	VR
59	Copilia *mediterranea*	_	_	VR	_	_	_	_	_	VR
60	C. *mirabilis*	_	VR	R	_	_	VR	_	_	R
61	C. quadrata	_	VR	VR	_	_	VR	_	R	VR
62	Corycaeus *clausi*	L	L	L	M	M	L	M	M	L
63	C. *dahli*	L	L	_	VR	_	L	_	R	R
64	C. *flaccus*	V	V	M	V	V	M	V	V	M
65	C. *giesbrechti*	M	M	M	L	L	M	L	L	M
66	C. *lautus*	R	L	R	_	_	VR	_	_	R
67	Corycella *longicaudis*	L	L	L	L	L	L	L	L	L
68	C. *carinata*	L	M	L	_	_	VR	_	_	R
69	C. *rostrata*	VM	VM	VM	VM	VM	VM	VM	VM	VM
X II	**HARPACTICOIDA**									
70	Euterpina *acutifrons*	V	V	V	VM	VM	V	V	V	V
71	Clytemnstra *rostrata*	_	VR	_	_	VR	VR	VR	_	VR
X III	**Cirripedia**									
1	Nauplius *Balanus*	VM	VM	V	V	V	V	V	V	V
X IV	**Euphausiaceae**									
1	Euphasia *pacifica*	_	R	R	_	_	VR	_	_	R
2	E. *brevis*	R	L	L	R	L	L	R	L	L
X V	**Decapoda**									
1	Leucifer *acestra*	R	R	_	R	R	_	R	R	_
2	L. *hanseni*	_	_	_	R	R	R	R	R	_
	Larvae Decapoda (Zoea)									

3	Alima sp.	L	L	L	R	R	R	R	R	L
4	Alpheus spp.	_	_	_	R	L	_	R	R	_
5	Maia *isquinada*	M	M	M	L	M	M	M	M	M
6	Porcellena *longicornis*	R	R	_	VR	R	_	R	R	_
7	Pagurus sp.	R	R	R	_	_	VR	_	_	R
8	Palaemon sp.	R	R	R	_	_	_	_	_	VR
9	Upogebia *pusilla*	L	L	R	R	L	R	R	L	L
10	Ebalia sp.	_	_	_	R	R	R	R	R	_
11	Laomedia sp.	R	L	R	R	L	R	L	L	R
12	ILyoplax *frater*	_	R	R	_	_	VR	_	_	R
13	Diogenes *pugilator*	L	L	R	_	_	_	_	_	R
XVI	**Gastropoda**									
1	Larvae caecum *glubrum*	R	R	R	R	R	R	R	R	R
XVII	**Pteropoda**									
1	Hyalocylis *striata*	M	M	M	M	M	M	M	M	M
2	Limacina *bulloides*	L	L	L	L	L	L	L	L	L
3	L. *inflata*	VM	VM	VM	VM	VM	VM	VM	VM	VM
4	L. *trochiformis*	M	M	M	M	M	M	M	M	M
5	Creseis *acicula*	_	R	VR	_	_	VR	_	R	VR
XVIII	**Chaetognatha**									
1	Sagitta *bipunctata*	_	_	_	R	R	VR	R	R	_
2	S. *friderici*	V	V	V	V	V	V	V	V	V
3	S. *inflata*	VM	VM	V	VM	V	VM	V	VM	V
4	S. *minima*	V	V	V	M	V	V	V	V	V
5	S. *erratodentata*	R	R	L	R	R	R	R	R	R
6	S. *setosa*	VM	VM	VM	VM	VM	VM	VM	VM	VM
XIX	**Appendiculria**									
1	Feitilaria *haplostoma*	L	L	L	L	L	L	L	L	L
2	F. *megachile*	V	V	V	V	V	V	V	V	V
3	Oikopleura *dioica*	VM	VM	VM	M	M	VM	V	V	VM

4	O. *longicauda*	VM	VM	VM	VM	VM	VM	VM	VM	VM
5	Stegosoma *magnum*	R	R	R	R	R	R	R	R	R
XX	**Salpida(Salpae)**									
1	Thalia *democratica*	L	L	L	L	L	L	L	L	L
XXI	**Doliolida**									
1	Doliolum sp.	L	L	L	L	L	L	L	L	L
XXII	**Pisces**									
1	Pisces *ova*	M	M	M	M	M	M	M	M	M
2	Pisces larvae	L	L	L	L	L	L	L	L	L

حيث: (–)غيرموجود،(VR)نادر جداً،(R) نادر،(L) قليل،(M)متوسط،(V)كثير،(VM) كثير جداً.

لوحظ من خلال الدراسة أنّ عدد الأنواع بلغ 128 في المحطات A2,A1 من المنطقة النظيفة نسبياً A منها 44 نوعاً بكمية نسبية كبيرة ، و 123 نوع في المحطة A3 منها 32 نوعاً بكمية نسبية كبيرة ، أما في المنطقة الملوثة C بلغ عدد الأنواع 120 في المحطات B2,B1 منها 35 نوعاً ذو كمية نسبية عالية ، و 125 نوع في المحطة B3 منها 32 نوعاً ذو كمية نسبية عالية فقط ، بينما في المنطقة C بلغ عدد الأنواع 121 في المحطات C2,C1 منها 35 نوعاً بكمية نسبية كبيرة و 125 نوعاً في المحطة C3 منها 31 نوعاً بكمية نسبية كبيرة ، و لوحظ وجود أنواع بعض الزمر التصنيفية بكمية نسبية كبيرة وفي جميع مناطق الدراسة ونذكر فيما يلي أهمها : من الأنتبوبيات *Agalma elegans , A.okeni* ، *من مجذافيات الأرجل*

Paracalanus nanus , P.parvus ,Clausocalanus arcuicornis,C.furcatus , Temora stylifera , Oithona nana , O.plumifera , Oncaea media , Corycaeus flaccus , Corycella rostrata , Euterpina acutifrons وأنواع زمرة *Chaetognatha* عامة ، من الزائدئيات *Oikopleura* , *Feitilaria megachile* , *inflata* ، بالإضافة إلى *Nauplius balanus* وبيوض الأسماك ، و يدل هذا على أنها أنواع ذات مجال تكيف واسع بالنسبة لتغيرات البيئة البحرية مع مدى واسع من تغييرات العوامل البيئية المرافقة .

وتوافقت هذه النتائج بشكل عام مع دراسة Hamameh(2014) في المياه الشاطئية لمدينة جبلة ، ودراسة Toklu and Sarihan(2016) في خليج اسكندرون ، و دراسة Pancucci *et al* (1992) في المياه اليونانية .

كانت زمرة مجذافيات الأرجل هي الزمرة المسيطرة و الأكثر تنوعاً حيث شكلت 49.3% من التركيب النوعي للعوالق الحيوانية خلال فصل الربيع ، تليها عشاريات الأرجل 9.1% ، ثم الأنبوبيات 8,4% ، وشكلت شوكيات الفكوك وكثيرات الأهلاب 4,2% من التركيب النوعي للعوالق الحيوانية خلال هذه الفترة. وقد توافقت هذه النتائج مع نتائج دراسة AL–Hanoun(2004) في المنطقة الشاطئية شمال مدينة اللاذقية ، إذ كانت مجذافيات الأرجل تشكل 50% في عينات عام 1993 و53.3% في عينات عام 1996 خلال فصل الربيع ، وكانت 50.48% في دراسة Hamameh(2014) في المياه الشاطئية لمدينة جبلة.

لوحظ أن المناطق القريبة من الشاطئ كانت الأغنى كمّاً من المناطق البعيدة عن الشاطئ خلال هذا الفصل ، وقد يعود ذلك إلى غنى المناطق القريبة من الشاطئ بالأملاح المغذية والتي لها دوراً هاماً في نمو العوالق النباتية والتي تشكل بدورها غذاء العوالق الحيوانية (Lakkis,1971) ، كونها منطقة خاضعة للأمواج وعملية الاختلاط المائي الذي يرفع المغذيات المترسبة على القاع ،بالإضافة إلى المغذيات الواردة إلى الوسط المائي من اليابسة.

3-3. أثر مياه الصرف الصحي على العوالق الحيوانية :

تمت دراسة تأثير التلوث بالمواد العضوية (مياه الصرف الصحي) وذلك من خلال مقارنة التركيب النوعي للعوالق الحيوانية وتغيراتها (الكمية النسبية) بين المنطقة النظيفة نسبياً والمناطق الملوثة بمياه الصرف الصحي ، و تم الاعتماد على قياسات مقدار الحاجة الحياتية للأكسجين (BOD) كعامل رئيس لتقدير مدى التلوث بالمواد العضوية .

لوحظت الفروق في قيم بعض العوامل البيئية مثل الملوحة ودرجة حموضة المياه وتركيز الأكسجين المنحل و الشفافية وكذلك قيم الـ BOD والذي انعكس بدوره على وجود العوالق الحيوانية وتغيراتها الكمية النسبية ، ومن خلال المقارنة لوحظ مايلي :

كانت الكمية النسبية والتنوع للعوالق الحيوانية في منطقة معهد البحوث البحرية التي تعد نظيفة نسبياً أكبر منها في مناطق التلوث (ميناء الصيد والنزهة، مقابل مسبح الشعب والرمل الفلسطيني) ، مثال ذلك يرقات عشاريات الأرجل التي كانت موجودة غالباً في المناطق

النظيفة وبشكل أقل أو نادر في المنطقتين الملوثتين إضافة إلى بعض الأنواع الأخرى والتي كانت ذات كمية نسبية أكبر منها في المنطقة النظيفة نذكر منها :

Paracalanus indicus , P.parvus , Thalia dimocratica , Sagitta erratodentata , Oncaea simlis , O.media , Calocalanus pavo , Clausocalanus giesbrechti , Evadne spinifera .

والتي من الممكن أنها وجدت الظروف المثلى لها في المناطق النظيفة وتفادت الوجود في المناطق الملوثة قدر الإمكان بالرغم من قابليتها للعيش في ظروف التلوث ويعود ذلك إلى الدور السلبي للملوثات العضوية والتي تؤدي إلى انخفاض التنوع الحيوي للعوالق الحيوانية .

توافقت هذه النتائج مع نتائج دراسة Siokou and Papathanssrou(1991) إذ كانت الأنواع *Clausocalanus giesbrechti , Evadne spinifera* , *Oncaea media* ذات كمية أكبر في المناطق النظيفة منها في المناطق الملوثة ، و مع دراسة Lakkis and Abboud(1976) إذ وجدت بعض الأنواع تتجنب المناطق الملوثة منها *Corycaeus flaccus,Opilia* SP. ,*Thalia dimocratica,Sagitta erratodentata*.

لوحظ وجود عدد من الأنواع في المنطقة النظيفة فقط ونذكرمنها : *Calanus gracilis , Euchaeta hebes , Haloptilus longicornis , Corycella carinata , Euphasia pacifica* وتوافق هذا مع نتائج دراسات (Mayya,2018) و (Hamameh,2014) .

كما لوحظ وجود عدد من الأنواع بكمية نسبية أكبر في مناطق التلوث بالمواد العضوية مما هي عليه في المنطقة النظيفة وتمثلت أغلبها بأنواع فصيلة Acartiaide ونذكر فيما يلي هذه الأنواع : *Acartia grani , A.longiremis , A.negligens , A.clausi,* و *Corycaeus clausi* أيضاً ،حيث يمكن القول أن وجود هذه الأنواع بغزارة عالية هو دليل لوجود التلوث بالمواد العضوية .

توافقت هذه النتائج مع نتائج دراسات : Lakkis and Abboud(1976) في مناطق الصرف الصحي في المياه اللبنانية ، Apostolopoulu(1981) في المياه اليونانية إذ كانت الغزارة الأكبر للنوع *Acartia clausi* في مناطق التلوث ، AL-Hanoun(1982) في خليج أوديسا وكان فيها النوع *Acartia grani* الأكثر غزارة في مناطق التلوث و يليه النوع *A.clausi* .

كما لوحظ وجود بعض الأنواع في مناطق التلوث فقط وهي : *Oncaea curta* , *Acartia grani* *Pleuromamma indica* , *Podon intermedius* , *Pleopis polyphemoides* , *Calanopia minor* ، إذ وجد النوع *A.grani* بأعداد كبيرة في مناطق التلوث والتي تشكل منطقة بيئية مناسبة لوجوده بسب وفرة المواد العضوية ، بخلاف الأنواع الأخرى التي وجدت ولكن بأعداد قليلة ، ومن الجدير بالذكر أن وجود النوع *A.grani* يعدّ مؤشر على التلوث(AL-Hanoun,1982)؛(Hamameh,1993)؛(Mayya,2018).

توافقت هذه النتائج مع دراسة AL-Hanoun(1982) في خليج أوديسا ، و دراسة Hamameh(1993) في المياه الشاطئية لمدينة اللاذقية و دراسة Mayya(2018) في المياه الشاطئية لمدينة طرطوس .

4- الاستنتاجات :

1- كانت التغيرات في قيم بعض العوامل البيئية كبيرة بشكل ملحوظ بالنسبة لدرجة الحموضة والملوحة والBOD والشفافية و بدرجة أقل بالنسبة للأكسجين المنحل في الماء مابين المنطقة النظيفة نسبياً والمنطقتين الملوثتين بمياه الصرف الصحي، وبشكل خاص مابين المحطات القريبة من الشاطئ والمحطات البعيدة عنه في هاتين المنطقتين .

2- لم تُلحظ اختلافات كبيرة في توزع العوالق الحيوانية وتغيراتها الكمية النسبية بين مناطق الدراسة ، إذ وجدت معظم الأنواع في جميع مناطق الدراسة خلال هذا الفصل .

3- وجدت بعض أنواع العوالق الحيوانية في منطقة دون سواها تبعاً للخواص البيئية للمناطق ، إذ وجدت بعض الأنواع في المنطقة النظيفة فقط منها النوعان *Calanus gracilis* ، *Euchaeta hebes*، بينما وجدت الأنواع *Acartia grani* بالدرجة الأولى و *Pleopis polyphemoides* ، *Podon intermedius* بالدرجة الثانية في المنطقة الملوثة فقط ، ويمكن اعتبار هذه الأنواع من الدلائل البيئية على نوعية المياه ودرجة تلوثها لا سيما النوع A.*grani* .

4- لم يُلحظ وجود عامل محدد واضح يحد من توزع العوالق الحيوانية بالرغم من ارتفاع قيم الBOD وانخفاض الملوحة والشفافية وبدرجة أقل بالنسبة للأكسجين المنحل بالماء في المناطق الملوثة بمياه الصرف الصحي وخاصة القريبة من الشاطئ ، بالإضافة لدرجات الحرارة المعتدلة خلال هذا الفصل .

5- التوصيات :

- متابعة دراسة العوالق الحيوانية وتأثير الملوثات الأخرى عليها لأهميتها الكبيرة في النظام البيئي المائي لكونها غذاءً لأغلب الكائنات الحية المائية وصغارها ويرقاتها .
- إقامة محطات لمعالجة مياه الصرف الصحي ، وفتح مصبات الصرف الصحي بعيداً عن الشاطئ حتى 200 متر ،إذ تعتبر هذه المنطقة الأكثر غنى بالكائنات الحية ذات الجدوى الاقتصادية .

المراجع العلمية :

- Abdel-Aziz,N.E . (2001**)** _ Zooplankton community under the stress of polluted land-based effluents in Abu Qir Bay **.** Alexandria, Egypt. **Fac . Sci ; Alex.Univ.** Vol. 41(1,2):pp.57-73.
- AL-Hanoun, K.S. (1982) _ **Zooplankton in the gluf of Odessa and in nejoras** . ph.D.thesis in Biological Sciences(Animal Biology),Odessa State University , Odessa,Moscow. 117P.
- AL-Hanoun, K.S. (1998) _ Experimental studies on the effect of oil pollution and some of iys derivatives on several species of marine zooplankton in Lattakia City. **Tishreen University Journal**. Vol.20 No.7.pp 205-224. (In Arabic).
- AL-Hanoun, K.S. (2004) _ Seaseonal and annual changes of marine zooplankton in the coastal area of Lattakia City .**The International Conferenceon Biological Sciences**,28-29April,Tanta.Egypt.(2004),Vol.3-part(1),pp1257-1282.(In Arabic).
- AL-Hanoun, K.S., Hamameh, M.Y. (1993) _ The specific composition of zooplankton in coastal of Lattakia City and the impact of pollution (Sewage waters) on it. **Thirty-Thirs Science**

Week-Second Book,Basic Scince Studied and Research1993. pp 483-498. (In Arabic).
- AL-Hanoun, K.S.,Zaeni, A. (2017) _ **Theoretical Book-Zooplankton,First edition** ,Tishreen University Puplication . 295p . (In Arabic).
- AL-Hanoun, K.S.,Zaeni, A. (2020) _ **Parctical Book – Zooplankton**. Tishreen University Puplication. 276p. (In Arabic).
- AL- Nesser , A . (2009) _ **Ecological and taxonomical studies of Amphipoda (Crustacea) and its role as bio-indicators for pollution in littoral zone of Lattakia** . ph.D.thesis in water environment,Faculty of science,Tishreen . University. 317p . (In Arabic).
- AL-Yamani, F.Y., Skryabin, V., Gubanova, A., Khvorov, S., Prusova, I. (2011) _ **Marine zooplankton practical guide**. Kuwait Intstitute For Scincetific Research,Kuwait. Vol.2,197p.
- Baker, M ., NourEddin, S. (1993) _ The impact of pollution on zooplankton population in Syria costal waters(Opposite the City of Lattakia) .**Thirty-Thirs Science Week-Second Book,Basic Scince Studied and Research1993**. pp482-449.
- Bouillon, J., Medel, M.D.,Pages, F., Gili, J-M., Boero, F., Gravili, C. (2004) _ Fauna oe the Mediterranean Hydrozoa. **SCI.MAR**. Vol.68(Supp1.2),pp 5-438.
- Hamameh, M.Y. (1995)_ **Studing of zooplankton in coast of Lattakia City** .thesis prepared for a Masters degrre inWater Environment, Faculty of Science,Tishreen University. 160P. (In Arabic).
- Hamameh, M.Y. (2014) _ **Vertical distribution of zooplankton under influence some major environmental factors in coastal zone of Jableh City**.ph.D.thesis in water environment,Faculty of science,Tishreen University. 402p. (In Arabic).

- Lakkis,S. (1971) _ Distribution saisonnieres du zooplankton dans le eaux Libanaises . **Raap.Comm.Int.Mer Medit** . Vol.22(9),pp 237-245.
- Lakkis,S. (2011) _ **Zooplankton in the Lebanese marine water and the Eastern Basin of Mediterranean Sea, Biological diversity and Geographical distributions** . Puplications of the Lebanese Uninersity. NO.23,563P.
- Lakkis, S ., Abboud, M . (1976) _ Zooplankton et pollution de secteur Libanais en Mediterranee Orientale . **Rapp.Comm.Int.MerMedit**.V.23,F9,pp.79-81.
- Lakkis, S.,Kouyoymjian, H . (1974) _ Observation sur la composition et l´abondance du Zooplankton aux embouchures d´effluents urbins des eaux de Beyrouth . **Rapp.Comm.Int.MerMedit**. V.22,F.9,PP 107-108.
- Mayya, W.M . (2018), _ **Taxonomical and ecological study of crustacean zooplankton (Arthropoda) in the cost water of Tartous** City . thesis prepared for a Masters degrre in environment and classification, Faculty of Science,Tishreen University. 184p. (In Arabic).
- M. Moraito-Apostolopoulou . (1981) _ The annual cycle of zooplankton in Elefsis Bay (Greece) . **Raap.Comm.Int.Mer Medit**. Vol.27(7),105p.
- Pancucci-Papadopoulou, M ., Siokou-Frangou, I ., Thecharis, A ., Georgopulos, D . (1992) _ Zooplankton vertical distribution in ralatin to the hydrology in the NW Levanitine and the SE Aegean seas (Spring1986) .**Oceanologica Acta**. Vol.29.F.9,PP 245-237.
- Pitta,P ,.Tsapakis,M ,.Apostolaki,E.T ,.Tsagaraki,T ,.Holmer,M ,.Karakassis,I. (2009) _ Chost nutrients from fish farms are transferred up the food web by phytoplankton grazers . **Marine Ecology Progress Series.** 374 :1-6.
- Rose, M . - **Pelagiques fauna copepods** France Paris.(1933),Vol.26,374p.

- Siokou-Frangou,I., Papathanassiou,E. (1991) _ Differentiation of zooplankton population in a polluted area **. Mar. Ecol. Prog. Ser**. Vol. 76: 41-51 .
- Terbiyik Kurt,T., Polat,S. (2013) _ Seaseonal distribution of costal mesozooplankton community in relation to the envirovnental factors in Iskenderun Bay (North East Levantine,Mediterranean Sea) . **J.Mar.Biol.Assoc**. U.K. Vol.93,pp1163-1174.
-. Terbiyik Kurt,T., Polat,S. (2014) _ Characterization of the seasonal and interannual changes in abundance of marine cladoceran species in Turkish coast of the Noetheastern Levantine Basin .**Crustaceana** . Vol.87,pp769-783.
- Terbiyik Kurt,T., Polat,S. (2015) _ Zooplankton abaundance,biomass,and size structure in coastal water of the North Eastern Mediterranean sea . **Turkish Jornal Of Zoologe**. Vol.39, pp: 378-387
- Toklu, B.A.,Sarihan, E. (2016) _ Seasonal changes of zooplankton species and groups composition in Iskenderun Bay(North East Levantine,Mediterranean Sea) . **Zoological Society Of Bakistan**. Vol.48(5),pp 1395-1405.
- Tregubboff, G., Rose M. (1978) **_ Manualde planctonologie Mediterraneenne . Paris.T. Ⅰ (Text)**.587p.
- Tregubboff, G., Rose M. (1978) _ **Manualde planctonologie Mediterraneenne . Paris.T.Ⅱ (Ulustratons)** .207p.
- Vidjak,O,. Bojanic,N. (2016) _ First record of small tropical calanoid copepod parvocalanus crassirostris (Copepoda,Calanoida, Paracalanidae) in the Adriatic sea . **Jornal of Mediterranean Marine Science** . Vol.17,NO.3,pp 627-633.
- Williamson,C.E., Reid, J.W. (2001 _ Ecology and classification of North American Fresh water Invertebrates . **Academic Press , New York** .Vol.2. pp.915-954.

- Zakaria, H.Y. (2007) _ On the distribution of zooplankton assemblages in ABU QIR Bay . Alexandria, Egypt. **Egyptian Jornal of Aquatic Research**. Vol.33 NO.1,PP 238-256.

تكاملات ريمان – ستيلجس المضاعفة لدوال من صف ليبشتز

الطالب: مصطفى سالم الرزوق

الأستاذ المشرف: أ. د. محمد عامر

قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث

ملخص

تم في دراسات سابقة وضع شروط كافية لوجود تكامل ريمان ـ ستيلجس المضاعف، كأن تكون الدالة المكاملة $f(x,y)$ مستمرة والدالة المكامل بالنسبة لها $g(x,y)$ ذات تغيرات محدودة (ذ ت م)، بالإضافة لتقديم طريقة لإيجاد قيمة هذا التكامل وذلك ضمن شروط تحققها كلاً من الدالتين f,g المفاضَلة و المكامَلة على الترتيب.

في دراستنا هذه نوضح العلاقة بين وجود هذا التكامل وانتماء الدالة المكامل بالنسبة لها $g(x,y)$ لصف ليبشتز نظراً لأهمية هذه الدوال في ضمان وجود الحل للمسألة المدروسة، إضافة لتقدير قيمة التكامل في هذه الحالة.

كلمات مفتاحية: الاستمرار المطلق للدوال بمتغيرين، شرط ليبشتز للدوال بمتغيرين، الدوال ذات التغيرات المحدودة على $\mathbb{R}^2$.

RS-double integrals of the Lipschitz's class functions

Abstract

In previous studies, sufficient conditions were set for the existence of the RS-double integral, such that the integral function $f(x,y)$ is continuous and the Integrator function $g(x,y)$ of bounded variation, in addition to presenting a method for finding the value of this integral within conditions that are fulfilled by both the functions $f \ and \ g$ are Integrand and Integrator, respectively.

In our study, we explain the relationship between the existence of this integral and the belonging of this the integrator function $g(x,y)$ to Lipschitz's class, due to the importance of these functions in ensuring the existence of the solution to the studied problem, in addition to estimate the integral value in this case.

Key Word: Absolutely continuous for function of two variables, Lipschitz's condition for function of two variables, functions **of** bounded variation over $\mathbb{R}^2$.

1. مقدمة:

أجريت في القرون الماضية كثير من الدراسات والأبحاث حول تكامل ستيلجس البسيط، حيث تضمنت تلك الدراسات الحديث عن وجوده وحسابه وتطبيقاته في مختلف المجالات ولا سيما في نظرية الاحتمالات والتحليل الدالي والميكانيك.

وبالرغم من أهمية تلك الدراسات لكنها لا تقدم حلولاً للمسائل الرياضية والفيزيائية التي تعتمد على أكثر من متغير، ومن هنا جاءت فكرة دراسة تكامل ريمان ـ ستيلجس المضاعف (تكامل ستيلجس المضاعف) حيث قمنا في بحثنا هذا بإلقاء الضوء على العلاقة بين دوال صف ليبشتز بمتغيرين وبين تكامل ستيلجس المضاعف، بالإضافة لتعميم بعض المفاهيم اللازمة لذلك.

2. أهمية وهدف البحث:

نهدف في بحثنا هذا إلى تعميم بعض المفاهيم الضرورية للدوال بمتغيرين مثل: الاستمرار المطلق ـ الاطراد (بتزايد أو بتناقص) ـ الدوال ذات التغيرات المحدودة(ذ ت م) ـ نظيم التجزئة المضاعفة، بالإضافة لتعريف صف ليبشتز للدوال بمتغيرين.

3. مشكلة البحث:

اقتصار الدراسات السابقة على تكاملات ستيلجس البسيطة لدوال بمتغير واحد التي تحقق شرط ليبشتز على فترة ما.

4. مواد وطرائق البحث:

تعريف(1)[4] : لتكن D منطقة من $\mathbb{R}^2$، وليكن $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ أي عنصرين من D عندئذ إذا كان $x_1 \le x_2$ و $y_1 \le y_2$ فإن $(x_1, y_1) \le (x_2, y_2)$.

تعريف(2)[**4**] : لتكن f دالة معرفة على المستطيل $Q = [a,b] \times [c,d]$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ عندئذ نقول إن f دالة متزايدة على Q إذا تحقق الشرط:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Longrightarrow \Delta_{11} f(x_2, y_2) \geq 0$$

حيث:

$$\Delta_{11} f(x_2, y_2) = f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)$$

تعريف(3)[**4**]: لتكن f دالة معرفة على المستطيل $Q = [a,b] \times [c,d]$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ عندئذ نقول إن f دالة متناقصة على Q إذا تحقق الشرط:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Longrightarrow \Delta_{11} f(x_2, y_2) \leq 0$$

تعريف(4)**(شرط ليبشتز للدالة بمتغيرين)**[**2**] :

نقول إن الدالة f المعرفة على المستطيل $Q = [a,b] \times [c,d]$ تحقق شرط ليبشتز بالثابت الموجب L على المستطيل Q إذا تحققت المتراجحة:

$$|\Delta_{11} f(x_2, y_2)| \leq L|x_2 - x_1|.|y_2 - y_1|$$

وذلك أيا كان $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ من Q.

تعريف(5): نرمز لجميع الدوال التي تحقق شرط ليبشتز على المستطيل Q بالرمز $Lip(Q, R)$ وندعوه صف ليبشتز للدوال بمتغيرين.

تعريف(6)[**5**]: إذا كانت الدالة f التابعة للمتحولين x, y معرفة في جوار ما للنقطة $M_0(x_0, y_0)$، عندئذ يقال إن هذه الدالة مستمرة في النقطة M_0 إذا كان بالإمكان إيجاد عدد حقيقي موجب $\delta > 0$ من أجل أي عدد حقيقي موجب ε، بحيث إن:

$$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \forall x, y \ : \ |x - x_0| < \delta \ , \ |y - y_0| < \delta$$

ملاحظة (1) $[6]$: إن تعريف الاستمرار يكافئ الشروط الثلاث الآتية:

1− الدالة f معرفة عند النقطة $M_0(x_0, y_0)$.

2− $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = l$ أي أن النهاية موجودة.

3− $l = f(x_0, y_0)$، أي أن نهاية الدالة f عند النقطة (x_0, y_0) تساوي قيمتها في هذه النقطة.

تعريف(7) $[6]$: يقال إن الدالة f التابعة للمتحولين x, y مستمرة في المنطقة D من المستوي xoy إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من نقاطها.

تعريف (8)(الدالة ذات التغيرات المحدودة المضاعفة)$[1]$:

لتكن $f(x,y)$ دالة معرفة على المستطيل المحدود:

$$Q = [a,b] \times [c,d]$$

ولتكن

$$P = \{(x_i, y_j): x_{i-1} \le x \le x_i \;;\; y_{j-1} \le y \le y_j \;; i = 1 \dots n\,, j = 1 \dots m\}$$

تجزئة للمستطيل Q، ولنشكل المجموع:

$$V(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left|\Delta_{11} f(x_i, y_j)\right| \quad \dots \dots (1)$$

إذا كانت المجاميع(1) محدودة من الأعلى فإننا نقول إن االدالة $f(x,y)$ ذات تغيرات محدودة على المستطيل Q ويسمى في هذه الحالة الحد الأعلى الأصغري للمجاميع(1) بالتغير الكلي للدالة $f(x,y)$ في المستطيل Q ونكتب:

$$\bigvee_{Q}(f) = \bigvee_{a}^{b}\bigvee_{c}^{d}(f) = \sup\{V(f,P): P \in \mathbb{P}(Q)\}$$

تعريف (9) (نظيم التجزئة المضاعفة)$[4]$:

ليكن $Q:\ [\,a,b] \times [\,c,d]$ مستطيل من $\mathbb{R}^2$ ولتكن:

$$R = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\ \ ,\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}$$

تجزئة لـ Q عندئذ نرمز لنظيم هذه التجزئة بـ $\lambda(R)$ ونعرفه بالشكل:

$$\lambda(R) =\ max\{\max_{0\le i\le n}(x_i - x_{i-1}), \max_{0\le j\le m}\left(y_j - x_{j-1}\right)\}$$

تعريف(10)(الاستمرار المطلق لدالة بمتغير واحد)$[5]$:

لتكن $f(x)$ دالة معرفة ومحدودة على المجال $[a,b]$، نقول عن $f(x)$ إنها مستمرة مطلقا على المجال $[a,b]$، إذا كان من أجل كل عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث إنه من أجل أية أسرة منتهية $([a_k,b_k])_{k=1}^{n}$ من المجالات الجزئية من $[a,b]$ والمنفصلة مثنى مثنى ومجموع أطوالها

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

فإن:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(f(b_k) - f(a_k)\right)\right| < \varepsilon$$

تعريف (11)(الاستمرار المطلق لدالة بمتغيرين)$[3]$:

لتكن$f(x,y)$ دالة معرفة على المستطيل $Q = [a,b] \times [c,d]$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$، نقول عن الدالة f إنها مستمرة مطلقا على المستطيل Q، إذا كان من أجل كل عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث إنه من أجل أية أسرة منتهية

$$[x_{i-1},x_i] \times \left[y_{j-1},y_j\right]\ ,(i = 1,2,\dots,n\ \ ,\ \ j = 1,2,\dots,m\ )$$

من المستطيلات الجزئية من Q والمنفصلة مثنى مثنى يتحقق:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\Delta x_i)(\Delta y_j) < \delta \implies \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left|\Delta_{11} f(x_i, y_j)\right| < \varepsilon$$

ملاحظة $(\mathbf{2})$:

سنعتمد على التمهيدية الآتية (نكتفي بالنص دون إدراج الإثبات وذلك لكبر مساحته):

تمهيدية: لتكن $g(x,y)$ دالة متزايدة على المستطيل $Q = [a,b] \times [c,d]$ عندئذ تكون العبارات الآتية متكافئة:

1) $f \in RS(g)$

2) من أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$، بحيث إنه إذا كان $\lambda(R) < \delta$ فإن:

$$0 \le U(f,g,P) - L(f,g,P) < \varepsilon$$

3)

$$I_U = I_L$$

حيث $U(f,g,P), L(f,g,P)$ مجموعا ستيلجس داربو الأدنى والأعلى على الترتيب للدالة $f(x,y)$ بالنسبة للدالة $g(x,y)$ الموافقين للتجزئة P.

والرموز:

$$I_U = \inf_{P \in \mathbb{p}(Q)} U(f,g,P)$$

$$I_L = \sup_{P \in \mathbb{p}(Q)} L(f,g,P)$$

مبرهنة $(\mathbf{1})$:

لتكن الدوال f_1, f_2, g معرفة على المستطيل $Q = [a,b] \times [c,d]$

وكان $f_2 \in RS(g)$ و $f_1 \in RS(g)$، فإنه من أجل أي عددين α_1, α_2 يكون

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in RS(g)$$

كما أن:

$$\int_a^b \int_c^d [\alpha_1 f_1(x,y) + \alpha_2 f_2(x,y)] dg(x,y) =$$

$$= \alpha_1 \int_a^b \int_c^d f_1(x,y) dg(x,y) + \alpha_2 \int_a^b \int_c^d f_2(x,y) dg(x,y)$$

الإثبات:

من أجل أية تجزئة للمستطيل Q:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \ , \ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}$$

نجد أن:

$$S(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g, P) = \alpha_1 S(f_1, g, P) + \alpha_2 S(f_2, g, P)$$

لأن:

$$S(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g, P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left[\alpha_1 f_1\left(\xi_i, \eta_j\right) + \alpha_2 f_2\left(\xi_i, \eta_j\right)\right] \times$$

$$\times \left[g\left(x_{i-1}, y_{j-1}\right) - g\left(x_i, y_{j-1}\right) - g\left(x_{i-1}, y_j\right) + g\left(x_i, y_j\right)\right] =$$

$$= \boldsymbol{\alpha_1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_1(\xi_i, \eta_j)\left[g\left(x_{i-1}, y_{j-1}\right) - g\left(x_i, y_{j-1}\right) - g\left(x_{i-1}, y_j\right) + g\left(x_i, y_j\right)\right]$$

$$+$$

$$+\boldsymbol{\alpha_2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_2(\xi_i, \eta_j)\left[g\left(x_{i-1}, y_{j-1}\right) - g\left(x_i, y_{j-1}\right) - g\left(x_{i-1}, y_j\right) + g\left(x_i, y_j\right)\right]$$

$$=$$

$$= \alpha_1 S(f_1, g, P) + \alpha_2 S(f_2, g, P)$$

وبجعل $\lambda(R) \to 0$ تكون نهاية الطرف الأيمن موجودة وذلك لوجود كل من التكاملين فرضاً، وبالتالي نهاية الطرف الأيسر موجودة عندما $\lambda(R) \to 0$ وهذه النهايات هي تكاملات ستيلجس الموافقة للعلاقة المطلوبة.

مبرهنة (2):

إذا حققت الدالة $f(x,y)$ شرط ليبشتز على المستطيل $Q = [a,b] \times [c,d]$ فتكون ذات تغيرات محدودة على هذا المستطيل.

الإثبات:

من أجل أية تجزئة للمستطيل Q:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \ , \ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}$$

يكون:

$$V(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left|\Delta_{11} f\left(x_i, y_j\right)\right| \le L \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - x_{i-1})\left(y_j - y_{j-1}\right) =$$

$$= L(b-a)(d-c)$$

وهذا يعني أن الدالة $f(x,y)$ (ذ ت م) على المستطيل Q.

مبرهنة (3):

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ كمولة حسب ريمان على المستطيل $Q = [a,b] \times [c,d]$ والدالة $g(x,y) \in Lip(Q,R)$ فيكون التكامل:

$$\boldsymbol{I} = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dg(x,y)$$

موجوداً، وتتحقق المتراجحة الآتية:

$$\left|\int_a^b\int_c^d f(x,y)dg(x,y)\right| \le \sup_{(x,y)\in Q}|f(x,y)|.\bigvee_Q(g)$$

الإثبات:

إن وجود تكامل ريمان $\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$ يعني أنه من أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$، بحيث إنه إذا كان $\lambda(R) < \delta$ فإن:

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{L}$$

حيث تشير الرموز $L(f,P)$ و$U(f,P)$ إلى مجموعي ريمان ـ داربو الأعلى والأدنى على الترتيب و L هو ثابت ليبشتز.

لنفرض أولاً أن الدالة $g(x,y)$ متزايدة على المستطيل Q، عندئذ من أجل أية تجزئة

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\ ,\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}$$

للمستطيل Q بحيث $\lambda(R) < \delta$ يكون:

$$U(f,g,P) - L(f,g,P) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[M_{ij}(f) - m_{ij}(f)][g(x_{i-1},y_{j-1}) - g(x_i,y_{j-1}) - g(x_{i-1},y_j) + g(x_i,y_j)] \le$$

$$\le L\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[M_{ij}(f) - m_{ij}(f)](x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = L[U(f,P) - L(f,P)]$$

$$< \varepsilon$$

ومنه $f \in RS(g)$.

أما إذا لم تكن الدالة $g(x,y)$ متزايدة على المستطيل Q، ولكنها ذ ت م عندئذ

يمكن كتابتها بالشكل:

$$g(x,y) = g_1(x,y) - g_2(x,y) - g_3(x,y) + g_4(x,y)$$

حيث الدوال g_1, g_2, g_3, g_4 متزايدة على المستطيل Q وحسب ما تقدم فإن:

$$f \in RS(g_1)\,, f \in RS(g_2)\,, f \in RS(g_3)\,, f \in RS(g_4)$$

وبالتالي فإن $f \in RS(g_1 - g_2 - g_3 + g_4)$ ومنه $f \in RS(g)$.

ولإثبات صحة المتراجحة لدينا:

$$|\sigma| = \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta_{11}g(x_i,y_j)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |f(\xi_i,\eta_j)|.\left|\Delta_{11}g(x_i,y_j)\right| \leq$$

$$\leq M\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left|\Delta_{11}g(x_i,y_j)\right| \leq M.\bigvee_{Q} g \quad ; \quad M = \sup_{(x,y)\in Q}|f(x,y)|$$

وبأخذ النهاية في الطرفين عندما $n,m \to \infty$ نجد:

$$\left|\int_a^b\int_c^d f(x,y)dg(x,y)\right| \leq \sup_{(x,y)\in Q}|f(x,y)|.\bigvee_{Q} g$$

مبرهنة (4):

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ كمولة حسب ريمان على المستطيل $Q = [a,b] \times [c,d]$ والدالة $g(x,y)$ تكتب بالشكل:

$$g(x,y) = e + \int_a^x \int_c^y h(s,t)dsdt \quad ; \quad (x,y) \in Q$$

حيث: $\int_a^b \int_c^d h(s,t)dsdt$ موجود ومحدود و e ثابت. عندئذ $f \in RS(g)$.

الإثبات:

نفرض أولاً أن $h(s,t) \geq 0$ وبالتالي تكون الدالة $g(x,y)$ متزايدة على المستطيل Q، ولنفرض أيضاً أنه من أجل كل $(s,t) \in Q$ يكون $|h(s,t)| \leq k$ حيث k ثابت موجب، عندئذ من أجل كل $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in Q$ حيث $x_1 < x_2\,, y_1 < y_2$ يكون لدينا:

$$|g(x_1,y_1) - g(x_1,y_2) - g(x_2,y_1) + g(x_2,y_2)| =$$

$$= \left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} h(s,t)dsdt \right|$$

$$\leq \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} |h(s,t)|dsdt \leq k(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$$

ومنه حسب المبرهنة(3) يكون $f \in RS(g)$.

أما إذا لم تكن الدالة $h(s,t) \geq 0$ فنشكل الدالتين المساعدتين الآتيتين:

$$h_1(s,t) = \frac{|h(s,t)| + h(s,t)}{2} \quad , \quad h_2(s,t) = \frac{|h(s,t)| - h(s,t)}{2}$$

نجد أن $h_1(s,t) \geq 0$ وكذلك $h_2(s,t) \geq 0$ كما أن:

$$h(s,t) = h_1(s,t) - h_2(s,t)$$

وبالتالي:

$$g(x,y) = e + \int_a^x \int_c^y [h_1(s,t) - h_2(s,t)]dsdt =$$

$$= \left[e + \int_a^x \int_c^y h_1(s,t)dsdt \; - \; \int_a^x \int_c^y h_2(s,t)dsdt \; \right]$$

لنضع:

$$g_1(x,y) = \; e + \int_a^x \int_c^y h_1(s,t)dsdt \;\; , \;\; g_2(x,y) = \int_a^x \int_c^y h_2(s,t)dsdt$$

فنجد أن الدالتين $g_1(x,y), g_2(x,y)$ متزايدتان وحسب ما تقدم يكون

$f \in RS(g_1)$ و $f \in RS(g_2)$ وبالتالي يكون $f \in RS(g)$.

دليل المصطلحات العلمية والرموز

- التكامل $\iint_Q f(x,y)dg(x,y)$ موجود حيث الدالتين f,g معرفتين على المستطيل Q — $f \in RS(g)$
- صف ليبشتز للدوال المعرفة على المستطيل Q — $Lip(Q,R)$

التوصيات والمقترحات:

بعد التعرف على أهمية دوال صف ليبشتز في مسألة وجود تكامل ريمان - ستيلجس المضاعف نوصي ونقترح بدراسة المواضيع الآتية:

1. تكاملات ستيلجس المضاعفة للدوال ذات التغيرات المحدودة.

2. تكاملات ريمان ـ ستيلجس للدوال المستمرة مطلقاً.

3. تكاملات ريمان ـ ستيلجس للدوال المحدودة.

4. تكاملات ستيلجس الثلاثية لدوال صف ليبشتز الثلاثي.

المراجع:

[1] Clarkson, J. & Adams, C. R. 1933. On definitions of bounded variation for functions of two variables. Bulletin of the Australian Mathematical Society 35: 824–854

[2] C.R.ADAMS, J.A.Clarkson, properties of functions $f(x,y)$ of bounded variation,Trans.Amer.Math.soc.36 (1934) 711–730.

[3] J. Sremr, Absolutely continuous functions of two variables in the sense of caratheodory, vol. 2010(2010), No. 154, pp. 1–11.

[4] Mohammad W. Alomari, Numerous approximations of Riemann-Stieltjes double integrals, 2009.

[5] أ. د. إبراهيم إبراهيم،" تحليل5 " ، منشورات جامعة البعث، 1994.

[6] أ.د. محمد عامر،" محاضرات في التحليل2 " ، جامعة البعث، كلية العلوم، قسم الرياضيات 2020-2019.