

# مجلة جامعة البعث

سلسلة العلوم الأساسية



مجلة علمية محكمة دورية

المجلد 42 . العدد 17

1442 هـ - 2021 م

الأستاذ الدكتور عبد الباسط الخطيب

رئيس جامعة البعث

المدير المسؤول عن المجلة

رئيس هيئة التحرير	أ. د. ناصر سعد الدين
رئيس التحرير	أ. د. درغام سلوم

مديرة مكتب مجلة جامعة البعث

بشرى مصطفى

عضو هيئة التحرير	د. محمد هلال
عضو هيئة التحرير	د. فهد شريباتي
عضو هيئة التحرير	د. معن سلامة
عضو هيئة التحرير	د. جمال العلي
عضو هيئة التحرير	د. عباد كاسوحة
عضو هيئة التحرير	د. محمود عامر
عضو هيئة التحرير	د. أحمد الحسن
عضو هيئة التحرير	د. سونيا عطية
عضو هيئة التحرير	د. ريم ديب
عضو هيئة التحرير	د. حسن مشرقي
عضو هيئة التحرير	د. هيثم حسن
عضو هيئة التحرير	د. نزار عبشي

تهدف المجلة إلى نشر البحوث العلمية الأصيلة، ويمكن للراغبين في طلبها

الاتصال بالعنوان التالي:

رئيس تحرير مجلة جامعة البعث

سورية . حمص . جامعة البعث . الإدارة المركزية . ص . ب (77)

. هاتف / فاكس : ++ 963 31 2138071

. موقع الإنترنت : [www.albaath-univ.edu.sy](http://www.albaath-univ.edu.sy)

. البريد الإلكتروني : [magazine@ albaath-univ.edu.sy](mailto:magazine@albaath-univ.edu.sy)

**ISSN: 1022-467X**

## شروط النشر في مجلة جامعة البعث

الأوراق المطلوبة:

- 2 نسخة ورقية من البحث بدون اسم الباحث / الكلية / الجامعة) + CD / word من البحث منسق حسب شروط المجلة.
  - طابع بحث علمي + طابع نقابة معلمين.
  - إذا كان الباحث طالب دراسات عليا:  
يجب إرفاق قرار تسجيل الدكتوراه / ماجستير + كتاب من الدكتور المشرف بموافقة على النشر في المجلة.
  - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية:  
يجب إرفاق قرار المجلس المختص بإنجاز البحث أو قرار قسم بالموافقة على اعتماده حسب الحال.
  - إذا كان الباحث عضو هيئة تدريسية من خارج جامعة البعث :  
يجب إحضار كتاب من عمادة كليته تثبت أنه عضو بالهيئة التدريسية و على رأس عمله حتى تاريخه.
  - إذا كان الباحث عضواً في الهيئة الفنية :  
يجب إرفاق كتاب يحدد فيه مكان و زمان إجراء البحث ، وما يثبت صفته وأنه على رأس عمله.
  - يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات (العلوم الطبية والهندسية والأساسية والتطبيقية):  
عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي ( كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1- مقدمة
  - 2- هدف البحث
  - 3- مواد وطرق البحث
  - 4- النتائج ومناقشتها .
  - 5- الاستنتاجات والتوصيات .
  - 6- المراجع.

- يتم ترتيب البحث على النحو الآتي بالنسبة لكليات ( الآداب - الاقتصاد - التربية - الحقوق - السياحة - التربية الموسيقية وجميع العلوم الإنسانية):
- عنوان البحث .. ملخص عربي و إنكليزي ( كلمات مفتاحية في نهاية الملخصين).
- 1. مقدمة.
- 2. مشكلة البحث وأهميته والجديد فيه.
- 3. أهداف البحث و أسئلته.
- 4. فرضيات البحث و حدوده.
- 5. مصطلحات البحث و تعريفاته الإجرائية.
- 6. الإطار النظري و الدراسات السابقة.
- 7. منهج البحث و إجراءاته.
- 8. عرض البحث و المناقشة والتحليل
- 9. نتائج البحث.
- 10. مقترحات البحث إن وجدت.
- 11. قائمة المصادر والمراجع.
- 7- يجب اعتماد الإعدادات الآتية أثناء طباعة البحث على الكمبيوتر:
  - أ- قياس الورق 25×17.5 B5.
  - ب- هوامش الصفحة: أعلى 2.54- أسفل 2.54 - يمين 2.5- يسار 2.5 سم
  - ت- رأس الصفحة 1.6 / تذييل الصفحة 1.8
  - ث- نوع الخط وقياسه: العنوان . Monotype Koufi قياس 20
- . كتابة النص Simplified Arabic قياس 13 عادي . العناوين الفرعية Simplified Arabic قياس 13 عريض.
- ج . يجب مراعاة أن يكون قياس الصور والجداول المدرجة في البحث لا يتعدى 12سم.
- 8- في حال عدم إجراء البحث وفقاً لما ورد أعلاه من إشارات فإن البحث سيهمل ولا يرد البحث إلى صاحبه.
- 9- تقديم أي بحث للنشر في المجلة يدل ضمناً على عدم نشره في أي مكان آخر، وفي حال قبول البحث للنشر في مجلة جامعة البعث يجب عدم نشره في أي مجلة أخرى.
- 10- الناشر غير مسؤول عن محتوى ما ينشر من مادة الموضوعات التي تنشر في المجلة

11- تكتب المراجع ضمن النص على الشكل التالي: [1] ثم رقم الصفحة ويفضل استخدام التهميش الإلكتروني المعمول به في نظام وورد WORD حيث يشير الرقم إلى رقم المرجع الوارد في قائمة المراجع.

تكتب جميع المراجع باللغة الانكليزية (الأحرف الرومانية) وفق التالي:

آ . إذا كان المرجع أجنبياً:

الكنية بالأحرف الكبيرة . الحرف الأول من الاسم تتبعه فاصلة . سنة النشر . وتتبعها معترضة ( - ) عنوان الكتاب ويوضع تحته خط وتتبعه نقطة . دار النشر وتتبعها فاصلة . الطبعة ( ثانية . ثالثة ) . بلد النشر وتتبعها فاصلة . عدد صفحات الكتاب وتتبعها نقطة . وفيما يلي مثال على ذلك:

-MAVRODEANUS, R1986- Flame Spectroscopy. Willy, New York, 373p.

ب . إذا كان المرجع بحثاً منشوراً في مجلة باللغة الأجنبية:

. بعد الكنية والاسم وسنة النشر يضاف عنوان البحث وتتبعه فاصلة، اسم المجلد ويوضع تحته خط وتتبعه فاصلة . المجلد والعدد ( كتابة مختزلة ) وبعدها فاصلة . أرقام الصفحات الخاصة بالبحث ضمن المجلة . مثال على ذلك:

BUSSE,E 1980 Organic Brain Diseases Clinical Psychiatry News , Vol. 4. 20 – 60

ج . إذا كان المرجع أو البحث منشوراً باللغة العربية فيجب تحويله إلى اللغة الإنكليزية و التقيد

بالبنود ( أ و ب ) ويكتب في نهاية المراجع العربية: ( المراجع In Arabic )

## رسوم النشر في مجلة جامعة البعث:

1. دفع رسم نشر (20000) ل.س عشرون ألف ليرة سورية عن كل بحث لكل باحث يريد نشره في مجلة جامعة البعث.
2. دفع رسم نشر (50000) ل.س خمسون ألف ليرة سورية عن كل بحث للباحثين من الجامعة الخاصة والافتراضية .
3. دفع رسم نشر (200) مئتا دولار أمريكي فقط للباحثين من خارج القطر العربي السوري .
4. دفع مبلغ (3000) ل.س ثلاثة آلاف ليرة سورية رسم موافقة على النشر من كافة الباحثين.

## المحتوى

الصفحة		
42-11	غنى الهاشمي أ. د. محمد عامر	قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة
66- 43	د . أحمد الجاعور	دراسة مسألة التحريك الحدية الأولى لنظرية المرونة الرياضية
80-67	خضر منهل الصالح أ.د.منتجب الحسن	معادلات الحالتين المستويتين لانفعالات جسم استقطابي ترموديناميكي مرن ذي توجّهات مقيدة بالإزاحات
120-81	ظه مختار البابا د.محمد حجّوز أ.د. زكريا زكريا	تحسين جودة اختيار تخصص الطالب باستخدام تقنيات التنقيب في البيانات
154-121	أ.د. مفيد عباس أ.د. محي الدين نظام عبدالله طالب	الغلاف النيوتروني المحيط بالنواة وتفكك $\alpha$





## قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة

طالبة الدكتوراه: غنى الهاشمي

قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث

الأستاذ المشرف: أ.د. محمد عامر

### ملخص

ندرس في هذا البحث قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة والتي تعتمد على الفروق بشكل عام. وقد تم وضع التعاريف والمفاهيم الأساسية اللازمة لهذه الدراسة. وتم الإثبات على مبرهنتين هامتين جديدتين، وتم الحصول على نتيجتين جديدتين من هاتين المبرهنتين حول قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بطريقة نيورلد المعممة المضاعفة المطلقة.

كلمات مفتاحية: قابلية الجمع، المتسلسلة المتعامدة المضاعفة، الطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة، طريقة نيورلد المعممة المضاعفة المطلقة.

# On absolute double matrix summability of double orthogonal series

Phd.student:

Ghina alhashemi

Supervised by:

Prof: Mohammad Amer

## Summary

In this paper we study absolute double matrix summability of double orthogonal series which depends in general on differences.

We present the basic definitions and concepts required for this study.

We proved two new important theorems, and we obtained two new results from these theorems on absolute generalized Norlund summability of double orthogonal series.

**Key words:** summability, double orthogonal series, absolute double matrix summability, absolute double generalized Norlund summability.

## 1. مقدمة:

تعدّ المتسلسلات من المواضيع الهامة في الرياضيات الحديثة وخاصةً الرياضيات التطبيقية، وقد اهتمت بدارستها الكثير من العلماء، وقد جاءت نظرية المتسلسلات المتعامدة كتعميم طبيعي لنظرية المتسلسلات، حيث نقصد بالمتسلسلة المتعامدة أنها المتسلسلة التي تتعامل مع جملة من الدوال المتعامدة.

وقد لعب تطور نظرية المتسلسلات المتعامدة دوراً بارزاً في حل العديد من المسائل الرياضية والفيزيائية ومعالجة المشكلات المعقدة في مجال العلوم التطبيقية.

لقد تمت دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بالعديد من الطرائق مثل طرائق سيزارو \_ ريس \_ نيورلند \_ نيورلند المعممة \_ باناخ والطريقة المصفوفية.

في هذا البحث نقوم بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بطرائق تختلف عن الطرائق السابقة، وتعتمد على الفروق بشكل عام (تقدمية كانت أم تراجعية)، تسمى الطرائق المطلقة.

تعدّ الطريقة المصفوفية المطلقة من أهم الطرائق المطلقة، لأن معظم الطرائق المطلقة ماهي إلا حالات خاصة من الطريقة المصفوفية المطلقة.

في هذه الدراسة سوف نقوم بإثبات مبرهنتين جديدتين حول قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة (بحالتها العامة المثقلة) وسنحصل من هاتين المبرهنتين على نتيجتين جديدتين حول قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة وذلك بعد تبيان علاقتها بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة.

وسنعمد في هذا البحث على بعض الأبحاث والمقالات العلمية الحديثة.

2. مشكلة البحث: تكمن مشكلة البحث في تباعد المتسلسلات المتعامدة بشكل عام، وفي اقتصار الدراسات السابقة على دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة البسيطة بالطريقة المصفوفية المطلقة.

3. أهمية وهدف البحث: إن هدف هذا البحث بشكل أساسي هي دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة، وتحديد علاقتها بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة.

4. طرائق البحث:

تعريف ومفاهيم أساسية:

تعريف 1: <المتسلسلة المتعامدة المضاعفة>: [2]

لتكن  $\{\phi_{m,n}; m, n = 0, 1, \dots\}$  جملة متعامدة معرفة على المجال  $(a, b)$ .

المتسلسلة المتعامدة لأي دالة حقيقية  $f$  من الصف  $L_2(a, b)$  بدلالة الجملة  $\{\phi_{m,n}\}$

تعطى بالشكل:  $f \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \phi_{m,n}(x)$

حيث أن:  $a_{m,n} = \int_a^b f(x) \phi_{m,n}(x) dx$  ;  $m, n = 0, 1, 2, \dots$

$L_2(a, b)$ : هو فضاء التوابع المعرفة والمقيسة على المجال  $(a, b)$  والمحقة للشرط:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

ملاحظة: نقصد بالمتسلسلة المتعامدة أي جملتها متعامدة.

وبالتالي من أجل أي جملة متعامدة نحصل على متسلسلة متعامدة.

### تعريف 2: <الطريقة المصفوفية المضاعفة>: [1]

لتكن  $A = (a_{m,j})$  و  $B = (b_{n,k})$  مصفوفتين مثلثيتين سفليتين غير منتهيتين،

ولتكن  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$  متسلسلة مضاعفة،

ولتكن  $S_{m,n} = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n u_{j,k}$  متتالية مجاميعها الجزئية.

وليكن:  $t_{m,n}^{(A,B)} = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{m,j} b_{n,k} S_{j,k}$

تكون المتسلسلة المضاعفة  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$  قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية

المضاعفة  $(A, B)$  إذا كانت  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} t_{m,n}^{(A,B)} = s$

ونقول إن المتسلسلة  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$  قابلة للجمع  $(A, B)$  إلى المجموع  $s$ .

ونكتب:  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n} = s \quad (A, B)$

### تعريف 3: <الطرائق المصفوفية المضاعفة المطلقة>: [4]

لتكن  $A = (a_{m,j})$  و  $B = (b_{n,k})$  مصفوفتين مثلثيتين سفليتين غير منتهيتين،

ولتكن  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$  متسلسلة مضاعفة

ولتكن  $S_{m,n} = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n u_{j,k}$  متتالية مجاميعها الجزئية،

وليكن:  $t_{m,n}^{(A,B)} = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n a_{m,j} b_{n,k} S_{j,k}$

عندئذٍ من أجل أي متتالية مضاعفة  $(v_{mn})$  نعرف  $\Delta_{11}$  بالعلاقة:

$$\Delta_{11} v_{m,n} = v_{m,n} - v_{m+1,n} - v_{m,n+1} + v_{m+1,n+1}$$

تكون المتسلسلة المضاعفة  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$  قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة  $|A, B|$  إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_{11} t_{m-1, n-1}| < \infty$$

وتكون المتسلسلة المضاعفة  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$  قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة المثقلة  $|A, B|_k$  ،  $1 \leq k$  ، إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} |\Delta_{11} t_{m-1, n-1}|^k < \infty$$

وتكون قابلة للجمع  $|A, B, \delta|_k$  ،  $0 \leq \delta$  ،  $1 \leq k$  ، إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{\delta k + k - 1} |\Delta_{11} t_{m-1, n-1}|^k < \infty$$

وتكون قابلة للجمع  $|A, B, p_m, q_n|_k$  ،  $1 \leq k$  ، إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{mnp_m q_n}{P_m Q_n} \right)^{k-1} |\Delta_{11} t_{m-1, n-1}|^k < \infty$$

حيث  $P_n = \sum_{k=0}^n p_k$  ،  $Q_n = \sum_{j=0}^n q_j$

وتكون قابلة للجمع  $|A, B, p_m, q_n, \delta|_k$  ،  $0 \leq \delta$  ،  $1 \leq k$  ، إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{mnp_m q_n}{P_m Q_n} \right)^{\delta k + k - 1} |\Delta_{11} t_{m-1, n-1}|^k < \infty$$

تعريف 4: <طريقة نيورلند المعممة المضاعفة>: [2]

لتكن  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$  متسلسلة مضاعفة، ولتكن  $\{S_{m,n}\}$  متتالية مجاميعها الجزئية، ولتكن  $\{p_{m,n}\}$  و  $\{q_{m,n}\}$  متتاليتين مضاعفتين ولنرمز لهما بالرمز  $p$  و  $q$ . من أجل المتتاليتين  $p$  و  $q$  نعرف جداء التلاف بالشكل:

$$R_{m,n} := (p * q)_{m,n} = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n p_{i,k} q_{m-i,n-k} = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n p_{m-i,n-k} q_{i,k}$$

ولنرمز بـ:

$$R_{m,n}^{v,\mu} = \sum_{i=v}^m \sum_{k=\mu}^n p_{m-i,n-k} q_{i,k} \quad , \quad R_{m,n}^{0,0} = R_{m,n}$$

$$R_{m,n-1}^{v,n} = R_{m-1,n-1}^{v,n} = 0 \quad ; \quad 0 \leq v \leq m$$

$$R_{m,n-1}^{m,\mu} = R_{m-1,n-1}^{m,\mu} = 0 \quad ; \quad 0 \leq \mu \leq n$$

$$\Delta_{11} \left( \frac{R_{m,n}^{v,\mu}}{R_{m,n}} \right) := \frac{R_{m,n}^{v,\mu}}{R_{m,n}} - \frac{R_{m,n-1}^{v,\mu}}{R_{m,n-1}} - \frac{R_{m-1,n}^{v,\mu}}{R_{m-1,n}} + \frac{R_{m-1,n-1}^{v,\mu}}{R_{m-1,n-1}}$$

حيث:  $R_{m,n} = (p * q)_{m,n} \neq 0$

إن تحويل طريقة نيورلند المعممة المضاعفة  $t_{m,n}^{(N^{(2)},p,q)}$  يأخذ الشكل:

$$t_{m,n}^{(N^{(2)},p,q)} = \frac{1}{(p * q)_{m,n}} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n p_{m-i,n-k} q_{i,k} S_{i,k}$$

تعريف 5: «طريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة»: [2]

تكون المتسلسلة المضاعفة  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$  قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة المثقلة  $|N^{(2)}, p, q|_k = |N, p, q, \dot{p}, \dot{q}|_k$  حيث  $(k \geq 1)$  إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (mn)^{k-1} \left| t_{m,n}^{(N^{(2)}, p, q)} - t_{m,n-1}^{(N^{(2)}, p, q)} - t_{m-1,n}^{(N^{(2)}, p, q)} + t_{m-1,n-1}^{(N^{(2)}, p, q)} \right|^k$$

مقاربة. وبحيث يتحقق:

$$t_{m,-1}^{(N^{(2)}, p, q)} = t_{-1,n}^{(N^{(2)}, p, q)} = t_{-1,-1}^{(N^{(2)}, p, q)} = 0; m, n = 0, 1, 2, \dots$$

ونكتب باختصار:  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n} \in |N^{(2)}, p, q|_k$

تمهيدية بيبو-ليفي: [3]

إذا كانت لدينا متتالية الدوال  $f_n$  غير سالبة  $\{f_n(x) \geq 0\}_{n \geq 1}$  وكمولة لوبيغياً على  $E$  ، أي  $f_n \in L(E)$  ، وكان:  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(t) dt < \infty$  ، عندئذ تكون المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  مقاربة تقريباً في كل مكان على  $E$  من الدالة  $f \in L(E)$  .

علاوة على ذلك تكون المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(t) dt$  أيضاً مقاربة من الدالة  $f$  بالنظيم في  $L(E)$  .

مراجعة هولدر للمجاميع: [6]

$$\sum_{k=0}^n |a_k b_k| \leq \left( \sum_{k=0}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=0}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} ; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

متراجحة هولدر للتكاملات: [6]

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} ; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

بوضع  $p = \frac{2}{k}$  و  $g(x) = 1$  نجد أن:

$$\int_a^b |f(x)|^k dx \leq (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{k}{2}}$$

علاقة فوبيني للمجاميع: [5]

$$\sum_{i=0}^m f(i) \sum_{j=0}^n g(j) = \sum_{j=0}^m g(j) \sum_{i=j}^m f(i)$$

5. النتائج ومناقشتها:

إن تحويل الطريقة المصفوفية المضاعفة يعطى بالعلاقة:

$$t_{m,n}^{(A,B)} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{m,i} b_{n,j} S_{i,j}$$

حيث:  $S_{i,j} = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j u_{k,l}$  هي متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المضاعفة

$\cdot \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$  وإذا رمزنا بـ:

$$\bar{a}_{m,i} = \sum_{k=i}^m a_{m,k} , \quad \bar{b}_{n,j} = \sum_{l=j}^n b_{n,l} ; m, n, i, j = 0, 1, \dots$$

$$\hat{a}_{m,i} = \bar{a}_{m,i} - \bar{a}_{m-1,i} \quad , \quad \hat{b}_{n,j} = \bar{b}_{n,j} - \bar{b}_{n-1,j}$$

$$\bar{a}_{m-1,m} = \bar{b}_{n-1,n} = 0$$

عندئذ يكون:

$$\begin{aligned} t_{m,n}^{(A,B)} &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{m,i} b_{n,j} S_{i,j} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{m,i} b_{n,j} \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j u_{k,l} \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n u_{k,l} \sum_{i=k}^m \sum_{j=l}^n a_{m,i} b_{n,j} = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \bar{a}_{m,k} \bar{b}_{n,l} u_{k,l} \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \bar{a}_{m,i} \bar{b}_{n,j} u_{i,j} \end{aligned}$$

ولنثبت صحة المبرهنة الآتية:

**مبرهنة 1:** إذا كانت المتسلسلات:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} |a_{m,m} b_{n,n} c_{0,0}|^k$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{p=1}^m \{ \Delta_{11}(\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,0}) \}^2 |c_{p,0}|^2 \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{q=1}^n \{ \Delta_{11}(\bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n,q}) \}^2 |c_{0,q}|^2 \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \{ \Delta_{11}(\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q}) \}^2 |c_{p,q}|^2 \right)^{\frac{k}{2}}$$

متقاربة من أجل  $1 \leq k \leq 2$ ، كانت المتسلسلة المتعامدة

مقبولة للجمع بالطريقة المطلقة  $|A, B|_k$  تقريباً في كل مكان.

الإثبات: لدينا:

$$\begin{aligned} t_{m,n}^{(A,B)} &= \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a_{m,i} b_{n,k} S_{i,k}(x) \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a_{m,i} b_{n,k} \sum_{p=0}^i \sum_{q=0}^k c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \\ &= \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \sum_{i=p}^m \sum_{k=q}^n a_{m,i} b_{n,k} \\ &= \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)} &= t_{m,n}^{(A,B)} - t_{m,n-1}^{(A,B)} - t_{m-1,n}^{(A,B)} + t_{m-1,n-1}^{(A,B)} \\ &= \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x) - \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{n-1} \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n-1,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \\
 & + \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{n-1} \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n-1,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x)
 \end{aligned}$$

لكن فرضاً لدينا:  $\bar{a}_{m-1,m} = \bar{b}_{n-1,n} = 0$  وبالتالي:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)} &= \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \\
 & - \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n-1,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \\
 & - \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x) + \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n-1,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x)
 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)} &= \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n,q} c_{0,q} \phi_{0,q}(x) + \sum_{p=1}^m \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \\
 & - \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n-1,q} c_{0,q} \phi_{0,q}(x) - \sum_{p=1}^m \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n-1,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \\
 & - \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m-1,0} \bar{b}_{n,q} c_{0,q} \phi_{0,q}(x) - \sum_{p=1}^m \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x)
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m-1,0} \bar{b}_{n-1,q} c_{0,q} \phi_{0,q}(x) + \sum_{p=1}^m \sum_{q=0}^n \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n-1,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x)$$

كما أن:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)} &= \bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n,0} c_{0,0} \phi_{0,0}(x) + \sum_{q=1}^n \bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n,q} c_{0,q} \phi_{0,q}(x) \\ &+ \sum_{p=1}^m \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,0} c_{p,0} \phi_{p,0}(x) + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \\ &- \bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n-1,0} c_{0,0} \phi_{0,0}(x) - \sum_{q=1}^n \bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n-1,q} c_{0,q} \phi_{0,q}(x) \\ &- \sum_{p=1}^m \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n-1,0} c_{p,0} \phi_{p,0}(x) - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n-1,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \\ &- \bar{a}_{m-1,0} \bar{b}_{n,0} c_{0,0} \phi_{0,0}(x) + \sum_{q=1}^n \bar{a}_{m-1,0} \bar{b}_{n,q} c_{0,q} \phi_{0,q}(x) \\ &- \sum_{p=1}^m \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n,0} c_{p,0} \phi_{p,0}(x) - \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \\ &+ \bar{a}_{m-1,0} \bar{b}_{n-1,0} c_{0,0} \phi_{0,0}(x) + \sum_{q=1}^n \bar{a}_{m-1,0} \bar{b}_{n-1,q} c_{0,q} \phi_{0,q}(x) \\ &+ \sum_{p=1}^m \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n-1,0} c_{p,0} \phi_{p,0}(x) + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n-1,q} c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \end{aligned}$$

عندئذ نجد أن:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)} &= (\bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n,0} - \bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n-1,0} - \bar{a}_{m-1,0} \bar{b}_{n,0} + \bar{a}_{m-1,0} \bar{b}_{n-1,0}) \\ &\quad \times c_{0,0} \phi_{0,0}(x) \\ &+ \sum_{p=1}^m (\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,0} - \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n-1,0} - \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n,0} + \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n-1,0}) \\ &\quad \times c_{p,0} \phi_{p,0}(x) \\ &+ \sum_{q=1}^n (\bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n,q} - \bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n-1,q} - \bar{a}_{m-1,0} \bar{b}_{n,q} + \bar{a}_{m-1,0} \bar{b}_{n-1,q}) \\ &\quad \times c_{0,q} \phi_{0,q}(x) \\ &+ \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n (\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q} - \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n-1,q} - \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n,q} - \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n-1,q}) \\ &\quad \times c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \end{aligned}$$

لكن:

$$\begin{aligned} &\bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n,0} - \bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n-1,0} - \bar{a}_{m-1,0} \bar{b}_{n,0} + \bar{a}_{m-1,0} \bar{b}_{n-1,0} \\ &= \bar{a}_{m,0} (\bar{b}_{n,0} - \bar{b}_{n-1,0}) - \bar{a}_{m-1,0} (\bar{b}_{n,0} - \bar{b}_{n-1,0}) \\ &= (\bar{a}_{m,0} - \bar{a}_{m-1,0}) (\bar{b}_{n,0} - \bar{b}_{n-1,0}) \end{aligned}$$

لكن:  $\bar{a}_{m,i} = \sum_{k=i}^m a_{m,k}$  ,  $\bar{b}_{n,j} = \sum_{l=j}^n b_{n,l}$  وبالتالي:

$$\bar{a}_{m,0} - \bar{a}_{m-1,0} = \sum_{k=0}^m a_{m,k} - \sum_{k=0}^{m-1} a_{m,k} = a_{m,m}$$

$$\bar{b}_{n,0} - \bar{b}_{n-1,0} = \sum_{k=0}^n b_{n,k} - \sum_{k=0}^{n-1} b_{n,k} = b_{n,n}$$

وبالتالي فإن:

$$\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,0} - \bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,0} - \bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,0} + \bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,0} = a_{m,m}b_{n,n}$$

أما بالنسبة لباقي الأسطر نستفيد من العلاقة:

$$\Delta_{11}v_{m,n} = v_{m,n} - v_{m,n-1} - v_{m-1,n} + v_{m-1,n-1}$$

عندئذ:

$$\begin{aligned} \Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)} &= a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\phi_{0,0}(x) + \sum_{p=1}^m \Delta_{11}(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0})c_{p,0}\phi_{p,0}(x) \\ &+ \sum_{q=1}^n \Delta_{11}(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q})c_{0,q}\phi_{0,q}(x) + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \Delta_{11}(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q})c_{p,q}\phi_{p,q}(x) \end{aligned}$$

ويتطبيق المتراحة الآتية ثلاث مرات متتالية، وبمكاملة الطرفين نستطيع أن نكتب:

$$|\alpha + \beta|^r \leq 2^r(|\alpha|^r + |\beta|^r) \quad ; r \geq 1$$

$$\int_a^b |\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}|^k dx \leq 2^k \int_a^b |a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\phi_{0,0}(x)|^k dx$$

$$+ 4^k \int_a^b \left| \sum_{p=1}^m \Delta_{11}(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0})c_{p,0}\phi_{p,0}(x) \right|^k dx$$

$$+ 8^k \int_a^b \left| \sum_{q=1}^n \Delta_{11}(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q})c_{0,q}\phi_{0,q}(x) \right|^k dx$$

$$+8^k \int_a^b \left| \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \Delta_{11}(\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q}) c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \right|^k dx$$

وبتطبيق متراجحة هولدر مع فرض أن:  $p = \frac{2}{k} > 1$  نجد أن:

$$\int_a^b |\Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)}|^k dx \leq 2^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left( \int_a^b |a_{m,m} b_{n,n} c_{0,0} \phi_{0,0}(x)|^2 dx \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+4^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left( \int_a^b \left| \sum_{p=1}^m \Delta_{11}(\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,0}) c_{p,0} \phi_{p,0}(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left( \int_a^b \left| \sum_{q=1}^n \Delta_{11}(\bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n,q}) c_{0,q} \phi_{0,q}(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left( \int_a^b \left| \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \Delta_{11}(\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q}) c_{p,q} \phi_{p,q}(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{k}{2}}$$

لكن وبسبب التعامد نجد أن:

$$\int_a^b |\Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)}|^k dx \leq 2^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} |a_{m,m} b_{n,n} c_{0,0}|^k$$

$$+4^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left( \sum_{p=1}^m \{ \Delta_{11}(\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,0}) \}^2 |c_{p,0}|^2 \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left(\sum_{q=1}^n\{\Delta_{11}(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q})\}^2|c_{0,q}|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left(\sum_{p=1}^m\sum_{q=1}^n\{\Delta_{11}(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q})\}^2|c_{p,q}|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

إذن:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\int_a^b|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}|^k dx$$

$$\leq 2^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}|^k$$

$$+4^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^m\{\Delta_{11}(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0})\}^2|c_{p,0}|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{q=1}^n\{\Delta_{11}(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q})\}^2|c_{0,q}|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^m\sum_{q=1}^n\{\Delta_{11}(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q})\}^2|c_{p,q}|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

والمتسلسلات الأربعة الأخيرة متقاربة فرضاً أي أن:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \int_a^b |\Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)}|^k dx < \infty$$

كما أن الدالة  $|\Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)}|^k$  غير سالبة وبالتالي حسب تمهيدية بيبو ليفي نجد أن المتسلسلة:  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} |\Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)}|^k$  متقاربة تقريباً في كل مكان، وبالتالي تكون المتسلسلة المتعامدة  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \phi_{m,n}(x)$  قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة المثقلة  $|A, B|_k$  تقريباً في كل مكان.

و نكتب:  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \phi_{m,n}(x) \in |A, B|_k$

**ملاحظة 1:** بوضع  $k = 1$  يكون:  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \phi_{m,n}(x) \in |A, B|$

**ملاحظة 2:** يمكننا استبدال الرمز  $\Delta_{11}(\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q})$  بالرمز  $\hat{a}_{m,p} \hat{b}_{n,q}$ .

وذلك لأن:

$$\Delta_{11}(\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q}) =$$

$$= \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q} - \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n-1,q} - \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n,q} + \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n-1,q}$$

كما أن:

$$\hat{a}_{m,p} \hat{b}_{n,q} = (\bar{a}_{m,p} - \bar{a}_{m-1,p})(\bar{b}_{n,q} - \bar{b}_{n-1,q})$$

$$= \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q} - \bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n-1,q} - \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n,q} + \bar{a}_{m-1,p} \bar{b}_{n-1,q}$$

• الآن لنفرض أن:

$$w^{(0,1)}(p, q; k) := \frac{1}{q^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{n=q}^{\infty} n^{\frac{2}{k}} (\hat{a}_{p,0} \hat{b}_{n,q})^2$$

$$w^{(1,0)}(p, q; k) := \frac{1}{p^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{m=p}^{\infty} m^{\frac{2}{k}} (\hat{a}_{m,p} \hat{b}_{q,0})^2$$

$$w^{(1,1)}(p, q; k) := \frac{1}{(pq)^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{m=p}^{\infty} \sum_{n=q}^{\infty} (mn)^{\frac{2}{k}} (\hat{a}_{m,p} \hat{b}_{n,q})^2$$

ولنثبت صحة المبرهنة الآتية:

**مبرهنة 2:** لنكن  $\{\Omega(m, n)\}$  متتالية مضاعفة موجبة تحقق أن  $\left\{\frac{\Omega(m, n)}{mn}\right\}$  متناقصة بالنسبة لكل من  $m$  و  $n$ . ويفرض أن المتسلسلة  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn\Omega(m, n)}$  متقاربة.

ولتكن المصفوفتان  $A = (a_{m,i}), B = (b_{n,k})$  مصفوفتين مثلثيتين سفليتين غير منتهيتين نظاميتين.

إذا تقاربت المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} |a_{m,m} b_{n,n} c_{0,0}|^k$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{m,0}|^2 n \Omega^{\frac{2}{k}-1}(m, n) w^{(1,0)}(m, n; k)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{0,n}|^2 m \Omega^{\frac{2}{k}-1}(m, n) w^{(0,1)}(m, n; k)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{m,n}|^2 \Omega_k^{2-1}(m,n) w^{(1,1)}(m,n;k)$$

كانت المتسلسلة المتعامدة المضاعفة  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \phi_{m,n}(x)$  قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية  $|A, B|_k$  من أجل  $1 \leq k \leq 2$  تقريباً في كل مكان.

الإثبات: من المبرهنة السابقة وباستبدال مايلي:

$$\Delta_{11}(\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,0}) = \hat{a}_{m,p} \hat{b}_{n,0}, \quad \Delta_{11}(\bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n,q}) = \hat{a}_{m,0} \hat{b}_{n,q}$$

$$\Delta_{11}(\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q}) = \hat{a}_{m,p} \hat{b}_{n,q}$$

نجد أن:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \int_a^b |\Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)}|^k dx \leq \\ & \leq 2^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} |a_{m,m} b_{n,n} c_{0,0}|^k \\ & + 4^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{p=1}^m \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{n,0}^2 |c_{p,0}|^2 \right)^{\frac{k}{2}} \\ & + 8^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{q=1}^n \hat{a}_{m,0}^2 \hat{b}_{n,q}^2 |c_{0,q}|^2 \right)^{\frac{k}{2}} \\ & + 8^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{n,q}^2 |c_{p,q}|^2 \right)^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

$$= G_1 + G_2 + G_3 + G_4$$

$$G_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} |a_{m,m} b_{n,n} c_{0,0}|^k$$

هذه المتسلسلة متقاربة فرضاً.

$$G_2 = 4^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{p=1}^m \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{n,0}^2 |c_{p,0}|^2 \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= A \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{mn\Omega(m,n)\}^{1-\frac{k}{2}}} \left\{ mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n) \sum_{p=1}^m \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{n,0}^2 |c_{p,0}|^2 \right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبتطبيق متراجحة هولدر للمجاميع، بوضع  $\frac{1}{p} = 1 - \frac{k}{2}$ ، نجد أن:

$$G_2 \leq A \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn\Omega(m,n)} \right)^{1-\frac{k}{2}} \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{m=1}^{\infty} m\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n) \sum_{p=1}^m \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{n,0}^2 |c_{p,0}|^2 \right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبتطبيق علاقة فوبيني وبالاستفادة من التقارب نجد أن:

$$G_2 \leq A \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} |c_{p,0}|^2 \times \sum_{m=p}^{\infty} mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n) \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{n,0}^2 \right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= A \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} |c_{p,0}|^2 \times \sum_{m=p}^{\infty} mq\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,q) \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{q,0}^2 \right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= A \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |c_{p,0}|^2 \times \sum_{m=p}^{\infty} m q \Omega^{\frac{2}{k}-1}(m, q) \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{q,0}^2 \right\}^{\frac{k}{2}} \\
 &= A \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |c_{p,0}|^2 \times \sum_{m=p}^{\infty} m \cdot \frac{m^{\frac{2}{k}-1}}{m^{\frac{2}{k}-1}} q \Omega^{\frac{2}{k}-1}(m, q) \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{q,0}^2 \right\}^{\frac{k}{2}} \\
 &\leq A \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |c_{p,0}|^2 \left( \frac{\Omega(p, q)}{p} \right)^{\frac{2}{k}-1} q \sum_{m=p}^{\infty} m^{\frac{2}{k}} \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{q,0}^2 \right\}^{\frac{k}{2}} \\
 &= A \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |c_{p,0}|^2 q \Omega^{\frac{2}{k}-1}(p, q) w^{(1,0)}(p, q; k) \right\}^{\frac{k}{2}}
 \end{aligned}$$

• الآن:

$$\begin{aligned}
 G_3 &= 8^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{q=1}^n \hat{a}_{m,0}^2 \hat{b}_{n,q}^2 |c_{0,q}|^2 \right)^{\frac{k}{2}} \\
 &= B \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{q=1}^n \hat{a}_{m,0}^2 \hat{b}_{n,q}^2 |c_{0,q}|^2 \right)^{\frac{k}{2}} \\
 &= B \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{mn\Omega(m, n)\}^{1-\frac{k}{2}}} \left\{ mn \Omega^{\frac{2}{k}-1}(m, n) \sum_{q=1}^n \hat{a}_{m,0}^2 \hat{b}_{n,q}^2 |c_{0,q}|^2 \right\}^{\frac{k}{2}}
 \end{aligned}$$

وانطبق متراجحة هولدر للمجاميع، بوضع  $\frac{1}{p} = 1 - \frac{k}{2}$

$$\leq B \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn\Omega(m,n)} \right)^{1-\frac{k}{2}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{n=1}^{\infty} n\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n) \sum_{q=1}^n \hat{a}_{m,0}^2 \hat{b}_{n,q}^2 |c_{0,q}|^2 \right\}^{\frac{k}{2}}$$

ويتطبيق علاقة فوبيني وبالاستفادة من التقارب نجد أن:

$$\begin{aligned} G_3 &\leq B \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |c_{0,q}|^2 \times \sum_{n=q}^{\infty} mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n) \hat{a}_{m,0}^2 \hat{b}_{n,q}^2 \right\}^{\frac{k}{2}} \\ &= B \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |c_{0,q}|^2 \times \sum_{n=q}^{\infty} pn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,n) \hat{a}_{p,0}^2 \hat{b}_{n,q}^2 \right\}^{\frac{k}{2}} \\ &= B \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |c_{0,q}|^2 \times \sum_{n=q}^{\infty} pn \cdot \frac{n^{\frac{2}{k}-1}}{n^{\frac{2}{k}-1}} \Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,n) \hat{a}_{p,0}^2 \hat{b}_{n,q}^2 \right\}^{\frac{k}{2}} \\ &\leq B \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |c_{0,q}|^2 \left( \frac{\Omega(p,q)}{q} \right)^{\frac{2}{k}-1} p \sum_{n=q}^{\infty} n^{\frac{2}{k}} \hat{a}_{p,0}^2 \hat{b}_{n,q}^2 \right\}^{\frac{k}{2}} \\ &= B \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |c_{0,q}|^2 p\Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,q) w^{(0,1)}(p,q;k) \right\}^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

• الآن:

$$\begin{aligned} G_4 &= 8^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{n,q}^2 |c_{p,q}|^2 \right)^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

$$G_4 = C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{n,q}^2 |c_{p,q}|^2 \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= C \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{mn\Omega(m, n)\}^{1-\frac{k}{2}}} \left\{ mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m, n) \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{n,q}^2 |c_{p,q}|^2 \right\}^{\frac{k}{2}}$$

ولنطبق متراجحة هولدر للمجاميع، بوضع  $\frac{1}{p} = 1 - \frac{k}{2}$

$$\leq C \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn\Omega(m, n)} \right)^{1-\frac{k}{2}}$$

$$\times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m, n) \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{n,q}^2 |c_{p,q}|^2 \right\}^{\frac{k}{2}}$$

ويتطبيق علاقة فوبيني وبالاستفادة من التقارب نجد أن:

$$\leq C \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |c_{p,q}|^2 \times \sum_{m=p}^{\infty} \sum_{n=q}^{\infty} mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m, n) \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{n,q}^2 \right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= C \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |c_{p,q}|^2 \right.$$

$$\left. \times \sum_{m=p}^{\infty} \sum_{n=q}^{\infty} mn \frac{(mn)^{\frac{2}{k}-1}}{(mn)^{\frac{2}{k}-1}} \Omega^{\frac{2}{k}-1}(m, n) \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{n,q}^2 \right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\leq C \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |c_{p,q}|^2 \left( \frac{\Omega(p,q)}{pq} \right)^{\frac{2}{k}-1} \sum_{m=p}^{\infty} \sum_{n=q}^{\infty} (mn)^{\frac{2}{k}} \hat{a}_{m,p}^2 \hat{b}_{n,q}^2 \right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= C \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |c_{p,q}|^2 \Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,q) w^{(1,1)}(p,q;k) \right\}^{\frac{k}{2}}$$

من  $G_1$  و  $G_2$  و  $G_3$  و  $G_3$  وبما أن المتسلسلات الأربعة متقاربة فرضاً، فإن:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \int_a^b |\Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)}|^k dx < \infty$$

أي المتسلسلة متقاربة. كما أن الدالة  $|\Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)}|^k$  غير سالبة، وبالتالي وحسب تمهيدية بيبو ليفي تكون المتسلسلة  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} |\Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)}|^k$  متقاربة تقريباً في كل مكان.

وبالتالي تكون المتسلسلة المتعامدة المضاعفة  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \phi_{m,n}(x)$  قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية  $|A, B|_k$  تقريباً في كل مكان.

• الآن لنعرّف المصفوفتين  $A$  و  $B$  كمايلي:

$$a_{m,j} = \frac{p_{m-j} q_j}{R_m}, \quad b_{n,k} = \frac{\acute{p}_{n-k} \acute{q}_k}{\acute{R}_n}$$

ونعلم أن:

$$t_n^{(N,p,q)} = \frac{1}{R_n} \sum_{k=0}^n p_{n-k} q_k S_k$$

حيث:

$$R_n = (p * q)_n = \sum_{m=0}^n p_{n-m} q_m, R_n^j = \sum_{m=j}^n p_{n-m} q_m$$

عندئذ نجد أن:

$$\bar{a}_{m,j} = \sum_{l=j}^m a_{m,l} = \sum_{l=j}^m \frac{p_{m-l} q_l}{R_m} = \frac{\sum_{l=j}^m p_{m-l} q_l}{R_m} = \frac{R_m^j}{R_m}$$

$$\bar{b}_{n,k} = \sum_{l=k}^n b_{n,l} = \sum_{l=k}^n \frac{p_{n-l} q_l}{R_n} = \frac{\sum_{l=k}^n p_{n-l} q_l}{R_n} = \frac{R_n^k}{R_n}$$

أي أن:

$$\bar{a}_{m,j} \cdot \bar{b}_{n,k} = \frac{R_m^j}{R_m} \cdot \frac{R_n^k}{R_n}$$

فيكون:

$$\hat{a}_{m,i} = \bar{a}_{m,i} - \bar{a}_{m-1,i} = \frac{R_m^i}{R_m} - \frac{R_{m-1}^i}{R_{m-1}}$$

$$\hat{b}_{n,j} = \bar{b}_{n,j} - \bar{b}_{n-1,j} = \frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}$$

لكن:

$$\frac{R_m^j}{R_m} \cdot \frac{R_n^k}{R_n} = \frac{\sum_{i=j}^m p_{m-i} q_i}{\sum_{i=0}^m p_{m-i} q_i} \cdot \frac{\sum_{l=k}^n p_{n-l} q_l}{\sum_{l=0}^n p_{n-l} q_l} = \frac{\sum_{i=j}^m \sum_{l=k}^n p_{m-i} p_{n-l} q_i q_l}{\sum_{i=0}^m \sum_{l=0}^n p_{m-i} p_{n-l} q_i q_l}$$

ونعلم أن:

$$t_{m,n}^{(N^{(2)},p,q)} = \frac{1}{(p * q)_{m,n}} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n p_{m-i,n-k} q_{i,k} S_{i,k}$$

ولنضع:

$$p_{m-i} \acute{p}_{n-l} = p_{m-i,n-l} \quad , \quad q_i \acute{q}_l = q_{i,l}$$

نجد:

$$R_m \cdot \acute{R}_n = R_{m,n}$$

$$R_{m,n}^{j,k} = \sum_{i=j}^m \sum_{l=k}^n p_{m-i,n-l} \cdot q_{i,l}$$

$$R_{m,n} = (p * q)_{m,n} = R_{m,n}^{0,0} = \sum_{i=0}^m \sum_{l=0}^n p_{m-i,n-l} \cdot q_{i,l}$$

وبالتالي فإن:

$$\bar{a}_{m,j} \cdot \bar{b}_{n,k} = \frac{R_m^j}{R_m} \cdot \frac{R_n^k}{\acute{R}_n} = \frac{R_{m,n}^{j,k}}{R_{m,n}}$$

ويتبدل هذه العلاقة في المبرهنة 1 نحصل على النتيجة الآتية:

**نتيجة 1:** إذا كانت المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} |a_{m,m} b_{n,n} c_{0,0}|^k$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{p=1}^m \left\{ \Delta_{11} \left( \frac{R_{m,n}^{p,0}}{R_{m,n}} \right) \right\}^2 |c_{p,0}|^2 \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{q=1}^n \left\{ \Delta_{11} \left( \frac{R_{m,n}^{0,q}}{R_{m,n}} \right) \right\}^2 |c_{0,q}|^2 \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left( \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \left\{ \Delta_{11} \left( \frac{R_{m,n}^{p,q}}{R_{m,n}} \right) \right\}^2 |c_{p,q}|^2 \right)^{\frac{k}{2}}$$

متقاربة من أجل  $1 \leq k \leq 2$  . عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة المضاعفة

المطلقة  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \phi_{m,n}(x)$  قابلة للجمع بطريقة نيورند المعممة المضاعفة المطلقة

المثقلة  $|N^{(2)}, p, q|_k = |N, p, q, \acute{p}, \acute{q}|_k$  تقريباً في كل مكان.

ملاحظة: وجدنا أنه بإمكاننا استبدال الرمز  $\Delta_{11}(\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q})$  بالرمز  $\hat{a}_{m,p} \hat{b}_{n,q}$  .

لكن:  $\bar{a}_{m,p} \cdot \bar{b}_{n,q} = \frac{R_{m,n}^{p,q}}{R_{m,n}}$  أي أن:

$$\hat{a}_{m,p} \hat{b}_{n,q} = \Delta_{11}(\bar{a}_{m,p} \bar{b}_{n,q}) = \Delta_{11} \left( \frac{R_{m,n}^{p,q}}{R_{m,n}} \right)$$

الآن لنضع:

$$w^{(1,0)}(p, q; k) := \frac{1}{p^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{m=p}^{\infty} m^{\frac{2}{k}} \left[ \Delta_{11} \left( \frac{R_{m,q}^{p,0}}{R_{m,q}} \right) \right]^2$$

$$w^{(0,1)}(p, q; k) := \frac{1}{q^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{n=q}^{\infty} n^{\frac{2}{k}} \left[ \Delta_{11} \left( \frac{R_{p,n}^{0,q}}{R_{p,n}} \right) \right]^2$$

$$w^{(1,1)}(p, q; k) := \frac{1}{(pq)^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{m=p}^{\infty} \sum_{n=q}^{\infty} (mn)^{\frac{2}{k}} \left[ \Delta_{11} \left( \frac{R_{m,n}^{p,q}}{R_{m,n}} \right) \right]^2$$

وبالاستفادة من المبرهنة 2 نحصل على النتيجة الآتية:

**نتيجة 2:** لتكن  $\{\Omega(m, n)\}$  متتالية مضاعفة موجبة تحقق أن المتتالية  $\left\{ \frac{\Omega(m, n)}{mn} \right\}$  متناقصة بالنسبة لكل من  $m$  و  $n$ . وبفرض أن المتسلسلة  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn\Omega(m, n)}$  متقاربة.

ولتكن المتتاليتين  $\{p_{m,n}\}$  و  $\{q_{m,n}\}$  موجبتين. عندئذٍ إذا تقاربت المتسلسلات الآتية:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} |a_{m,m} b_{n,n} c_{0,0}|^k \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{m,0}|^2 n \Omega^{\frac{2}{k}-1}(m, n) w^{(1,0)}(m, n; k) \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{0,n}|^2 m \Omega^{\frac{2}{k}-1}(m, n) w^{(0,1)}(m, n; k) \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{m,n}|^2 \Omega^{\frac{2}{k}-1}(m, n) w^{(1,1)}(m, n; k) \end{aligned}$$

كانت المتسلسلة المتعامدة المضاعفة  $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n} \phi_{m,n}(x)$  قابلة للجمع

بطريقة نيورند المعممة المضاعفة المطلقة المثقلة  $|N, p, q, \acute{p}, \acute{q}|_k$  من أجل

$1 \leq k \leq 2$  تقريباً في كل مكان.

$$a_{m,m} = \frac{p_m - m q_m}{R_m} = \frac{p_0 q_m}{R_m}, \quad b_{n,n} = \frac{\acute{p}_n - n \acute{q}_n}{\acute{R}_n} = \frac{\acute{p}_0 \acute{q}_n}{\acute{R}_n} \quad \text{حيث:}$$

## 6. الاستنتاجات والتوصيات:

في هذا البحث قمنا بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة بحالتها العامة المثقلة، وتوصلنا وبالإثبات إلى أن المتسلسلات المتعامدة المضاعفة قابلة للجمع بهذه الطريقة ضمن شروط معينة.

وحصلنا على نتيجتين هامتين حول قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة.

ونوصي بدراسة قابلية جمع متسلسلة فورييه المضاعفة بهذه الطريقة كونها تعد من أهم المتسلسلات المتعامدة المضاعفة.

7. المراجع:

- [1]. S. Lal, V. N. Tripathi, "On the study of double Fourier series by double matrix summability method", Tamkang journal of mathematics, (2003).
- [2]. Xhevat Z. Krasniqi, "On absolute generalized Norlund summability of double orthogonal series", (2011).
- [3]. Xhevat Z. Krasniqi, "Certain sufficient conditions on  $|N, p_n, q_n|_k$  summability of orthogonal series", (2014).
- [4]. V. N. Misra, S. K. Pakray, P. Palo, P. N. Samanta, M. Misra, U. K. Misra, "On double absolute factorable matrix summability", De gruyter, (2017).
- [5]. <https://web.math.ucsb.edu/~cmart07/fubini.pdf>, (2020).
- [6]. أ. كولموغوروف، س. فومين، "مبادئ في نظرية التوابع وفي التحليل التابعي"، تعريب أبو بكر خالد سعد الله، (1973).



## دراسة مسألة التحريك الحديثة الأولى

### لنظرية المرونة الرياضية

د . أحمد الجاعور – أستاذ مساعد في كلية العلوم – جامعة البعث

#### مقدمة البحث :

نستعرض الرموز والتعاريف اللازمة لتوضيح محتوى هذا البحث [1] ، [2] :

لتكن  $x = (x_1, x_2, x_3)$  ،  $y = (y_1, y_2, y_3)$  نقطان من الفضاء  $R^3$  ؛ حيث المسافة بين  $x$  و  $y$  هي :  $|x - y| = \left( \sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  . ولتكن  $D_0 \subset R^3$  منطقة منتهية محدودة بالسطوح المغلقة  $S_0, S_1, \dots, S_m$  من الصف :  $\Lambda_2(\alpha); 0 < \alpha \leq 1$  ؛ حيث  $S_0$  مغلف لكل  $S_k$  و  $S_i \cap S_k = \Phi; i \neq k, i, k = \overline{0, m}$  .

**تعريف 1 :** نقول عن السطح  $S$  إنّه ينتمي للصف  $\Lambda_k(\alpha); 0 < \alpha \leq 1$  ؛ حيث  $k$  أي عدد طبيعي ، إذا وجد عدد موجب  $d$  ؛ بحيث إنّ كل نقطة  $z \in S$  تقابل جملة متعامدة من المتجهات  $v^i(z) = (v_1^i(z), v_2^i(z), v_3^i(z)); i = 1, 2, 3$  ؛ وبحيث إنّ الجزء من  $S$  المحدود داخل الاسطوانة  $(z, v(z), d)$  ليس له أي نقاط مشتركة مع قاعدتي الاسطوانة .

نرمز بـ  $D_k$  للمنطقة المنتهية والمحدودة بـ  $\overline{1, m}$  ؛  $S_k$  ؛ أيضاً :

$$\overline{D_0} = D_0 \cup \left( \bigcup_{k=0}^m S_k \right), \overline{D_k} = D_k \cup S_k ; k = \overline{1, m}$$

نرمز بـ  $L$  للمجال  $(0, l)$  و  $\overline{L}$  للمجال  $[0, l]$  كما نرمز بـ  $\Omega_k = D_k \times L$  لاسطوانة في  $R^4$  و  $\overline{\Omega_k} = \overline{D_k} \times \overline{L}$  ؛ حيث  $k = \overline{0, m}$  . نرمز بـ  $O$  للامتتاهي في الكبر .

إذا كانت  $A = [A_{ij}]_{(3,3)}$  مصفوفة ، فإنّ :  $|A|^2 = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}^2$  . كما نرمز بـ  ${}_T$  لمنقولها

نرمز بـ  $C^k(\Omega)$  ( $k$  عدد صحيح غير سالب) لفضاء الدوال المعرّفة على  $\Omega$  ، والتي مشتقاتها حتى المرتبة  $k$  مستمرة في  $\Omega$  ، ونرمز بـ  $C^k(\overline{\Omega})$  لصف الدوال من  $C^k(\Omega)$  والتي مشتقاتها مستمرة في كل نقطة من نقاط حدود المنطقة  $\Omega$  .

تأخذ مترابحة ببسل الشكل الآتي :

$$\|f\|^2 = (f, f) \geq \sum_{\alpha \in X} \frac{|f, \varphi_\alpha|^2}{(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha)} = \sum_{\alpha \in X} \left| \left( f, \frac{\varphi_\alpha}{\|\varphi_\alpha\|} \right) \right|^2$$

حيث  $f$  عنصر من فضاء هلبرت ،  $\varphi_\alpha$  جملة غير صفرية متعامدة في فضاء هلبرت .

تأخذ مترابحة كوشي - بونياكوفسكي الشكل الآتي :

$$\left[ \int_a^b f(x).g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx. \int_a^b g^2(x)dx$$

**مبرهنة هلبرت-شميدت :** إذا كانت النواة  $k(x, s)$  قابلة للجمع مع دالة تربيعية

$$\int_a^b K(x, s)f(s)ds$$

بمتحولين فالتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x)$  ، تتقارب وسطياً من الدالة

**تعريف 2 :** نقول عن المتجه  $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$  إنَّه منتظم في

$u_i(x, t) \in C^1(\overline{\Omega_k}) \cap C^2(\Omega_k)$  : إذا كان ،  $\Omega_k ; (x \in D_k, t \in L)$

أجل :  $i = 1, 2, 3, x \in D_k, t \in L$  .

**تعريف 3 :** إذا كانت  $F(X)$  مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة عناصرها عبارة عن

مشتقات جزئية ، فإنَّ تتسور غرين  $C$  يعرّف بالعلاقة التالية :  $C(X) = {}_F(X)T.F(X)$

**تعريف 4 :** نقول عن الوسط المرن إنَّه متجانس ومتساوي الخواص إذا كانت خواص

المرونة واحدة لهذا الوسط في كل الاتجاهات . أو أنَّ ثوابت المرونة للوسط لا تتعلق

بتوجيه المحاور الإحداثية [ 3 ] .

إنَّ جملة المعادلات التفاضلية لنظرية المرونة الكلاسيكية في حالة التحريك ومن

أجل الأوساط المرنة المتجانسة والمتساوية الخواص تعطى بالشكل [3] :

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u + F(x, t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

حيث  $u(x, t) = (u_1, u_2, u_3)$  متجه الانزياح ،  $\Delta$  مؤثر لابلاس ثلاثي البعد ،  $F(x, t)$

متجه القوة الحجمية ،  $\rho > 0$  كثافة الوسط و  $t$  الزمن ،  $\mu$  ،  $\lambda$  ثوابت لاما للمرونة

وهي تحقق الشروط :  $\mu > 0$  ،  $3\lambda + 2\mu > 0$  .

سنتعامل في هذا البحث فقط مع الدوال المتجهية الحقيقية ؛ حيث أي متجه ثلاثي

البعد  $f = (f_1, f_2, f_3)$  ، مع التنظيم  $|f| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 f_k^2}$  ، سنعتبره كمصفوفة عمود من

المرتبة (3,1) ، أي  $f = [f_k]_{(3,1)}$  .

بفرض  $A(\partial_x) \equiv [A_{ik}(\partial_x)]_{3 \times 3}$  مؤثر تفاضلي مصفوفي فيه :

$$A_{ij}(\partial_x) \equiv \delta_{ij} \mu \Delta + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

حيث  $\delta_{ij}$  ديلتا كرونكر . فجملة المعادلات (1) تكتب بالشكل المصفوفي الآتي :

$$A(\partial_x)u(x,t) - \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -F(x,t) \quad (2)$$

يدعى المؤثر التفاضلي المصفوفي :  $T(\partial_x, n(x)) \equiv [T_{ij}(\partial_x, n(x))]_{3 \times 3}$  ؛

حيث :

$$T_{ij}(\partial_x, n(x)) = \lambda n_i(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \lambda n_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n(x)}$$

مؤثر الإجهاد و  $n(x)$  هو متجه الوحدة الاختياري في النقطة  $x$  ( إذا كان :

$x \in S_k ; k = \overline{1, m}$  ، فإن  $n(x)$  يكون ناظماً خارجياً للمنطقة  $D_0$  ) .

إذا فرضنا أن المناطق  $D_k ; k = \overline{0, r}$  كانت ممثلة بأوساط مرنة متجانسة

ومتساوية الخواص مع ثوابت لاما  $\mu_k$  ، والكثافة  $\rho_k$  ، بينما المناطق الأخرى

$D_k ; k = \overline{r+1, m}$  كانت فارغة ، فإن المؤثرات  $A(\partial_x)$  و  $T(\partial_x, n(x))$  التي

تحتوي على  $\mu_k$  ، عوضاً عن  $\lambda, \mu$  تأخذ على الترتيب الشكل  $A(\partial_x)^k$  و

$T(\partial_x, n(x))^k$  . إضافة لذلك نرمز بـ :

$$u^+(z,t) = \lim_{x \in D_0 \rightarrow z \in S_k} u(x,t) ; k = \overline{0, m}$$

$$u^-(z,t) = \lim_{x \in D_0 \rightarrow z \in S_k} u(x,t) ; k = \overline{1, r}$$

وهي عبارة عن حالة خاصة من الحالة العامة لـ (2) أي عندما :  $\rho_k = 1 ; k = \overline{1, r}$

بالطريقة نفسها نعلم ماذا نقصد بـ  $(T(\partial_z, n(z))u(z,t))^{\pm}$  .

صياغة المسألة :

أوجد في الاسطوانة  $\Omega_k ; k = \overline{0, r}$  ، المتجه المنتظم  $u(x, t) ; k = \overline{0, r}$  الذي يحقق جملة المعادلات :

$$\forall (x, t) \in \Omega_k : A(\partial_x)^k u(x, t) - \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -F(x, t) ; k = \overline{0, r} \quad (3)$$

مع الشروط الابتدائية :

$$\forall x \in \overline{D}_k : \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \varphi(x) \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \psi(x, t) ; k = \overline{0, r}$$

وكذلك مع الشروط الحدية :

$$\forall (z, t) \in S_k \times \overline{L} : \left( T(\partial_z, n(z))u(z, t) \right)^+ = f(z, t) ; k = 0, r+1, \dots, m \quad (5)$$

تجدر الإشارة هنا أننا سنرمز لهذه المسألة بالرمز  $(I)_{F, \varphi, \psi, \Phi, \Psi, f}$  . كما يفترض

بالدوال المتجهية المعطاة  $F, \varphi, \psi, \Phi, \Psi, f$  أن تحقق الشروط الآتية :

$$F(\cdot) \in C^3(\overline{\Omega}_k) , \text{ والتفاضلات من المرتبة الثالثة تنتمي للصف } L_2(D_k) ; k = \overline{0, r} \quad (1)$$

$$\left. T F \right|_{S_k} = 0 ; k = 0, r+1, \dots, m$$

$$\forall t \in \overline{L} : \frac{\partial^p}{\partial t^p} \Phi(\cdot, t) \in C^2(S_k) , p = \overline{0, 7} \quad (2)$$

$$\forall z \in S_k : \Phi(z, \cdot) \in C^7(\overline{L}), \left( \frac{\partial^m \Phi(z, t)}{\partial t^m} \right)_{t=0} = 0 , m = \overline{0, 5}, k = \overline{1, r}$$

$$\forall t \in \overline{L} : \frac{\partial^p}{\partial t^p} \Psi(\cdot, t) \in C^1(S_k) , p = \overline{0, 7} \quad (3)$$

$$\forall z \in S_k : \Psi(z, \cdot) \in C^7(\overline{L}), \left( \frac{\partial^m \Psi(z, t)}{\partial t^m} \right)_{t=0} = 0 , m = \overline{0, 5}, k = \overline{1, r}$$

$$\forall t \in \bar{L} : \frac{\partial^p}{\partial t^p} f(.,t) \in C^1(S_k), \quad p = \overline{0,7} \quad (4)$$

$$\forall z \in S_k : f(z,.) \in C^7(\bar{L}), \quad \left( \frac{\partial^m f(z,t)}{\partial t^m} \right)_{t=0} = 0, m = \overline{0,5}, k = 0, r+1, \dots, m$$

(5)  $\varphi \in C^3(\bar{D}_k)$  ، والتفاضلات من المرتبة الثالثة تنتمي للصف  $L_2(D_k)$  . وأن :

$$T \varphi \Big|_{S_k} = T A \varphi \Big|_{S_k} = 0 ; k = 0, r+1, \dots, m$$

(6)  $\psi \in C^2(\bar{D}_k)$  ، والتفاضلات من المرتبة الثالثة تنتمي للصف  $L_2(D_k)$  . وأن :

$$T \psi \Big|_{S_k} = 0 ; k = 0, r+1, \dots, m$$

تم إثبات وحدانية الحل المنتظم لهذه المسألة في [4] .

إذا كان  $u^{(1)}(x,t)$  حلاً منتظماً للمسألة  $(I)_{0,0,0,\Phi,\Psi,f}$  وكان  $u^{(2)}(x,t)$  حلاً

منتظماً للمسألة  $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$  . فإن :  $u(x,t) = u^{(1)}(x,t) + u^{(2)}(x,t)$

سيكون حلاً منتظماً للمسألة  $(I)_{F,\varphi,\psi,\Phi,\Psi,f}$  .

إن وجود الحل  $u^{(1)}(x,t)$  ، وحسب فرضياتنا ، ينتج من النتائج الموجودة في

[4] . لذلك بقي علينا إثبات وجود الحل المنتظم للمسألة  $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$  ؛ حيث

سنستعمل لإثبات ذلك طريقة جديدة تعرف بطريقة فورييه ، وهو هدف هذا البحث .

### المناقشة والنتائج :

سنعرض لمفهوم أساسي له دور كبير في هذا البحث [3] :

• **صيغ غرين :** إذا كان  $u(x) = u^k(x)$  و  $v(x) = v^k(x)$  ؛ حيث  $x \in D_k, k = \overline{0,r}$  متجهين اختياريين ينتميان للصف  $C^1(\bar{D}_k)$  ، كما أن تفاضلاتهما من المرتبة الثانية تنتمي للصف  $L_2(D_k)$  .

عندئذٍ نتحقق العلاقات الآتية :

$$\int_D (T_v A u + E(u, v)) dx = \int_{S_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T u & \end{pmatrix}^+ ds +$$

$$+ \sum_{k=r+1}^m \int_{S_k} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T u & \end{pmatrix}^+ dS + \quad (6)$$

$$+ \sum_{k=1}^r \int_{S_k} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T u & \end{pmatrix}^+ - \begin{pmatrix} k & k \\ v & \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} k & k \\ T u & \end{pmatrix}^- \right) dS$$

$$\int_D ({}_v T A u + {}_u T A v) dx = \int_{S_0} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T u & \end{pmatrix}^+ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T v & \end{pmatrix}^+ \right) ds +$$

$$+ \sum_{k=r+1}^m \int_{S_k} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T u & \end{pmatrix}^+ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T v & \end{pmatrix}^+ \right) dS + \quad (7)$$

$$+ \sum_{k=1}^r \left( \int_{S_k} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T u & \end{pmatrix}^+ - \begin{pmatrix} k & k \\ v & \end{pmatrix}^- \cdot \begin{pmatrix} k & k \\ T u & \end{pmatrix}^- \right) dS - \right.$$

$$\left. - \int_{S_k} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & \end{pmatrix}^+ \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T v & \end{pmatrix}^+ - \begin{pmatrix} k & k \\ u & \end{pmatrix}^- \cdot \begin{pmatrix} k & k \\ T v & \end{pmatrix}^- \right) dS \right)$$

هنا :

$$E(v, u) = \sum_{p,q=1}^3 \left( \mu \frac{\partial v_p}{\partial x_q} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \lambda \frac{\partial v_p}{\partial x_p} \frac{\partial u_q}{\partial x_q} + \mu \frac{\partial v_p}{\partial x_q} \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right)$$

إذا كتبنا  $E(v, u)$  بالشكل :

$$E(v, u) = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \operatorname{div} v \operatorname{div} u + \frac{\mu}{2} \sum_{p \neq q} \left( \frac{\partial v_p}{\partial x_q} + \frac{\partial v_q}{\partial x_p} \right) \left( \frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p} \right) +$$

$$+ \frac{\mu}{3} \sum_{p,q} \left( \frac{\partial v_p}{\partial x_p} - \frac{\partial v_q}{\partial x_q} \right) \left( \frac{\partial u_p}{\partial x_p} - \frac{\partial u_q}{\partial x_q} \right)$$

فإننا نجد أن :  $E(u, v) = E(v, u)$  و  $E(v, v) \geq 0$

إنَّ تحقيق هدف هذا البحث يتم أولاً من خلال إثبات صحة المبرهنتين الآتيتين :

مبرهنة 1 : المتراجحة لآتية :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \Phi_n^2 \omega_n \leq \int_D E(\Phi, \Phi) dx \quad (8)$$

حيث :

$$\Phi_n = \int_D T(x) w^{(n)}(x) dx$$

محقة ، وذلك من أجل أي متجه :  $x \in D_k, k = \overline{0, r}$  ;  $\Phi(x) = \Phi^k(x)$  يحقق الشروط :

$$\Phi^k(x) \in C^0(\overline{D_k}), \frac{\partial \Phi^k}{\partial x_i} \in L_2(D_k) ; i = 1, 2, 3, k = \overline{0, r}$$

$$\forall z \in S_k : \Phi^+(z) = \Phi^-(z), k = \overline{1, r}$$

في الحالة الخاصة فإن المبرهنة تضمن تقارب المتسلسلة من الجهة اليسرى لـ (8) .

الإثبات : لنطبق العلاقة (6) على المتجهات  $\Phi(x)$  و  $w^{(n)}(x)$  ، فنجد :

$$\int_D E(\Phi, w^{(n)}) dx = \omega_n \Phi_n ; n = 7, \dots \quad (9)$$

وفي حالة خاصة إذا جعلنا  $\Phi = w^{(n)}$  في (9) فإننا نجد :

$$\int_D E(w^{(m)}, w^{(n)}) dx = \begin{cases} \omega_n ; m = n \\ 0 ; m \neq n \end{cases} \quad (10)$$

إذا أخذنا بعين الاعتبار القيمة غير السالبة :

$$L = \int_D E(v, v) dx \geq 0$$

وفرضنا أن :

$$v(x) = \Phi(x) - \sum_{n=7}^{n_0} \Phi_n w^{(n)}(x)$$

فإنه ، وبحساب بسيط ، نحصل على :

$$L = \int_D E(\Phi, \Phi) dx + \sum_{m, n=7}^{n_0} \Phi_m \Phi_n \int_D E(w^{(m)}, w^{(n)}) dx - 2 \sum_{n=7}^{n_0} \Phi_n \int_D E(\Phi, w^{(n)}) dx \geq 0 \quad (11)$$

نجد من العلاقات (9) و (10) و (11) أن :

$$\sum_{n=7}^{n_0} \Phi_n^2 \omega_n \leq \int_D E(\Phi, \Phi) dx$$

مبرهنة 2 : المتراجحة الآتية :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \Phi_n^2 \omega_n^2 \leq \int_D |A\Phi|^2 dx \quad (12)$$

محقة وذلك من أجل أي متجه :  $x \in D_k, k = \overline{0, r}$  ;  $\Phi(x) = \Phi^k(x)$  يحقق الشروط الآتية :

$$\Phi^k(x) \in C^1(\overline{D}_k), \frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x_i \partial x_j} \in L_2(D_k) ; i, j = 1, 2, 3, k = \overline{0, r}$$

$$\forall z \in S_k : \Phi^+(z) = \Phi^-(z), \left( T \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \Phi^+(z) & \Phi^-(z) \end{smallmatrix} \right)^+ = \left( T \begin{smallmatrix} k & k \\ \Phi^+(z) & \Phi^-(z) \end{smallmatrix} \right)^-, k = \overline{1, r}$$

$$\forall z \in S_k : \left( T \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \Phi^+(z) & \Phi^-(z) \end{smallmatrix} \right)^+ = 0, k = 0, r+1, \dots, m$$

في الحالة الخاصة فإن المبرهنة تضمن تقارب المتسلسلة من الجهة اليسرى لـ (12) .

الإثبات : لنطبق العلاقة (7) على المتجهات  $\Phi(x)$  و  $w^{(n)}(x)$  ، فنجد :

$$\int_D \left( {}_A T w^{(n)} - w^{(n)} {}_A T \Phi \right) dx = 0 ; n = 7, \dots \quad (13)$$

إذا أدخلنا حساب  $A w^{(n)} + \omega_n w^{(n)}$  من (13) فإننا نحصل على :

$$\int_D A \Phi w^{(n)} dx = -\omega_n \Phi_n$$

هنا :

$$(A\Phi)_n = -\omega_n \Phi_n \quad (14)$$

وباستخدام متراجحة ببيل نجد :

$$\sum_{n=7}^{\infty} (A\Phi)_n^2 \leq \int_D |A\Phi|^2 dx \quad (15)$$

ومن أجل  $A(\partial_x) \Phi(x)$  فإننا نحصل على (12) وذلك بتعويض (14) في (15) .

إنَّ تحقيق هدف هذا البحث يتم ثانياً من خلال إثبات المبرهنة الآتية :

**مبرهنة 3 :** إذا حققت الدوال  $F, \varphi, \psi$  الشروط (3) و (4) و (5) ،

فإنَّ المتسلسلة :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^6 \chi^{(n)}(x)(\varphi_n + t\psi_n) + \sum_{n=1}^6 \chi^{(n)}(x) \int_0^t \left( \int_0^t F_n(\tau) d\tau \right) dt + \\ + \sum_{n=7}^{\infty} \frac{W^{(n)}(x)}{\omega_n^2} (A^2 \varphi)_n \cos \sqrt{\omega_n} t - \sum_{n=7}^{\infty} \frac{W^{(n)}(x)}{\omega_n^2} (A\psi)_n \sin \sqrt{\omega_n} t - \\ - \sum_{n=7}^{\infty} \frac{W^{(n)}(x)}{\omega_n^2} \int_0^t (AF)_n(\tau) \sin \sqrt{\omega_n} (t - \tau) d\tau$$

عبارة عن حل منظم للمسألة  $(I)_{F, \varphi, \psi, 0, 0, 0}$  .

**الإثبات :** ليكن  $\chi_0$  أي عدد صحيح موجب (اختياري) ولتكن  $I$  مصفوفة واحدة

من المرتبة (3,3) و  $D = \bigcup_{k=0}^r D_k$  .

نطبق تنسور غرين من المسألة الأساسية الأولى للمؤثر  $A(\partial_x) - \chi_0^2 I$  إلى

المصفوفة من المرتبة الثالثة :  $G(x, y, -\chi_0^2) = G(x, y, -\chi_0^2)$  ؛ حيث  $x \in D_k$

و  $k = \overline{0, r}$  ،  $y \in D$  ،  $x \neq y$  ، تحقق هذه المصفوفة الشروط الآتية :

$\forall x \in D_k, y \in D, x \neq y :$

$$A(\partial_x) G(x, y, -\chi_0^2) - \chi_0^2 G(x, y, -\chi_0^2) = 0 ; k = \overline{0, r} \quad (1)$$

$$\forall z \in S_k, y \in D : \left( G(z, y, -\chi_0^2) \right)^+ = \left( G(z, y, -\chi_0^2) \right)^- ; k = \overline{1, r} \quad (2)$$

$$\left( T(\partial_z, n(z)) G(z, y, -\chi_0^2) \right)^+ = \left( T(\partial_z, n(z)) G(z, y, -\chi_0^2) \right)^-$$

$$\forall z \in S_k, y \in D : \left( T(\partial_z, n(z)) G(z, y, -\chi_0^2) \right)^+ = 0 ; k = 0, r+1, \dots, m \quad (3)$$

$$\forall x \in D_k, y \in D : G(x, y, -\chi_0^2) = \Gamma(x - y, -\chi_0^2) - g(x, y) ; k = \overline{0, r} \quad (4)$$

حيث  $\Gamma(x-y, -\chi_0^2)^k$  مصفوفة الحلول الأساسية مع ثوابت لاما  $\lambda_k, \mu_k$  [3] و  
حل منتظم للمسألة الآتية :

$$\begin{aligned} \forall x \in D_k, y \in D : A(\partial_x)^k g(x, y) - \chi_0^2 g(x, y) &= 0 ; k = \overline{0, r} \\ \forall z \in S_k, y \in D : \left( g(z, y) \right)^+ - \left( g(z, y) \right)^- &= \Gamma(z-y, -\chi_0^2)^0 - \Gamma(z-y, -\chi_0^2)^k \\ \left( T(\partial_z, n(z)) g(x, y) \right)^+ - \left( T(\partial_z, n(z)) g(x, y) \right)^- &= \\ = T(\partial_z, n(z)) \Gamma(z-y, -\chi_0^2)^0 - T(\partial_z, n(z)) \Gamma(z-y, -\chi_0^2)^k ; &k = \overline{1, r} \\ \forall z \in S_k, y \in D : \left( T(\partial_z, n(z)) g(x, y) \right)^+ &= T(\partial_z, n(z)) \Gamma(z-y, -\chi_0^2)^k ; \\ k = 0, r+1, \dots, m & \end{aligned}$$

إن قابلية الحل لهذه المسألة مثبتة في [3] ؛ حيث تم إثبات وجود  $G(x, y, -\chi_0^2)$ .  
وباستعمال علاقة غرين فإنه يمكن إثبات [3] أن  $G(x, y, -\chi_0^2)$  تمتلك خواص  
التماثل من الشكل :

$$G(x, y, -\chi_0^2) = {}_G T(y, x, -\chi_0^2) \quad (16)$$

أضف لذلك لدينا التقديرات الآتية [4] :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in D \times D : G_{mn}(x, y, -\chi_0^2) &= O(|x-y|^{-1}) \\ \frac{\partial}{\partial x_j} G_{mn}(x, y, -\chi_0^2) &= O(|x-y|^{-2}) ; m, n, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (17)$$

لنفرض أن المسألة معطاة مع القيم الذاتية :

$$\begin{aligned} \forall x \in D_k : A(\partial_x)^k w(x) + \omega w(x) &= 0 ; k = \overline{0, r} \\ \forall z \in S_k : w^+(z) = w^-(z), \left( T w(z) \right)^+ &= \left( T w(z) \right)^- ; k = \overline{1, r} \quad (18) \\ \forall z \in S_k : \left( T w(z) \right)^+ &= 0 ; k = 0, r+1, \dots, m \end{aligned}$$

إن دالة المتجه الذاتي للمسألة (18) ، الذي يأخذ الشكل :

$$w(x) = w^k(x) = \left( w_1^k(x), w_2^k(x), w_3^k(x) \right); x \in D_k, k = \overline{0, r}$$

يكون منتظماً إذا كان :  $w_i^k(x) \in C^1(\overline{D_k}) \cap C^2(D_k); i = 1, 2, 3, k = \overline{0, r}$  ، نستطيع أن نرى أن المسألة (18) تكافئ جملة من المعادلات التكاملية :

$$w(x) = \left( \omega + \chi_0^2 \right) \int_D G(x, y, -\chi_0^2) w(y) dy ; x \in D \quad (19)$$

استناداً إلى (16) و (17) ، نرى أن (19) هي عبارة معادلة تكاملية مع نواة متناظرة من الصف  $L_2(D)$  . واستناداً إلى مبرهنة هلبيرت - شميدت ، فإنه يوجد جملة قابلة للعد من القيم الذاتية  $(\omega_n + \chi_0^2)_{n=1}^{\infty}$  تطابق في  $D$  جملة من المتجهات الذاتية :

$$\left( w^{(n)}(x) \right)_{n=1}^{\infty} = \left( w^k(x) \right)_{n=1}^{\infty}; x \in D_k, k = \overline{0, r}$$

هنا وتباعاً ينتج أن  $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$  و  $\left( w^{(n)}(x) \right)_{n=1}^{\infty}$  على التوالي هي قيم ذاتية ومتجهات ذاتية للمسألة (18) . هذا يعني بشكل قاطع [3] أن :  $\omega_n \geq 0$  .

إن  $\omega = 0$  هي قيمة ذاتية رتبها ستة ، والمتجهات الذاتية المطابقة تكون عبارة عن متجهات إزاحة :  $\chi^{(n)}(x) = \left( \chi_1^{(n)}, \chi_2^{(n)}, \chi_3^{(n)} \right); n = \overline{1, 6}, x \in D$  وللمتابعة سنفرض أن :  $\omega_n = 0$  و  $n = \overline{1, 6}$  .

إن خواص العزم الحجمي [3] تدل ضمناً على نظامية المتجهات الذاتية .

لنثبت أن الجملة  $\left( w^{(n)}(x) \right)_{n=1}^{\infty}$  تامة في  $L_2(D)$  . لأجل ذلك يكفي أن نبين

أنه إذا كان  $f \in L_2(D)$  أي متجه اختياري فإن الشروط :

$$\int_D T(x) w^{(n)}(x) dx = 0 ; n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

تدل ضمناً على أن  $f(x) = 0$  وذلك في كل نقطة من  $D$  . لنستعمل الآن الرمز

$$h(x) = \int_D G(x, y, -\chi_0^2) f(y) dy \quad \text{التالي :}$$

نلاحظ وحسب مبرهنة هليبرت - شميدت أنَّ  $h(x)$  يكون تمديداً منتظماً ومطلقاً في

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n w^{(n)}(x)}{\omega_n + \chi_0^2} \quad : \text{تقارب المتسلسلة}$$

حيث :

$$f_n = \int_D T(x) w^{(n)}(x) dx ; n = 1, 2, \dots$$

حسب (20) فإنَّ كل  $f_n = 0$  ، ولذلك :

$$h(x) \equiv 0 \quad (21)$$

من ناحية أخرى فمن [3] نعلم أنَّ :

$$\left( A(\partial_x) - \chi_0^2 I \right) h(x) + f(x) = 0 ; x \in D \quad (22)$$

استناداً إلى (21) و (22) نستنتج أخيراً أنَّ  $f(x) = 0$  في كل مكان من  $D$  .

بسبب خطية المسألة  $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$  ، فإنَّ حلها يمكن أن يكون بصورة مباشرة

كمجموع حلّي المسألتين  $(I)_{0,\varphi,\psi,0,0,0}$  و  $(I)_{F,0,0,0,0,0}$  .

بتطبيق طريقة فورييه على المسألة  $(I)_{0,\varphi,\psi,0,0,0}$  فإنَّنا نحصل على :

$$u(x, t) = u(x, t) = \sum_{n=1}^6 \chi^{(n)}(x) (\varphi_n + t\psi_n) + \sum_{n=7}^{\infty} w^{(n)}(x) \left( \varphi_n \cos \sqrt{\omega_n} t + \frac{\psi_n}{\sqrt{\omega_n}} \sin \sqrt{\omega_n} t \right) ; x \in D , t \in L$$

حيث :

$$\varphi_n = \int_D T(x) w^{(n)}(x) dx$$

$$\psi_n = \int_D \psi T(x) w^{(n)}(x) dx$$

وننشر علاقة الحل  $u(x, t)$  للمسألة  $(I)_{F,0,0,0,0,0}$  في متسلسلة متعلقة بالجملة  $(w^{(n)}(x))_{n=1}^{\infty}$  :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) w^{(n)}(x)$$

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) w^{(n)}(x)$$

لدينا :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^6 \chi^{(n)}(x) \int_0^t \left( \int_0^{\tau} F_n(\tau) d\tau \right) dt +$$

$$+ \sum_{n=7}^{\infty} w^{(n)}(x) \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \int_0^t F_n(\tau) \sin \sqrt{\omega_n} (t - \tau) d\tau ; x \in D$$

وهكذا لحل المسألة  $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$  نحصل على التمثيل الآتي :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^6 \chi^{(n)}(x) (\varphi_n + t\psi_n) +$$

$$+ \sum_{n=7}^{\infty} w^{(n)}(x) \left( \varphi_n \cos \sqrt{\omega_n} t + \frac{\psi_n}{\sqrt{\omega_n}} \sin \sqrt{\omega_n} t \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^6 \chi^{(n)}(x) \int_0^t \left( \int_0^{\tau} F_n(\tau) d\tau \right) dt +$$

$$+ \sum_{n=7}^{\infty} w^{(n)}(x) \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \int_0^t F_n(\tau) \sin \sqrt{\omega_n} (t - \tau) d\tau$$
( 23 )

بتطبيق علاقة غرين (7) على المتجهات  $\varphi(x)$  و  $w^{(n)}(x)$ . آخذين بعين الاعتبار الشروط الحدية لهذه المتجهات فيكون لدينا :

$$\int_D (A\varphi) T w^{(n)} dx = -\omega_n \int_D \varphi T w^{(n)} dx$$

أي أن :

$$(A\varphi)_n = -\omega_n \varphi_n ; n = 7, 8, \dots$$
( 24 )

الآن بتطبيق (7) على المتجهات  $A\varphi(x)$  و  $w^{(n)}(x)$  ، نحصل على :

$$(A^2\varphi)_n = -\omega_n(A\varphi)_n ; n = 7, 8, \dots$$

نلاحظ من (24) أنَّ :

$$\varphi_n = \frac{(A^2\varphi)_n}{\omega_n^2} \quad (25)$$

بشكل مشابه نطبق العلاقة (7) على التوالي على المتجهات  $\psi(x)$  و  $w^{(n)}(x)$  ،

$$F(x, t) \text{ و } w^{(n)}(x)$$

فيكون لدينا :

$$\psi_n = -\frac{(A\psi)_n}{\omega_n} \quad (26)$$

$$F_n(t) = -\frac{(AF)_n}{\omega_n}$$

استناداً إلى (25) و (26) فالمتسلسلة (23) تأخذ الشكل الآتي :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^6 \chi^{(n)}(x)(\varphi_n + t\psi_n) + \sum_{n=1}^6 \chi^{(n)}(x) \int_0^t \left( \int_0^t F_n(\tau) d\tau \right) dt +$$

$$+ \sum_{n=7}^{\infty} \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^2} (A^2\varphi)_n \cos \sqrt{\omega_n} t - \sum_{n=7}^{\infty} \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^{\frac{3}{2}}} (A\psi)_n \sin \sqrt{\omega_n} t - (27)$$

$$- \sum_{n=7}^{\infty} \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^{\frac{3}{2}}} \int_0^t (AF)_n(\tau) \sin \sqrt{\omega_n} (t - \tau) d\tau$$

الآن وحتى نثبت طريقة فورييه ، علينا أن نثبت أنَّ العلاقة (27) توفر نظامية حل

المسألة  $(I)_{F, \varphi, \psi, 0, 0, 0}$  . لأجل ذلك من الضروري تبيان أنَّ المتسلسلة (27) بالإضافة

إلى المتسلسلة التي حصلنا عليها بالتفاضلات الأحادية حداً حداً لهذه المتسلسلة متقاربة

بانظام في اسطوانة مغلقة ، بينما المتسلسلة التي حصلنا عليها بالتفاضلات المضاعفة

حداً حداً لهذه المتسلسلة متقاربة بانتظام داخل الاسطوانة  $\Omega = D \times L$  .

لندرس أولاً المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^2} (A^2 \varphi)_n \cos \sqrt{\omega_n} t \quad (28)$$

بتقييم (28) باستخدام متراجحة كوشي-بونياكوفسكي ، فإننا نحصل على :

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^2} (A^2 \varphi)_n \cos \sqrt{\omega_n} t \right| \leq \left[ \sum_{n=m}^{m+p} \frac{|w^{(n)}(x)|^2}{\omega_n^4} \cdot \sum_{n=m}^{m+p} (A^2 \varphi)_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} \quad (29)$$

بما أن  $A^2 \varphi \in L_2(D)$  واستناداً لمتراجحة بيسل فإن :

$$\sum_{n=7}^{\infty} (A^2 \varphi)_n^2 \leq \int_D |A^2 \varphi|^2 dx$$

لذلك من أجل أي  $\varepsilon > 0$  فإنه يوجد العدد  $N(\varepsilon)$  ؛ بحيث إنّه من أجل  $m \geq N(\varepsilon)$  وأي عدد طبيعي  $p$  فإنه يكون :

$$\sum_{n=m}^{m+p} (A^2 \varphi)_n^2 < \varepsilon \quad (30)$$

حسب (30) ينتج بالضرورة من (29) أنه لإثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة (28) فإنه يكفي أن نبيّن في  $\bar{\Omega}$  أن مجموع المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{|w^{(n)}(x)|^2}{\omega_n^4} \quad (31)$$

موجود ومحدود بانتظام في  $\bar{D}$  .  
من (19) لدينا :

$$\int_D G(x, y, -\chi_0^2) w^{(n)}(y) dy = \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n + \chi_0^2}$$

$$(G(x, y, -\chi_0^2))_n = \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n + \chi_0^2} \quad : \text{أي أن}$$

لذلك فمتراجحة ببسل تعطينا :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{|w^{(n)}(x)|^2}{(\omega_n + \chi_0^2)^2} \leq \int_D |G(x, y, -\chi_0^2)|^2 dy \quad (32)$$

حسب (17) فإنه ينتج من (32) أن مجموع المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{|w^{(n)}(x)|^2}{(\omega_n + \chi_0^2)^2} \quad (33)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\chi_0^2}{\omega_n}\right) = 1 ; n \geq 7 \quad \text{موجود ومحدود في } \bar{D} \text{ . عندئذٍ :}$$

لدينا المتراجحة لآتية :

$$\begin{aligned} \frac{|w^{(n)}(x)|^2}{\omega_n^2} &= \frac{|w^{(n)}(x)|^2}{(\omega_n + \chi_0^2)^2} \cdot \frac{(\omega_n + \chi_0^2)^2}{\omega_n^2} = \frac{|w^{(n)}(x)|^2}{(\omega_n + \chi_0^2)^2} \left(1 + \frac{\chi_0^2}{\omega_n}\right)^2 \leq \\ &\leq M \frac{|w^{(n)}(x)|^2}{(\omega_n + \chi_0^2)^2} ; n \geq 7 \end{aligned} \quad (34)$$

حيث  $M$  ثابت .

إن مجموع المتسلسلة (33) والمتراجحة (34) كلاهما محدود بانتظام ؛ حيث إن مجموع المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{|w^{(n)}(x)|^2}{\omega_n^2} \quad (35)$$

موجود ومحدود بانتظام في  $\bar{D}$  .

الاستنتاج يكون نفسه صحيحاً من أجل المتسلسلة (31) .

الآن سنرى أن المتسلسلة التي حصلنا عليها من (28) وذلك بمفاضلتها حداً حداً

مرة واحدة ، هي متسلسلة متقاربة بانتظام في  $\bar{\Omega}$  .

بمفاضلة المتسلسلة (28) المتعلقة بـ  $t$  حداً حداً ، فإننا نحصل على :

$$-\sum_{n=7}^{\infty} \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^{\frac{3}{2}}} (A^2 \varphi)_n \sin \sqrt{\omega_n} t \quad (36)$$

باقي المتسلسلة (36) يفدّر كما يلي :

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^{\frac{3}{2}}} (A^2 \varphi)_n \sin \sqrt{\omega_n} t \right| \leq \left[ \sum_{n=m}^{m+p} \frac{|w^{(n)}(x)|^2}{\omega_n^3} \cdot \sum_{n=m}^{m+p} (A^2 \varphi)_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

إنّ وجود مجموع المتسلسلة (35) وتقاربه المنتظم في  $\bar{D}$  ينتج ضمناً من أنّ مجموع

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{|w^{(n)}(x)|}{\omega_n^3} \quad \text{المتسلسلة :}$$

موجود ومتقارب بانتظام في  $\bar{D}$  .

هنا وكما سبق نستنتج أنّ المتسلسلة (36) متقاربة بانتظام في  $\bar{\Omega}$  .

الآن وبمفاضلة المتسلسلة (28) حداً حداً بالنسبة لـ  $x_i ; i = 1, 2, 3$  يكون لدينا :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{\partial w^{(n)}(x)}{\omega_n^2} (A^2 \varphi)_n \cos \sqrt{\omega_n} t \quad (37)$$

باقي المتسلسلة (37) يفدّر كما يلي :

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} \frac{\partial w^{(n)}(x)}{\omega_n^2} (A^2 \varphi)_n \cos \sqrt{\omega_n} t \right| \leq \left[ \sum_{n=m}^{m+p} \frac{|\partial w^{(n)}(x)|^2}{\omega_n^4} \cdot \sum_{n=m}^{m+p} (A^2 \varphi)_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

استناداً إلى (30) فإنّه لإثبات أنّ المتسلسلة (37) متقاربة بانتظام في  $\bar{\Omega}$  يكفي إثبات أنّ

مجموع المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{|\partial w^{(n)}(x)|^2}{\omega_n^4} \quad (38)$$

موجود ومتقارب بانتظام في  $\bar{D}$  .

بفرض  $G^{(2)}(x, y, -\chi_0^2)$  نواة مكررة من  $G(x, y, -\chi_0^2)$  . لدينا :

$$G^{(2)}(x, y, -\chi_0^2) = \int_D G(x, z, -\chi_0^2) G(z, y, -\chi_0^2) dz ; x \neq y \quad (39)$$

نوجد تفاضل (39) المتعلقة بـ  $x_i$  . بمفاضلة الطرف الأيمن لـ (39) نستطيع إنجاز ما تحت إشارة التكامل . لذلك سنرى الآن أن التكامل الذي حصلنا عليه من التفاضل يكون متقارب بانتظام من أجل أي  $x \neq y$  .

$$\frac{\partial G^{(2)}(x, y, -\chi_0^2)}{\partial x_i} = \int_D \frac{\partial G(x, z, -\chi_0^2)}{\partial x_i} G(z, y, -\chi_0^2) dz ; x \neq y$$

استناداً إلى (17) والمبرهنة الخاصة بتركيب نواتين [5] ، فإننا نحصل على :

$$\forall (x, y) \in D \times D : \left| \frac{\partial G^{(2)}(x, y, -\chi_0^2)}{\partial x_i} \right| \leq c_1 |\ln|x - y|| + c_2$$

$$\frac{\partial G^{(2)}(x, y, -\chi_0^2)}{\partial x_i} \in L_2(D) ; i = 1, 2, 3 \quad \text{وهكذا :}$$

بطريقة مماثلة يتضح أن :

$$w^{(n)}(x) = \omega_n^2 \int_D G^{(2)}(x, y, -\chi_0^2) w^{(n)}(y) dy \quad (40)$$

لذلك فمراجعة ببسب تعطي :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{\left| \frac{\partial w^{(n)}(x)}{\partial x_i} \right|^2}{\omega_n^4} \leq \int_D \left| \frac{\partial G^{(2)}(x, y, -\chi_0^2)}{\partial x_i} \right|^2 dy$$

هنا نستنتج أن مجموع المتسلسلة (38) موجود ومتقارب بانتظام في  $\bar{D}$  .

سنثبت الآن أن المتسلسلة التي حصلنا عليها بالمفاضلة حداً حداً مرتين لـ (28)

تتقارب بانتظام في الاسطوانة  $\bar{\Omega}_k = \bar{D}_k \times \bar{L}$  ؛ حيث  $\bar{\Omega}_k = \bar{D}_k \times \bar{L}$  ؛ حيث  $\bar{D}_k \subset D_k ; k = 0, r$  جزئية داخلية مغلقة اختيارية .

بالمفاضلة حداً حداً مرتين للمتسلسلة (28) المتعلقة بـ  $t$  نقودنا إلى :

$$-\sum_{n=7}^{\infty} \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n} (A^2 \varphi)_n \cos \sqrt{\omega_n} t \quad (41)$$

بتقدير باقي المتسلسلة (41) كما سبق أعلاه استناداً إلى (30) و المحدودية بانتظام لمجموع المتسلسلة (35) نستنتج أن المتسلسلة (41) متقاربة بانتظام في  $\bar{\Omega}$  .  
تعطينا المفاضلة مرتين حداً حداً للمتسلسلة (28) المتعلقة بـ  $x$  :

$$\frac{\partial^2 w^{(n)}(x)}{\partial x_i \partial x_j} (A^2 \varphi)_n \cos \sqrt{\omega_n} t ; i, j = 1, 2, 3 \quad (42)$$

عند تقدير باقي المتسلسلة (42) كما سبق أعلاه استناداً إلى (30) وفي إثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة (42) في  $\bar{\Omega}_k = \bar{D} \times \bar{L}$  ؛ حيث  $\bar{D} = \bigcup_{k=0}^r \bar{D}_k$  يكفينا أن نعلم أن مجموع للمتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{\left| \frac{\partial^2 w^{(n)}(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2}{\omega_n^4} \quad (43)$$

موجود ومحدود بانتظام في  $\bar{D}$  .

استناداً إلى [5] يمكننا أن نحصل على التقدير الآتي :

$$\forall (x, y) \in \bar{D} \times D : \left| \frac{\partial^2 G^{(2)}(x, y, -\chi_0^2)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq \frac{c}{|x - y|} ; i, j = 1, 2, 3$$

استناداً إلى (40) فإن التقدير السابق يسمح لنا بكتابة متراجحة ببسمل :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{\left| \frac{\partial^2 w^{(n)}(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2}{\omega_n^4} \leq \int_D \left| \frac{\partial^2 G^{(2)}(x, y, -\chi_0^2)}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dy ; x \in \bar{D}$$

والتي تدل ضمناً على أن المتسلسلة (43) موجودة ومحدودة بانتظام في  $\bar{D}$  .

لنكمل إثبات أن المتسلسلة الثانية من (27) متقاربة بانتظام في اسطوانة مغلقة .

لذلك نقوم بإعادة كتابتها بالشكل :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{w^{(n)}(x)}{\omega_n^2} (A\psi)_n \sqrt{\omega_n} \sin \sqrt{\omega_n} t \quad (44)$$

بمقارنة المتسلسلات (44) و (28) نستطيع أن نلاحظ أن لها المنشأ نفسه . الفرق الوحيد

هو أن جيب التمام تمّ تبديله بالجيب و  $(A^2\varphi)_n$  بـ  $(A\psi)_n \sqrt{\omega_n}$  .

بالعودة للمتسلسلة (28) يتبين لنا حقيقة أن المتسلسلة :  $\sum_{n=7}^{\infty} (A^2\varphi)_n^2$  متقاربة .

بسبب الشروط المفروضة على  $\psi$  فإن تقارب المتسلسلة :  $\sum_{n=7}^{\infty} (A\psi)_n^2 \omega_n$

ينتج مباشرة من المبرهنة (1) المثبتة سابقاً . لذلك فالاستنتاج السابق يمكن استخدامه أيضاً بالنسبة للمتسلسلة (44) .

أخيراً سنثبت أيضاً أن المتسلسلة الثالثة من (27) ، التي نكتب بالشكل الآتي :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{w^{(n)}(x)^t}{\omega_n^2} \int_0^t (AF)_n(\tau) \sqrt{\omega_n} \sin \sqrt{\omega_n} (t-\tau) d\tau$$

متقاربة بانتظام في اسطوانة مغلقة .

بإجراء المناقشة السابقة نفسها ، فإننا سنرى التقارب من المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \int_0^c ((AF)_n(\tau))^2 \omega_n d\tau$$

التأكيد الأخير ينتج مباشرة من المبرهنة (1) ومن مبرهنة انتقال النهاية تحت إشارة تكامل ليبيغ .

إن المتبقي لنا إثبات أن متسلسلة فورييه للدالة المتجهية  $F(x,t)$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) w^n(x) \quad (45)$$

متقاربة بانتظام في الاسطوانة المغلقة  $\bar{\Omega}$  .

لندرس المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty} w^{(n)}(x) \int_0^t \frac{dF_n(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (46)$$

ولنقدر باقي المتسلسلة (46) باستخدام متراجحة كوشي-بونياكوفسكي :

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} w^{(n)}(x) \int_0^t \frac{dF_n(\tau)}{d\tau} d\tau \right| \leq \left[ \sum_{n=m}^{m+p} \frac{|w^{(n)}(x)|^2}{\omega_n^2} \sum_{n=m}^{m+p} \int_0^e \left| \frac{dF_n(\tau)}{d\tau} \right|^2 \omega_n^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}}$$

باستخدام المبرهنة (2) للدالة المتجهية  $\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}$  ، ومن مبرهنة انتقال النهاية تحت

إشارة التكامل نستطيع القول إن المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty} \int_0^e \left| \frac{dF_n(\tau)}{d\tau} \right|^2 \omega_n^2 d\tau \quad \text{مقاربة .}$$

هنا وبالاتقال إلى حساب المحدودية بانتظام لمجموع المتسلسلة (35) نجد أن

المتسلسلة (46) مقاربة بانتظام في  $\bar{\Omega}$  . من (46) لدينا :

$$\sum_{n=7}^{\infty} w^{(n)}(x) \int_0^t \frac{dF_n(\tau)}{d\tau} d\tau = \sum_{n=7}^{\infty} F_n(t) w^{(n)}(x) - \sum_{n=7}^{\infty} F_n(0) w^{(n)}(x)$$

واضح الآن أنه لإثبات التقارب المنتظم للمتسلسلة (45) في  $\bar{\Omega}$  فإنه يكفي أن نرى أن المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty} F_n(0) w^{(n)}(x) \quad \text{مقاربة بانتظام في } \bar{D} \quad (47)$$

لنقدر باقي المتسلسلة (47) كما يلي :

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} F_n(0) w^{(n)}(x) \right| \leq \left[ \sum_{n=m}^{m+p} \frac{|w^{(n)}(x)|^2}{\omega_n^2} \sum_{n=m}^{m+p} F_n^2(0) \omega_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

بتطبيق المبرهنة (2) لـ  $F(x,0)$  ، نحصل مباشرة على تقارب المتسلسلة :

$$\sum_{n=7}^{\infty} F_n^2(0) \omega_n^2$$

الآن وبالاتقال إلى حساب المحدودية بانتظام لمجموع المتسلسلة (35) نحصل على التقارب المنتظم للمتسلسلة (47) في  $\bar{D}$  ، التي تكمل إثبات طريقة فورييه للمسألة المفروضة

المراجع العلمية

- 1 . Martin H . Sadd .,2009 – Elasticity ( Theory , Applications) ,  
Kingston , Rhode Island , 535 p
- 2 . Agoshkov.V.I , Dubovski . P.B , Shutyaev.V.P,2006 – Methods  
for Solving Mathematical Physics Problems , Cambridge Interna-  
tional Science Publishing , 335 p .
- 3 . Kubradze . V , Gegelia . T , Basheleishvili . M ,and Burchuladze  
.V , 1979 – Three Dimensional Problems of the Mathematical  
theory of Elasticity and thermoelasticity . (Translated from  
Russian ) North-Holland series in applied mathematics and  
mechanics , v.25 .
- 4 . Natroshvili .D.G , Jagmaidze .A .Ya , 2003 – Dynamic problems  
of the classical theory of elasticity for piecewise - homogeneous  
Bodies . Tbilisi University Press , Tbilisi .
- 5 . Vitaly.Volpert ,2011 – Elliptic Partial Differential Equations V1  
Birkhauser . Springer Basel AG , 658 p .

## دراسة مسألة التحريك الحدية الأولى

### لنظرية المرونة الرياضية

د. أحمد الجاعور – أستاذ مساعد في كلية العلوم – جامعة البعث

#### ملخص البحث

تمّ في هذا البحث ، استعمال طريقة جديدة تعرف بطريقة فورييه ، إثبات وجود الحل المنتظم للمسألة  $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$  من مسألة التحريك الحدية الأولى لنظرية المرونة الرياضية  $(I)_{F,\varphi,\psi,\Phi,\Psi,f}$  المصاغة بالشكل التالي :

أوجد المتجه المنتظم  $u(x,t); k = \overline{0,r}$  الذي يحقق جملة المعادلات :

$$\forall (x,t) \in \Omega_k : A(\partial_x)^k u(x,t) - \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -F(x,t); k = \overline{0,r}$$

مع الشروط التالية :

$$\forall x \in \overline{D}_k : \lim_{t \rightarrow 0} u(x,t) = \varphi(x)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \psi(x,t); k = \overline{0,r}$$

$$\forall (z,t) \in S_k \times \overline{L} : \left( T(\partial_z, n(z))u(z,t) \right)^+ = f(z,t); k = 0, r+1, \dots, m$$

حيث  $F, \varphi, \psi, \Phi, \Psi, f$  دوال متجهية .

كلمات مفتاحية :

Mathematical Elasticity , Boundary problem

## Studying a first Boundary Dynamic problem of the mathematical Elasticity theory

Dr . Ahmad Aljaour

### SUMMARY

In this paper we proved the existence of the regular solution for the problem  $(I)_{F,\varphi,\psi,0,0,0}$  of the first boundary dynamic problem of the mathematical elasticity theory  $(I)_{F,\varphi,\psi,\Phi,\Psi,f}$  given by :

Find the regular vectors :  $u^k(x,t)$  ;  $k = \overline{0,r}$  satisfying the system of equations :

$$\forall (x,t) \in \Omega_k : A(\partial_x^k)u^k(x,t) - \rho \frac{\partial^2 u^k(x,t)}{\partial t^2} = -F^k(x,t) ; k = \overline{0,r}$$

with The conditions :

$$\forall x \in \overline{D}_k : \lim_{t \rightarrow 0} u^k(x,t) = \varphi^k(x)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial u^k(x,t)}{\partial t} = \psi^k(x,t) ; k = \overline{0,r}$$

$$\forall (z,t) \in S_k \times \overline{L} : \left( T(\partial_z^0, n(z))u^0(z,t) \right)^+ = f^k(z,t) ; k = 0, r+1, \dots, m$$

here.  $F^k, \varphi^k, \psi^k, \Phi^k, \Psi^k, f^k$  are vector functions .

In improving that the Fourier method was used .

Key words

Mathematical Elasticity , Boundary problem

# معادلات الحالتين المستويتين لانفعالات جسم استقطابي ترموديناميكي مرن ذي توجهات مقيدة بالإزاحات

خضر منهل الصالح<sup>1</sup>

أ.د.منتجب الحسن<sup>2</sup>

## ملخص البحث:

يتعلق البحث بالجسم الاستقطابي المرن والمتجانس والمتمائل المناحي، وذي التوجهات المقيدة بالإزاحات، والخاضع لحرارة، والمناقش رياضياً من خلال الباحثين كويتير [1] ومنديلين [2,3]، والذي نرّمز له اختصاراً بالرمز K-M. في البحث، باستخدام طريقة مشابهة للطريقة المستخدمة في [6,7]، تم استنتاج معادلات النموذج الرياضي التقليدي ونموذج لامي الرياضي الحاكمين للحالتين الترموديناميكية والديناميكية للجسم الاستقطابي المرن، ضمن الحالتين: المستوية الأولى والمستوية الثانية (المستوية العكسية) للانفعالات المرنة، على الترتيب، حيث يشغل الجسم في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط  $\Omega$  في  $R^2$ .

<sup>1</sup> طالب ماجستير في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

<sup>2</sup> أستاذ في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

الكلمات المفتاحية: الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة - الجسم المرن الاستقطابي المرن ذي التوجهات المقيدة بالإزاحات - الحلول الأساسية.

# The Equations of the two Plane States of Elastic Strains for the Thermodynamical Polar Body of Constructed Rotations

Kheder Manhal AL-Saleh <sup>†</sup>

Prof.Dr.Mountajab Al-Hasan <sup>‡</sup>

## Summary:

The paper relates to the homogeneous isotropic thermodynamical polar body of constructed rotations, subjected to temperature field, which mathematically discussed by Koiter [1] and Mindlin [2,3], and shortly called K-M polar body.

In paper, using method similar to that method in [6,7], we derive the basic equations, relations and laws governing the thermodynamical first plane state and the dynamical anti-plane state of the elastic strains for the thermodynamical polar body K-M ,which occupies simply connected region  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^2$  at the initial moment .

<sup>†</sup> Mgr Student in Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.

<sup>‡</sup> Professor At Department of Mathematics – Faculty of Science – Al–Baath University.

**Key words:** The First Plane State of Elastic Strains – The Polar Elastic Body of Constructed Rotations – The Fundamental Solutions.

## 1. مقدمة :

تعود دراسة النموذج الرياضي للأوساط الاستقطابية (لدنة، مرنة، مائعة) إلى النصف الثاني من القرن العشرين بدءاً من راسكو [4]، ومروراً بكويتز [1] ومنديلين [2,3]، وسوكوفسكي [5]، حيث قام راسكو بمناقشة النموذج الرياضي التقليدي لوسط مادي استقطابي يملك ست درجات حرية هي ثلاث إزاحات وثلاث توجهات مستقلة عن هذه الإزاحات، في الوقت الذي ركّز فيه كويتز ومنديلين على أجسام مرنة استقطابية حيث التوجهات مرتبطة بالإزاحات ضمن مايسمى بـ " نظرية العزوم " أما في بحث سوكوفسكي فقد قام الباحث بمناقشة تفصيلية لنظرية العزوم ونظرية العزوم المعدلة بما يتعلّق بالجسم المرن الاستقطابي، ذي التوجهات المرتبطة بالإزاحات.

## 2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى استنتاج معادلات النموذج الرياضي التقليدي ونموذج لامي الرياضي الحاكمين للحالتين الترموديناميكية والديناميكية للجسم الاستقطابي المرن، ضمن الحالتين: المستوية الأولى والمستوية الثانية (المستوية العكسية) للانفعالات المرنة، على الترتيب، حيث الجسم يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط  $\Omega$  في  $R^2$ .

## 3. طرق وأدوات البحث:

في البحث سنستخدم طريقة مشابهة للطريقة المستخدمة في [6] من أجل استنتاج النموذج الرياضي التقليدي ونموذج لامي الرياضي الحاكمين للحالتين الترموديناميكية والديناميكية للجسم الاستقطابي، ضمن الحالتين المستوية الأولى والمستوية الثانية (المستوية العكسية) للانفعالات المرنة، حيث الجسم يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط  $\Omega$  في  $R^2$ .

وهنا ننوه إلى أن مسألتنا الحالة المستوية الأولى والثانية للجسم الاستقطابي المرن والخاضع لحرارة، هما مسألتان نوعيتان، حلولهما لا تتجان عن الحلول في الحالة الفراغية للانفعالات المرنة لهذا الجسم، الأمر الذي يقودنا إلى استنتاج المعادلات الحاكمة لهذا الجسم المرن الاستقطابي، ضمن هاتين الحالتين المستويتين للانفعالات المرنة.

#### 4. النتائج والمناقشة:

فيما يلي سنستنتج معادلات الوصف التقليدي ومعادلات وصف لامي للحالة الترموديناميكية للجسم الاستقطابي المرن الخاضع لحرارة، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، كما سنستنتج معادلات الوصف التقليدي ومعادلات وصف لامي للحالة الديناميكية للجسم الاستقطابي المرن، المذكور، ضمن الحالة المستوية الثانية (الحالة المستوية العكسية) للانفعالات المرنة، حيث الجسم يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط  $\Omega$  في  $R^2$  [6].

توطئة: سنستخدم رموز أينشتاين (اتفاقية الجمع على الأدلة اللاتينية المكررة) على  $R^3$  حيث الأدلة:  $i, j, k$  تأخذ القيم 1, 2, 3، كما سنستخدم رموز أينشتاين (اتفاقية الجمع على الأدلة الإغريقية المكررة) على  $R^2$  حيث الأدلة الإغريقية:  $\alpha, \beta, \gamma$  تأخذ القيم 1, 2. تتعين الحالة الترموديناميكية المرنة للجسم المرن الاستقطابي ذي التوجّهات المقيدة بالإزاحات ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، بواسطة مجموعة المقاطع

التسورية:  $(u_i, \varphi_i, \varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}, S_{ij}, m_{ij}, \theta)$ ، حيث:

$u_i$ : تمثل المركبات الديكارتيّة لمقطع الإزاحات،

$\varphi_i$ : تمثل المركبات الديكارتيّة لمقطع التوجّهات والتي ترتبط بالإزاحات وفق العلاقة:

$$u_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u_{k,j}$$

حيث  $\varepsilon_{ijk}$ : هي المركبات الديكارتيّة لمقطع ليفي- تشيفيتا التسوري النسبي كما أنّ

الفاصلة الدليليّة تدلّ على المشتق الجزئي بالنسبة للموضع:  $\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ .

$\varepsilon_{ij}$ : تمثل المركبات الديكارتيّة لمقطع الانفعال الجهري المتناظر.

$\kappa_{ij}$ : تمثل المركبات الديكارتيّة لمقطع الانفعال الجهري غير المتناظر.

$S_{ij}$ : تمثل المركبات الديكارتيّة لمقطع الاجهادات الجهرية المتناظر.

$m_{ij}$ : هي المركبات الديكارتيّة للجزء المائل لمقطع الاجهادات الجهريّة الغير متناظر.

أخيراً  $\theta = T - T_0$ : هو المقطع الحراري الذي يصف تغيّر درجة الحرارة المطلقة T في الجسم الاستقطابي عن درجة الحرارة الطبيعيّة  $T_0$ .

<sup>3</sup> نسمّي درجة الحرارة التي تتوافق مع انفعالات معدومة للجسم ( $\varepsilon = 0, \kappa = 0$ ) بدرجة الحرارة الطبيعيّة.

4-1. الوصف التقليدي للحالة الترموديناميكية للجسم الاستقطابي المرن الخاضع لحرارة ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة حيث الجسم يشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط  $\Omega$  في  $R^2$ :

ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة تكون جميع المركبات الديكارتيّة المذكورة أعلاه مستقلة عن الإحداثي  $x_3$  أي تتبع لـ  $x_1, x_2$  وكذلك للزمن وعندئذٍ تُعطى المقاطع التيسورية المذكورة أعلاه في  $[0, \infty[ \times \Omega$  وفي المعلم الديكارتي العطالي المتجانس  $(O, e_i)$  تُعطى بالعلاقات:

$$\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, 0) \quad (4.1)$$

$$\boldsymbol{\varphi} \equiv (0, 0, \varphi_3) \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\boldsymbol{\kappa} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{S} \equiv \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{m} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_{13} \\ 0 & 0 & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$S_{33} = \nu S_{\gamma\gamma} - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \nu_T \theta \quad (4.7)$$

$$m_{\alpha 3} = \eta m_{3\alpha}; \alpha = 1, 2 \quad (4.8)$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} u_{\beta, \alpha} = \frac{1}{2} (u_{2,1} - u_{1,2}) \quad (4.9)$$

حيث  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  مقطع ليفي- تشيفيتا التيسوري النسبي على  $R^2$ ، و  $\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$  نسبة

بواسون، كما أن:  $\nu_T = (3\lambda + 2\mu)a_t$ ، حيث  $a_t$  هو معامل التمدد الخطي الحراري

للجسم، أخيراً  $\mu, \lambda, \eta$  تمثل أول ثلاثة ثوابت مادية للجسم الاستقطابي المرن المدروس،

أما مقطعا القوة الحجمية والعزم الحجمي (المعطيان)، فيأخذ الشكل التالي في  $[\Omega \times ]0, \infty$ :

$$\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, 0) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{Y} \equiv (0, 0, Y_3) \quad (4.11)$$

معادلات الحركة المحققة في  $[\Omega \times ]0, \infty$ :

$$S_{\beta\alpha, \beta} + \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} (m_{\gamma 3, \gamma\beta} + Y_{3, \beta}) + X_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha ; \alpha = 1, 2 \quad (4.12)$$

حيث  $\rho$  الكثافة الحجمية للجسم المدروس، والنقطة تدل على المشتق الجزئي الزمني:

$$\dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \ddot{f} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

العلاقات الهندسية المحققة في  $[\Omega \times ]0, \infty$ :

$$\epsilon_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} (u_{\alpha, \beta} + u_{\beta, \alpha}), \quad \kappa_{3\alpha} = \varphi_{3, \alpha} \quad (4.13)$$

العلاقات التأسيسية المحققة في  $[\Omega \times ]0, \infty$ :

$$s_{\beta\alpha} = 2\mu\epsilon_{\beta\alpha} + (\lambda\epsilon_{\gamma\gamma} - \nu_T\theta)\delta_{\beta\alpha}, \quad (4.14)$$

$$m_{\alpha 3} = 4\mu l^{*2} \eta \kappa_{3\alpha} ; \alpha, \beta = 1, 2$$

معادلات التوصيل الحراري المحققة في  $[\Omega \times ]0, \infty$ :

$$D\theta - \eta_0 \gamma_{\alpha\alpha}^\square = -\frac{Q}{\kappa} \quad (4.15)$$

$$Q = \frac{\kappa W}{\lambda_0}, \quad \kappa = \frac{\lambda_0}{c_\epsilon}, \quad \eta_0 = \frac{\nu_T T_0}{\lambda_0}, \quad D = \Delta_1 - \frac{1}{\kappa} \partial_t \quad (4.16)$$

علماً أن  $Q$  يمثل المصادر الحرارية في الجسم المعتبر و  $W$  كمية الحرارة المشكّلة في وحدة الحجم ووحدة الزمن، و  $\lambda_0$  معامل التوصيل الحراري، و  $c_\epsilon$  تمثل الحرارة النوعية من أجل تشوه ثابت، كما أن:  $\Delta_1$  مؤثر لابلاس السلمي ثنائي البعد؛  $\Delta_1 f = f_{, \alpha\alpha}$ ، وكذلك:

$$\partial_t f \equiv \dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial t}$$

تدعى الثوابت:  $\mu, \lambda, \eta, l^*$  الداخلة في العلاقات التأسيسية (4.14) بثوابت مرونة الجسم المعتبر، وهي تحقق متراجحات الطاقة:

$$\mu > 0, \quad \lambda > 0, \quad l^* \geq 0, \quad |\eta| < 0 \quad (4.17)$$

إلى ذلك نضيف الشروط الحدية والابتدائية التالية:

الشروط الحدية على  $[\partial\Omega \times [0, \infty[$ :

$$u_\alpha = f_\alpha; \alpha = 1, 2, \quad \varphi_\alpha^0 = g_\alpha, \quad \theta = \vartheta \quad (4.18)$$

و  $\varphi_\alpha^0$  مركبات المتجه  $\varphi \equiv (0, 0, \varphi_3)$  في المستوي المماس للجسم في النقطة

$x \equiv (x_1, x_2, 0)$  واللحظة  $t > 0$ ، حيث التوابع:  $f_\alpha, g_\alpha, \theta$  معلومة على  $[\partial\Omega \times [0, \infty[$ ،

الشروط الابتدائية في  $\Omega \times \{0\}$ :

$$u_\alpha = k_\alpha, \quad u_\alpha^1 = \psi_\alpha, \quad \theta = l \quad (4.19)$$

حيث:  $l, \psi_\alpha, k_\alpha$  توابع معلومة في  $\Omega$ .

تعريف: نسمي مجموعة المقاطع التسنورية  $(\mathbf{u}, \varphi, \varepsilon, \kappa, \mathbf{S}, \mathbf{m}, \theta)$  المعطاة بـ (4.1)-(4.9)

والمحققة للمعادلات والشروط السابقة، نسميها بالسلوك الترموديناميكي التقليدي للجسم

الاستقطابي المرن ذي الدورانات المقيدة بالإزاحات ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات

المرنة.

2-4. وصف لامي للجسم الترموديناميكي الاستقطابي المرن ضمن الحالة المستوية

الأولى للانفعالات المرنة:

من أجل الحصول على هذا الوصف نتبع مايلي:

الخطوة الأولى نعوض العلاقات الهندسية (4.13) في العلاقات التأسيسية (4.14)

فنحصل على العلاقتين التاليتين المحققتين في  $[\Omega \times ]0, \infty[$ :

$$S_{\beta\alpha} = \mu(u_{\beta,\alpha} + u_{\alpha,\beta}) + (\lambda u_{\gamma,\gamma} - v_T \theta) \delta_{\beta\alpha}; \alpha, \beta = 1, 2, \quad (4.20)$$

$$m_{3\alpha} = 4\mu l^{*2} \varphi_{3,\alpha}$$

في الخطوة الثانية نعوض (4.20) في (4.12) (معادلات الحركة) كما نعوض العلاقة

$$\gamma_{\alpha\alpha} = u_{\alpha,\alpha} \quad (4.21)$$

في معادلة التوصيل الحراري فنحصل مباشرة على معادلات لامي التالية والمحققة أيضاً

في  $[\Omega \times ]0, \infty[$ :

$$\begin{aligned} & \mu \Delta_1 u_\alpha - \rho \ddot{u}_\alpha + (\mu + \lambda) u_{\beta,\beta\alpha} - v_T \theta_{,\alpha} + \\ & - \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} \left( 2\mu l^{*2} \eta \Delta_1 \in_{\gamma\varepsilon} u_{\gamma,\varepsilon\beta} + Y_{3,\beta} \right) + X_\alpha = 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$D_\theta - \eta_0 u_{\alpha\alpha}^\square = -\frac{Q}{\kappa} \quad (4.23)$$

وبما أن:

$$\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\epsilon} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\gamma} & \delta_{\alpha\epsilon} \\ \delta_{\beta\gamma} & \delta_{\beta\epsilon} \end{vmatrix} = \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\epsilon} - \delta_{\alpha\epsilon} \delta_{\beta\gamma} \quad (4.24)$$

فينتج عن ذلك أن المعادلة (4.22) تأخذ الشكل التالي في  $[\Omega \times ]0, \infty[$ :

$$\begin{aligned} & \mu \Delta u_\alpha - \rho \ddot{u}_\alpha + (\mu + \lambda) u_{\beta, \beta\alpha} - \nu \theta_{, \alpha} + \\ & -\frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} (2\mu l^{*2} \eta \Delta_1 \epsilon_{\gamma\epsilon} u_{\epsilon, \gamma\beta} + Y_{3, \beta}) + X_\alpha = 0, \end{aligned}$$

وباستخدام خاصة تصفية دلتا كرونكر تأخذ المعادلة السابقة الشكل التالي في  $[\Omega \times ]0, \infty[$ :

$$\begin{aligned} & (\mu \Delta_1 - \mu l^{*2} \eta \Delta_1^2 - \rho \partial_t^2) u_\alpha + [(\mu + \lambda) + \mu l^{*2} \eta \Delta_1] u_{\beta, \beta\alpha} \\ & - \nu \theta_{, \alpha} + X_\alpha - \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} Y_{3, \beta} = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

وإذا فرضنا أن:

$$\square_0 = \Delta_1 (l^{*2} \eta \Delta_1 - 1) + \frac{1}{\hat{c}_2^2} \partial_t^2 \quad \text{و} \quad \hat{c} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \text{و} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}, \quad (4.26)$$

$$F_\alpha = X_\alpha - \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} Y_{3, \beta} \quad (4.27)$$

عندئذٍ تأخذ المعادلة (4.25) الشكل التالي في  $[\Omega \times ]0, \infty[$ :

$$\square_0 u_\alpha + \left( \frac{1}{2\nu - 1} - l^{*2} \eta \Delta_1 \right) u_{\beta, \beta\alpha} + \frac{\nu_T}{\mu} \theta_{, \alpha} - \frac{1}{\mu} F_\alpha = 0 \quad (4.28)$$

تسمى المعادلات (4.28) و (4.23) بمعادلات لامي للجسم الترموديناميكي الاستقطابي

المرن من نوع كويتر-منديلين K-M ، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة.

نضيق إلى هذه المعادلات الشروط الحدية التالية على  $[\partial\Omega \times ]0, \infty[$ :

$$u_\alpha = f_\alpha; \alpha = 1, 2, \quad \varphi_\alpha^0 = g_\alpha, \quad \theta = \vartheta \quad (4.29)$$

والشروط الابتدائية التالية المحققة في  $\{\Omega \times ]0, \infty[$ :

$$u_\alpha = k_\alpha, \quad u_\alpha^\square = \psi_\alpha, \quad \theta = l \quad (4.30)$$

تعريف: ندعو مجموعة المقاطع التنسورية  $(\mathbf{u}, \varphi, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{S}, \mathbf{m}, \theta)$  المعطاة ب (4.1)-(4.9)

والتي تحقق معادلات لامي (4.28) و (4.23) مع الشروط الحدية (4.29) والشروط

الابتدائية (4.30) والتي تحقق (4.20) والعلاقات الهندسية (4.13) أيضاً، نسميها بوصف لامي للجسم الترموديناميكي المرن من نوع كوتير ومنديلين ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة.

3-4. الوصف التقليدي للحالة الديناميكية للجسم الاستقطابي المرن ضمن الحالة المستوية الثانية (الحالة المستوية العكسية) للانفعالات المرنة حيث الجسم يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط  $\Omega$  في  $R^2$ .

توطئة: تتعيين الحالة الديناميكية المرنة للجسم المرن الاستقطابي ذي التوجّهات المقيدة بالإزاحات، ضمن الحالة المستوية العكسية للانفعالات المرنة، بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية  $(u_i, \varphi_i, \varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}, S_{ij}, m_{ij})$  كما هو مبين في التوطئة السابقة مع العلم أنه هنا لا يظهر الحقل الحراري  $\theta$ .

ضمن الحالة المستوية الثانية (المستوية العكسية) للانفعالات المرنة تكون جميع المركبات الديكارتيّة المذكورة أعلاه مستقلة عن الإحداثي  $x_3$  أيضاً وتتبع لـ  $x_1, x_2, t$ ، حيث تعطى المقاطع التنسورية المذكورة أعلاه في  $[0, \infty[ \times \Omega$  وفي المعلم الديكارتي العطالي المتجانس المعتبر على النحو الآتي:

$$\mathbf{u} \equiv (0, 0, u_3) \quad (4.31)$$

$$\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2, 0) \quad (4.32)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\boldsymbol{\kappa} \equiv \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{21} & 0 \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{S} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} \\ 0 & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{m} \equiv \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} u_{3,\beta} \quad (4.37)$$

أما مقطعا القوة الحجمية والعزم الحجمي (المعطيات)، فتأخذ الشكل التالي في  $[\Omega \times ]0, \infty$ :

$$\mathbf{X} \equiv (0, 0, X_3) \quad (4.38)$$

$$\mathbf{Y} \equiv (Y_1, Y_2, 0) \quad (4.39)$$

يتألف الوصف التقليدي للجسم الديناميكي الاستقطابي المرن ضمن الحالة المستوية العكسية لانفعالات المرنة، يتألف من المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية:

معادلات الحركة في  $[\Omega \times ]0, \infty$ :

$$S_{\beta 3, \beta} - \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} (m_{\gamma\alpha, \gamma\beta} + Y_{\alpha, \beta}) + X_3 = \rho u_3^{\square} \quad (4.40)$$

العلاقات الهندسية المحققة في  $[\Omega \times ]0, \infty$ :

$$\epsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} u_{3, \alpha}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha, \beta}, \quad \varphi_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} u_{3, \beta} \quad (4.41)$$

العلاقات التأسيسية المحققة في  $[\Omega \times ]0, \infty$ :

$$s_{\alpha 3} = 2\mu \epsilon_{\alpha 3} \quad (4.42)$$

$$m_{\alpha\beta} = 4\mu l^{*2} (\kappa_{\alpha\beta} + \eta \kappa_{\beta\alpha}) \quad (4.43)$$

الشروط الحدية على  $[\partial\Omega \times ]0, \infty$ :

$$u_3 = f_3, \quad \varphi_\alpha^0 = \omega_\alpha; \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.44)$$

و  $\varphi_\alpha^0$  مركبات المتجه  $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2, 0)$  في المستوي المماس للجسم في النقطة  $x \equiv (x_1, x_2, 0)$

واللحظة  $t > 0$ ، حيث التتابع:  $\omega_\alpha, f_3$  معلومة على  $[\partial\Omega \times ]0, \infty$ ،

الشروط الابتدائية في  $\Omega \times \{0\}$ :

$$u_3 = k_3, \quad u_3^{\square} = h_3 \quad (4.45)$$

حيث:  $h_3, k_3$  توابع معلومة في  $\Omega$ .

تعريف: نسمي مجموعة المقاطع التنسورية  $(\mathbf{u}, \varphi, \varepsilon, \kappa, \mathbf{S}, \mathbf{m}, \theta)$  المعطاة بـ (4.31)–(4.37) الممثلة بالمعادلات السابقة، نسميها بالسلوك الديناميكي التقليدي للجسم الاستقطابي المرن ذي الدورانات المقيدة بالإزاحات ضمن الحالة المستوية العكسية للانفعالات المرنة. 4-4 . وصف لامي للجسم الديناميكي الاستقطابي المرن ضمن الحالة المستوية العكسية للانفعالات:

من أجل الحصول على هذا الوصف نتبع مايلي:

في الخطوة الأولى نعوض المعادلتين الأولى والثانية من العلاقات الهندسية (4.41) في العلاقات التأسيسية (4.42) و(4.43) فنحصل على العلاقتين التاليتين المحققتين في  $:\Omega \times ]0, \infty[$

$$S_{\alpha 3} = \mu u_{3, \alpha} \quad (4.46)$$

$$m_{\alpha \beta} = 4\mu l^{*2} (\varphi_{\alpha, \beta} + \eta \varphi_{\beta, \alpha}) \quad (4.47)$$

وفي الخطوة الثانية، نعوض (4.46) و(4.47) والعلاقة الثالثة في (4.41)، في معادلات الحركة (4.40)، فنحصل على معادلة لامي التالية المحققة في  $:\Omega \times ]0, \infty[$ :

$$\mu \Delta_1 u_3 - \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha \beta} (4\mu l^{*2} \eta \Delta_1 u_{\alpha, \beta} + Y_{\alpha, \beta}) + X_3 = \rho u_3^{\square} \quad (4.48)$$

نضيف إلى ذلك الشروط الحدية والابتدائية (4.44) و(4.45).

تعريف: ندعو المسألة المؤلفة من معادلة لامي (4.42) والشروط الحدية والابتدائية (4.44) و(4.45) والعلاقات (4.46) و(4.47) والعلاقة الهندسية (4.41)، ندعوها مسألة لامي للجسم الديناميكي الاستقطابي المرن ضمن الحالة المستوية العكسية للانفعالات المرنة.

## 5. الاستنتاجات والمقترحات:

1<sup>اً</sup> الاستنتاجات: في البحث تم مناقشة مسألتنا الوصف التقليدي ووصف لامي للجسم الاستقطابي المرن الترموديناميكي ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة والديناميكي ضمن الحالة المستوية العكسية أيضاً.

2<sup>اً</sup> المقترحات: هناك تناقض في مسألتنا الحالة المستوية للانفعالات المرنة يتمثل بالآتي: من أجل الحالة ثلاثية البعد للانفعالات وعندما يشغل الجسم كامل الفضاء فإن الحل يتوافق مع تكاملات فوربييه المتقاربة وعندما ننقل إلى الحالة المستوية للانفعالات المرنة

مستوية كانت أو عكسية فإن التكاملات تصبح متباعدة الأمر الذي يقودنا إلى اقتطاع جزء من هذه التكاملات وهو الجزء الذي يشكل الحل حيث يدعى هذا الجزء بجزء Hadamard المنتهي، الأمر الذي يطرح المسائل التالية للمناقشة:

المسألة الأولى: مناقشة الحلول الأساسية لمسألة لامي للجسم المرن الاستقطابي ذي الدورانات المقيدة بالإزاحات وضمن الحالة المستوية الأولى لانفعالات المرنة حيث الجسم يشغل كامل  $R^2$ .

المسألة الثانية: إعادة ماتقدم ذكره لأجل مسألة الحالة المستوية العكسية لانفعالات المرنة.

المسألة الثالثة: إعادة ماتقدم ذكره لأجل مسائل الحالات المستوية لانفعالات اللدنة.

## المراجع

- [1]- Koiter ,W.T., 1964- Couple-Stresses in the theory of elasticity , Koninkl. Nederl. Akad . Van Wetensehappen. Proc .Ser . 8,1-1964 , 67 ,1,17,67,1,30 .
- [2]- Mindlin ,R.D., Tiersten , H.F., 1962- Effects of couple–Stresses in linear elasticity , Arch . Rat.Mech.Anal., 1962,11,5,415.
- [3]- Mindlin , R.D., 1963- Influence of couple-Stresses on stress concentration, Exper. Mech .,1963,3,1.
- [4]- Stojanovič , R., **1970** – Recent Developments in the Thory of Polar Continua , Springer-Verlag.
- [5]- Sokołowski , M., **1970** – Theory of Couple – Stresses in Bodies with Constrained Rotations, Springer-Verlag.
- [6]- Dyszlewicz , J., **2004** - Micropolar Theory of Elasticity , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .
- [7] –Nowacki, W. , **1986** - Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.



## تحسين جودة اختيار تخصص الطالب باستخدام تقنيات التنقيب في البيانات

طالب الدكتوراه: طه مختار البابا

قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث

إشراف

مشرف أساسي

أ.د. زكريا زكريا

مشرف مشارك

د.محمد حجّوز

### الملخص:

يفيد بحثنا في تطوير مُدخلات الأنظمة التعليمية ببيانات مفيدة، ومن ثم تطبيق طرق التنقيب في البيانات لاستخراج المعلومات التي نريدها، من خلال الوصول إلى مستودعات البيانات التعليمية والتي تُخزن عبر سنوات طويلة، ويتم الغوص في هذه البيانات الكثيرة للحصول منها على كل ما هو مفيد في تطوير العملية التعليمية، وتحسين جودة التعليم.

تندرج فكرة البحث في مساعدة الطالب لاختيار الفرع الأنسب له بعد حصوله على شهادة التعليم الثانوي، ففي المفاضلة العامة في الجامعات السورية يتم الاعتماد على معدل الطالب ودرجة الاختصاص في تحديد فرعه ولكن هذا الأسلوب قد يُسبب بعض الإشكالات كوجود الطالب في فرع لا يرغب به أو لا يتفق مع ميوله.

قمنا في بحثنا بإجراء ثلاث مقارنات مختلفة حسب اختبار القبول وامتحانات الثانوية العامة من خلال الغوص في درجات الطالب السابقة، لتحديد الفرع الأنسب للطالب حسب ميوله وحسب معدل درجاته في المقررات.

### الكلمات المفتاحية:

التنقيب في البيانات - اختبار القبول - درجات الطالب - معدل الدرجات.

## **Improve the quality of choice of specialization student Using data mining techniques**

### **Abstract:**

Our research is useful in developing educational system inputs with useful data, and then applying data mining methods to extract the information we want, by accessing educational data repositories that are stored over many years, and this many data is dived into to get everything that is useful in developing The educational process, improving the quality of education.

The idea of research is included in helping the student to choose the most appropriate branch for him after obtaining the secondary education certificate. In the general comparison in Syrian universities, the student's rate and the degree of specialization are relied on to determine his branch, but this method may cause some problems, such as the student's presence in a branch that he does not want or does not agree with his tendencies.

In our research, we made three different comparisons according to the admission test and high school exams, by diving into the student's previous grades, to determine the most appropriate branch for the student according to his preferences and according to his grades in the courses.

### **Key words:**

Data mining - Acceptance test - Student grades - GPA.

## 1. المقدمة:

يُعد التعليم أساس بناء الأمم وركيزة تطورها، لهذا اهتم الباحثون في السنوات الأخيرة اهتماماً متزايداً بإيجاد طرق لتحسين جودة التعليم وتطوير عملية التعلّم، ومع انتشار تقنيات التعليم عن بعد وزيادة حجم البيانات التعليمية كان لابد من تطبيق طرق تقنيات التنقيب في البيانات التعليمية للوصول إلى مستودعات البيانات التعليمية واستخراج المعلومات المفيدة منها للمساعدة في تحسين عملية التعليم والتعلّم.

إنّ استخدام تقنيات التنقيب في البيانات يوفر في جميع المجالات القدرة على الاستكشاف، والتركيز على أهم المعلومات في قواعد البيانات، كما تركز تقنيات التنقيب في البيانات كذلك على بناء التنبؤات المستقبلية واستكشاف السلوك والاتجاهات، مما يسمح باتخاذ القرارات الصحيحة، واتخاذها في الوقت المناسب. ولأهمية اختيار الطالب ما يرغب به ويناسب ميوله وإمكانياته العلمية، قمنا بدراسة بعض المقارنات المختلفة بين معدل الطالب في الثانوية العامة ودرجته في اختبار القبول والمسابقة [1].

## 2. دراسة مرجعية:

اقترح راو Rao [9] خوارزمية لمعرفة الرأي العام للمواطنين الهنود بنظام الضرائب المعتمد من قبل الحكومة الهندية، حيث تم جمع 190 تغريدة مكتوبة باللغة الإنكليزية حول نظام الضرائب من تويتر، تمّ الاعتماد على قوائم بالكلمات الحاملة للمشاعر معدّة من قبل دراسة سابقة، احتوت القوائم فقط على الكلمات الحاملة للمشاعر، بعد إجراء بعض عمليات المعالجة المسبقة على التغريدات طُبّق النهج المعجمي لتحديد المشاعر التي تحملها كل تغريدة من ثمّ تمّ حساب الشعور العام لكافة التغريدات، قام النموذج باحتساب تفضيلات المستخدمين الآخرين عند إيجاد الرأي العام، تم التعامل مع جميع الكلمات على أنّها إيجابية أو سلبية بنفس الدرجة حيث لم تُؤخذ شدة الشعور الذي تحمله الكلمة بعين الاعتبار، لم يعالج النموذج الكلمات التي تزيد من قوّة الشعور ولم يعالج حالات النفي ولم يعالج الرموز التعبيرية.

## 3. هدف البحث:

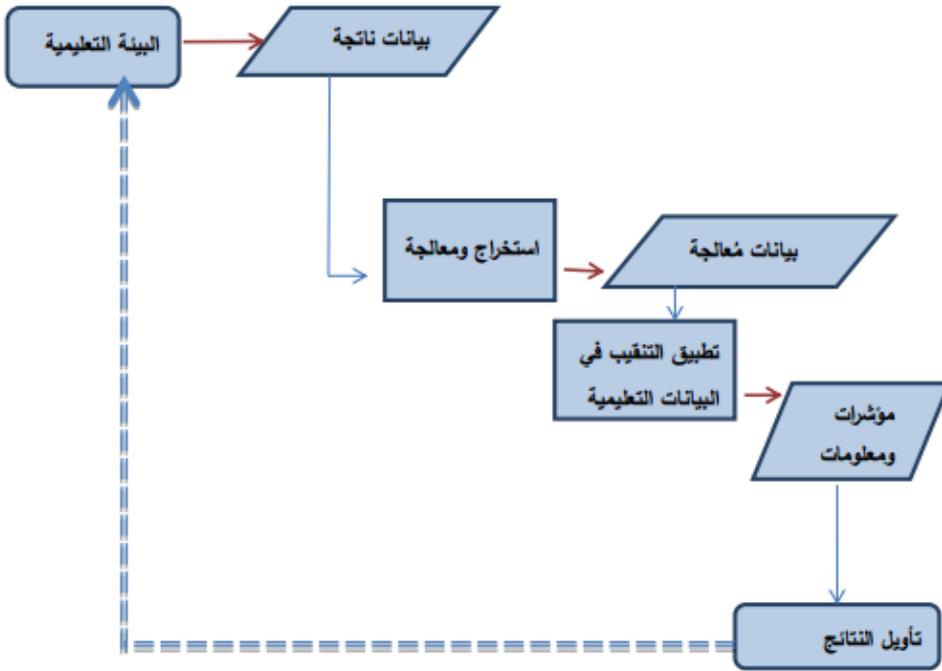
يهدف البحث إلى تحسين جودة التعليم للوصول إلى أفضل الطرق في التعليم والتعلم من خلال اقتراح مجموعة من المقترحات التي تساعد في تشخيص مدى فاعلية قواعد القبول في الجامعة، ويبين الجدول التالي الأطراف المُستفيدة من التنقيب في البيانات التعليمية [1].

الاستفادة	الطرف المُستفيد
تحسين الأداء وطريقة التدريس	المدرّس
تحسين الأداء الدراسي	المُتعلّم
تحسين القواعد الناظمة للعملية التعليمية	إدارة المؤسسة التعليمية
زيادة فاعلية التعامل مع تقنيات التنقيب في البيانات	الباحثون

#### جدول (1) الأطراف المستفيدة من التنقيب في البيانات التعليمية

#### 4. مواد وطرق البحث:

- عينة مؤلفة من الطلاب المتقدمين للدراسة في الجامعة الافتراضية اختصاص تكنولوجيا المعلومات (تقانة المعلومات) والذين قُبلوا وسجلوا وتخرجوا منذ العام 2003 حتى العام 2011. تم تحديد حجم العينة بـ 1000 طالباً.
- التنقيب في البيانات التعليمية [2]



شكل (1) مخطط خوارزمية التنقيب في البيانات التعليمية

##### 5. النتائج ومناقشتها:

يتضمن البحث إجراء ثلاث مقارنات (Comparisons) مختلفة لدراسة هذه المسألة مفترضين أن مستوى أسئلة مسابقة اختبار القبول وامتحانات الثانوية العامة هو ثابت وأن المتغير هو مستوى الطلاب.

**المقارنة الأولى:** دراسة أثر علامة الطالب في مكونات مسابقة القبول على مستوى الطالب عند التخرج مقاساً بالمعدل.

##### فرضيات المقارنة الأولى

1. إنَّ أثر علامة الطالب في الثانوية العامة ذو دلالة على مستواه عند التخرج مقاساً بالمعدل النهائي.
2. إنَّ أثر علامة الطالب في اختبار القبول ذو دلالة على مستواه عند التخرج مقاساً بالمعدل النهائي.
3. إنَّ أثر علامة الطالب في مسابقة القبول ذو دلالة على مستواه عند التخرج مقاساً بالمعدل النهائي.

### آلية اختبار فرضيات المقارنة الأولى:

- **الخطوة الأولى:** تحديد التقنيات المستخدمة في اختبار الفرضيات:  
تم تطبيق معامل الارتباط بيرسون Pearson بين كل متغيرين يجب دراستهما لاختبار الفرضيات الثلاث [3].
  - **الخطوة الثانية:** تحديد عينة الدراسة:  
العينة التي تم تطبيق الاختبارات عليها مؤلفة من الطلاب المتقدمين للدراسة في جامعة الذين قُبلوا وسجلوا وتخرجوا منذ العام 2003 حتى العام 2011. تم تحديد حجم العينة بـ 1000 طالباً.
  - **الخطوة الثالثة:** التطبيق:
1. **الفرضية الأولى:** إنَّ أثر علامة الطالب في الثانوية العامة ذو دلالة على مستواه عند التخرج مقاساً بالمعدل النهائي.

المتغير الأول	المتغير الثاني	نتيجة تطبيق معامل الارتباط
علامة الثانوية	المعدل النهائي للطلاب عند التخرج	R=0.38

**جدول (2) نتيجة تطبيق معامل ارتباط بيرسون (علامة الطالب في الثانوية العامة، المعدل النهائي للطلاب عند التخرج)**

**نتيجة الاختبار:** إن قيمة معامل الارتباط بين علامة الطالب في الثانوية ومعدله عند التخرج تشير إلى وجود ارتباط ضعيف ( $R < 0.5$ ) [3] وبالتالي ليس لعلامة الطالب في الثانوية العامة تأثير ذو دلالة على مستواه عند التخرج مقاساً بالمعدل.

2. **الفرضية الثانية:** إنَّ أثر علامة الطالب في اختبار القبول ذو دلالة على مستواه عند التخرج مقاساً بالمعدل النهائي.

تم إيجاد قيمة معامل الارتباط بالنسبة لكل العينة المدروسة ومن ثم تقسيم الطلاب إلى مجموعات وإيجاد قيمة معامل الارتباط على مستوى كل مجموعة خضعت لذات المعايير في اختبار القبول وذلك لأخذ فكرة أكثر وضوحاً نظراً لأن المعايير المعتمدة في الاختبار

تغيرت أربع مرات خلال الزمن المُطبق عليه البحث من حيث نسب تثقيف المواد وعتبات الرسوب.

أولاً: التطبيق على كامل العينة المدروسة:

نتيجة تطبيق معامل الارتباط	المتغير الثاني	المتغير الأول
R=0.23	المعدل النهائي للطلاب عند التخرج	علامة الاختبار للطلاب المقبولين من عام 2003 حتى عام 2011

جدول (3) نتيجة تطبيق معامل ارتباط بيرسون (علامة الطالب في اختبار مسابقة

القبول، المعدل النهائي للطلاب عند التخرج لكامل العينة المدروسة)

ثانياً: التطبيق على مجموعات الطلاب حسب معايير المسابقة التي خضع لها الطلاب:

نتيجة تطبيق معامل الارتباط	المتغير الثاني	المتغير الأول
R=0.24	المعدل النهائي للطلاب عند التخرج	علامة الاختبار للطلاب المقبولين في الأعوام 2003 - 2004 - 2005
R=0.26	المعدل النهائي للطلاب عند التخرج	علامة الاختبار للطلاب المقبولين من العام 2006 حتى العام 2009
R=0.26	المعدل النهائي للطلاب عند التخرج	علامة الاختبار للطلاب المقبولين في العام 2010
R=0.17	المعدل النهائي للطلاب عند التخرج	علامة الاختبار للطلاب المقبولين في العام 2011

جدول (4) نتيجة تطبيق معامل ارتباط بيرسون (علامة الطالب في اختبار مسابقة

القبول، المعدل النهائي للطلاب عند التخرج على مجموعات الطلاب حسب معايير

المسابقة التي خضعوا لها)

**نتيجة الاختبار:** بملاحظة قيمة معامل الارتباط بين علامة اختبار مسابقة القبول ومستوى الطالب عند التخرج مُقاساً بالمعدل نجد أن الارتباط ضعيف جداً على الرغم من تبدل معايير الاختبار أربع مرات خلال الفترة المدروسة، ونلاحظ تناقص قيمته بشكل ملحوظ عند تطبيق الدراسة على الطلاب المقبولين عام 2011. نعزو ذلك إلى دمج مادتين بمادة واحدة في ذلك العام وهما المعلوماتية والرياضيات مع الحفاظ على نسبة التثقيف كمادة واحدة بالنسبة لباقي المواد.

3. **الفرضية الثالثة:** إن أثر علامة الطالب في مسابقة القبول ذو دلالة على مستواه عند التخرج مقاساً بالمعدل النهائي.

تم إيجاد قيمة معامل الارتباط بالنسبة لكل العينة المدروسة ومن ثم تقسيم الطلاب إلى مجموعات وإيجاد قيمة معامل الارتباط على مستوى كل مجموعة خضعت لذات المعايير في مسابقة القبول وذلك لأخذ فكرة أكثر وضوحاً نظراً لأن المعايير المعتمدة في المسابقة تغيرت أربع مرات خلال الزمن المطبق عليه البحث من حيث درجة التثقيف المعتمدة لعلامة الطالب في الثانوية العامة وعلامة اختبار القبول. أولاً: التطبيق على كامل العينة المدروسة:

نتيجة تطبيق معامل الارتباط	المتغير الثاني	المتغير الأول
R=0.28	المعدل النهائي للطلاب عند التخرج	علامة المسابقة ككل للطلاب المقبولين من عام 2003 حتى عام 2011

جدول(5) نتيجة تطبيق معامل ارتباط بيرسون (علامة الطالب في مسابقة القبول، المعدل النهائي للطلاب عند التخرج) على كامل العينة المدروسة

ثانياً: التطبيق على مجموعات الطلاب حسب معايير المسابقة التي خضعوا لها

نتيجة تطبيق معامل الارتباط	المتغير الثاني	المتغير الأول
R=0.24	المعدل النهائي للطلاب عند التخرج	علامة المسابقة ككل للطلاب المقبولين في الأعوام 2003 - 2004 - 2005

R=0.35	المعدل النهائي للطالب عند التخرج	علامة المسابقة ككل للطلاب المقبولين من العام 2006 حتى العام 2009
R=0.37	المعدل النهائي للطالب عند التخرج	علامة المسابقة ككل للطلاب المقبولين في العام 2010
R=0.40	المعدل النهائي للطالب عند التخرج	علامة المسابقة ككل للطلاب المقبولين في العام 2011

**جدول (6) نتيجة تطبيق معامل ارتباط بيرسون (علامة الطالب في مسابقة القبول،  
المعدل النهائي للطالب عند التخرج) على مجموعات الطلاب حسب معايير المسابقة  
التي خضعوا لها**

**نتيجة الاختبار:** إن قيمة مؤشر الارتباط بين علامة الطالب في مسابقة القبول ومعدله عند التخرج تشير إلى وجود ارتباط ضعيف على الرغم من تحسن قيمة هذا الارتباط تدريجياً مع تغيير المعايير التي اعتمدت في المسابقة لأربع مرات خلال الفترة المدروسة إلا أن قيمة هذا الارتباط بقيت دون المستوى المطلوب.

• **الخطوة الرابعة:** مناقشة نتائج اختبار فرضيات المقارنة الأولى:

بمقارنة جميع النتائج التي حصلنا عليها من اختبار فرضيات الجزء الأول نستنتج ما يلي:

1. علامة الثانوية العامة أكثر دلالة في تحديد مستوى الطالب مقاساً بالمعدل من علامة الاختبار منفرداً.

2. إن الاختبار وعلى الرغم من تبديل معايير أربع مرات خلال الفترة المدروسة إلا أنه لا يزال غير فعال في تحديد مستوى الطالب عند التخرج.

3. النتيجتين السابقتين تدعمها فكرة أن الارتباط بين علامة المسابقة ومستوى الطالب عند التخرج قد تحسنت بشكل ملحوظ مع تغيير المعايير خلال الفترة المدروسة ويمكن أن نعزو سبب ذلك إلى زيادة الوزن المعتمد لعلامة الثانوية العامة في علامة المسابقة.

**المقارنة الثانية:** دراسة العلاقة بين مستوى تميز الطالب في مكونات مسابقة القبول ومستوى تميزه عند التخرج

**فرضيات المقارنة الثانية**

1. يوجد علاقة بين مستوى التميز في الثانوية العامة ومستوى التميز في الحصول على الشهادة الجامعية.
2. يوجد علاقة بين مستوى التميز في اختبار القبول ومستوى التميز في الحصول على الشهادة الجامعية.
3. يوجد علاقة بين مستوى التميز في مسابقة القبول ومستوى التميز في الحصول على الشهادة الجامعية.

### آلية اختبار فرضيات المقارنة الثانية

- **الخطوة الأولى:** تحديد التقنيات المستخدمة في اختبار الفرضيات وكيفية التطبيق: نظراً لطبيعة البيانات العددية المتصلة المستخدمة في هذه المسألة والفرضيات المتعلقة بدراسة علاقة مستويات بعضها مع بعض وصعوبة فصل المستويات بدقة بسبب الحاجة إلى الانتقال بشكل متدرج من مستوى إلى مستوى آخر فالتقنية المقترحة هي معامل الارتباط بيرسون للبيانات الغائمة وهو تطبيق من تطبيقات المنطق الغائم (الضبابي) (Fuzzy Logic) حيث تم إيجاد معامل الارتباط بيرسون بعد تحويل البيانات إلى الشكل الغائم [4]، وذلك بإتباع الخطوات التالية من أجل اختبار كل فرضية تم وضعها:
  1. تحديد المجموعات الغائمة لكل متغير ستم دراسة علاقته مع باقي المتغيرات.
  2. تحديد شكل دوال الانتماء للمجموعات الغائمة.
  3. تحويل كل البيانات المتوفرة إلى الشكل الغائم بعد تطبيق الدوال المناسبة عليها.
  4. إيجاد قيمة معامل الارتباط الغائم (Fuzzy Correlation) بين كل متغيرين يجب دراسة العلاقة بينهما.

### • الخطوة الثانية: تحديد عينة التطبيق:

العينة التي تم تطبيق الاختبارات عليها مؤلفة من الطلاب المتقدمين للدراسة في الجامعة الافتراضية السورية الذين قُبلوا وسجلوا وتخرجوا منذ العام 2003 وحتى العام 2011 تم تحديد حجم العينة بـ 1000 طالباً.

### • الخطوة الثالثة: التطبيق:

أولاً: تحديد المجموعات الغائمة ودوال الانتماء لكل متغير:

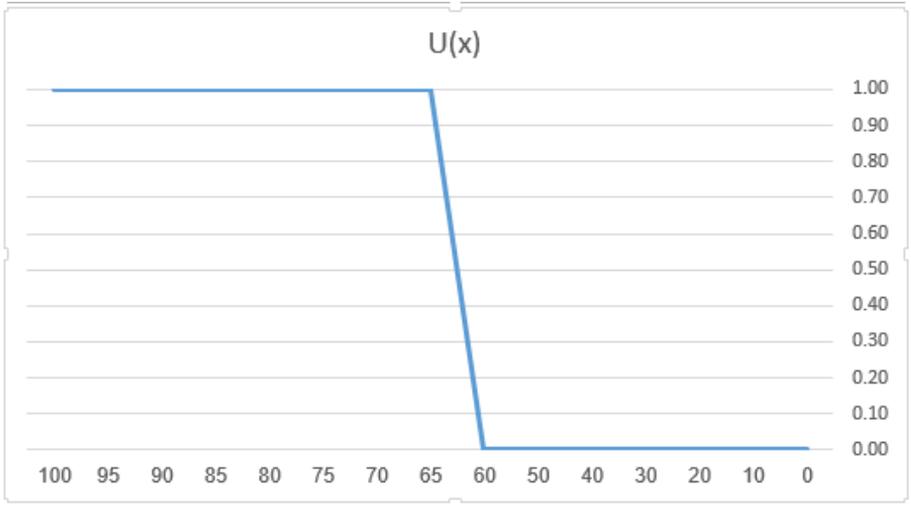
### A. علامة الثانوية العامة:

تم تحديد مجموعتين غائمتين لدرجة الطالب في الثانوية العامة هما {مستوى جيد جداً فما فوق، مستوى عادي} وتم انتقاء دالة الانتماء شبه المنحرف المفتوح كدالة انتماء إلى المجموعات الغائمة المحددة، نحدد صيغة دالة الانتماء للمجموعات الغائمة كما يلي:

المجموعة الغائمة	دالة الانتماء
مستوى جيد جداً فما فوق	$U(x) = 0 ; x < 60$ $U(x) = 1 ; x \geq 75$ $U(x) = \frac{(x - 60)}{(75 - 60)} ; 60 \leq x < 75$
مستوى عادي	$U(x) = 1 ; x < 60$ $U(x) = 0 ; x \geq 75$ $U(x) = \frac{(75 - x)}{(75 - 60)} ; 60 \leq x < 75$

جدول (7) صيغة دالة الانتماء للمجموعات الغائمة لعلامة الطالب في الثانوية العامة

وبما أننا نبحث عن الطالب المميز عند التخرج مفترضين وجود علاقة بين مستوى التميز في الثانوية العامة ومستوى التميز عند التخرج فإننا سنبحث عن الطالب الذي مستواه جيد جداً فما فوق ودالة الانتماء لهذه المجموعة هو من الشكل:



شكل (2) دالة الانتماء للمجموعة جيد جداً فما فوق لعلامة الطالب في الثانوية العامة

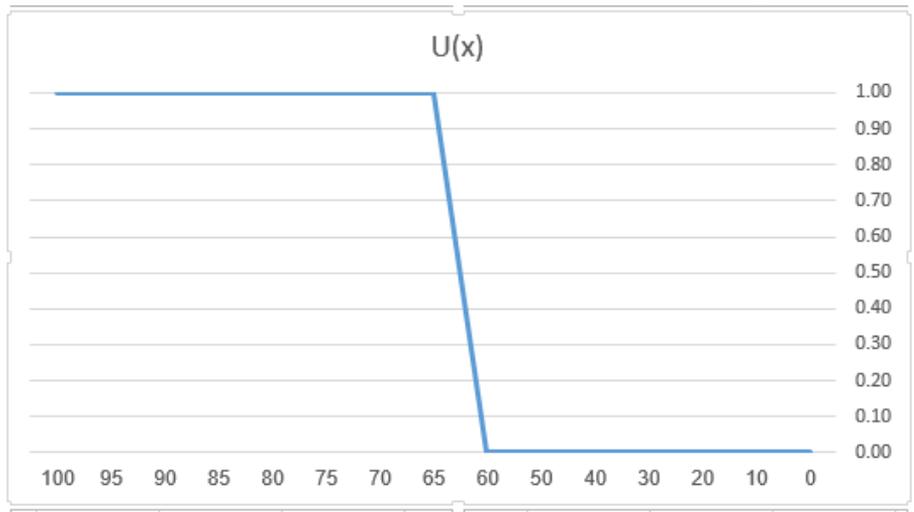
### B. علامة اختبار القبول:

تم تحديد مجموعتين غائمتين لعلامة الطالب في اختبار القبول هما (مستوى جيد جداً فما فوق، مستوى عادي)، وتم انتقاء دالة الانتماء شبه المنحرف المفتوح كدالة انتماء إلى المجموعات الغائمة المحددة، نحدد صيغة دالة الانتماء للمجموعات الغائمة كما يلي:

المجموعة الغائمة	دالة الانتماء
مستوى جيد جداً فما فوق	$U(x) = 0 ; x < 60$ $U(x) = 1 ; x \geq 75$ $U(x) = \frac{(x - 60)}{(75 - 60)} ; 60 \leq x < 75$
مستوى عادي	$U(x) = 1 ; x < 60$ $U(x) = 0 ; x \geq 75$ $U(x) = \frac{(75 - x)}{(75 - 60)} ; 60 \leq x < 75$

جدول (8) صيغة دالة الانتماء للمجموعات الغائمة لعلامة الطالب في اختبار القبول

وبما أننا نبحث عن الطالب المميز عند التخرج مفترضين وجود علاقة بين مستوى التميز في اختبار القبول ومستوى التميز عند التخرج فإننا سنبحث عن الطالب الذي مستواه جيد جداً فما فوق في اختبار القبول ودالة الانتماء لهذه المجموعة هو من الشكل:



شكل (3) دالة الانتماء للمجموعة جيد جداً فما فوق لعلامة الطالب في اختبار القبول

C. علامة المسابقة:

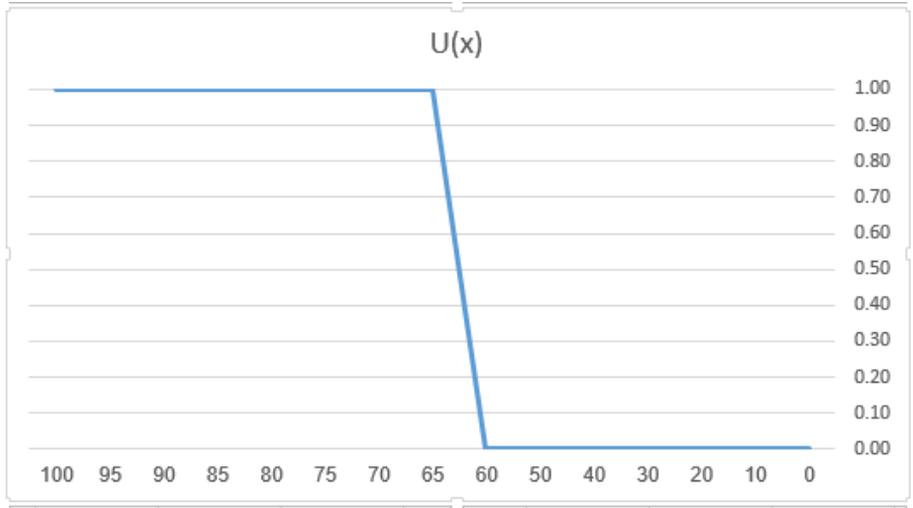
تم تحديد مجموعتين غائمتين لعلامة الطالب في مسابقة القبول هما (مستوى جيد جداً فما

فوق، مستوى عادي}، وتم انتقاء دالة الانتماء شبه المنحرف المفتوح كدالة انتماء إلى المجموعات الغائمة المحددة، نحدد صيغة دالة الانتماء للمجموعات الغائمة كما يلي:

دالة الانتماء	المجموعة الغائمة
$U(x) = 0 ; x < 60$ $U(x) = 1 ; x \geq 75$ $U(x) = \frac{(x - 60)}{(75 - 60)} ; 60 \leq x < 75$	مستوى جيد جداً فما فوق
$U(x) = 1 ; x < 60$ $U(x) = 0 ; x \geq 75$ $U(x) = \frac{(75 - x)}{(75 - 60)} ; 60 \leq x < 75$	مستوى عادي

جدول (9) صيغة دالة الانتماء للمجموعات الغائمة لعلامة الطالب في مسابقة القبول

وبما أننا نبحث عن الطالب المميز عند التخرج مفترضين وجود علاقة بين مستوى التميز في مسابقة القبول ومستوى التميز عند التخرج فإننا سنبحث عن الطالب الذي مستواه جيد جداً فما فوق في مسابقة القبول ودالة الانتماء لهذه المجموعة هو من الشكل:



شكل (4) دالة الانتماء للمجموعة جيد جداً فما فوق لعلامة الطالب في مسابقة القبول

D. معدل الطالب:

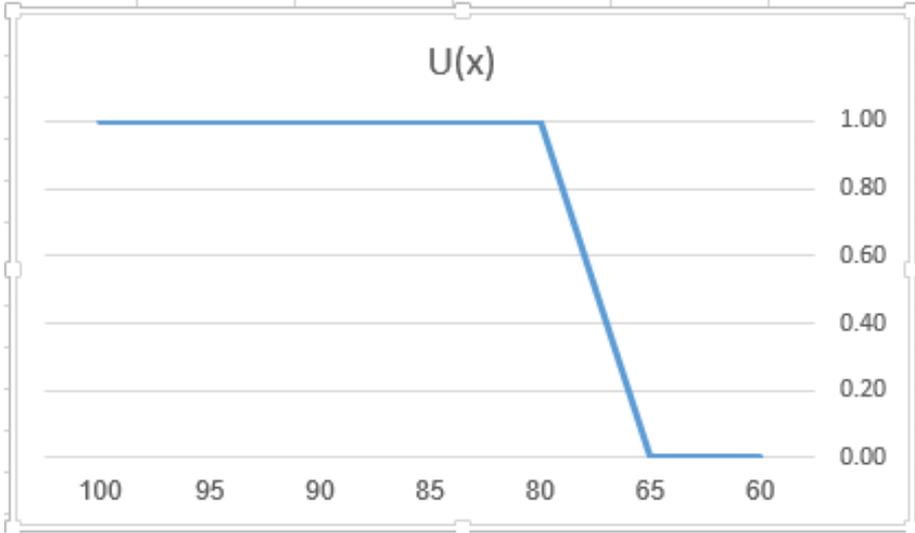
تم تحديد مجموعتين غائمتين لعلامة الطالب في اختبار القبول هما {مستوى جيد جداً فما فوق، مستوى عادي}، وتم انتقاء دالة الانتماء شبه المنحرف المفتوح كدالة انتماء إلى

المجموعات الغائمة المحددة، نحدد صيغة دالة الانتماء للمجموعات الغائمة كما يلي:

دالة الانتماء	المجموعة الغائمة
$U(x) = 0 ; x < 65$ $U(x) = 1 ; x \geq 80$ $U(x) = \frac{(x - 65)}{(80 - 65)} ; 65 \leq x < 80$	مستوى جيد جداً فما فوق
$U(x) = 1 ; x < 65$ $U(x) = 0 ; x \geq 80$ $U(x) = \frac{(80 - x)}{(80 - 65)} ; 65 \leq x < 80$	مستوى عادي

جدول (10) صيغة دالة الانتماء للمجموعات الغائمة لمعدل تخرج الطالب

وبما أننا نبحث عن الطالب المميز عند التخرج أي الطالب الذي معدله جيد جداً فما فوق فإن شكل دالة الانتماء لهذه المجموعة سيكون:



شكل (5) دالة الانتماء للمجموعة جيد جداً فما فوق لمعدل تخرج الطالب

ثانياً: تطبيق توابع الانتماء المناسبة على كل واصفة في قاعدة البيانات المدروسة وذلك لتحديد درجة انتماء كل عنصر إلى المجموعات الغائمة المرتبطة به.

مثال:

نتيجة التطبيق على مجموعة من السجلات التي تم اختيارها من قاعدة البيانات المدروسة ثالثاً: اختبار الفرضيات عن طريق إيجاد معامل الارتباط الغائم (Fuzzy Correlation) بين المتغيرات المدروسة حسب كل علاقة تتم دراستها [4]:

1. الفرضية الأولى: يوجد علاقة بين مستوى التميز في الثانوية العامة ومستوى التميز في الحصول على الشهادة الجامعية.

المتغير الأول	المتغير الثاني	نتيجة تطبيق معامل الارتباط
جيد جداً فما فوق في الثانوية العامة	جيد جداً فما فوق في معدل التخرج	R=0.33

جدول (11) نتيجة تطبيق معامل الارتباط الغائم بين (مستوى جيد جداً فما فوق في الثانوية العامة، التخرج بمعدل جيد جداً فما فوق)

نتيجة الاختبار: إن قيمة معامل الارتباط بين مستوى جيد جداً فما فوق لعلامة الثانوية العامة ومستوى جيد جداً فما فوق لمعدل التخرج تشير إلى وجود ارتباط موجب ضعيف أي ليس هناك علاقة ذات دلالة بين مستوى التميز في الثانوية العامة ومستوى الطالب عند التخرج.

2. الفرضية الثانية: يوجد علاقة بين مستوى التميز في اختبار القبول ومستوى التميز في الحصول على الشهادة الجامعية.

المتغير الأول	المتغير الثاني	نتيجة تطبيق معامل الارتباط
جيد جداً فما فوق في اختبار القبول	جيد جداً فما فوق في معدل التخرج	R=0.24

جدول (12) نتيجة تطبيق معامل الارتباط الغائم بين (مستوى جيد جداً فما فوق في اختبار القبول، التخرج بمعدل جيد جداً فما فوق)

نتيجة الاختبار: إن قيمة معامل الارتباط بين مستوى جيد جداً فما فوق لعلامة الاختبار ومستوى جيد جداً فما فوق لمعدل التخرج تشير إلى وجود ارتباط موجب ضعيف أي ليس هناك علاقة ذات دلالة بين مستوى التميز في اختبار القبول ومستوى الطالب عند التخرج.

3. الفرضية الثالثة: يوجد علاقة بين مستوى التميز في المسابقة ومستوى التميز في الحصول على الشهادة الجامعية.

تم إيجاد قيمة معامل الارتباط بالنسبة لكل العينة المدروسة ومن ثم تقسيم الطلاب إلى مجموعات وإيجاد قيمة معامل الارتباط على مستوى كل مجموعة خضعت لذات المعايير في مسابقة القبول وذلك لأخذ فكرة أكثر وضوحاً.  
أولاً: التطبيق على كامل العينة:

المتغير الأول	المتغير الثاني	نتيجة تطبيق معامل الارتباط
جيد جداً فما فوق في مسابقة القبول	جيد جداً فما فوق في معدل التخرج	R=0.28

جدول (13) نتيجة تطبيق معامل الارتباط الغائم بين (مستوى جيد جداً فما فوق في مسابقة القبول، التخرج بمعدل جيد جداً فما فوق) لكامل العينة المدروسة

ثانياً: التطبيق على مجموعات الطلاب حسب معايير المسابقة التي خضعوا لها:

عينة البحث	المتغير الأول	المتغير الثاني	نتيجة تطبيق معامل الارتباط
الطلاب المقبولون في الأعوام 2003 - 2004 - 2005	جيد جداً فما فوق في مسابقة القبول	جيد جداً فما فوق في معدل التخرج	R=0.18
الطلاب المقبولون من العام 2006 حتى العام 2009	جيد جداً فما فوق في مسابقة القبول	جيد جداً فما فوق في معدل التخرج	R=0.30
الطلاب المقبولون في العام 2010	جيد جداً فما فوق في مسابقة القبول	جيد جداً فما فوق في معدل التخرج	R=0.33
الطلاب المقبولون في العام 2011	جيد جداً فما فوق في مسابقة القبول	جيد جداً فما فوق في معدل التخرج	R=0.39

## جدول (14) نتيجة تطبيق معامل الارتباط الغائم بين (مستوى جيد جداً فما فوق في مسابقة القبول، التخرج بمعدل جيد جداً فما فوق) مجموعات الطلاب حسب معايير المسابقة التي خضعوا لها

**نتيجة الاختبار:** إن قيمة معامل الارتباط بين مستوى جيد جداً فما فوق لعلامة المسابقة ومستوى جيد جداً فما فوق لمعدل التخرج تشير إلى وجود ارتباط موجب ضعيف على الرغم من تحسن قيمة هذا الارتباط تدريجياً مع اختلاف المعايير التي اعتمدت في المسابقة أربع مرات خلال الفترة المدروسة إلا أن قيمة هذا الارتباط بقيت ضعيفة  $(R < 0.5)$  [5].

### • الخطوة الرابعة: مناقشة نتائج اختبار فرضيات المقارنة الثانية:

نتائج المقارنة الثانية جاءت داعمة لنتائج المقارنة الأولى في أن مستوى الطالب في الثانوية العامة هو الأكثر فاعلية في التنبؤ بمستوى الخريج مقاساً بالمعدل من علامة اختبار القبول رغم أن العلاقة ليست بالمستوى المطلوب، وذلك بدليل أن العلاقة بين الطالب الحاصل على جيد جداً فما فوق في المسابقة والطالب الخريج ذو المستوى جيد جداً فما فوق مقاساً بالمعدل قد تحسنت بشكل ملحوظ خلال السنوات الأخيرة المدروسة والسبب يعود لزيادة نسبة علامة الثانوية العامة في مسابقة القبول.

**المقارنة الثالثة:** دراسة أثر علامة الطالب في مواد اختبار القبول على مستوى الطالب عند التخرج مقاساً بالمعدل:

قمنا هنا بدراسة أثر علامة الطالب في مكونات اختبار القبول لاستكشاف أكثر المكونات تأثيراً على مستوى الطالب عند التخرج مقاساً بالمعدل علماً أن الاختبار وعلى مرور السنوات كان يتألف من أربع مواد أساسية هي (الرياضيات - المعلوماتية - اللغة الإنكليزية - العلوم الأساسية) وتغير التثقيف المعتمد لهذه المواد عدة مرات خلال الفترة المدروسة.

### فرضيات المقارنة الثالثة

1. تأثير علامة الطالب في اللغة الإنكليزية في اختبار القبول ذو دلالة على مستوى الطالب عند التخرج مقاساً بالمعدل.

2. تأثير علامة الطالب في العلوم الأساسية في اختبار القبول ذو دلالة على مستوى الطالب عند التخرج مقاساً بالمعدل.
3. تأثير علامة الطالب في الرياضيات في اختبار القبول ذو دلالة على مستوى الطالب عند التخرج مقاساً بالمعدل.
4. تأثير علامة الطالب في المعلوماتية في اختبار القبول ذو دلالة على مستوى الطالب عند التخرج مقاساً بالمعدل.

### آلية اختبار فرضيات المقارنة الثالثة

- **الخطوة الأولى:** تحديد التقنيات المستخدمة في اختبار الفرضيات وكيفية التطبيق: لاختبار الفرضيات قمنا بحساب معامل الارتباط بيرسون بين متغير (علامة المادة) ومتغير (معدل التخرج).
  - **الخطوة الثانية:** تحديد عينة التطبيق: العينة التي تم انتقاؤها للاختبار هي الطلاب المقبولون في الأعوام {2006 - 2007 - 2010} وذلك بسبب توافر بيانات حول علاماتهم التفصيلية في اختبار القبول. تم تحديد حجم العينة بـ 450 طالباً وطالبة.
  - **الخطوة الثالثة:** التطبيق: من أجل اختبار كل فرضية تم إيجاد قيمة معامل الارتباط بالنسبة لكل العينة ومن ثم تقسيم الطلاب إلى مجموعات وإيجاد قيمة معامل الارتباط على مستوى كل مجموعة خضعت لذات المعايير في اختبار القبول من حيث نسب تثقيف المواد وعتبات الرسوب ضمن كل مادة وذلك لأخذ فكرة أكثر وضوحاً.
1. **الفرضية الأولى:** تأثير علامة الطالب في اللغة الإنكليزية في اختبار القبول ذو دلالة على مستوى الطالب عند التخرج مقاساً بالمعدل.

قيمة معامل الارتباط	عام القبول
0.18	كامل العينة المدروسة
0.25	2006 - 2007
0.20	2010

0.13	2011
------	------

جدول (15) نتيجة تطبيق معامل الارتباط بين (علامة الطالب في اختبار اللغة

الإنكليزية في مسابقة القبول، معدل الطالب عند التخرج)

نتيجة الاختبار: بمقارنة قيم الارتباط لكامل العينة ومن ثم القيم التفصيلية للمجموعات

الثلاث نجد أن قيمة معامل الارتباط ضعيفة وتراجعت في السنوات الأخيرة.

2. الفرضية الثانية: تأثير علامة الطالب في العلوم الأساسية في اختبار القبول ذو دلالة

على مستوى الطالب عند التخرج مقاساً بالمعدل.

قيمة معامل الارتباط	عام القبول
0.07	كامل العينة المدروسة
0.08	2007 – 2006
0.10	2010
0.07	2011

جدول (16) نتيجة تطبيق معامل الارتباط بين (علامة الطالب في اختبار العلوم

الأساسية في مسابقة القبول، معدل الطالب عند التخرج)

نتيجة الاختبار: بمقارنة قيم الارتباط لكامل العينة ومن ثم القيم التفصيلية للمجموعات

الثلاث نجد أن قيمة معامل الارتباط ضعيفة وتراجعت في السنة الأخيرة.

3. الفرضية الثالثة: تأثير علامة الطالب في الرياضيات في اختبار القبول ذو دلالة على

مستوى الطالب عند التخرج مقاساً بالمعدل، علماً أنه في عام القبول 2011 تم دمج

الرياضيات والمعلوماتية بمقرر واحد وتم حساب قيمة معامل الارتباط بين علامة هذا

المقرر والمعدل.

قيمة معامل الارتباط	عام القبول
0.23	كامل العينة المدروسة
0.26	2007 – 2006
0.30	2010
0.14	2011

جدول (17) نتيجة تطبيق معامل الارتباط بين (علامة الطالب في اختبار الرياضيات

### في مسابقة القبول، معدل الطالب عند التخرج)

**نتيجة الاختبار:** بمقارنة قيم الارتباط لكامل العينة ومن ثم القيم التفصيلية للمجموعات الثلاث نجد أن قيمة معامل الارتباط ضعيفة وتراجعت في السنوات الأخيرة. ونعزو ذلك إلى دمج مادتي الرياضيات والمعلوماتية كمقرر واحد مع الحفاظ على نسبة تنقيب مادة واحدة ضمن باقي المواد (20 من 100).

4. **الفرضية الرابعة:** تأثير علامة الطالب في المعلوماتية في اختبار القبول ذو دلالة على مستوى الطالب عند التخرج مقاساً بالمعدل.

عام القبول	قيمة معامل الارتباط
كامل العينة المدروسة	0.13
2007 – 2006	0.14
2010	0.05
2011	0.14

**جدول (18) نتيجة تطبيق معامل الارتباط بين (علامة الطالب في اختبار المعلوماتية**

### في مسابقة القبول، معدل الطالب عند التخرج)

**نتيجة الاختبار:** بمقارنة قيم الارتباط لكامل العينة ومن ثم القيم التفصيلية للمجموعات الثلاث نجد أن قيمة معامل الارتباط ضعيفة وتراجعت في السنوات الأخيرة. ونعزو ذلك إلى دمج مادتي الرياضيات والمعلوماتية كمقرر واحد مع الحفاظ على نسبة تنقيب مادة واحدة ضمن باقي المواد (20 من 100).

#### • **الخطوة الرابعة:** مناقشة نتائج اختبار فرضيات المقارنة الثالثة:

إنّ جميع قيم معامل الارتباط هي قيم موجبة ولكنها ضعيفة أي ليس هنالك ارتباط قوي بين علامات الطالب في هذه المواد ومستواه عند التخرج مقاساً بالمعدل ولكن بمقارنة جميع قيم معامل الارتباط ببعضها نجد أنّ المادة الأكثر تأثيراً بمستوى الطالب عند التخرج هي الرياضيات تليها اللغة الإنكليزية تليها المعلوماتية ثم العلوم الأساسية.

بالعودة لطبيعة المواد الأكثر تأثيراً بمستوى الطالب عند التخرج (الرياضيات واللغة الإنكليزية) نجد أنها مواد تتصل إلى حدّ كبير بمعارف ومهارات ذات طبيعة تراكمية، أيّ

من الصعب اكتسابها بفترة زمنية قصيرة لذلك فهي تعبر عن مستوى الطالب بشكل أصدق من مواد سريعة الاكتساب لتقديم اختبار من طبيعة نظرية مثل المعلوماتية والعلوم الأساسية.

**المسألة الثانية:** دراسة العلاقة بين أداء الطالب في مكونات مسابقة القبول وطول مدة التخرج

1. **المقارنة الأولى:** دراسة أثر علامة الطالب في مكونات مسابقة القبول على طول مدة التخرج

**فرضيات المقارنة الأولى:**

- 1- تأثير علامة الطالب في الثانوية العامة ذو دلالة على طول مدة التخرج.
- 2- تأثير علامة الطالب في مسابقة القبول ذو دلالة على طول مدة التخرج.

**آلية اختبار فرضيات المقارنة الأولى:**

• **الخطوة الأولى:** تحديد التقنيات المستخدمة في اختبار الفرضيات وكيفية التطبيق: تم تطبيق معامل الارتباط بيرسون بين كل متغيرين يجب دراسة العلاقة بينهما لاختبار الفرضية.

• **الخطوة الثانية:** تحديد عينة التطبيق:

تم تحديد العينة التي تم تطبيق الاختبارات عليها بالطلاب المتقدمين للدراسة في الجامعة الافتراضية السورية الذين قبلوا وسجلوا وتخرجوا منذ العام 2003 وحتى العام 2015 مع استبعاد الطلاب الذين قبلوا عام 2011 من العينة التي تم انتقاؤها للاختبار لعدم استكمال بياناتهم حول طول مدة التخرج. تم تحديد حجم العينة بـ 800 طالباً وطالبة.

• **الخطوة الثالثة:** التطبيق:

1. الفرضية الأولى: لعلامة الطالب في الثانوية العامة تأثير ذو دلالة على طول مدة التخرج.

نتيجة تطبيق معامل الارتباط	المتغير الثاني	المتغير الأول
R=-0.2152	طول مدة التخرج مقاسة	علامة الطالب في الثانوية

العامة	بالسنوات
--------	----------

جدول (19) نتيجة تطبيق معامل ارتباط بيرسون بين (علامة الطالب في الثانوية العامة، طول مدة التخرج)

نتيجة الاختبار: إنَّ قيمة معامل الارتباط بين علامة الثانوية العامة وطول مدة التخرج للطالب مقاسة بعدد السنوات. تشير إلى وجود ارتباط سالب ضعيف أي ليس هناك علاقة ذات دلالة بين علامة الثانوية العامة وطول مدة بقاء الطالب في الجامعة.

2. الفرضية الثانية: لعلامة الطالب في مسابقة القبول تأثير ذو دلالة على طول مدة التخرج.

المتغير الأول	المتغير الثاني	نتيجة تطبيق معامل الارتباط
علامة الطالب في مسابقة القبول	طول مدة التخرج مقاسة بالسنوات	$R=-0.1259$

جدول (20) نتيجة تطبيق معامل ارتباط بيرسون بين (علامة الطالب في مسابقة القبول، طول مدة التخرج)

نتيجة الاختبار: إنَّ قيمة معامل الارتباط بين علامة الثانوية العامة وطول مدة التخرج للطالب مقاسة بعدد السنوات. تشير إلى وجود ارتباط سالب ضعيف أي ليس هناك علاقة ذات دلالة بين علامة مسابقة القبول وطول مدة بقاء الطالب في الجامعة.

2. المقارنة الثانية: دراسة العلاقة بين مستوى تميز الطالب في مكونات مسابقة القبول وبين درجة عدم التعثر.

فرضيات المقارنة الثانية:

1- يوجد علاقة بين مستوى التميز في الثانوية العامة ودرجة عدم التعثر في الحصول على الشهادة.

2- يوجد علاقة بين مستوى التميز في المسابقة ودرجة عدم التعثر في الحصول على الشهادة.

آلية اختبار فرضيات المقارنة الثانية:

- الخطوة الأولى: تحديد التقنيات المستخدمة في اختبار الفرضيات وكيفية التطبيق:

نظراً لطبيعة البيانات الكميّة المتصلة والفرضيات المتعلّقة بدراسة علاقة المستويات مع بعضها وصعوبة فصل المستويات سنستخدم معامل الارتباط بيرسون الغائم الذي سيتم تطبيقه بعد تحويل البيانات إلى الشكل الغائم [6]، وذلك بإتباع الخطوات التالية من أجل كل فرضية تم وضعها:

1. تحديد شكل دوال الانتماء للمجموعات الغائمة.
2. تحويل كل البيانات المتوفرة إلى الشكل الغائم بعد تطبيق الدوال المناسبة عليها.
3. إيجاد قيمة الارتباط الغائم (Fuzzy Correlation) بين كل متغيرين يجب دراسة علاقتهم ببعضهم.

#### ●الخطوة الثانية: تحديد عينة التطبيق:

تم تحديد العينة التي تم تطبيق الاختبارات عليها بجميع الطلاب المتقدمين للدراسة في الجامعات أو المعاهد الذين قُبلوا وسجلوا وتخرجوا منذ عام 2003 وحتى العام 2015. تم استبعاد الطلاب المقبولين في عام 2011 من العينة المُختارة لأنه عند التطبيق كانت درجة تعثر جميع الطلاب المتخرجين منهم هي 0.18 لذلك تم الاستبعاد للحفاظ على سلامة الاختبار. حجم العينة. هو 800 طالباً.

#### ●الخطوة الثالثة: التطبيق:

أولاً: تحديد المجموعات الغائمة لكل متغير ستنم دراسة علاقته مع باقي المتغيرات.

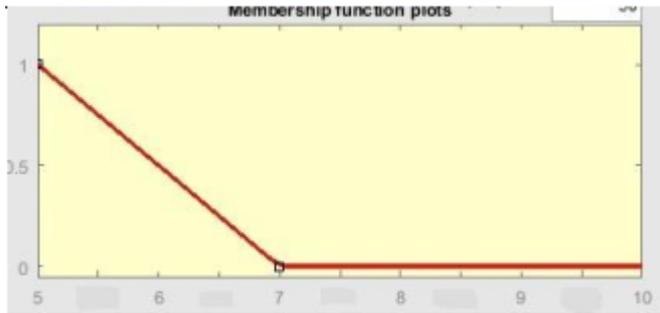
#### درجة التعثر:

إن مدة الدراسة في المرحلة الجامعية الأولى هي أربع سنوات دراسية وبالتالي نعرف الطالب بأنه غير متعثر إذا تخرج خلال المدة الطبيعية أي أربع سنوات ويعرف الطالب بأنه متعثر إذا استمرت مدة دراسته في الجامعة لأكثر من أربع سنوات. حدّدنا مجموعتين غائمتين لهذا المتغير {متعثر، غير متعثر}. وتكون صيغة الانتماء لهذه المجموعات بعد تحديد دالة الانتماء كدالة ثنائي القيمة [7] كما يلي:

المجموعة الغائمة	دالة الانتماء
متعثر	$U(x) = 1 ; x \geq 7$
	$U(x) = 0 ; x = 5$
	$U(x) = 0.5 ; x = 6$
غير متعثر	$U(x) = 0 ; x \geq 7$
	$U(x) = 1 ; x = 5$
	$U(x) = 0.5 ; x = 6$

جدول (21) صيغة الانتماء للمجموعات الغائمة لدرجة التعثر.

وبما أننا نبحث في هذه المسألة عن درجة عدم التعثر نبين شكل دالة الانتماء إلى مجموعة عدم التعثر كما يلي:



شكل (6) دالة الانتماء لمجموعة عدم التعثر.

**1. الفرضية الأولى:** يوجد علاقة بين مستوى التميز في الثانوية العامة ودرجة عدم التعثر في الحصول على الشهادة الجامعية.

المتغير الأول	المتغير الثاني	نتيجة تطبيق معامل الارتباط
مستوى جيد جداً فما فوق في الثانوية العامة	درجة عدم التعثر	R=0.2

جدول (22) نتيجة تطبيق معامل الارتباط الغائم بين (مستوى جيد جداً فما فوق في الثانوية العامة، عدم التعثر)

**نتيجة الاختبار:** إن قيمة مؤشر الارتباط بين مستوى جيد جداً فما فوق لعلامة الثانوية العامة ومجموعة الطلاب غير المتعثرين تشير إلى وجود ارتباط موجب ضعيف أي ليس هناك علاقة بين مستوى التميز في الثانوية العامة ودرجة عدم التعثر.

**3.الفرضية الثانية:** يوجد علاقة بين مستوى التميز في المسابقة ودرجة عدم التعثر في الحصول على الشهادة.

تم إيجاد قيمة معامل الارتباط بالنسبة لكل العينة المدروسة ومن ثم تقسيم الطلاب إلى مجموعات وإيجاد قيمة معامل الارتباط على مستوى كل مجموعة خضعت لذات المعايير في مسابقة القبول وذلك لأخذ فكرة أكثر وضوحاً [8].

أولاً: التطبيق على كامل العينة المدروسة:

المتغير الأول	المتغير الثاني	نتيجة تطبيق معامل الارتباط
مستوى جيد جداً فما فوق في مسابقة القبول	درجة عدم التعثر	R=0.18

جدول (23) نتيجة تطبيق الارتباط الغائم بين (مستوى جيد جداً فما فوق في مسابقة القبول، عدم التعثر) لكامل العينة المدروسة

ثانياً: التطبيق على مجموعات الطلاب حسب معايير المسابقة التي خضعوا لها:

عينة البحث	المتغير الأول	المتغير الثاني	نتيجة تطبيق معامل الارتباط
الطلاب المقبولون في الأعوام 2003 – 2004 – 2005	مستوى جيد جداً فما فوق في مسابقة القبول	درجة عدم التعثر	R=0.03
الطلاب المقبولون في الأعوام 2006 – 2007	مستوى جيد جداً فما فوق في	درجة عدم التعثر	R=0.23

		مسابقة القبول	2008 – 2009
R=0.22	درجة عدم التعثر	مستوى جيد جداً فما فوق في مسابقة القبول	الطلاب المقبولون في العام 2010

جدول (24) نتيجة تطبيق معامل الارتباط (مستوى جيد جداً فما فوق في مسابقة القبول، عدم التعثر) لمجموعات الطلاب حسب معايير المسابقة التي خضعوا لها.

نتيجة الاختبار: إن قيمة مؤشر الارتباط بين مستوى جيد جداً فما فوق في المسابقة ودرجة عدم التعثر تشير إلى وجود ارتباط على الرغم من تحسنه في السنوات الأخيرة إلا أنه بقي دون المستوى المطلوب.

#### • الخطوة الرابعة: مناقشة نتائج اختبار فرضيات المقارنة الثانية:

1. إن مستوى الطالب الجيد جداً فما فوق في الثانوية العامة لا يتضمن عدم تعثره في الحصول على الشهادة بدليل العلاقة الضعيفة جداً بين مستوى التميز في الثانوية وبين درجة عدم التعثر.
2. إن مستوى الطالب الجيد جداً فما فوق في المسابقة لا يتضمن عدم تعثره في التخرج بدليل العلاقة الضعيفة جداً بين مستوى التميز في مسابقة القبول وبين درجة عدم التعثر.

#### 6. الاستنتاجات:

- يمكن تلخيص النتائج التي تم التوصل إليها في هذا البحث بما يلي:
- على الرغم من أن العلاقة بين الطالب في الثانوية العامة ومستوى الطالب عند التخرج دون المستوى المطلوب إلا أنها أكثر دلالة على التنبؤ بمستوى الخريج مقاساً بالمعدل من علامة اختبار القبول منفرداً رغم تبدل المعايير في اختبار القبول لأربع مرات خلال الفترة المدروسة.
  - إن تميز الطالب في مكونات مسابقة القبول لا يضمن تخرجه بمستوى متميز عند التخرج.

• إن تميز الطالب في مكونات مسابقة القبول لا يضمن عدم تعثره في الحصول على الشهادة.

• بينت النتائج أن العلاقة بالمجمل ضعيفة بين علامة الطالب في مواد اختبار القبول وبين مستواه عند التخرج ولكن وجدنا أن مادتي (الرياضيات واللغة الإنكليزية) هما أكثر تأثيراً على مستوى الطالب عند التخرج من مادتي (المعلوماتية والعلوم الأساسية)، والتفسير بأنها مواد تتصل إلى حدّ كبير بمعارف ومهارات ذات طبيعة تراكمية، أي من الصعب اكتسابها بفترة زمنية قصيرة لذا تعبّر عن مستوى الطالب بشكل أصدق من مواد سريعة الاكتساب لتقديم اختبار من طبيعة نظرية مثل العلوم والمعلوماتية.

## 7. المراجع:

[1] C. Romero and S. Ventura, "Educational data mining: A review of the state of the art," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews), vol.40, no.6, pp.601–618, Nov. 2010.

[2] C. Romero and S. Ventura, and R. Baker, Handbook of educational data mining, 1st ed. USA: Chapman and Hall/CRC, 2010.535.

- [3] A. Peña–Ayala, Ed., Educational Data Mining Application And Trend, 1<sup>st</sup> ed. Switherland: Springer International, 2014.524
- [4] L. Schindler, S. Puls–elvidge, H. Welzant and L. Linda Crawford, "Definition Of Quality In higher Education: A synthesis of the litreture", Higher Learning Research Communications, vol.5,no.3, pp. 3–13, 2015.
- [5] The Concept of Excellence in Higher Education", Enqa.eu, 2013. [Online].Available:<http://www.enqa.eu/index.php/publications/papers–reports/occasional–papers/>. [Accessed: 18– Jan–2016].
- [6] R. S. J. de Baker and P. S. Inventado, "Educational Data Mining and Learning Analytics," in Learning Analytics: From Research to Practice. Berlin, Germany: Springer International, 2014.
- [7] L. Calvet Liñán and Á. A. Juan Pérez, "Educational data mining and learning Analytics: Differences, similarities, and time evolution," RUSC. Universities and Knowledge Society Journal,vol.12, no.3,p.98, Jul. 2015.
- [8] Asq.org. [Online]. Available: <http://asq.org/learn–about–quality/quality–assurance–qualitycontrol/overview/overview.html>.
- [9] Rao, K. P., Koneru, A.Raju, D. N.(2019). OEFC Algorithm–Sentiment Analysis on Goods and Service Tax System in India. In Cognitive Informatics and Soft Computing(pp.441–451). Springer, Singapore.

## الغلاف النيوتروني المحيط بالنواة وتفكك $\alpha$

أ.د. مفيد عباس \* أ.د. محي الدين نظام \*\* عبدالله طالب \*\*\*

### □ الملخص □

تشير الدراسات الحديثة إلى أن البروتونات تكون داخلية في النوى الثقيلة ولا تصل إلى سطح النوى في توزعها، بحيث أن القشرة الخارجية للنوى تتألف من النيوترونات فقط بحيث يمكن القول أن النوى الثقيلة محاطة بغلاف من النيوترونات . تم في هذا البحث دراسة كثافة الغلاف النيوتروني لنوى النظائر المصدرة لجسيم ألفا ( $\alpha$ ) من العناصر  $Z \geq 92$  عن طريق حساب الطاقة الضائعة التي يعانها جسيم ألفا ( $\alpha$ ) عند انتقاله من موقع تشكله على سطح اللب الداخلي للنواة ( الكرة التي تحوي نيوترونات وبروتونات داخل النواة ) عبر الغلاف النيوتروني المحيط بالنواة ، وذلك على اعتبار أن هذه الطاقة الضائعة تتناسب طردياً مع سماكة وكثافة هذا الغلاف النيوتروني الذي على جسيم ألفا ( $\alpha$ ) اجتيازه للوصول إلى سطح النواة ومن ثم التحرر منها .

الكلمات المفتاحية: نواة-نوكلين- طبقة نيوترونية- طاقة اقتلاع النوكلين-جسيم ألفا - تفكك ألفا

\*أستاذ- قسم الفيزياء-كلية العلوم-جامعة تشرين-اللاذقية-سورية  
\*\*أستاذ - قسم الفيزياء- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية  
\*\*\*طالب دراسات عليا (دكتوراه) - قسم الفيزياء-كلية العلوم-جامعة تشرين-اللاذقية-سورية

# The Neutronic Shell Surrounding the Nucleus and $\alpha$ Decay

Dr.Mufid Abbas\* Dr.Mohey- Aldin Nizam\*\* Abdulla Taleb\*\*\*

## □ Abstract □

Recent studies indicate that protons are internal in heavy nuclei and it doesn't reach the surface of the nuclei in its distribution , so the outer shell of the nuclei consist of neutrons only , so it can be said that heavy nuclei are surrounded by a neutronic shell .

In this research, a study was conducted on the neutronic shell density of the isotopes that emits the alpha particles of elements that  $Z \geq 92$  .During calculating the lost energy , that  $\alpha$  particle undergoes , when it traverses from its shaped position on the surface of internal core of nucleus (the sphere that content neutrons and protons inside of nucleus ) through the neutronic shell , that surrounds the nucleus , considering that this lost energy is directly proportional to the thickness and density of this neutronic shell , that  $\alpha$  particle must traverse , to rich the nucleus surface and then liberation from it.

**Key Words** :Nucleus– Nucleon – Neutronic Shell – Shedding Energy of nucleon – alpha particles – alpha decay

---

\*Professor ,Department of Physics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria

\*Professor ,Department of Physics, Faculty of Science, Tishreen University, \*Lattakia, Syria

\*\*\*Postgraduate Student, Department of Physics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria

## مقدمة:

يوجد آلاف النظائر الصناعية ويوجد في المقابل أقل من 300 نظير طبيعي [1] ، يتم إنتاج النظائر الصناعية في المسرعات والمفاعلات . يمتلك كل عنصر له  $Z \leq 44$  (حيث  $Z$  هو العدد الذري ) نظائر طبيعية أو صناعية يكون له بعض النظائر فيها  $Z \geq N$  ( حيث  $N$  هو عدد النيوترونات داخل النواة ) ، ومن أجل العناصر التي يكون فيها  $Z > 44$  فإنها لا تمتلك أية نظائر يكون فيها  $Z = N$  وإنما يكون فيها جميعاً  $N > Z$  [1] . تكون جميع النظائر للعناصر  $Z \geq 92$  محاطة بطبقة من النيوترونات [2] ، وتكون نوى النظائر ذات  $Z \geq 84$  غير مستقرة وإنما مشعة ولها عدد كبير من النظائر المصدرة لجسيم  $\alpha$ .

يتشكل جسيم ألفا على سطح اللب الداخلي (الكرة الداخلية التي تحتوي بروتونات ونيوترونات) للنوى المصدرة له، لأن كثافة جسيم ألفا أدنى من القيمة الوسطى لكثافة النوى المصدرة لها، ولأن كثافة هذه النوى المصدرة لجسيم ألفا تتناقص من المركز بالاتجاه نحو السطح ولأن جسيم ألفا يحوي بروتونين بالإضافة للنيوترونين وبالتالي عليه أن يتشكل على سطح اللب الداخلي لأن البروتونات لا تتجاوز هذا السطح [3] .

## أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى إيجاد تفسيرات إضافية حول إصدار النوى لجسيم ألفا ، واستنتاج كثافة الغلاف النيوتروني من خلال ذلك .

## طرائق البحث ومواده:

تم في هذا البحث استخدام بيانات من المراجع الورقية والإلكترونية وجرى بعد ذلك معالجة هذه البيانات بطرائق رياضية و بيانية باستخدام تقنيات الحاسوب (برنامجي Excel و Matlab) في المعالجة والحساب الرياضي وكذلك في الرسم البياني ، وفي استنتاج العلاقات الرياضية، التي تربط متحولات الطبقة النيوترونية المحيطة بالنوى الثقيلة  $Z \geq 92$  ، وإصدارها لجسيم ألفا .

## آلية تشكل وإصدار جسيم ألفا :

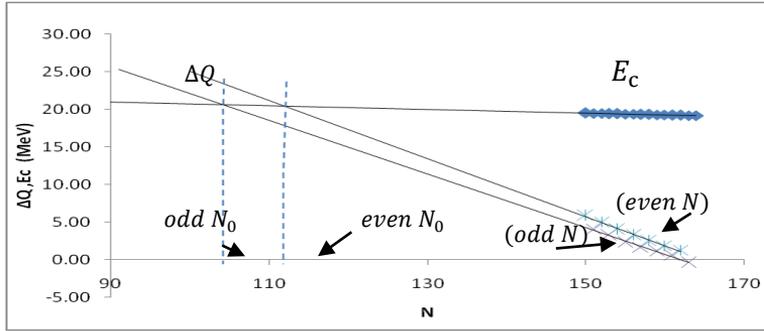
تتوضع النيوترونات بين البروتونات لتخفيف التدافع الكهربائي بينها والفائض منها يحيط بمعظم نوى النظائر المتوسطة وجميع نوى النظائر الثقيلة مشكلةً غلاًفاً نيوترونياً

، وتختلف سماكة وكثافة الغلاف النيوتروني من نظير لآخر [4] . إن طاقة ارتباط البروتون وكذلك طاقة فصله لا تختلفان عن نظيرتيهما للنيوترون المماثل في البعد عن مركز النواة إلا بطاقة الدفع الكهربائي التي يخضع لها البروتون من بقية البروتونات . ومن المنطقي توقع أن النوكليون المقتلع هو نوكليون واقع على سطح النواة في حال كان نيوترون ونوكليون أقرب إلى سطحها في حال كان بروتون ، ويمكن بالتالي كتابة العلاقة :

$$\Delta Q = |Q_n - Q_p| = E_c \quad (1)$$

حيث  $Q_n$  طاقة اقتلاع النيوترون و  $Q_p$  طاقة اقتلاع البروتون ،  $E_c$  طاقة الدفع التي يخضع لها البروتون الأقرب إلى السطح .

أظهرت دراسة سابقة على نظائر العناصر  $Z \geq 92$  أن العلاقة (1) غير محققة [2] دائماً و دوماً  $\Delta Q < E_c$  لجميع النظائر الطبيعية والصناعية ، لهذه العناصر و كمثال على ذلك يظهر الشكل البياني (1) قيم كل من  $E_c$  و  $\Delta Q$  بتابعة  $N$  لنظائر العنصر  $(_{104}Rf)$  :



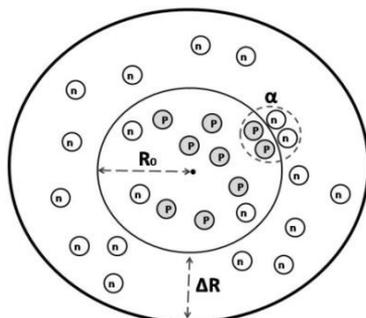
الشكل (1) : قيم كل من  $E_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(Z-1)e^2}{R}$  و  $\Delta Q = |Q_n - Q_p|$  بتابعة  $N$  لنظائر العنصر  $(_{104}Rf)$

ولا يمكن تفسير هذا التناقض إلا باعتبار أن البروتون لا يقع على سطح النواة كما هو الحال بالنسبة للنيوترون ، وإنما يقع على عمق محدد من سطح النواة ، بحيث تتوزع طاقة فصله  $Q_p$  إلى قسمين : طاقة  $\Delta E$  تصرف على اجتيازه المسافة حتى السطح وهي الطاقة الضائعة التي لم تؤخذ بعين الاعتبار في العلاقة (1) و القسم الثاني فهو لفصل البروتون من سطح اللب الداخلي للنواة كما يظهر الشكل (2). وبحساب عمق توضع

البروتونات داخل النواة ، والتي هي سماكة طبقة النيوترونات المغلفة للنواة للنظائر المختلفة. وانطلاقاً من ذلك تم حساب قيمة  $E_{c_0}$  طاقة الدفع الكهربائي المطبقة على البروتون الواقع على سطح الكرة الداخلية الموضحة في الشكل (2) باستخدام علاقة كولون :

$$E_{c_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(Z-1)e^2}{R-\Delta R} \right) \quad (2)$$

حيث  $Z$ : رقم الشحنة للنواة ،  $R$  نصف قطر النواة ،  $\Delta R$  سماكة الطبقة النيوترونية .و عند تصور أن جسيم ألفا تشكل على سطح النواة اللب (كرة البروتونات والنيوترونات) على بعد  $\Delta R$  عن سطح النواة فإنه سيخضع لدفع كهربائي ساكن  $2E_{c_0}$  ويعد تشكل جسيم ألفا فإنه لن يتفكك أبداً لأنه النواة الأكثر استقراراً بين جميع النوى [5] ويتحرك حركة عشوائية كجسيم مفرد وقد يصدف أن يحدث له اتجاه حركة نحو الخارج و عند وصوله إلى مسافة أبعد من مدى القوى النووية في فترة راحة (فترة عدم وصول البيون الرابط لأي من نوكلينواته الأربع ) ،سيخضع عندها فقط لقوى الدفع الكهربائي وينفصل عن النواة [6] ويوضح الشكل (2) تصوراً لآلية تشكل جسيم ألفا .



الشكل (2) : شكل تصوري لآلية تشكل جسيم ألفا

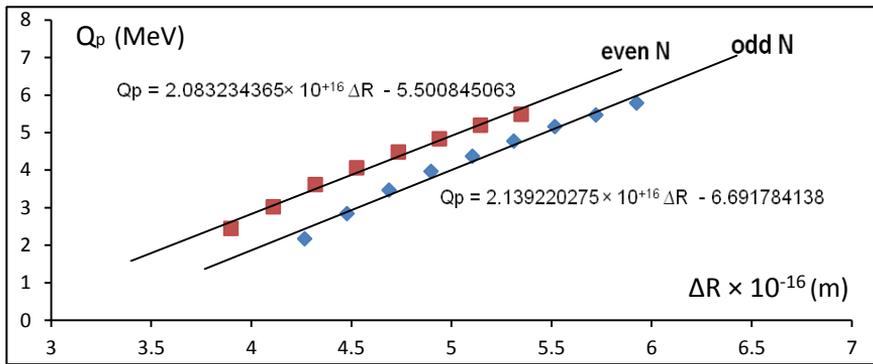
حساب طاقة فصل النيوترونات والبروتونات الواقعة على سطح كرة البروتونات :  
تعطى طاقة الفصل لكل من البروتون والنيوترون ، من النواة ( ${}^A_ZX$ ) على الترتيب ،  
بالعلاقين التاليين [7]:

$$Q_p = [M({}^{A-1}_Z X) + m_H - M({}^A_Z X)]c^2 \quad (3)$$

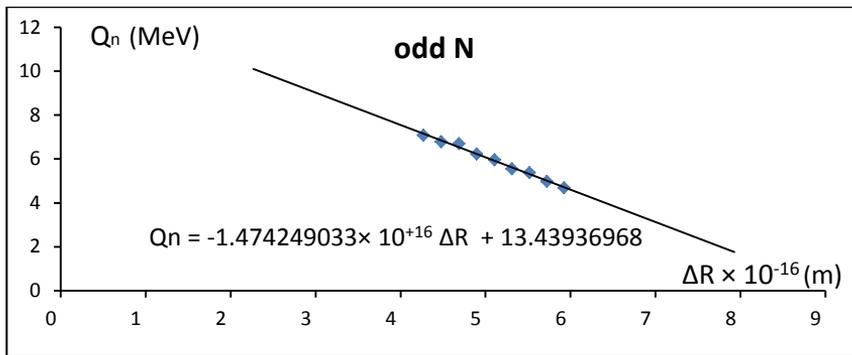
$$Q_n = [M({}^{A-1}_{Z-1} X) + m_n - M({}^A_Z X)]c^2 \quad (4)$$

حيث :  $M(\frac{A}{Z}X)$  الكتلة الذرية للنظير  $\frac{A}{Z}X$  ،  $M(\frac{A-1}{Z-1}X)$  الكتلة الذرية للنظير  $(\frac{A-1}{Z-1}X)$  ،  $m_n, m_H$  كتلة ذرة الهيدروجين وكتلة النيوترون ، على الترتيب .

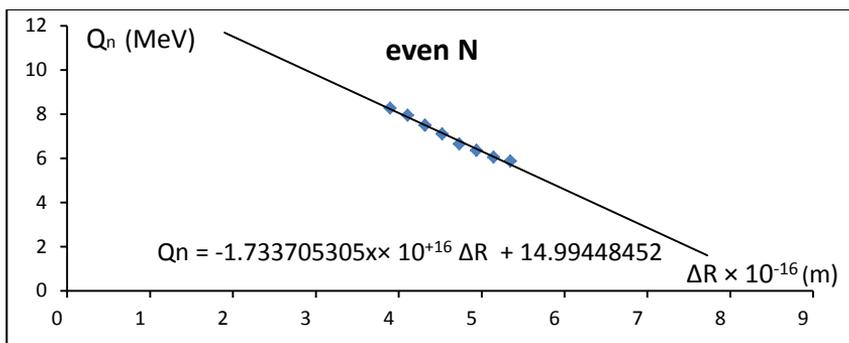
تم باستخدام العلاقتين (3) و(4) ، حساب قيم كل من  $Q_p$  و  $Q_n$  لجميع نظائر العناصر  $Z \geq 92$  ، على الترتيب ، ومن ثم تمثيلها بيانياً ، بتابعة  $\Delta R$  سماكة الغلاف النيوتروني المحيط بالنواة. يمثل الخطين البيانيين في الشكل (3) قيم  $Q_p$  بتابعة  $\Delta R$  لنظائر العنصر ( ${}_{95}\text{Am}$ ) ذات  $N$  الزوجية ثم الفردية ، على الترتيب :



الشكل (3) : قيم  $Q_p$  بتابعة  $\Delta R$  لنظائر العنصر ( ${}_{95}\text{Am}$ ) ذات  $N$  زوجية و  $N$  فردية ويمثل الشكلين (4) و(5) قيم  $Q_n$  بتابعة  $\Delta R$  لنظائر العنصر ( ${}_{95}\text{Am}$ ) ذات  $N$  الفردية والزوجية ، على الترتيب:



الشكل (4) : قيم  $Q_n$  بتابعة  $\Delta R$  لنظائر العنصر ( ${}_{95}\text{Am}$ ) ذات  $N$  فردية



الشكل (5) : قيم  $Q_n$  بتابعة  $\Delta R$  لنظائر العنصر ( ${}_{95}Am$ ) ذات even N

حساب الطاقة الضائعة في الغلاف النيوتروني :

يتشكل جسيم ألفا حسب الشكل (2) على سطح اللب الداخلي للنواة لأنه بالابتعاد أكثر عن مركز النواة لا توجد بروتونات، ويخضع جسيم ألفا لطاقة دفع كهربائي مقدارها  $2E_{c_0}$  ، ولطاقة ترابط قيمتها الكلية  $2Q_p + 2Q_n$  وستكون بالتالي طاقة تفكك جسيم ألفا الكلية  $Q$  هي :

$$Q = 2E_{c_0} - (2Q_p + 2Q_n) \quad (5)$$

لكن تشير الحسابات إلى أن :  $Q < 2E_{c_0} - (2Q_p + 2Q_n)$  وبحسب الشكل (2) يجب أن يكون فرق الطاقة هو الطاقة الضائعة في الغلاف النيوتروني ( هي الطاقة التي يفقدها جسيم ألفا أثناء اجتيازه الطبقة النيوترونية ) ، يمكن حساب  $Q$  الطاقة الكلية لتفكك  $\alpha$  بالعلاقة [5] التالية :

$$Q = [M(\frac{A}{Z}P) - M(\frac{A-4}{Z-2}D) - M(\frac{4}{2}He)]931.49 \quad (6)$$

حيث  $M(\frac{A}{Z}P)$  ،  $M(\frac{A-4}{Z-2}D)$  ،  $M(\frac{4}{2}He)$  هي الكتل الذرية للنظير الأصل ، للنظير البنت وللنظير  ${}^4_2He$  ، على الترتيب .

واستناداً إلى ما سبق يمكن حساب  $E_{lost}$  الطاقة الضائعة لجسيم  $\alpha$  ، بالعلاقة التالية :

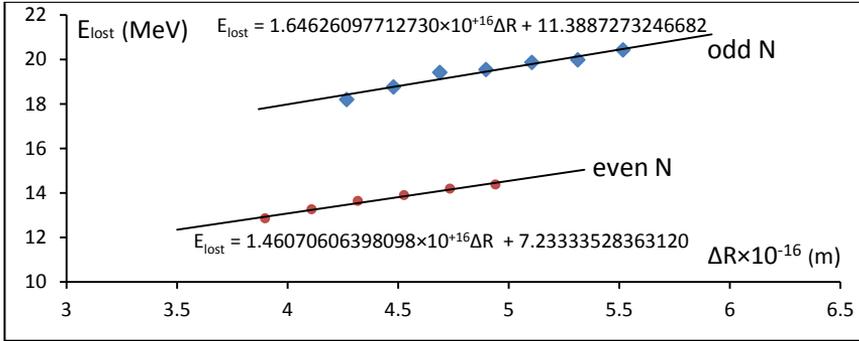
$$E_{lost} = 2E_{c_0} - (2Q_p + 2Q_n) - Q \quad (7)$$

تم حساب  $E_{lost}$  باستخدام العلاقة (7) لنظائر كل من العناصر  $Z \geq 92$  ويمثل الجدول (1) مثال على ذلك من أجل العنصر ( ${}_{95}Am$ ) حيث يتضمن الجدول (1) قيم كل من  $\rho_s$  القيمة الوسطى للكثافة النوكلونية في الغلاف النيوتروني المحيطة بالنواة و  $\Delta R$  سماكة هذه الطبقة [2] :

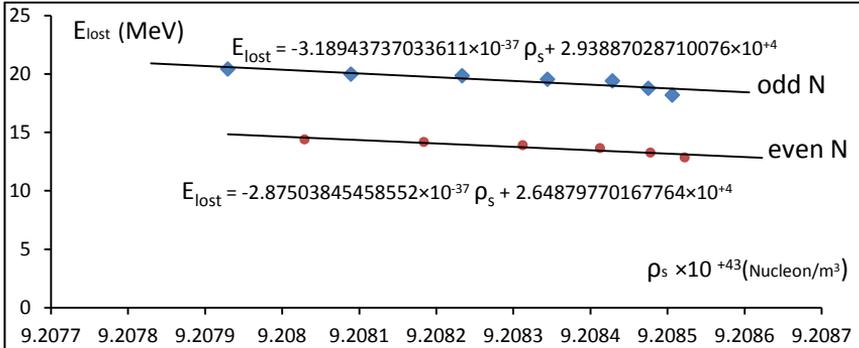
الجدول (1) : قيم كل من  $\Delta R$  ,  $\rho_s$  ,  $E_{lost}$  من أجل نظائر العنصر ( ${}_{95}\text{Am}$ )

A	$E_{lost}(\text{MeV})$	$\rho_s \times 10^{43} \text{ nucleon/m}^3$	$\Delta R \times 10^{16} \text{ m}$	$\rho_s \Delta R \times 10^{37}$	
232	18.188050847	9.2085061883	4.2680793517	3.9302635122	odd N
234	18.756483149	9.2084755293	4.4793573082	4.1248052159	
236	19.404300515	9.2084286382	4.6894348056	4.3182325761	
238	19.538116116	9.2083443308	4.8983287521	4.5105497795	
240	19.854883026	9.2082338393	5.1060556781	4.7017754681	
242	19.978010315	9.2080896066	5.3126317476	4.8919189179	
244	20.421838337	9.2079295167	5.5180727695	5.0810025130	
233	12.843416314	9.2085226076	3.8996737249	3.5910233658	even N
235	13.255240231	9.2084784805	4.1103493143	3.7850063208	
237	13.627878226	9.2084129961	4.3198329466	3.9778805846	
239	13.889974360	9.2083125073	4.5281413397	4.1696540533	
241	14.173890909	9.2081841213	4.7352908394	4.3603429918	
243	14.368841742	9.2080295460	4.9412974308	4.5499612739	

تم ويتمثل  $E_{lost}$  بتابعة كل من  $\Delta R$  و  $\rho_s$  بيانياً باستخدام برنامج Excel واستنتاج معادلات الخطوط البيانية :



الشكل (6) : قيم  $E_{lost}$  بتابعة  $\Delta R$  لنظائر العنصر ( ${}_{95}\text{Am}$ ) ذات odd N و even N



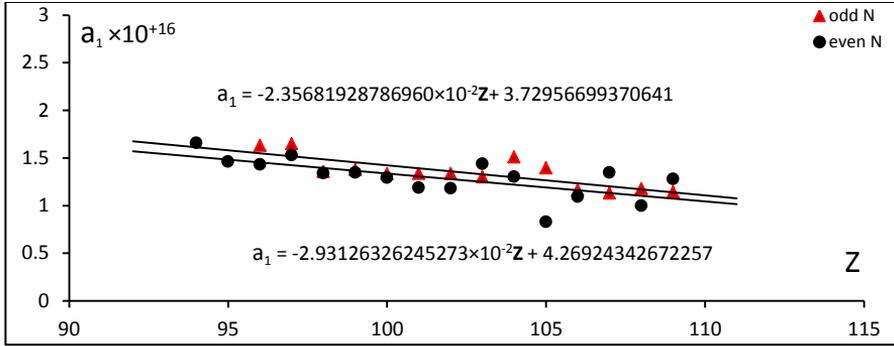
الشكل (7) : قيم  $E_{lost}$  بتابعة  $\rho_s$  لنظائر العنصر ( ${}_{95}\text{Am}$ ) ذات odd N و even N

تم إجراء نفس الحسابات والتمثيل البياني السابقين لكل من العناصر  $Z \geq 92$  فوجد أنها جميعاً تقابل علاقات من الشكل :

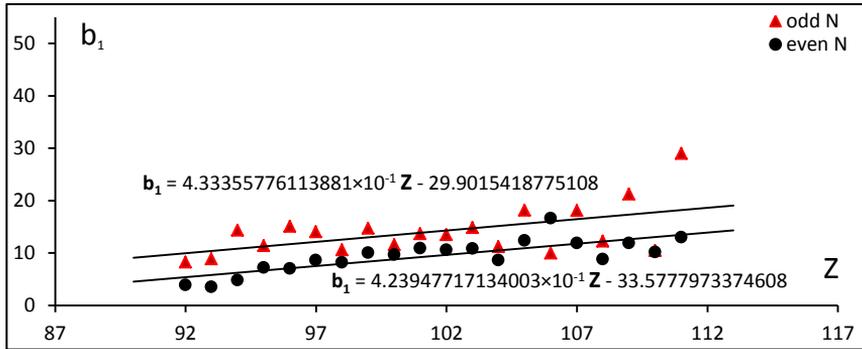
$$E_{lost} = a_1(\Delta R) + b_1 \quad (8)$$

$$E_{lost} = a_2(\rho_s) + b_2 \quad (9)$$

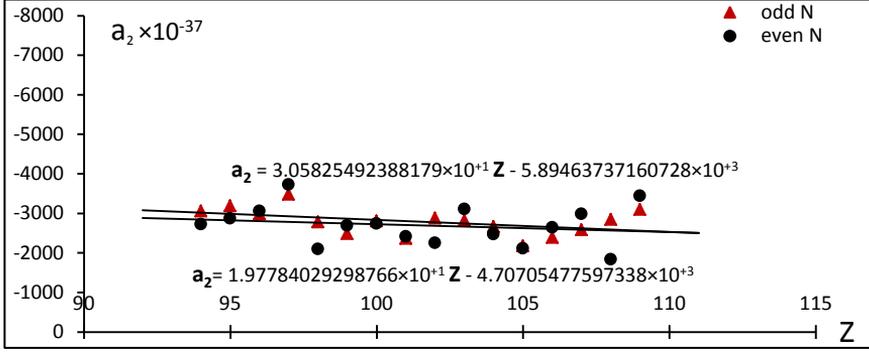
تم تمثيل كل من المتحولات  $a_1$  و  $b_1$  و  $a_2$  و  $b_2$  بتابعية  $Z$  من أجل الوصول إلى علاقة عامة لجميع العناصر  $Z \geq 92$  فكانت الخطوط والعلاقات المرافقة كما هو موضح في الأشكال (8) و (9) و (10) و (11) :



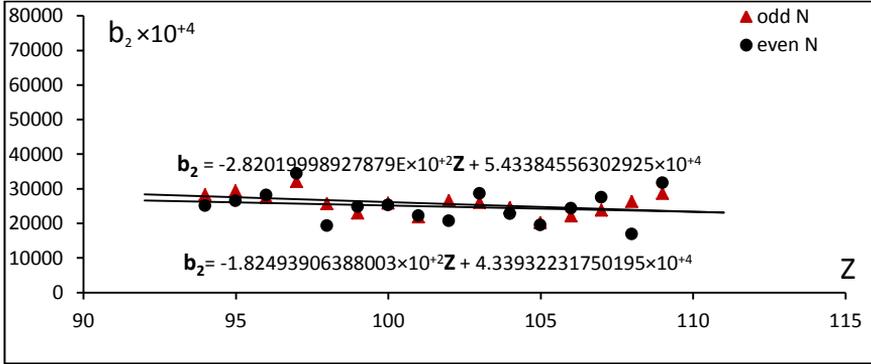
الشكل (8) : قيم الثابت ( $a_1$ ) بتابعية العدد الذري  $Z$  للعناصر ذات  $Z \geq 92$



الشكل (9) : قيم الثابت ( $b_1$ ) بتابعية العدد الذري  $Z$  للعناصر ذات  $Z \geq 92$



الشكل (10) : قيم الثابت ( $a_2$ ) بتابعة العدد الذري  $Z$  للعناصر ذات  $Z \geq 92$



الشكل (11) : قيم الثابت ( $b_2$ ) بتابعة العدد الذري  $Z$  للعناصر ذات  $Z \geq 92$

بحيث أمكن الوصول إلى العلاقات العامة من أجل النوى ذات (odd N) و (even N) على الترتيب :

$$\begin{aligned} \text{odd } E_{lost} &= [-2.35681 \times 10^{+14} Z + 3.72956 \times 10^{+16}] \Delta R + 4.33355 \\ &\times 10^{-1} Z \\ &- 29.90154 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{even } E_{lost} &= [-2.93126 \times 10^{+14} Z + 4.26924 \times 10^{+16}] \Delta R + 4.23947 \\ &\times 10^{-1} Z \\ &- 33.5777 \end{aligned} \quad (11)$$

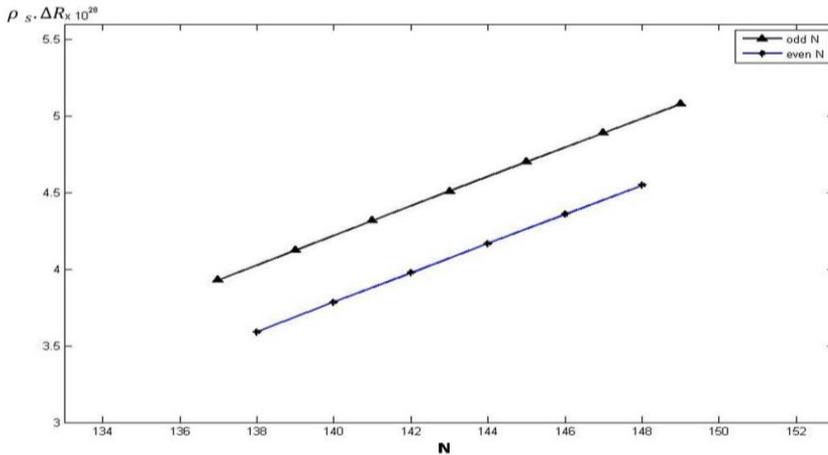
$$\begin{aligned} \text{odd } E_{lost} &= [3.05825 \times 10^{-36} Z - 5.89463 \times 10^{-34}] \rho_s - 2.82019 \\ &\times 10^{+6} Z + 5.43384 \\ &\times 10^{+8} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{even } E_{lost} &= [3.05825 \times 10^{-36} Z - 5.89463 \times 10^{-34}] \rho_s - 1.82493 \\ &\times 10^{+6} Z + 4.33932 \\ &\times 10^{+8} \end{aligned} \quad (13)$$

### النتائج ومناقشتها :

- يقع الخط البياني  $E_{lost} = f(\rho_s)$  وكذلك الخط البياني  $\rho_s = f(\Delta R)$  للنوى  $odd N$  فوق نظيريهما للنوى  $even N$  ، ويؤكد ذلك ثوابت العلاقات (10) و (11) حيث تكون أكبر للنوى  $odd N$  منها للنوى  $even N$  مما يدل على أن الطاقة الضائعة في واحدة المسافة من السماكة  $\Delta R$  تكون أكبر للنوى  $odd N$  منها للنوى  $even N$  ، مما يدل على أن طاقة التزواج للنيوترونات في السويات الطاقية العليا والتي تمثل الحد الخامس في علاقة طاقة الارتباط التجريبية (Van Weizsacker) تلعب دوراً في تماسك النواة ، حيث تكون الكثافة بصورة عامة للنوى ذات  $odd N$  أعلى منها للنوى  $even N$  .
- تخضع البروتونات الواقعة على سطح اللب الداخلي للنواة لطاقة دفع كهربائي تكون أعلى من طاقة ترابطها ومع ذلك لا يمكنها التحرر لأن الطبقة النيوترونية المحيطة بالنواة تمسكها وتمنعها من التحرر لأن الطبقة النيوترونية المحيطة بالنواة تمسكها وتمنعها من التحرر بحيث أن اقتلاعها يتطلب تقديم طاقة من الخارج أي أن طاقة اقتلاعها موجبة ، وتكون طاقة الدفع الكهربائي التي تخضع لها البروتونات الواقعة على سطح اللب الداخلي للنظائر ذات  $even N$  أدنى منها للنظائر ذات  $odd N$  ضمن كل عنصر من العناصر  $Z \geq 92$  ، مما يدل على أن نصف قطر اللب الداخلي للأولى أكبر منه للثانية .
- يمكن بناءً على ما سبق القول أن نوى النظائر ذات  $even N$  ضمن كل عنصر تحتاج لسماكة طبقة نيوترونية أدنى من نظيرتها لنوى النظائر ذات  $odd N$  ضمن نفس العنصر لتمسك بروتوناتها ، التي لولا هذه الطبقة النيوترونية لتحررت .
- بحسب الجدول (1) ترتبط  $\Delta R$  بتابع متزايد مع  $N$  ضمن نفس العنصر وهذا ما يؤكد تناقص كثافة النواة مع تزايد حجمها أو بمعنى آخر فإن كثافة النواة تتناقص من المركز بالاتجاه نحو السطح ، وكلما أضيفت طبقة إلى النواة ستكون كثافتها أدنى من التي سبقتها.

- ويظهر التمثيل البياني باستخدام برنامج (Matlab) للجداء  $\rho_s \cdot \Delta R$  بتابعية  $N$  لكل من العناصر  $Z \geq 92$  ارتباطهما وفق تابع متزايد ويدل ذلك على أن معدل تزايد  $\Delta R$  بتزايد  $N$  أعلى من معدل تناقص  $\rho_s$  بتزايد  $N$  ضمن كل عنصر ويقع الخط البياني ، هو مستقيم تقريباً ، للنوى  $odd N$  فوق الخط البياني للنوى  $even N$  ضمن نفس العنصر ويمكن أن يعزى ذلك إلى أن معدل تزايد  $\Delta R$  مع تزايد  $N$  للنوى  $odd N$  أعلى من معدل تزايد  $\Delta R$  مع تزايد  $N$  للنوى  $even N$  ضمن نفس العنصر، وعند اعتبار أن الجداء  $\rho_s \cdot \Delta R$  يعبر عن متانة الطبقة النيوترونية المحيطة بالنواة ، ستحتاج النوى لمتانة أكبر عندما تكون من النوع  $odd N$  تحصل عليها من تزايد سماكتها .



الشكل (12) : قيم  $\rho_s \cdot \Delta R$  بتابعية  $N$  لنظائر العنصر ( $95Am$ ) ذات  $odd N$  و  $even N$

### أهم النتائج والتوصيات :

- يتشكل جسيم  $\alpha$  في النوى الثقيلة المصدرة على سطح اللب الداخلي لهذه النوى ، ليخضع بعدها جسيم  $\alpha$  لطاقة دفع كهربائي ساكن من بقية بروتونات النواة ، تعمل على تحرره ، لكن هناك طاقة احتكاك ضمن الطبقة النيوترونية المحيطة بهذه النوى تعيق عملية التحرر هذه .

- تكون الطبقة النيوترونية المحيطة بنوى النظائر ذات  $even N$  ضمن كل عنصر أقل سماكة و كثافة من نظيرتها المحيطة بنوى النظائر ذات  $odd N$  ضمن نفس العنصر .
- تتألف طاقة اقتلاع البروتون الواقع على سطح اللب الداخلي من طاقة الدفع الكهربائي المطبقة عليه وهي سالبة بالإضافة للطاقة الضائعة ضمن الطبقة النيوترونية ، ويجب أن تكون المحصلة موجبة ، أي مجموع طاقة الارتباط والطاقة الضائعة ضمن الطبقة النيوترونية أكبر من طاقة الدفع المطبقة عليه ، حتى يمكن للنواة أن تكون موجودة طبيعياً أو يمكن إنتاجها صناعياً بحيث يمكن اعتبار ما سبق شرط للوجود الطبيعي أو الإنتاج الصناعي للنواة .

#### التوصيات :

يمكن إجراء الدراسة على النوى  $Z \leq 92$  المصدرة لـ  $\alpha$  لتحديد ما هي السماكة اللازمة كشرط لوجود النواة طبيعياً أو لإنتاجها صناعياً أما النوى غير المصدرة لـ  $\alpha$  فيمكن عن طريق دراسة طاقة اقتلاع بروتوناتها أو نيوتروناتها والتي في حال كانت  $\frac{N}{Z}$  متدنية ، يمكن أن تكون سماكة الطبقة النيوترونية المحيطة بالنواة صغيرة جداً أو حتى معدومة ، وفي حالات نادرة تكون  $\Delta R$  ذات قيمة سالبة أي أن البروتونات تشكل طبقة تحيط بهذه النوى وهذا يمكن إيجاده عند بعض النوى الخفيفة .

المراجع :

- [1]- K. JAGDISH,2011- **Nuclear Wallet Cards** .Bookhaven National Laboratory, New York ,U.S.A, 1-84.
- [2]-ABBAS.M,2020-**Parameter of Neutronic Shell That Enveloped the Nucleus**,Vol 42 .57-73. (In Arabic المراجع)
- [3]- ALSAYEEL.A,2015-**Kinetic Equation of Nucleons as Fermi Liquid within Nucleus**. Tishreen University ,Syria, 52-56 (In Arabic المراجع)
- [4]-FRANK.J,1992- **Moder Physics**,McGrow-Hill international edition ,physics series, .213
- [5]-MIHOUB.R,2014-**Nucleonic Distribution Corresponding to Stable and Emitting Nuclear State** . Tishreen University ,Syria, 59-60-64 (In Arabic المراجع)
- [6]-DEEB.A,2012-**Kinetic Energy of Nucleons and Radioactivity of Medial and Heavy Nuclei** . Tishreen University ,Syria, 35. (In Arabic المراجع)
- [7]-MULLEHM.J,TUFFIEHA.A,JUBILI.H,2017-**Nuclear Physics** , Tishreen University ,Syria,45. (In Arabic المراجع)