**التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية الهولومورفية الإسقاطية و التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر للسطوح الفوقية في فضاءات كيلير المكافئية**

 **الطالب: نمر حسن إيبو**

**دكتوراه رياضيات بحتة - كلية العلوم - جامعة البعث**

**بإشراف الدكتور : محسن شيحة**

**الملخص**

نُدخل أهم المفاهيم المتعلقة بالبحث: فضاء كيلير المكافئي والمنحني الهولومورفي والتطبيق الهولومورفي الإسقاطي, ثم نعرّف التشوّه اللامتناهي في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية و التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية و نعرض العناصر الهندسية اللامتغيرة في التشوهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية, نعرف فضاء كيلير الهولومورفي الإسقاطي و نثبت مبرهنة الشرط اللازم والكافي لوجود تشوه هولومورفي إسقاطي بين فضاء كيلير المكافئي و فضاء كيلير المكافئي السوي ونثبت مبرهنة الشرط اللازم و الكافي لوجود تشوه هولومورفي اسقاطي لا متناهي في الصغر بين فضاءي كيلير الهولومورفيين الإسقاطيين. و من ثم نعرف السطح الفوقي في فضاء كيلير المكافئي, و نثبت مبرهنة الشرط اللازم و الكافي كي يكون الفضاء مشوهاً هولومورفياً لا متناهياً في الصغر .

**كلمات مفتاحية :**

تشوّه هولومورفي إسقاطي لامتناهي في الصغر, فضاء كيلير المكافئي الإسقاطي, السطح الفوقي.

**Infinitesimal Projective Holomorphic Deformations between Kahler's Parabolic Holomorphic spaces and Infinitesimal Projective Holomorphic Deformations of Hypersurfaces in Kahler's Parabolic spaces**

**Abstract**

We introduce the most important concepts related to the research: Kahler's parabolic space, the holomorphic curve and the projective holomorphic application, then define the infinitesimal distortion in Kahler's parabolic spaces and the infinitesimally projective holomorphic Deformations in Kahler's parabolic spaces and present the fixed geometrical elements in the holomorphic intercomputer space distortions. Equivalent Kahler's, we know Kahler's holomorphic projection space and prove the necessary and sufficient condition theorem for the existence of a projective holomorphic deformation between the Kahler's parabolic space And the normal Kahler's parabolic space and we prove the necessary and sufficient condition theorem for the existence of an infinitely small projective holomorphic deformation between Kahler's holomorphic projective spaces. Then we know the superficial in Kahler's parabolic space, and prove the necessary and sufficient condition theorem for the space to be an infinitely small holomorphic distortion.

**Key words and phrases:**

An Infinitesimal Projective Holomorphic Deformation, Kahler's Parabolic Space, Hypersurfaces.

**مقدمة :**

تمت دراسة التطبيقات الجيوديزية والتشوّهات الجيوديزية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات ريمان من قبل العديد من العلماء أمثال يفيموف و بغاريلف و فيكوا وغيرهم . كما تمت دراسة التطبيقات الهولومورفية الإسقاطية من قبل العديد من العلماء .

نتابع في هذا البحث دراسة التشوهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية و التي هي تعميم للتشوّهات الجيوديزية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات ريمان. درسنا في المقالة التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية , ثم نتابع في هذا البحث دراسة التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية الهولومورفية الإسقاطية السوية و التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر للسطوح الفوقية في فضاءات كيلير المكافئية.

**هدف البحث :**

يهدف البحث الحالي إلى:

1. إيجاد العناصر الهندسية اللامتغيرة في التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية .
2. دراسة التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية الهولومورفية الإسقاطية.
3. دراسة التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر للسطوح الفوقية في فضاءات كيلير المكافئية.

**العمل و النتائج :**

نعرض فيما يأتي أهم المفاهيم و المبرهنات المتعلّقة بفضاءات كيلير المكافئية :

**تعريف : (فضاء كيلير المكافئي)**

يسمى فضاء ريمان , فضاء كيلير المكافئي و نرمّزه ﺑ إذا وجد فيه بالإضافة إلى التنسور

المتري تركيب أفيني رتبته يحقق الشروط الآتية:

حيث تعني المشتق موافق التغير , و رموز كريستوفيل من النوع الثاني للفضاء .

**تعريف : (المنحني الهولومورفي)**

نسمي المنحني في فضاء كيلير المكافئي منحنياً مستوياً تحليليّاً (هولومورفياً) إذا

تحققت على طول المنحني الشروط:

حيث متجه المماس للمنحني , و , و دالتان ما تتبعان للمتغيّر.

**تعريف : (التطبيق الهولومورفي الإسقاطي)**

ليكن لدينا فضاءي كيلير المكافئيين يُسمى التطبيق من فضاء كيلير

المكافئي إلى فضاء كيلير المكافئي , تطبيقاً هولومورفياً إسقاطياً إذا نقل كل منحنٍ مستوٍ تحليلي

من إلى منحنٍ مستوٍ تحليلي في .

**تعريف : (فضاء كيلير السوي)**

يسمى فضاء كيلير فضاءً سوياً محلياً, إذا أمكن في جوار أي نقطة منه اختيار نظام إحداثي أفيني , بحيث تكون رموز كريستوفيل معدومة فيه.

تتحقق في الفضاء السوي العلاقة :

وهي تمثل الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيلير فضاءً سوياً.

**تعريف : (فضاء كيلير الهولومورفي الإسقاطي)**

يسمى فضاء كيلير المكافئي هولومورفياً إسقاطياً إذا طبق تطبيقاً هولومورفياً إسقاطياً على فضاء سوي.

نعرض فيما يأتي المبرهنات التي تعطي الشروط اللازمة والكافية لوجود تطبيق هولومورفي إسقاطي غير مبتذل:

**مبرهنة :**

يكون فضاء كيلير المكافئي فضاءً هولومورفياً إسقاطياً إذا حقق تنسور ريمان في هذا الفضاء الشروط:

*حيث: ثابت و .*

**تمهيدية :**

إذا كان فضاء كيلير المكافئي و الذي يُطبّق تطبيقاً هولومورفياً إسقاطياً على فإن هو بدوره يكون فضاءً هولومورفياً إسقاطياً.

**مبرهنة :**

بين أي فضاءين من فضاءات كيلير المكافئية و الهولومورفية الإسقاطية يمكن إنشاء تطبيق هولومورفي إسقاطي بشكل غير مبتذل.

**مبرهنة :**

*إن التركيبات الموضحة في العلاقات:*

هي عناصر ثابتة في التطبيقات الهولومورفية الإسقاطية لفضاءات كيلير المكافئية .

**دراسة التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية الهولومورفية الإسقاطية و التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر للسطوح الفوقية في فضاءات كيلير المكافئية*:***

*ليكن فضاء كيلير المكافئي المنسوب إلى نظام إحداثي محلي () عندئذٍ تحدد العلاقات :*

*فضاءً جزئياً .*

*إذا كان وَ التنسور المتري ﻟ وَ على الترتيب فإنّه من نجد:*

*حيث: إذا لم نشر إلى غير ذلك.*

*ليكن*  حقلاً متجهياً مخالف التغير في مُعطى في النقطة من .

عندئذٍ *تُحدد* العلاقات :

*(*9*)*

*حيث: 𝜀 وسيط ذو قيمة صغيرة , فضاءً*  *, يُسمى التشوّه اللامتناهي في الصغر للفضاء , ويُسمى*

*الحقل حقل الإزاحة وَ*  يُسمى متجه الإزاحة.

في دراستنا للفضاء سوف نسقط وكل ما يزيد عن على اعتبار أنّ مقدار صغير.

لندرس ضمن هذه التشوّهات, التشوّهات الهولومورفية اللامتناهية في الصغر من المرتبة الأولى:

بفرض مقدار ما في الفضاء (تنسور، علاقة، دالة, ...)

عندئذٍ يوجد في ما يقابله , و الذي يمكن التعبير عنه بالشكل :

*تُحدد قيمة وسيط التشوّه 𝜀 في العلاقة على اعتبار أن المتسلسلة في متقاربة دون النظر إلى.*

*تُسمى المعاملات في العلاقة : على الترتيب, القيمة الأولى والثانية لتغير بتأثير التشوّهات اللامتناهية في الصغر ﻟ* *.*

*سوف نهتم بمبرهنة التغيّر التي نوهنا عنها أعلاه . عندما تنتهي هذه المتسلسلة عند الحد الثاني, أي سوف ندرس*

*التشوّهات اللامتناهية في الصغر من المرتبة الأولى ﻟ , وفي كثير من الأحيان نُطلق عليها اسم التشوّهات*

*اللامتناهية في الصغر أو التشوهات للاختصار.*

*عندئذٍ يُكتب التنسور المتري ﻟ على النحو :*

 *وَ*

***تمهيدية :***

*تتحقق في التشوّه اللامتناهي في الصغر للفضاء في الفضاء العلاقات :*

*حيث:التنسوران المتريان للفضاءين على الترتيب .*

***تعريف :***

يُسمى التشوّه اللامتناهي في الصغر تشوّهاً هولومورفياً إسقاطياً إذا حافظ على الخطوط الهولومورفية .

أي بمعنى أنّ الفضاءين وَ يكونا هولومورفيين فيما بينهما, حيث وَ منسوبين إلى نظام إحداثي مشترك . وبالتالي يحققان العلاقات :

حيث : ,  *, التنسور المتري للفضاء و"" المشتق الموافق التغيّر في*

*الفضاء و متجه تدرّج وَ متجه ما وَ وَ*

*وَ .*

***مبرهنة*** *:*

*إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيلير المكافئي مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهياً في الصغر هو تحقق العلاقات :*

*حيث: وَ وَ .*

**مبرهنة :**

إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيلير المكافئي مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهٍ في الصغر هو

 تحقق الشروط:

***مبرهنة :***

*إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيلير المكافئي مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهياً في الصغر غير مبتذل هو أن يكون مطبقاً هولومورفياً إسقاطياً غير مبتذل .*

***مبرهنة :***

*إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيلير المكافئي المحتوى في فضاء كيلير المكافئي ذو حقل الإزاحة مشوّهاً هومولورفياً إسقاطياً لا متناهٍ في الصغر هو تحقق الشروط :*

حيث :  *مركبات كريستوفل من النوع الأول للفضاء* . متجه ما, متجه تدرّج

 . وَ  *.*

**مبرهنة :**

يُعطى تغيّر تنسوري ريمان وَ ريتشي للفضاء بتأثير التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر

 للفضاء بالعلاقات :

حيث : *متّجه تدرّج .*

***الإثبات :***

*استناداً إلى العلاقات نجد :*

حيث : وَ حسب تعريف فضاء كيلير المكافئي.

نعوض العلاقات السابقة في العلاقة نجد:

وهي العلاقة .

حيث : لأنّ متّجه تدرّج.

بتقليص العلاقة بالدليلين  *نجد :*

تم إثبات المبرهنة.

**التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر لفضاءات كيلير المكافئية الهولومورفية الإسقاطية:**

**مبرهنة :**

إنّ الشرط اللازم والكافي لوجود تشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في الصغر بين فضاء كيلير والفضاء السوي هو تحقق الشروط :

حيث : رموز كريستوفل للفضاء , و متجه ما , متجه تدرج .

**الإثبات:**

 لزوم الشرط

لنفرض وجود تشوّه هولومورفي اسقاطي بين الفضاء والفضاء السوي , عندئذٍ استناداً إلى المبرهنة تتحقق الشروط :

نضرب طرفي العلاقة ﺑ نجد:

نجمع للطرفين فنجد:

بما أن فضاء سوي , عندئذٍ نجد , وباستبدال ﺑ ﺑ نجد

من العلاقات و نجد تحقق الشروط تم إثبات لزوم الشرط.

 كفاية الشرط

نستنتج من الشروط أنّ:

باستبدال ﺑ و باستبدال ﺑ نجد:

نجد من العلاقة السابقة والعلاقة , واستناداً إلى المبرهنة , أنّ التشوّه هولومورفي إسقاطي. تم اثبات المبرهنة .

**مبرهنة :**

إن الشرط اللازم والكافي لوجود تشوه هولومورفي إسقاطي بين فضاء كيلير المكافئي و فضاء كيلير المكافئي

السوي هو تحقق الشروط :

**الإثبات :**

 لزوم الشرط :

 بفرض يوجد تشوه هولومورفي إسقاطي بين و عندئذٍ اعتماداً على المبرهنة تتحقق الشروط:

لدينا :

حيث : وحسب تعريف فضاء كيلير المكافئي ، واستناداً إلى المبرهنة نجد تحقق الشرط .

 كفاية الشرط :

من الشروط نجد :

نبدل بين الدليلين فنجد:

نبدل في بين الدليلين فنجد:

بإجراء العملية الآتية : نستنتج:

حيث :.

نضرب طرفي العلاقة السابقة ﺑ , حيث فنجد :

نجد من العلاقة السابقة والشروط , واستناداً إلى المبرهنة , أنّ التشوه هو هولومورفي إسقاطي .

**مبرهنة :**

إذا وجد تشوّه هولومورفي إسقاطي بين فضاء كيلير المكافئي الهولومورفي الإسقاطي و فضاء كيلير , فإن هو بدوره هولومورفي إسقاطي .

**الإثبات:**

ينتج مباشرة من المبرهنة ومن التمهيدية .

**مبرهنة :**

بين أي فضاءين من فضاءات كيلير المكافئية و الهولومورفية الإسقاطية يوجد تشوّه هولومورفي إسقاطي غير مبتذل .

**الإثبات:**

ينتج مباشرة من المبرهنة ومن المبرهنة .

**مبرهنة :**

يتغير تنسور ريمان للفضاء الهولومورفي الإسقاطي بتأثير التشوه الهولومورفي الإسقاطي على الفضاء الهولومورفي الإسقاطي وفق العلاقات :

حيث :*.*

***الإثبات:***

*بما أن*  هولومورفي إسقاطي *فحسب المبرهنة تتحقق العلاقات:*

حيث ثابت و

نرفع الدليل , وذلك بضرب طرفي العلاقة السابقة ﺑ , فنجد :

نبدل كل ﺑ في العلاقة السابقة , فنجد:

وبما أن هولومورفي إسقاطي فإن استناداً إلى العلاقات يحقق:

بطرح من نجد :

ولكن  *و نعوض في العلاقة السابقة نجد:*

*تم إثبات المبرهنة.*

***نتيجة :***

*يتغير تنسور ريمان للفضاء الهولومورفي الإسقاطي بتأثير التشوّه*

*الهولومورفي الإسقاطي على الفضاء الهولومورفي الإسقاطي وفق العلاقات :*

***الإثبات:***

*ينتج مباشرةً من المبرهنة و ذلك بتعويض في العلاقات .*

***مبرهنة :***

*في التشوّه الهولومورفي الإسقاطي لفضاء كيلير المكافئي تتحقق العلاقات:*

حيث: تنسور ريمان للفضاء و تنسور ريتشي للفضاء و متجه تدرج , متجه ما و  *.*

**الإثبات:**

بما أن مشوّهاً هولومورفياً إسقاطياً فرضاً فهو هولومورفي إسقاطي استناداً إلى المبرهنة . و استناداً إلى المبرهنة نجد أن التركيبات الآتية :

هي عناصر ثابتة في التطبيقات الهولومورفية الإسقاطية لفضاءات كيلير المكافئية .

من العلاقة نجد:

حيث: , اعتماداً على المبرهنة . بطرح من نجد:

و لكن اعتماداً على المبرهنة نجد , إذن: , نعوض:

 وهي العلاقة .

نجد من العلاقة أنّ:

حيث . واستناداً إلى المبرهنة نجد إذن

وهي العلاقة .

من العلاقة نجد:

بطرح من نجد:

واستناداً إلى المبرهنة نجد إذن نعوض:

و هي العلاقة .

استناداً إلى المبرهنة نجد نعوض في , فنجد:

و هي العلاقة .

نحصل من العلاقة على :

بطرح من نجد:

*نجد استناداً إلى المبرهنة , أنّ: , نعوض:*

*و هي العلاقة .*

*تم إثبات المبرهنة.*

***ملاحظة:***

*تتحقق في التشوّه الهولومورفي للفضاء العلاقات الآتية:*

*حيث: كائن هندسي ما في الفضاء .*

**التشوهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر للسطوح الفوقية في فضاءات كيلير المكافئية :**

**تعريف : (السطح الفوقي)**

ليكن فضاء كيلير المكافئي المنسوب إلى نظام إحداثي محلي عندئذٍ تُعرّف العلاقات:

سطحاً فوقياً محتوٍ في .

تُعيّن العلاقات متجهاً , و تُشكّل قاعدة للفضاء .

نعتبر أن , وبالتالي فإن النظام على السطح الفوقي غير متخامد . أي تتحقق العلاقات :

إن جملة المتجهات تشكل قاعدة للفضاء , لذلك نفرض:

حيث:

حيث متجه و صامد في .

وحيث أن سطح فوقي في فإنه تتحقق العلاقات:

حيث هو التنسور الأساسي الثاني في و .

تسمح هذه العلاقات باستخدام حيث و يؤخذان في القاعدة نفسها.

على سبيل المثال: نجد من العلاقة أن :

نجد استناداً إلى العلاقات :

**مبرهنة :**

إن الشرط اللازم و الكافي كي يكون الفضاء مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهياً في الصغر و غير مبتذل هو أن يتواجد فيه متجه يحقق العلاقات الآتية :

حيث: متجه ما و متجه تدرج و صامد و و و  *المشتق الجزئي.*

***الإثبات:***

*نجد استناداً إلى المبرهنة , و بتعويض العلاقات في العلاقات , أنّ:*

بالاعتماد على العلاقات و مع الأخذ بعين الاعتيار أن :

و

فإنه بعمليات بسيطة لكن طويلة نجد:

*من العلاقة الأخيرة و العلاقة و استناداً إلى المبرهنة يتم المطلوب.*

الجملة هي إحداثيات بالنسبة للقاعدة و لذلك فإن العلاقات تمثل الشروط اللازمة و الكافية لكي يكون مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً غير مبتذل.

نسمي العلاقات بالعلاقات الأساسية.

بإجراء عملية التناظر التنسوري للعلاقات بالدليلين و نجد:

نبدل بين الدليلين و فنجد:

بجمع العلاقات و طرف لطرف نجد :

ولكن بما أن أي و و و

 نعوض في العلاقات السابقة فنجد :

و بتحليل مباشر للعلاقة السابقة يمكننا التأكد من أن الجملتين و متكافئتين , و توضح

العلاقة أنه من أجل التنسور تتحقق العلاقة :

و هذه مرة أخرى المبرهنة .

من أجل التنسور حيث :

فإن المعادلة تكتب بالشكل :

**ملاحظة :**

إذا كان الفضاء يتطابق مع , فإن العلاقات تحدد تحولاً لا متناهياً في الصغر في , وفي هذه الحالة نجد . نعوض في العلاقات و و , ومن العلاقات نجد:

و من العلاقات و و بما أن , نجد:

العلاقات و هي نظام معادلات للتحويل اللامتناهي في الصغر و الذي يحافظ على المنحنيات الهولومورفية الإسقاطية .

**المراجع :**

[1] Al Lamy Raad J., ˇSkodov´a M., Mikeˇs J, (2006)- **Onholomorphically**

**projective mappings from equiaffine generally recurrent spaces onto**

**K¨ahlerian spaces**. Arch. Math. Brno 42:5, 291-299.

[2] Chud´a H., Chodorov´a M., Shiha M, (2012)-**On composition of conformal and Holomorphically projective mappings between conformally K¨ahlerian spaces**. J. Appl. Math. Bratislava, 5:3, 91-96.

[3] Gavril’chenko, M.L 1989-**Geodesic deformations of Riemannian space.**

**Diff.Geom. and its Applications**, World Sci., Singapore, 47-53.

[4] Gavril’chenko, M. L, (1972)-**On geodesic deformations of hypersurfaces**, Proc. Conf. Samarkand.

 [5] Hinterleitner I, (2015)- **Holomorphically projective mappings of (pseudo-) K¨ahler manifolds preserve the class of differentiability**.Filomat**.**

 [6] Hinterleitner I, (2012)-**On holomorphically projective mappings of e-K¨ahler manifolds**. Arch. Mat. (Brno) 48, 333-338.

 [7] Курчатова И.Н., М икеш Й, (1985)- **Голоморфно\_проективные отображения келеровых пространств.** УЧ. пособие.- Одесса: ОГУ,

69 с.

[8] Mikeˇs, J. and Shiha M. and Vanˇzurov´a A , (2009)- **“Invariant objects by holomorhpically projective mappings of parabolically K¨ahler spaces**.” J. Appl. Math. 2:1, pp. 135–141.

[9] Mikeˇs J., Chud´a H., Hinterleitner I, (2014)-**Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition. Int. J. Geom. Methods Mod**. Phys. 11:5, 1450044,8p.

[10] Микеш Й, (1979)- **Геодезические и голоморфно\_проективные отображения специалных римановых пространств**: дисс; канд. наук.\_Одесса, с.107.

 [11] VEKUA, I.N, 1959- **Generalized analytic functions**. (Russian) Moscow, Fizmatgiz.

[12] Velimirovi´c, Lj. S, (2009- **Inﬁnitesimal bending, Faculty of Science and Mathematics**, Nis), ISBN 86-83481-42-5.

[13] Yano K , (1965)- **“Differential geometry on complex and almost complex spaces,”** Oxford-London -New York-Paris-Frankfurt: Pergamon Press. XII, 323 p.

 د.محسن شيحة., **العناصر الثابتة في التطبيقات الهولومورفية الإسقاطية بين فضاءات كيلير المكافئبة** . مجلة جامعة البعث , العدد .

 نمر إيبو., **التشوهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر في فضاءات كيلير المكافئية** . مجلة جامعة البعث , المجلد .