**تكاملات ريمان ــ ستيلجس المضاعفة**

**(وجود وحساب)**

**الطالب: مصطفى سالم الرزوق**

**الأستاذ المشرف: أ. د. محمد عامر**

**قسم الرياضيات ــــ كلية العلوم ــــ جامعة البعث**

**ملخص**

جاءت فكرة تكامل ريمان ــــ ستيلجس المضاعف من التعميم المباشر لتكامل ريمان ـــــ ستيلجس البسيط (تكامل ستيلجس البسيط) وتكامل ريمان المضاعف، حيث إنه من الممكن أن يتساوى تكامل ستيلجس وتكامل ريمان البسيطين، وبالتالي من الممكن الحصول على تكاملات ستيلجس لدوال بمتغيرين كما هو الحال في تكاملات ريمان المضاعفة ومثل هذه التكاملات تأخذ الشكل

واختصاراً يمكن أن يكتب بالشكل:

**كلمات مفتاحية:** تكامل ريمان، تكامل ستيلجس، تكامل ريمان ـــــ ستيلجس المضاعف، الدوال بمتغيرين.

**Double Riemann- Stieltjes integrals**

 **(existence and calculation )**

**Abstract**

The idea of Double Riemann­- Stieltjes integrals was come up from direct generalization to stieltjes integral and double Riemann integral, where it is possible to be equal stieltjes integral and Riemann integral, thus it is possible to obtain stieltjes integral for function of two variable as it is in double Riemann integrals, and such integrals take shape

A shortcut can be written as

**Key Word:** Riemann integrals, Stieltjes integral, double Riemann ­- Stieltjes integrals, function of two variables.

1. **مقدمة:**

في القرن الماضي أفاض كثير من العلماء بالحديث عن تكاملات ريمان، ريمان ــــ ستيلجس البسيطة، ولهذا رأينا أن نعمم هذه الفكرة على التكاملات المضاعفة، وسنقتصر في حديثنا على تكاملات ريمان ـــ ستيلجس المضاعفة، بالإضافة لتوضيح علاقته بتكامل ريمان المضاعف، وحالات وجوده وحسابه.

1. **أهمية وهدف البحث:**

تعريف تكامل ريمان ــــ ستيلجس المضاعف اعتماداً على تكامل ريمان المضاعف وتكامل ستيلجس البسيط، والحديث عن وجود تكامل ريمان ــــ ستيلجس المضاعف وحساب قيمته.

1. **مشكلة البحث:**

اقتصار الدراسات السابقة على تكامل ستيلجس البسيط وتطبيقاته دون التعرض لتكاملات ريمان ـــــ ستيلجس المضاعفة.

1. **مواد وطرائق البحث:**

**تعريف (1):** إذا كانت الدالة التابعة للمتحولين معرفة في جوار ما للنقطة ، عندئذ يقال إن هذه الدالة مستمرة في النقطة إذا كان بالإمكان إيجاد عدد حقيقي موجب من أجل أي عدد حقيقي موجب ، بحيث إن:

**ملاحظة (1):** إن تعريف الاستمرار يكافئ الشروط الثلاث الآتية:

1. الدالة معرفة عند النقطة.
2. أي أن النهاية موجودة.
3. ، أي أن نهاية الدالة عند النقطة تساوي قيمتها في هذه النقطة.

**تعريف (2):** يقال إن الدالة التابعة للمتحولين مستمرة في المنطقة من المستوي إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من نقاطها.

**ملاحظة (2):** يتعلق العدد ، الوارد في تعريف الاستمرار للدالة عند النقطة بالعدد وبالنقطة بشكل عام، وإذا أمكن إيجاد عدد يتعلق بالعدد فقط من أجل جميع نقاط منطقة ، يقال إن الدالة مستمرة بانتظام في هذه المنطقة.

**تعريف (3)[]:** لتكن دالة معرفاً على المستطيل المحدود:

ولتكن

تجزئة للمستطيل ، ولنشكل المجموع:

إذا كانت المجاميع(1) محدودة من الأعلى فإننا نقول إن االدالة ذات تغيرات محدودة على المستطيل ويسمى في هذه الحالة الحد الأعلى الأصغري للمجاميع(1) بالتغير لكلي للدالة في المستطيل ونكتب:

**تعريف (4) (تكامل ريمان المضاعف):**

لتكن منطقة من المستوي ، ولتكن دالة تابعة لمتحولين معرفة ومستمرة على المنطقة ، ولنفترض ابتداءً أن لأجل كل ، وليكن هو الحجم الممتد فوق المنطقة وأسفل السطح ، الشكل(1).

الشكل(1)

لنقسم المنطقة إلى مناطق جزئية(مستطيلات) ونرمز لأي منطقة جزئية اختيارية بالرمز حيث

وتكون مساحة أي مستطيل جزئي هي . الشكل(2)

الشكل(2)

إن الحجم الواقع فوق أي منطقة وأسفل الدالة يعطى بـ حيث نقطة اختيارية من المستطيل و يمثل ارتفاع العمود المقام على المنطقة و مساحة القاعدة ، الشكل(3)،

الشكل(3)

وبجمع كل الحجوم الجزئية الناتجة سنحصل على قيمة تقريبية لـ أي:

وهذا المجموع يسمى (مجموع ريمان التكاملي للدالة في المنطقة )، فإذا كانت نهاية هذا المجموع موجودة ومحدودة عندما تسعى كل من إلى اللانهاية، فإن هذه النهاية تسمى التكامل الثنائي للدالة على المنطقة ، ويرمز لهذا التكامل بالرمز

ونكتب:

**تعريف (5) (تكامل ريمان ـــ ستيلجس البسيط):**

لتكن و دالتان معرفتان ومحدودتان على المجال ولتكن

 ، تجزئة لهذا المجال حيث:

ولنختار بشكل كيفي نقطة حيث من كل مجال جزئي حيث ثم نشكل المجموع (المسمى مجموع ستيلجس التكاملي للدالة بالنسبة للدالة ):

فإذا كانت النهاية:

موجودة ومحدودة ومستقلة عن التجزئة ، وعن طريقة اختيار النقاط من المجالات الجزئية فنسمي تلك النهاية بتكامل ستيلجس للدالة بالنسبة للدالة على المجال ونرمز لها بالرمز:

ومن المعروف أن تكامل ريمان ــــ ستيلجس البسيط هو تكامل ستيلجس البسيط اختصاراً.

**تعريف (6) (نظيم التجزئة المضاعفة):**

ليكن مستطيل من ولتكن:

تجزئة لـ عندئذ نرمز لنظيم هذه التجزئة بـ ونعرفه بالشكل:

**تعريف (7) (تكامل ريمان ــــ ستيلجس المضاعف):**

لتكن دالتين معرفتين ومحدودتين على المستطيل:

ولتكن تجزئة لـ معرفة بالشكل الآتي:

ولتكن نقطة اختيارية من المستطيل

حيث

ولأجل جميع الأدلة لنضع:

عندئذ إذا كان للمجموع الآتي( المسمى مجموع ستيلجس التكاملي للدالة بالنسبة للدالة الموافق للتجزئة ):

نهاية موجودة ومحدودة عندما يسعى نظيم التجزئة للصفر، فنسمي تلك النهاية تكامل ريمان – ستيلجس المضاعف للدالة بالنسبة للدالة على المستطيل ونرمز لها بالرمز:

وللاختصار يمكن أن يكتب بالشكل:

وعندها نقول عن الدالة إنها كمولة بمفهوم ريمان – ستيلجس بالنسبة للدالة على ونكتب :

***مثال(1):*** *لنوجد باستخدام التعريف قيمة تقريبية للتكامل*

*من أجل ذلك نقوم بتقسيم المربع إلى أربع مربعات جزئية*

*كما في الشكل(4)*

الشكل(4)

*ونختار نقطة عشوائية من كل مربع كما يلي*

*وبذلك تصبح القيمة التقريبية للتكامل هي حجم المنطقة الممتدة فوق المربع وأسفل القطع المكافئ الناقصي ، وتحسب بالشكل*:

*والشكل(5) يوضح قيم تقريبية للتكامل لأجل قيم مختلفة ل*

**

الشكل(5)

***مبرهنة*(1)*( وجود تكامل ريمان ـــ ستيلجس المضاعف):*** *إذا كانت الدالة مستمرة بانتظام وكانت الدالة ذات تغيرات محدودة على المستطيل فيكون التكامل:*

*موجوداً.*

***الإثبات:*** *نفرض في البداية أن الدالة متزايدة على المستطيل حيث يكون:*

*بما أن الدالة مستمرة بانتظام على المستطيل فإنه من أجل أي عدد مفروض يوجد بحيث إنه إذا كان*

 *فإن*

*لتكن:*

*بحيث عندئذ يكون:*

*وبالتالي:*

*وبالتالي يكون التكامل*: *موجود.*

*أما إذا كانت الدالة ذات تغيرات محدودة وليست بالضرورة متزايدة فيمكن كتابتها بالشكل:*

*حيث إن الدالتين دالتان متزايدتان على المستطيل وحسب فرضيات المبرهنة يكون كل من التكاملين المضاعفين:*

*موجوداً، وبالتالي يكون التكامل:*

موجوداً أيضاً.

إذاً التكامل:

موجود، وهو المطلوب.

 ***مبرهنة*(2)*(حساب تكامل ريمان ـــ ستيلجس المضاعف):*** *إذا كانت الدالة مستمرة على المستطيل* ،

وكان للدالة مشتقاً محدوداً بالنسبة لكلا المتغيرين، وكمول ريمانياً بالنسبة لكلا المتغيرين على المستطيل ، *عندئذ يكون التكامل:*

*موجوداً، ويعطى بالشكل:*

 الإثبات:

بما أن الدالة محدودة على المستطيل  *بالنسبة لكلا المتغيرين فإن الدالة*  ذات تغيرات محدودة على المستطيل *وبالتالي التكامل:*

موجود اعتماداً على المبرهنة.

ومن الواضح أن التكامل:

*موجود أيضاً، ولنبرهن على المساواة بين هذين التكاملين.*

*لتكن التجزئة المضاعفة الآتية:*

ولنطبق دستور التزايدات المحدودة على الفرق:

*حيث إن*

وبما أن المشتق موجود ومحدود فتوجد نقطة مناسبة تحقق

*وبحيث يكون:*

*نشكل الآن مجموع ستيلجس التكاملي المضاعف كما يلي:*

وبالتالي عندما نجد أن:

وبهذا الشكل يكتمل الإثبات.

الآن بالعودة إلى المثال (1) نجد أن القيمة الحقيقية للتكامل باستخدام المبرهنة (2)

يحسب كما يلي:

**التوصيات والمقترحات:**

بعد التعرف على بعض شروط وجود تكامل ريمان ـــــ ستيلجس المضاعف وحسابه نوصي ونقترح بدراسة المواضيع الآتية:

1. العلاقة بين تكاملات ليبيغ و ريمان – ستيلجس المضاعفة.
2. تكاملات ريمان ـــــ ستيلجس التابعة لوسيط.

**المراجع:**

 [1] Cerone, P. & Dragomir, S. S. 2002. New bounds for the three-point rule involving the Riemann-Stieltjes integrals. World Science Publishing: Advances in Statistics Combinatorics and Related Areas, pp. 53–62.

[2] Clarkson, J. 1933. On double Riemann–Stieltjes integrals. Bulletin of the Australian Mathematical Society 39: 929–936.

[3] Dragomir, S. Cerone, p., Barnett, N. & Roumeliotis, J.2000. An inequality of the Osrowski type for double integrals and applications for cubature formulae.Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences 16: 1–16.

[4] Dragomir, S. Barnett, N. & Cerone, p.2003. An Osrowski type inequality for double integrals in terms of -norms and applications in numerical integration. Revue d’Analyse Numerique et de Theorie de l’Approximation 32: 161–169.

[5] Dragomir, S. 2000. On the Osrowski’s inequality for Riemann–Stieltjes integral and applications. Korean Journal of Computational & Applied Mathematics 7: 611–627.

[6] Mohammad W. Alomari, Numerous approximations of Riemann-Stieltjes double integrals, 2009.

 أ. د. إبراهيم إبراهيم،" تحليل5 " ، منشورات جامعة البعث، 1994.[7]

 أ.د. محمد عامر،" محاضرات في التحليل2 " ، جامعة البعث، كلية العلوم، قسم الرياضيات 2020-2019.