مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية للجسم (L–S) بلغة $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ وبلغة $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$، بالشكل التنسوري الصامد

أ. د.منتجب الحسن[1] رامح رجب ديب[2]

ملخص البحث

موضوع البحث هو النموذج الرياضي لجسم مرن غير متماثل المناحي (Anisotropic) ومتجانس (Homogeneous)، وغير معتبر البنية الجزيئية وذو انفعالات مرنة صغيرة، في إطار المرونة الخطية التحريكية، المعممة، المترابطة مع الحرارة، علماً أن الفرق بين درجة الحرارة المطلقة والطبيعية صغير، وقانون التوصيل الحراري المعتبر هو قانون Maxwell (1867)، عوضاً عن قانون Fourier في التوصيل الحراري، الأمر الذي يؤدي إلى معادلة توصل حراري من النمط الزائدي بسرعة موجية منتهية في اللانهاية وزمن استرخاء واحد [1]. تمت مناقشته مثل هذا السلوك الترموديناميكي المعمم بدايةً من قِبَلُ الباحثين Lord و Shulman (1967) ، حيث يُرمز لهذا الجسم بالرمز (L–S). في البحث، سنعرض أولاً الشكلين التنسوريين الصامد والناطق في النظام الاحداثي الديكارتي للنموذج الرياضي لـ (L–S)، وبعدها سنعرض الشكل التنسوري الناطق في النظام الاحداثي الديكارتي لمبدأ انحفاظ الطاقة الكلية للجسم (L–S) بلغة $\{\hat{u}_i ,\vartheta\}$ (مقطعي الإزاحة والحرارة)، وبلغة $\{\hat{S}_{i\,j} ,\hat{q}_i\}$ (مقطعي الإجهاد والتدفق الحراري). بعدها سنناقش هذين المبدأين للجسم (L–S) بالشكل التنسوري الصامد بلغة $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ (مقطعي الإزاحة والحرارة)، وبلغة $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$ (مقطعي الإجهاد والتدفق الحراري).أخيراً سننهي البحث باقتراح عدد من المسائل للمناقشة.

[1] أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

[2] طالب دكتوراه في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

الكلمات المفتاحية: الجسم (L–S) المرن الخاضع لحرارة بزمن استرخاء واحد، الشكلين التنسوريين، الصامت والناطق للنموذج الرياضي للجسم (L–S) الترموديناميكي، المرن، بزمن استرخاء واحد، مبدأ انحفاظ طاقة الجسم (L–S) الترموديناميكي، المرن، بالشكل التنسوري الصامد، بلغة $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ وبلغة $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$.

The Invariance tensorial forms of the energy balance for the (L-S) thermodynamical body of one relax time in terms of $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ and of $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$

Prof. Mountajab Al-Hasan † & **Rameh Rajab Deeb** ‡

Abstruct

This subject of the paper is the mathematical linear model of elastic, homogeneous and anisotropic body, with no considerable structure and small elastic strains, subjected to temperature field, within the linear generalized coupled thermoelasticity of very small difference between the absolute and natural temperatures, where the Maxwell hot conduction law (1867) is considerable instead of the classical Fourier one, which leads to hyperbolic heat conduction equation with finite wave speed (in infinity), and one relax time [1]. Such a generalized thermo-dynamical procedure firstly discussed by Lord and Shulman (1967), where the body shortly called (L-S). In paper, we first introduce the variance tensorial form in Cartesian coordinate system of the (L-S) mathematical model and its energy balance in terms of $\{\hat{u}_i ,\vartheta\}$ (displacement field and temperature field), and in terms of $\{\hat{S}_{i\,j} ,\hat{q}_i\}$ (stress field and heat flux vectorial field). Next, we discuss the (L−S) energy balance in the Invariance tensorial forms, in terms of $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ and in terms of $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$. Finally, we end the paper by subjecting some problem for discussing.

† Professor At Department of Mathematics – Faculty of Science – Al–Baath University.
‡ Ph.D. Student At Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.

Key words: The (L-S) Thermoelastic Body with One RelaxTime, Invariable and Variable Tensor Forms of the Mathematical Model of Thermodynamical (L-S) Elastic Body with One Relax Time, The (L-S) Energy Balance in the Invariance Tensorial Form in Terms of $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ and in terms of $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$.

1. مقدمة:

أن النظرية التقليدية (الخطية) للمرونة الحرارية (Carlson,1972) هي نقطة البداية لنظريات أخرى أعم، تضم: المرونة اللزجة الحرارية، والمرونة الحرارية بانتشار ، والمرونة الكهرطيسية الحرارية ، والمرونة الحرارية بسرعات موجية منتهية في اللانهاية؛ إذ ظهرت نظرية المرونة الحرارية المعممة بزمن استرخاء واحد نتيجة إجراء تعديل على معادلة التوصيل الحراري التقليدية، حيث اقترح ذلك التعديل Maxwell (1867) ضمن نظرية الغازات، من ثم Cattaneo (1948) ضمن التوصيل الحراري في الجسم القاسي، من ثم العديد من الباحثين، أشهرهم Lord و Shulman (1967) ضمن إطار الجسم القابل للتشوه.

في [4] تمت مناقشة الأسس والنموذج الرياضي ومبدأي انحفاظ الطاقة بلغة $\{\hat{u}_i , \vartheta\}$ وكذلك بلغة $\{\hat{S}_{i\,j} , \hat{q}_i\}$ للجسم الترموديناميكي المعمم (L–S) بزمن استرخاء واحد، كل ذلك في النظام الاحداثي الديكارتي. وفي [5]، تمت مناقشة تلك الأسس وكذلك وصف Lame لهذا الجسم الترموديناميكي المعمم (L–S) بزمن استرخاء واحد، وبالشكل التنسوري الصامد، وتم انهاء ذلك البحث بطرح مسألة للمناقشة، تطلب استنتاج مبدأي انحفاظ طاقة الجسم الترموديناميكي المعمم (L–S) بزمن استرخاء واحد، بلغة $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ و وبلغة $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$ ، وبالشكل التنسوري الصامد.

2. هدف أهمية البحث:

يهدف البحث إلى استنتاج الشكل التنسوري الصامد لكلٍ من مبدأي انحفاظ طاقة الجسم الترموديناميكي المعمم (L–S) بزمن استرخاء واحد،بلغة $\{\mathbf{u},\vartheta\}$و وبلغة $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$ ،حيث الجسم غير متجانس، وغير متماثل المناحي، ويشغل في لحظة البدء، منطقة Bبسيطة الترابط ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3 . أما أهمية البحث فتكمن بالآتي. كتابة مبدأي انحفاظ طاقة الجسم الترموديناميكي المعمم (L–S) بزمن استرخاء واحد، بالشكل التنسوري الصامد يسمح بكتابتهما في نظام احداثي منحني كيفي، الأمر الذي يمكننا من اختيار ذلك النظام الإحداثي المنحني الذي يسهل فيه كتابة هذين المبدأين، بالتالي تسهل فيه حل مسألة الجسم.

3. طرق لبحث:

سنعتمد تعميم طريقة كل من Lysik [1] و Drobot [2] و Heinbockel [3]، وتعميم الطريقة المستخدمة في [4] ، في إيجاد الشكل التنسوري الصامد لكلٍ من مبدأي انحفاظ طاقة الجسم الترموديناميكي المعمم (L–S) بزمن استرخاء واحد، بلغة $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ وبلغة $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$، حيث الجسم غير متجانس، وغير متماثل المناحي، ويشغل في لحظة البدء، منطقة B بسيطة الترابط ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3. لهذا الغرض نعرض فيمايلي نتائج [1] ، المتمثلة بالأسس الترموديناميكية المعممة والنموذج الرياضي ومبدأي انحفاظ الطاقة بلغة $\{\hat{u}_i,\vartheta\}$ وكذلك بلغة $\{\hat{S}_{ij},\hat{q}_i\}$ للجسم المعتبر (L–S) في النظام الاحداثي الديكارتي، وكذلك نتائج البحث [5] ، المتمثلة بالشكل التنسوري الصامد للأسس الترموديناميكية المعممة والنموذج الرياضي للجسم المعتبر (L–S) .

الأسس الترموديناميكية المرنة، المعممة والنموذج الرياضي من نوع Lame ومبدأي انحفاظ الطاقة بلغة $\{\hat{u}_i,\vartheta\}$ وبلغة $\{\hat{S}_{ij},\hat{q}_i\}$ للجسم (L–S)، غير المتجانس، وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط B المحدودة في R^3:

__توطئة:__ نفترض أن كافة الأدلة اللاتينية: $i\,,\,j\,,\,k\,,\,....$ تأخذ القيم $1\,,2\,,3$ ، وسنعتمد رموز Einstein على المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3، ولتكن $O\,x_1\,x_2\,x_3$ جملة مقارنة عطالية، قاعدتها $(\,\mathbf{e}_1\,,\,\mathbf{e}_2\,,\,\mathbf{e}_3\,)$. عندئذٍ توصف العملية الترموديناميكية المعممة المرنة للجسم الترموديناميكي المعمم (L–S)، من خلال أسرة المقاطع التنسورية $\{\,\mathbf{u},\mathbf{E}\,,\,\mathbf{S}\,,\vartheta,\eta\,,\mathbf{q}\}$، علماً أن $\mathbf{u}$ مقطع متجهي؛ فيزيائياً يمثل حقل الإزاحات، أما $\mathbf{E}$ و $\mathbf{S}$ هما مقطعان تنسوريان من المرتبة الثانية، متناظران، يمثلان على الترتيب، حقل الانفعالات وحقل الاجهادات، إضافةً إلى ما تقدم فإن $\vartheta=\theta-\theta_0$ ، علماً أن θ مقطع الحرارة المطلقة في الجسم، الذي هو مقطع سلمي، و θ_0 حرارة الحالة الطبيعية للجسم[3]، (وهو مقدار ثابت موجب)، أخيراً $\eta\,,\,\mathbf{q}$ ، تمثل على الترتيب مقطع الأنتروبية في الجسم والذي هو مقطع سلمي، ومقطع التدفق الحراري وهو مقطع متجهي. إذا رمزنا

[3] الحالة الطبيعية للجسم الترموديناميكي المعمم (L–S)، هي الحالة التي ينعدم فيها مقطع الأنتروبية η والمقطعين التنسوريين: $\mathbf{E}$ و $\mathbf{S}$.

بـ $A^{+} :=]\,0\,,\infty\,[$ و بـ $A := [\,0\,,\infty\,[$، فيمكن أن تمثل المقاطع التنسورية السابقة في $B \times A$، في النظام الإحداثي الديكارتي $\mathbf{e}_i$، على الشكل الآتي:

$$\mathbf{u} = \hat{u}_i\,\mathbf{e}_i \;\;,\;\; \mathbf{E} = \hat{E}_{i\,j}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \;,\; \mathbf{S} = \hat{S}_{i\,j}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \;\;,\; \mathbf{q} = \hat{q}_i\,\mathbf{e}_i \qquad (3.1)$$

حيث المصفوفة $\hat{u}_i$ في العلاقة الأولى في (3.1) تمثل مصفوفة المركبات في القاعدة الديكارتية $\mathbf{e}_i$ ، لمقطع الإزاحة $\mathbf{u}$، أما المصفوفتان $\hat{E}_{i\,j}\,,\hat{S}_{i\,j}$ في العلاقتين الثانية والثالثة في (3.1) فهما متناظرتان، وتمثلان، على الترتيب، مصفوفة المركبات الديكارتية لمقطع الانفعال، التنسوري $\mathbf{E}$، ومصفوفة المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\mathbf{S}$، أخيراً، المصفوفة $\hat{q}_i$ هي مصفوفة المركبات الديكارتية لمقطع التدفق الحراري، المتجهي $\mathbf{q}$. إن المقاطع التنسورية السابقة مجهولة، ويقابها المقطعين التنسوريين، المعلومين التاليين في $B \times A$؛ وهما مقطع القوة الحجمية، المتجهي:

$$\mathbf{b} = \hat{b}_i\,\mathbf{e}_i \qquad (3.2)$$

ومقطع المصادر الحرارية r وهو مقطع سلمي.

تعريف1: نسمي أسرة المقاطع التنسورية الناطقة، المجهولة $\{\hat{u}_i\,,\hat{E}_{i\,j}\,,\hat{S}_{i\,j}\,,\vartheta\,,\eta\,,\hat{q}_i\,\}$، سلوكاً ترموديناميكياً معمماً بزمن استرخاء واحد $t_0 > 0$، متوافقاً في $B \times A$، مع المقطعين التنسوريين المفروضين، الناطقين: $\hat{b}_i\,,\,r$ ، إذا وفقط إذا حققت هذه المقاطع التنسورية المعادلات الآتية في $B \times A$ [1]:

$$\hat{E}_{i\,j} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{i\,,j} + \hat{u}_{j\,,i}\,)\,, \qquad (3.3)$$

$$\hat{S}_{j\,i\,,\,j} + \hat{b}_i = \rho\,\ddot{\hat{u}}_i\;\;, \qquad (3.4)$$

$$\theta_0\,\dot{\eta} = -\hat{q}_{i\,,i} + r\;\;, \qquad (3.5)$$

$$\hat{S}_{i\,j} = \hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}\,\hat{E}_{k\,\ell} + \hat{M}_{i\,j}\,\vartheta\;\;, \qquad (3.6)$$

$$\theta_0\,\eta = -\theta_0\hat{M}_{i\,j}\hat{E}_{i\,j} + C_E\,\vartheta\;\;, \qquad (3.7)$$

$$L\,\hat{q}_i = -\hat{k}_{i\,j}\,\vartheta_{,j}\;\;, \qquad (3.8)$$

علماً أن L هو مؤثر اشتقاقي معطى بالعلاقة:

$$L := 1 + t_0\, \partial / \partial t \ ; \ t_0 > 0 \tag{3.9}$$

في العلاقات $(3.8)-(3.3)$، رمز الفاصلة الدليلية يدل على المشتق الجزئي بالنسبة لمتحولات الموضع؛ $f_{,i} \equiv \partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial X_i}$ ، رمز النقطة يدل على المشتق الجزئي الزمني؛ $\dot{f} \equiv \partial_t f = \dfrac{\partial f}{\partial t}$ ، الرمز ρ يدل على مقطع الكثافة الحجمية للجسم وهو مقدار ثابت نظراً لأن الجسم متجانس، الرموز $\hat{C}_{i j k \ell}\,,\ \hat{M}_{i j}\,,\ C_E$، على الترتيب، تدل على المركبات الديكارتية لمقطع المرونة، والمركبات الديكارتية لمقطع الإجهاد الحراري، وعلى الحرارة النوعية للجسم لأجل حالة انعدام مقطع الانفعال المرن له. إن هذه المقادير تحقق الخواص التالية:

$$\hat{C}_{i j k \ell} = \hat{C}_{j i k \ell} = \hat{C}_{i j \ell k} = \hat{C}_{k \ell i j}\ , \tag{3.10}$$

$$\hat{M}_{i j} = \hat{M}_{j i}\ \ , C_E > 0\ , \tag{3.11}$$

$$\hat{C}_{i j k \ell}\, \hat{E}_{i j}\, \hat{E}_{k \ell} > 0\ , \tag{3.12}$$

كما أن الرموز $\hat{k}_{i j}$ تدل عل المركبات الديكارتية لمقطع التوصيل الحراري $\mathbf{k}$، وهي تحقق:

$$\hat{k}_{i j} = \hat{k}_{j i}\ \ ,\ \hat{k}_{i j}\ \vartheta_{,i}\, \vartheta_{,j} > 0, \tag{3.13}$$

إذا فرضنا، الآن أن كلٍ من $\hat{C}_{i j k \ell}$ و $\hat{k}_{i j}$ قابل للقلب، وأن:

$$\hat{K}_{i j k \ell} = (\hat{C}_{i j k \ell})^{-1}\,,\quad \hat{\lambda}_{i j} = (\hat{k}_{i j})^{-1} \tag{3.14}$$

$$\hat{A}_{i j} = -\hat{K}_{i j k \ell}\hat{M}_{k \ell}\,,\ \ C_S = C_E - \theta_0 \hat{M}_{i j}\hat{A}_{i j} \tag{3.15}$$

فتأخذ $(3.9)-(3.3)$ الشكل المكافئ التالي في $B \times A$ [1]:

$$\hat{E}_{i j} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i})\,, \tag{3.16}$$

$$\hat{S}_{j i\,,\,j} + \hat{b}_i = \rho \ddot{\hat{u}}_i\ , \tag{3.17}$$

$$\theta_0\,\dot{\eta} = -\hat{q}_{i\,,i} + r\ \ , \tag{3.18}$$

$$\hat{E}_{i j} = \hat{K}_{i j k \ell}\hat{S}_{k \ell} + \hat{A}_{i j}\,\vartheta\ , \tag{3.19}$$

$$\theta_0\,\eta = \theta_0\,\hat{A}_{i j}\hat{S}_{i j} + C_S\,\vartheta\ , \tag{3.20}$$

$$\vartheta_{,i} = -\,\hat{\lambda}_{i j}\, L\, \hat{q}_j\ , \tag{3.21}$$

وهو تعريف جديد مكافئ للعملية الترموديناميكية المعممة المرنة للجسم (L-S)، المتوافقة في $B \times A$ مع الحمول الترموديناميكية المعلومة: $\{\mathbf{b}, r\}$، حيث: $\hat{K}_{i\,j\,k\,\ell}, \hat{A}_{i\,j}, \hat{\lambda}_{i\,j}$، على الترتيب تمثل: هي المركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\mathbf{K}$ من المرتبة الرابعة، والذي يسمى بمقطع المطاوعة المرنة، والمركبات الديكارتية للمقطع التنسوري $\mathbf{A}$ من المرتبة الثانية، والذي يسمى بمقطع التمدد الحراري، والمركبات الديكارتية للمقطع التنسوري λ من المرتبة الثانية، الذي يسمى بمقطع المقاومة الحرارية، أخيراً C_S تمثل الحرارة النوعية للجسم (L−S) خلال انعدام مقطع إجهاداته، وإلى ماتقدم ذكره، نضيف أن الكميات السابقة تحقق الخواص التالية:

$$\hat{K}_{i\,j\,k\,\ell} = \hat{K}_{j\,i\,k\,\ell} = \hat{K}_{i\,j\,\ell k} = \hat{K}_{k\,\ell\,i\,j}\,, \tag{3.22}$$

$$\hat{A}_{i\,j} = \hat{A}_{j\,i}\,,\ C_S > 0\,, \tag{3.23}$$

$$\hat{K}_{i\,j\,k\,\ell}\hat{S}_{i\,j}\hat{S}_{k\,\ell} > 0\,, \tag{3.24}$$

$$\hat{\lambda}_{i\,j} = \hat{\lambda}_{j\,i}\,,\ \hat{\lambda}_{i\,j}\,\hat{q}_i\hat{q}_j > 0\,, \tag{3.25}$$

ملاحظة1: إذا كان الجسم غير متجانساً، عندئذٍ تصبح المقادير: ρ و C_E و $\hat{k}_{i\,j}$ و $\hat{M}_{i\,j}$ و $\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}$ ، ونظرائها: ρ^{-1} و C_S^{-1} و $\hat{\lambda}_{i\,j}$ و $\hat{A}_{i\,j}$ و $\hat{K}_{i\,j\,k\,\ell}$، وكذلك t_0، تابعة للموضع: $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, X_3)$ ولا تتبع للزمن t. عندئذٍ تدعى هذه الكميات بالتوابع المادية للجسم الترموديناميكي المعمم وغير المتجانس (L−S).

ملاحظة2:

واضح أن العملية الترموديناميكية المعممة للجسم (L−S)، المتوافقة في $B \times A$ مع الحمول الترموديناميكية المعلومة $\{\mathbf{b}, r\}$، يمكن أن توصف إما من خلال (3.9)−(3.3)، أو من خلال (3.21)−(3.16). بما أن كلا النظامين معقد، فعادةً ما نقوم باختصار كلاً منها إلى نظام يحتوي أقل عدد ممكن من المقاطع التنسورية المجهولة. على سبيل المثال، بحذف مقطع الأنتروبية η من النظام (3.9)−(3.3) أو من النظام (3.21)−(3.16)، نجد أن العملية الترموديناميكية المعممة $\{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}, \vartheta, \mathbf{q}\}$، موصوفة في $B \times A$ من خلال النظام المعادلاتي:

$$\hat{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i}) , \tag{3.26}$$

$$\hat{S}_{ji,j} + \hat{b}_i = \rho \ddot{\hat{u}}_i , \tag{3.27}$$

$$-\hat{q}_{i,i} + r = C_E \dot{\vartheta} - \theta_0 \hat{M}_{ij} \dot{\hat{E}}_{ij} , \tag{3.28}$$

$$\hat{S}_{ij} = \hat{C}_{ijk\ell} \hat{E}_{k\ell} + \hat{M}_{ij} \vartheta , \tag{3.29}$$

$$L \hat{q}_i = -\hat{k}_{ij} \vartheta_{,j} , \tag{3.30}$$

أو من خلال النظام المعادلاتي:

$$\hat{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i}) , \tag{3.31}$$

$$\hat{S}_{ji,j} + \hat{b}_i = \rho \ddot{\hat{u}}_i , \tag{3.32}$$

$$-\hat{q}_{i,i} + r = C_S \dot{\vartheta} + \theta_0 \hat{A}_{ij} \dot{\hat{S}}_{ij} , \tag{3.33}$$

$$\hat{E}_{ij} = \hat{K}_{ijk\ell} \hat{S}_{k\ell} + \hat{A}_{ij} \vartheta , \tag{3.34}$$

$$\vartheta_{,i} = -\hat{\lambda}_{ij} L \hat{q}_j , \tag{3.35}$$

الشكل الديكارتي للنموذج الرياضي من نوع Lame للجسم الترموديناميكي المعمم (L−S)، غير المتجانس، وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط B ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3:

نحصل على هذا انموذج الرياضي من النظام (3.29)−(3.25)، بحذف المقاطع التنسورية: $\hat{E}_{ij}, \hat{S}_{ij}, \hat{q}_i$ ، فنحصل على معادلات الإزاحة والحرارة، التالية المحققة في $B \times A^+$:

$$\left(\hat{C}_{ijk\ell} \hat{u}_{k,\ell}\right)_{,j} - \rho \ddot{\hat{u}}_i + \left(\hat{M}_{ij} \vartheta\right)_{,j} = -\hat{b}_i , \tag{3.36}$$

$$\left(\hat{k}_{ij} \vartheta_{,j}\right)_{,i} - C_E L \dot{\vartheta} + \theta_0 \hat{M}_{ij} L \dot{\hat{u}}_{i,j} = -L r , \tag{3.37}$$

نضيف إلى ذلك الشروط الحدية والابتدائية التالية.

الشروط الابتدائية في B :

$$\hat{u}_i(.,0) = \hat{u}_{i0} , \quad \dot{\hat{u}}_i(.,0) = \dot{\hat{u}}_{i0} \quad \text{in } B , \tag{3.38}$$

$$\vartheta(.,0) = \vartheta_0 , \quad \dot{\vartheta}(.,0) = \dot{\vartheta}_0 \quad \text{in } B , \tag{3.39}$$

حيث المقاطع التنسورية الناطقة: $\{\hat{u}_{i\,0}, \dot{\hat{u}}_{i\,0}, \vartheta_0, \dot{\vartheta}_0\}$ مفروضة في B،

الشروط الحدية على $\partial B \times A$:

$$\hat{u}_i = \hat{u}'_i \quad \text{on } \partial B_1 \times A \;, \tag{3.40}$$

$$\left(\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}\,\hat{u}_{k\,,\ell} + \hat{M}_{i\,j}\,\vartheta\right)\hat{n}_j = \hat{S}'_i \quad \text{on } \partial B_2 \times A \;, \tag{3.41}$$

$$\vartheta = \vartheta' \quad \text{on } \partial B_3 \times A \;, \tag{3.42}$$

$$-\hat{k}_{i\,j}\,\vartheta_{,j}\,\hat{n}_i = q' \quad \text{on } \partial B_4 \times A \;, \tag{3.43}$$

حيث:

$$\partial B = \partial B_1 \cup \partial B_2 = \partial B_3 \cup \partial B_4 \;, \tag{3.44}$$

$$\partial B_1 \cap \partial B_2 = \partial B_3 \cap \partial B_4 = \Phi \;, \tag{3.45}$$

والمقاطع التنسورية الناطقة $\{\hat{u}'_i, \hat{S}'_i, \vartheta', q'\}$ مفروضة، و $\hat{n}_i$ المركبات الديكارتية لمقطع الواحدة المتجهي **n** الناظم على السطح ∂B، والموجه نحو خارج ∂B.

تعريف3: ندعو المقطعين التنسوريين الناطقين: $\{\hat{u}_i, \vartheta\}$ (النتائج)، المحققين للمعادلات الترموديناميكية المعممة (3.37)−(3.36)، للشروط الابتدائية(3.39)−(3.38) والشروط الحدية (3.45)−(3.40)، ندعوهما بسلوك Lame الترموديناميكي المعمم في $B \times A$ للجسم (L−S)، والمتوافق مع الحمول الترموديناميكية المفروضة (المسببات):

$$\{\,\hat{b}_i\,, r\,, \hat{u}_{i\,0}\,, \dot{\hat{u}}_{i\,0}\,, \vartheta_0\,, \dot{\vartheta}_0, \hat{u}'_i\,, \hat{S}'_i\,, \vartheta'\,, q'\,\} \tag{3.46}$$

معادلات Ignaczak بـ $\{\hat{S}_{i\,j}, \hat{q}_i\}$ لأجل الجسم الترموديناميكي المعمم، المرن (L−S)، وبزمن استرخاء واحد:

للحصول علي هذه المعادلات نقوم بحذف المقاطع التنسورية $\hat{u}_i$ و $\hat{E}_{i\,j}$ و η و ϑ من (3.21)−(3.16)، نحصل على المعادلات التنسورية التالية، المحققة في $B \times A^+$:

$$\left(\rho^{-1}\hat{S}_{(i\,k\,,\,k}\right)_{,\,j)} - \hat{K}'_{i\,j\,k\,\ell}\,\ddot{\hat{S}}_{k\,\ell} + C_S^{-1}\hat{A}_{i\,j}\,\dot{\hat{q}}_{k\,,k} = -\left(\rho^{-1}\hat{b}_{(i}\right)_{,\,j)} +$$

$$+ C_S^{-1}\hat{A}_{i\,j}\,\dot{r}, \tag{3.47}$$

$$\left(C_S^{-1}\hat{q}_{k\,,k}\right)_{,i} - \hat{\lambda}_{i\,j}\,\dot{\tilde{\hat{q}}}_j + \theta_0\left(C_S^{-1}\hat{A}_{pq}\,\dot{\hat{S}}_{p\,q}\right)_{,i} = \left(C_S^{-1}\,r\right)_{,i}\,,$$

حيث:

$$\hat{K}'_{i\,j\,k\,\ell} = \hat{K}_{i\,j\,k\,\ell} - \theta_0 C_S^{-1} \hat{A}_{i\,j} \hat{A}_{k\,\ell} \tag{3.48}$$

والرمز:

$$\breve{f} = L\, f \tag{3.49}$$

قانون انحفاظ الطاقة الكلية للجسم الترموديناميكي المعمم، المرن (L−S)، وبزمن استرخاء واحد، بلغة $\{\hat{u}_i\,,\vartheta\}$:

هـذا القـانون يتوافـق مـع المعـادلات (3.8)−(3.3) و (3.37)−(3.36). بهـدف الحصول على هذه المعادلات، نطبق المؤثر L على المعادلات (3.7)−(3.3)، ونأخذ بعين الاعتبار استقلال المعاملات المادية عن الزمن، وأن المؤثر L تبديلي مع المشتقات الجزئية بالنسبة لمتحولات الموضع، فنحصل بذلك على المعادلات التالية:

$$\breve{\hat{E}}_{i\,j} = \frac{1}{2}(\breve{\hat{u}}_{i\,,j} + \breve{\hat{u}}_{j\,,i})\,, \tag{3.50}$$

$$\breve{\hat{S}}_{j\,i\,,\,j} + \breve{\hat{b}}_i = \rho \ddot{\breve{\hat{u}}}_i\,, \tag{3.51}$$

$$\theta_0 \dot{\breve{\eta}} = -\breve{\hat{q}}_{i\,,i} + \breve{r}\,, \tag{3.52}$$

$$\breve{\hat{S}}_{i\,j} = \hat{C}_{i\,j\,k\,\ell} \breve{\hat{E}}_{k\,\ell} + \hat{M}_{i\,j}\, \breve{\vartheta}\,, \tag{3.53}$$

$$\theta_0 \breve{\eta} = -\theta_0 \hat{M}_{i\,j} \breve{\hat{E}}_{i\,j} + C_E\, \breve{\vartheta}\,, \tag{3.54}$$

$$\breve{\hat{q}}_i = -\hat{k}_{i\,j}\, \vartheta_{,j}\,, \tag{3.55}$$

بضرب طرفي المعادلة (3.51) بـ $\dot{\breve{\hat{u}}}_i$، نجد:

$$\dot{\breve{\hat{u}}}_i \breve{\hat{S}}_{j\,i\,,\,j} + \breve{\hat{b}}_i \dot{\breve{\hat{u}}}_i = \rho \dot{\breve{\hat{u}}}_i \ddot{\breve{\hat{u}}}_i\,, \tag{3.57}$$

ينتج عن ذلك وعن (3.50) أن[4] :

$$\left(\dot{\breve{\hat{u}}}_i \breve{\hat{S}}_{j\,i}\right)_{,\,j} - \dot{\breve{\hat{E}}}_{i\,j} \breve{\hat{S}}_{j\,i} + \breve{\hat{b}}_i \dot{\breve{\hat{u}}}_i = \frac{1}{2}\rho \frac{\partial}{\partial t} \dot{\breve{\hat{u}}}_i \dot{\breve{\hat{u}}}_i\,, \tag{3.58}$$

هذا من جهة أولى. من جهة ثانية ينتج عن (3.53) وعن العلاقات التناظرية (3.10) أن:

[4] من أجل أي مقطع تنسوري $P_{i\,j}$ تتحقق العلاقة: $\breve{\hat{S}}_{j\,i} P_{i\,j} = \breve{\hat{S}}_{j\,i} P_{(i\,j)}$.

$$\dot{\breve{\hat{E}}}_{i\,j}\,\breve{\hat{S}}_{j\,i}=\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}\,\dot{\breve{\hat{E}}}_{i\,j}\breve{\hat{E}}_{k\,\ell}+\hat{M}_{i\,j}\,\dot{\breve{\hat{E}}}_{i\,j}\,\breve{\vartheta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}\breve{\hat{E}}_{i\,j}\breve{\hat{E}}_{k\,\ell}\right)+\hat{M}_{i\,j}\,\dot{\breve{\hat{E}}}_{i\,j}\,\breve{\vartheta}, \tag{3.59}$$

بتعويض (3.59) في (3.58)، نجد:

$$\left(\dot{\breve{\hat{u}}}_i\,\breve{\hat{S}}_{j\,i}\right)_{,\,j}+\breve{\hat{b}}_i\,\dot{\breve{\hat{u}}}_i=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\dot{\breve{\hat{u}}}_i\dot{\breve{\hat{u}}}_i+\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}\breve{\hat{E}}_{i\,j}\breve{\hat{E}}_{k\,\ell}\right)+\hat{M}_{i\,j}\dot{\breve{\hat{E}}}_{i\,j}\,\breve{\vartheta}, \tag{3.60}$$

بمكاملة طرفي العلاقة السابقة في B، من ثم باستخدام الـ Divergence Theorem، نجد أن:

$$\int_{\partial B}\dot{\breve{\hat{u}}}_i\,\breve{\hat{S}}_{j\,i}\,\hat{n}_j\,\mathrm{d}a+\int_B\breve{\hat{b}}_i\,\dot{\breve{\hat{u}}}_i\,\mathrm{d}v==\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B\left(\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}\breve{\hat{E}}_{i\,j}\breve{\hat{E}}_{k\,\ell}+\rho\dot{\breve{\hat{u}}}_i\dot{\breve{\hat{u}}}_i\right)\mathrm{d}v+\int_B\hat{M}_{i\,j}\dot{\breve{\hat{E}}}_{i\,j}\,\breve{\vartheta}\,\mathrm{d}v\,, \tag{3.61}$$

الآن، من العلاقات (3.52) و(3.54) و (3.55)، نجد:

$$C_E\,\dot{\breve{\vartheta}}-\theta_0\hat{M}_{i\,j}\dot{\breve{\hat{E}}}_{i\,j}=\left(\hat{k}_{i\,j}\,\vartheta_{,j}\right)_{,i}+\breve{r} \tag{3.62}$$

بالتالي:

$$\hat{M}_{i\,j}\dot{\breve{\hat{E}}}_{i\,j}\,\breve{\vartheta}=\frac{C_E}{\theta_0}\,\breve{\vartheta}\dot{\breve{\vartheta}}-\frac{1}{\theta_0}\left(\hat{k}_{i\,j}\,\vartheta_{,j}\right)_{,i}\breve{\vartheta}-\frac{1}{\theta_0}\,\breve{r}\,\breve{\vartheta}\,, \tag{3.63}$$

أو:

$$\hat{M}_{i\,j}\dot{\breve{\hat{E}}}_{i\,j}\,\breve{\vartheta}=\frac{1}{2\,\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(C_E\,\breve{\vartheta}^2\right)-\frac{1}{\theta_0}\left(\hat{k}_{i\,j}\,\vartheta_{,j}\right)_{,i}\breve{\vartheta}-\frac{1}{\theta_0}\,\breve{r}\,\breve{\vartheta}\,, \tag{3.64}$$

ينتج عن ذلك وعن الخواص التناظرية $(3.25)_1$، أن:

$$\hat{M}_{i\,j}\dot{\breve{\hat{E}}}_{i\,j}\,\breve{\vartheta}=\frac{1}{2\,\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(C_E\,\breve{\vartheta}^2\right)+\frac{1}{\theta_0}\hat{k}_{i\,j}\,\vartheta_{,i}\,\vartheta_{,j}++\frac{t_0}{2\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{k}_{i\,j}\,\vartheta_{,i}\,\vartheta_{,j}\right)-\frac{1}{\theta_0}\left(\hat{k}_{i\,j}\,\vartheta_{,j}\,\breve{\vartheta}\right)_{,i}-\frac{1}{\theta_0}\,\breve{r}\,\breve{\vartheta}\,, \tag{3.65}$$

بمكاملة طرفي العلاقة (3.65) في B، من ثم باستخدام الـ Divergence Theorem، نجد أن:

$$\begin{aligned}\int_B \hat{M}_{ij}\dot{\breve{\hat{E}}}_{ij}\,\breve{\vartheta}\,\mathrm{d}v &= \frac{1}{2\theta_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B C_E\,\breve{\vartheta}^2\,\mathrm{d}v + \frac{t_0}{2\theta_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B \hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,i}\,\vartheta_{,j}\,\mathrm{d}v + \\ &+\frac{1}{\theta_0}\int_B \hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,i}\,\vartheta_{,j}\,\mathrm{d}v - \frac{1}{\theta_0}\int_{\partial B}\breve{\vartheta}\,\hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,j}\,\hat{n}_i\,\mathrm{d}a - \frac{1}{\theta_0}\int_B \breve{r}\,\breve{\vartheta}\,\mathrm{d}v\,,\end{aligned} \tag{3.66}$$

أخيراً، بتعويض (3.66) في (3.61) نحصل على:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_B \rho\dot{\breve{\hat{u}}}_i\,\dot{\breve{\hat{u}}}_i\,\mathrm{d}v + \frac{1}{2}\int_B \hat{C}_{ijk\ell}\,\breve{\hat{E}}_{ij}\,\breve{\hat{E}}_{k\ell}\,\mathrm{d}v + \frac{1}{2\theta_0}\int_B C_E\,\breve{\vartheta}^2\,\mathrm{d}v + \right.\\ &\left.+\frac{t_0}{2\theta_0}\int_B \hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,i}\,\vartheta_{,j}\,\mathrm{d}v\right] + \frac{1}{\theta_0}\int_B \hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,i}\,\vartheta_{,j}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial B}\dot{\breve{\hat{u}}}_i\,\breve{\hat{S}}_{ji}\,\hat{n}_j\,\mathrm{d}a + \\ &+\int_B \dot{\breve{\hat{u}}}_i\,\breve{\hat{b}}_i\,\mathrm{d}v + \frac{1}{\theta_0}\int_{\partial B}\breve{\vartheta}\,\hat{k}_{ij}\,\vartheta_{,j}\,\hat{n}_i\,\mathrm{d}a + \frac{1}{\theta_0}\int_B \breve{r}\,\breve{\vartheta}\,\mathrm{d}v\,,\end{aligned} \tag{3.67}$$

وهو قانون انحفاظ الطاقة الكلية للجسم الترموديناميكي المعمم، المرن (L–S)، وبزمن استرخاء واحد، بلغة $\{\hat{u}_i\,,\vartheta\}$.[5]

قانون انحفاظ الطاقة الكلية للجسم الترموديناميكي المعمم، المرن (L–S)، وبزمن استرخاء واحد، بلغة $\{\hat{S}_{ij}\,,\hat{q}_i\}$:

يتعلق هذا القانون بالمعادلتين التنسوريتين (3.47)، ويمكن الوصول إلى هذا القانون باتباع مايلي [1]. بضرب طرفي المعادلة $(3.47)_1$ بـ $\dot{\hat{S}}_{ij}$ والمعادلة $(3.47)_2$ بـ $\dot{\hat{q}}_i$، وبالأخذ بعين الاعتبار الاسناد الهامشي 4 ، نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$\begin{aligned}&\left(\rho^{-1}\hat{S}_{ik,k}\right)_{,j}\dot{\hat{S}}_{ij} - \hat{K}'_{ijk\ell}\ddot{\hat{S}}_{k\ell}\dot{\hat{S}}_{ij} + C_S^{-1}\hat{A}_{ij}\,\dot{\hat{q}}_{k,k}\dot{\hat{S}}_{ij} = \\ &-\left(\rho^{-1}\hat{b}_i\right)_{,j}\dot{\hat{S}}_{ij} + C_S^{-1}\hat{A}_{ij}\,\dot{\hat{S}}_{ij}\,\dot{r},\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\left(C_S^{-1}\hat{q}_{k,k}\right)_{,i}\dot{\hat{q}}_i - \hat{\lambda}_{ij}\,\dot{\hat{q}}_i\ddot{\hat{q}}_j + \theta_0\left(C_S^{-1}\hat{A}_{pq}\,\dot{\hat{S}}_{pq}\right)_{,i}\dot{\hat{q}}_i = \left(C_S^{-1}r\right)_{,i}\dot{\hat{q}}_i\,, \tag{3.69}$$

---

[5] في (3.67) ينبغي استبدال كلاً من $\breve{\hat{E}}_{ij}$ و $\breve{\hat{S}}_{ji}$ بما يساويه بدلالة $\{\hat{u}_i\,,\vartheta\}$ باستخدام العلاقتين (3.50) و(3.53)؛ وتركت بهذا الشكل للسهولة.

لكن بالأخذ بعين الاعتبار بأن:

$$\left(\rho^{-1}\hat{S}_{ik,k}\right)_{,j}\dot{\hat{S}}_{ij}=\left(\rho^{-1}\hat{S}_{ik,k}\dot{\hat{S}}_{ij}\right)_{,j}-\rho^{-1}\hat{S}_{ik,k}\dot{\hat{S}}_{ij,j}\,, \tag{3.70}$$

$$\left(C_S^{-1}\hat{q}_{k,k}\right)_{,i}\dot{\hat{q}}_i=\left(C_S^{-1}\hat{q}_{k,k}\dot{\hat{q}}_i\right)_{,i}-C_S^{-1}\hat{q}_{k,k}\dot{\hat{q}}_{i,i}\,, \tag{3.71}$$

$$\left(C_S^{-1}\hat{A}_{pq}\dot{\hat{S}}_{pq}\right)_{,i}\dot{\hat{q}}_i=\left(C_S^{-1}\hat{A}_{pq}\dot{\hat{S}}_{pq}\dot{\hat{q}}_i\right)_{,i}-C_S^{-1}\hat{A}_{pq}\dot{\hat{S}}_{pq}\dot{\hat{q}}_{i,i}\,, \tag{3.72}$$

بتعويض $(3.72)-(3.70)$، في (3.68) و(3.69)، من ثم بمكاملة طرفي العلاقتين الناتجتين في B، من ثم باستخدام الـ Divergence Theorem، نجد أن:

$$\begin{aligned}&\int_{\partial B}\rho^{-1}\hat{S}_{ik,k}\dot{\hat{S}}_{ij}\hat{n}_j\,\mathrm{d}a-\int_B\rho^{-1}\hat{S}_{ik,k}\dot{\hat{S}}_{ij,j}\,dv\\&-\int_B\hat{K}'_{ijk\ell}\dot{\hat{S}}_{ij}\ddot{\hat{S}}_{k\ell}\,\mathrm{d}v+\int_B C_S^{-1}\hat{A}_{ij}\dot{\hat{S}}_{ij}\dot{\hat{q}}_{k,k}\,\mathrm{d}v=\\&=-\int_B\left(\rho^{-1}\hat{b}_i\right)_{,j}\dot{\hat{S}}_{ij}\,\mathrm{d}v+\int_B C_S^{-1}\hat{A}_{ij}\dot{\hat{S}}_{ij}\dot{r}\,\mathrm{d}v\,,\end{aligned} \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\theta_0}\int_{\partial B}C_S^{-1}\hat{q}_{k,k}\dot{\hat{q}}_i\hat{n}_i\,\mathrm{d}a-\frac{1}{\theta_0}\int_B C_S^{-1}\hat{q}_{k,k}\dot{\hat{q}}_{i,i}\,\mathrm{d}v\\&-\frac{1}{\theta_0}\int_B\hat{\lambda}_{ij}\dot{\hat{q}}_i\ddot{\hat{q}}_j\,\mathrm{d}v+\int_{\partial B}C_S^{-1}\hat{A}_{pq}\dot{\hat{S}}_{pq}\dot{\hat{q}}_i\hat{n}_i\,\mathrm{d}a\\&-\int_B C_S^{-1}\hat{A}_{pq}\dot{\hat{S}}_{pq}\dot{\hat{q}}_{i,i}\,\mathrm{d}v=\frac{1}{\theta_0}\int_B\left(C_S^{-1}r\right)_{,i}\dot{\hat{q}}_i\,\mathrm{d}v\,,\end{aligned} \tag{3.74}$$

بإضافة المعادلتين السابقتين،ثم بترتيب الحدود،نحصل على قانون انحفاظ الطاقة الكلية الآتي للجسم الترموديناميكي المعمم، المرن (L–S)، وبزمن استرخاء واحد، بلغة $\{\hat{S}_{ij},\hat{q}_i\}$:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_B\rho^{-1}\hat{S}_{ik,k}\hat{S}_{ij,j}\,dv+\frac{1}{2}\int_B\hat{K}'_{ijk\ell}\dot{\hat{S}}_{ij}\dot{\hat{S}}_{k\ell}\,\mathrm{d}v+\right.\\&\left.+\frac{1}{2\theta_0}\int_B C_S^{-1}\left(\hat{q}_{k,k}\right)^2\mathrm{d}v+\frac{t_0}{2\theta_0}\int_B\hat{\lambda}_{ij}\dot{\hat{q}}_i\dot{\hat{q}}_j\,\mathrm{d}v\right]+\frac{1}{\theta_0}\int_B\hat{\lambda}_{ij}\dot{\hat{q}}_i\dot{\hat{q}}_j\,\mathrm{d}v\\&=\int_B\left[\left(\rho^{-1}\hat{b}_i\right)_{,j}\dot{\hat{S}}_{ij}-C_S^{-1}\hat{A}_{ij}\dot{\hat{S}}_{ij}\dot{r}-\theta_0^{-1}\left(C_S^{-1}r\right)_{,i}\dot{\hat{q}}_i\right]\mathrm{d}v+\\&+\int_{\partial B}\left[\rho^{-1}\hat{S}_{ik,k}\dot{\hat{S}}_{ij}\hat{n}_j+C_S^{-1}\left(\hat{A}_{pq}\dot{\hat{S}}_{pq}+\theta_0^{-1}\hat{q}_{k,k}\right)\dot{\hat{q}}_i\hat{n}_i\right]\mathrm{d}a\end{aligned} \tag{3.75}$$

في البحث، تلزمنا أيضاً نتائج البحث [12]، المتمثلة بمناقشة الشكل التنسوري الصامد للأسس الترموديناميكية المعممة ولوصف Lame الترموديناميكي المعمم للجسم (L–S) غير المتجانس وغير متماثل المناحي.يتألف الشكل التنسوري الصامد، للأسس الترموديناميكية المعممة للجسم (L–S)، غير المتجانس وغير المتماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط والمحدودة B في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3، يتألف من المعادلات التنسورية الصامدة، التالية المحققة في $B \times A$ [12]:

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \tag{3.76}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \tag{3.77}$$

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} + r = C_E \dot{\vartheta} - \theta_0 \mathbf{M} : \dot{\mathbf{E}} \,, \tag{3.78}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}[\mathbf{E}] + \mathbf{M}\vartheta \,, \tag{3.79}$$

$$\breve{\mathbf{q}} = -\mathbf{k} \nabla \vartheta \,, \tag{3.80}$$

أو من المعادلات التنسورية الصامدة، التالية المحققة في $B \times A$:

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \tag{3.81}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \tag{3.82}$$

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} + r = C_S \dot{\vartheta} + \theta_0 \mathbf{A} : \dot{\mathbf{S}} \,, \tag{3.83}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{K}[\mathbf{S}] + \mathbf{A}\vartheta \,, \tag{3.84}$$

$$\nabla \vartheta = -\boldsymbol{\lambda} \breve{\mathbf{q}} \,, \tag{3.85}$$

حيث: الرمز: $\nabla = \mathbf{e}_i \, \partial_i$؛ $\nabla \mathbf{u} \equiv \operatorname{grad} \mathbf{u} = \hat{u}_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$، والرمز الرمز $\mathbf{Q}^T$ يدل على منقول المقطع التنسوري $\mathbf{Q}$[6]، والرمز div يرمز للتفرق: $\operatorname{div} \mathbf{S} = (\partial_j \hat{S}_{ji}) \, \mathbf{e}_i$، حيث ∂_k يمثل المشتق الجزئي بالنسبة للموضع X_k؛ $\partial_k \hat{S}_{ji} = \dfrac{\partial \hat{S}_{ji}}{\partial X_k} \equiv \hat{S}_{ji,k}$، والرمز $\mathbf{M} : \dot{\mathbf{E}}$ يمثل الجداء الداخلي للمقطع التنسوري $\mathbf{M} = \hat{M}_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ مع المقطع التنسوري $\dot{\mathbf{E}} = \hat{\dot{E}}_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$، وبحسب تعريفه يعطى بـ : $\mathbf{M} : \dot{\mathbf{E}} = \hat{M}_{ij} \hat{\dot{E}}_{ij}$. كما أن:

[6] انظر [10] صفحة 6.

$\mathbf{C}[\mathbf{E}]=\hat{C}_{i\,j\,k\,\ell}\,\hat{E}_{k\,\ell}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$، أخيراً: $\mathbf{k}\,\nabla\vartheta=\hat{k}_{i\,j}\,\vartheta_{,\,j}\,\mathbf{e}_i$.

أمـا الشـكل التنسـوري الصـامد للنمـوذج الرياضـي مـن نـوع Lame للجسـم الترموديناميكي المعمم (L–S)، غير المتجانس، وغير متماثل المناحي، والذي يشغل في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط B ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3، فقد تم الحصول عليه في [13] باتباع مايلي.نحصل على هذا انموذج الرياضي من النظام المعادلاتي التنسوري الصامد (3.80)−(3.76)، بحذف المقاطع التنسورية: $\mathbf{E},\mathbf{S},\mathbf{q}$، ذلك باتباع مايلي. بتعويض (3.76) في (3.78) و (3.79)، من ثم الأخذ بعين الاعتبار أن [8,10]:

$$\mathbf{M}:(\nabla\dot{\mathbf{u}})^T=\mathbf{M}:\nabla\dot{\mathbf{u}}\ ,\ \mathbf{C}\left[(\nabla\mathbf{u})^T\right]=\mathbf{C}[\nabla\mathbf{u}]\,,$$

$$\mathbf{M}:\dot{\mathbf{E}}=\frac{1}{2}\mathbf{M}:\left[\nabla\dot{\mathbf{u}}+(\nabla\dot{\mathbf{u}})^T\right]=\mathbf{M}:\nabla\dot{\mathbf{u}}\ , \tag{3.86}$$

$$\mathbf{C}[\mathbf{E}]=\frac{1}{2}\mathbf{C}\left[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T\right]=\frac{1}{2}\left\{\mathbf{C}[\nabla\mathbf{u}]+\mathbf{C}\left[(\nabla\mathbf{u})^T\right]\right\}=\mathbf{C}[\nabla\mathbf{u}]\,,$$

فنحصل على المعادلين التنسوريتين الصامدتين، التاليتين المحققتين في $B\times A^+$:

$$-\operatorname{div}\mathbf{q}+r=C_E\,\dot{\vartheta}-\theta_0\,\mathbf{M}:\nabla\dot{\mathbf{u}}\ , \tag{3.87}$$

$$\mathbf{S}=\mathbf{C}[\nabla\mathbf{u}]+\mathbf{M}\,\vartheta\ , \tag{3.88}$$

بتطبيق المؤثر L على طرفي (3.87)، وبالأخذ بعين الاعتبار استقلال $\mathbf{M}$ و C_E عن الزمن نحصل على المعادلة التنسورية الصامدة التالية المحققة في $B\times A^+$:

$$-\operatorname{div}\breve{\mathbf{q}}+\breve{r}=C_E\,\dot{\breve{\vartheta}}-\theta_0\,\mathbf{M}:\nabla(\dot{\breve{\mathbf{u}}})\ , \tag{3.89}$$

في الخطوة الأخيرة، بتعويض (3.88) في (3.77) و (3.80) في (3.79)، نحصل على معادلتي الإزاحة والحرارة التاليتين بشكلهما التنسوري الصامد في $B\times A^+$:

$$\operatorname{div}\left\{\mathbf{C}[\nabla\mathbf{u}]\right\}+\operatorname{div}\left(\mathbf{M}\,\vartheta\right)+\mathbf{b}=\rho\ddot{\mathbf{u}}\ , \tag{3.90}$$

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right)+\breve{r}=C_E\,\dot{\breve{\vartheta}}-\theta_0\,\mathbf{M}:\nabla(\dot{\breve{\mathbf{u}}})\ , \tag{3.91}$$

وبما أن [10,p.12]:

$$\begin{gathered}\mathbf{k}^T=\mathbf{k}\ ,\ \operatorname{div}\left(\mathbf{M}\,\vartheta\right)=\vartheta\operatorname{div}\mathbf{M}+\mathbf{M}\,\nabla\vartheta\,,\\ \operatorname{div}\left(\mathbf{k}^T\,\nabla\vartheta\right)=\left(\nabla\vartheta\right).\operatorname{div}\mathbf{k}+\mathbf{k}.\nabla\left(\nabla\vartheta\right),\end{gathered} \tag{3.92}$$

فتأخذ المعادلتان التنسوريتان (3.91)−(3.90)، الشكل التالي في $B\times A^+$:

$$\operatorname{div}\left\{\mathbf{C}\left[\nabla\mathbf{u}\right]\right\}+\mathbf{M}\nabla\vartheta+\vartheta\operatorname{div}\mathbf{M}+\mathbf{b}=\rho\ddot{\mathbf{u}}\ , \qquad (3.93)$$

$$\mathbf{k}.\nabla(\nabla\vartheta)+(\nabla\vartheta).\operatorname{div}\mathbf{k}-C_E\,\breve{\dot{\vartheta}}+\theta_0\mathbf{M}:\nabla(\breve{\dot{\mathbf{u}}})=-\breve{r}\ , \qquad (3.94)$$

إلى ذلك نضيف الشروط الحدية والابتدائية التالية:

الشروط الابتدائية في B :

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0\ ,\ \ \dot{\mathbf{u}}=\dot{\mathbf{u}}_0\ , \qquad (3.95)$$

$$\vartheta=\vartheta_0\ ,\ \ \dot{\vartheta}=\dot{\vartheta}_0\ , \qquad (3.96)$$

حيث المقاطع التنسورية الناطقة: $\{\mathbf{u}_0,\dot{\mathbf{u}}_0,\vartheta_0,\dot{\vartheta}_0\}$ مفروضة في B،

الشروط الحدية على $\partial B\times A$:

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}'\quad \text{on }\ \partial B_1\times A\ , \qquad (3.97)$$

$$\left\{\mathbf{C}\left[\nabla\mathbf{u}\right]+\mathbf{M}\vartheta\right\}\mathbf{n}=\mathbf{S}'\quad \text{on }\ \partial B_2\times A\ , \qquad (3.98)$$

$$\vartheta=\vartheta'\quad \text{on }\ \partial B_3\times A\ , \qquad (3.99)$$

$$-(\mathbf{k}\nabla\vartheta)\mathbf{n}=q'\quad \text{on }\ \partial B_4\times A\ , \qquad (3.100)$$

تعريف1: ندعو المقطعين التنسوريين الصامدين: $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ (النتائج)، المحققين للمعادلات التنسورية الناطقة، الترموديناميكية المعممة (3.94)−(3.93)، وللشروط الابتدائية (3.96)−(3.95) وللشروط الحدية (3.100)−(3.97)، ندعوهما بسلوك Lame التنسوري الصامد،الترموديناميكي المعمم في $B\times A$ للجسم (L−S)، والمتوافق مع الحمول الترموديناميكية المفروضة (المسببات):

$$\{\ \mathbf{b}\,,\,r\,,\mathbf{u}_0\,,\,\dot{\mathbf{u}}_0\,,\,\vartheta_0\,,\dot{\vartheta}_0,\mathbf{u}',\mathbf{S}',\,\vartheta',q'\} \qquad (3.101)$$

4. النتائج والمناقشة:

سنناقش الشكل التنسوري الصامد لقانون انحفاظ طاقة الجسم الترموديناميكي المعمم (L−S) بزمن استرخاء واحد،بلغة $\{\mathbf{u},\vartheta\}$، وبلغة $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$،حيث الجسم غير متجانس،وغير متماثل المناحي، ويشغل في لحظة البدء، منطقة Bبسيطة الترابط ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3، وذلك باتباع طريقة هي تعميم الطريقة المستخدمة في [4,5,6,12]، انطلاقاً من حقيقية أن اللامتغيرات ومنها المقاطع التنسورية، لا تتغير بتغيير النظام الاحداثي المنحني.

في هذه الفقرة، بدالةً، يلزمنا فيمايلي استنتاج الشكل التنسوري الصامد لمعادلات Ignaczak بلغة $\{\mathbf{S}, \mathbf{q}\}$ لأجل الجسم الترموديناميكي المعمم،المرن (L–S)، بزمن استرخاء واحد، والتي سنحتاجها فيما بعد في استنتاج الشكل التنسوري الصامد لقانون انحفاظ طاقة الجسم الترموديناميكي المعمم (L–S) بزمن استرخاء واحد،بلغة $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$ ،حيث الجسم غير متجانس،وغير متماثل المناحي، ويشغل في لحظة البدء، منطقة Bبسيطة الترابط ومحدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3.

للحصول على هذه المعادلات نقوم بحذف المقاطع التنسورية $\mathbf{u}$ و $\mathbf{E}$ و ηو ϑ من (3.85)–(3.81)، باتباع مايلي. لنعرف المؤثر $\hat{\nabla}$ بالشكل [10]:

$$\hat{\nabla}\mathbf{Q} = \operatorname{sym}\nabla\mathbf{Q} \equiv \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{Q} + (\nabla\mathbf{Q})^T] \,, \qquad (4.1)$$

حيث $\mathbf{Q}$ أي مقطع متجهي على $B \times A$.

بتطبيق المؤثر $\hat{\nabla}$ على طرفي المعادلة (3.82) (بعد ضرب طرفيها بـ ρ^{-1})، من ثم باستخدام العلاقة (3.81)، وبتطبيق المؤثر ∇ طرفي المعادلة (3.83) (بعد ضرب طرفيها بـ $-C_S^{-1}$) ، نحصل على المعادلتين التنسوريتين الصامدتين، التاليين:

$$\hat{\nabla}\left(\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{S}\right) + \hat{\nabla}\left(\rho^{-1}\mathbf{b}\right) = \hat{\nabla}\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{E}} \qquad (4.2)$$

$$\nabla\left(C_S^{-1}\operatorname{div}\mathbf{q}\right) - \nabla\left(C_S^{-1}r\right) = -\nabla\dot{\vartheta} - \theta_0\nabla\left(C_S^{-1}\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right) \,, \qquad (4.3)$$

أو :

$$\hat{\nabla}\left(\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{S}\right) - \ddot{\mathbf{E}} = -\hat{\nabla}\left(\rho^{-1}\mathbf{b}\right) \qquad (4.4)$$

$$\nabla\left(C_S^{-1}\operatorname{div}\mathbf{q}\right) + \nabla\dot{\vartheta} + \theta_0\nabla\left(C_S^{-1}\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right) = \nabla\left(C_S^{-1}r\right) \,, \qquad (4.5)$$

بتعويض (3.84) في (4.4)، و(3.85) في (4.5)، نحصل على المعادلتين[7]:

$$\hat{\nabla}\left(\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{S}\right) - \mathbf{K}\left[\ddot{\mathbf{S}}\right] - \mathbf{A}\ddot{\vartheta} = -\hat{\nabla}\left(\rho^{-1}\mathbf{b}\right) \qquad (4.6)$$

$$\nabla\left(C_S^{-1}\operatorname{div}\mathbf{q}\right) - \boldsymbol{\lambda}\,\ddot{\mathbf{q}} + \theta_0\nabla\left(C_S^{-1}\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right) = \nabla\left(C_S^{-1}r\right) \,, \qquad (4.7)$$

هذا من جهة أولى. من جهة ثانية، من المعادلة (3.83) ، بعد ضرب طرقيها بـ C_S^{-1}، من ثم اشتقاق المعادلة الناتجة جزئياً بالنسبة للزمن، نجد أن:

[7] ينتج عن كون المعاملات المادية مستقلة عن الزمن أن: $\mathbf{K}\left[\ddot{\mathbf{S}}\right] = \left(\mathbf{K}\left[\mathbf{S}\right]\right)^{\cdot\cdot}$ ، كذلك الأمر: $(\mathbf{A}\,\vartheta)^{\cdot\cdot} = \mathbf{A}\,\ddot{\vartheta}$.

$$-C_S^{-1}\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}+C_S^{-1}\dot{r}=\ddot{\vartheta}+\theta_0 C_S^{-1}\mathbf{A}:\ddot{\mathbf{S}}\ , \tag{4.8}$$

أو:

$$\ddot{\vartheta}=-C_S^{-1}\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}-\theta_0 C_S^{-1}\mathbf{A}:\ddot{\mathbf{S}}+C_S^{-1}\dot{r}\ , \tag{4.9}$$

وبضرب طرفي العلاقة السابقة بالمقطع التنسوري $\mathbf{A}$، نجد:

$$\mathbf{A}\ddot{\vartheta}=-C_S^{-1}\mathbf{A}\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}-\theta_0 C_S^{-1}\mathbf{A}\left(\mathbf{A}:\ddot{\mathbf{S}}\right)+C_S^{-1}\mathbf{A}\dot{r}\ , \tag{4.10}$$

الآن، بما أن:

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}=\hat{A}_{ij}\hat{A}_{k\ell}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_\ell \tag{4.11}$$

فبسهولة عندئذٍ يمكن التأكد من أن:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{A}:\ddot{\mathbf{S}}\right)=\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\right)\left[\ddot{\mathbf{S}}\right] \tag{4.12}$$

بتعويض (4.12) في (4.10)، نجد:

$$\mathbf{A}\ddot{\vartheta}=-C_S^{-1}\mathbf{A}\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}-\theta_0 C_S^{-1}\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\right)\left[\ddot{\mathbf{S}}\right]+C_S^{-1}\mathbf{A}\dot{r}\ , \tag{4.13}$$

بتعويض (4.13) في (4.6)، نحصل على:

$$\begin{aligned}&\hat{\nabla}\left(\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{S}\right)-\mathbf{K}\left[\ddot{\mathbf{S}}\right]+\theta_0 C_S^{-1}\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\right)\left[\ddot{\mathbf{S}}\right]+C_S^{-1}\mathbf{A}\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}=\\&=-\hat{\nabla}\left(\rho^{-1}\mathbf{b}\right)+C_S^{-1}\mathbf{A}\dot{r}\end{aligned} \tag{4.14}$$

وبما أن:

$$\begin{aligned}&-\mathbf{K}\left[\ddot{\mathbf{S}}\right]+\theta_0 C_S^{-1}\mathbf{A}^2\left[\ddot{\mathbf{S}}\right]=-\left[\mathbf{K}-\theta_0 C_S^{-1}\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\right)\right]\left[\ddot{\mathbf{S}}\right]=\\&=-\mathbf{K}'\left[\ddot{\mathbf{S}}\right]\end{aligned} \tag{4.15}$$

حيث:

$$\mathbf{K}'=\mathbf{K}-\theta_0 C_S^{-1}\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\right) \tag{4.16}$$

فبتعويض (4.15) في (4.14) نحصل على:

$$\hat{\nabla}\left(\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{S}\right)-\mathbf{K}'\left[\ddot{\mathbf{S}}\right]+C_S^{-1}\mathbf{A}\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}=-\hat{\nabla}\left(\rho^{-1}\mathbf{b}\right)+C_S^{-1}\mathbf{A}\dot{r} \tag{4.17}$$

ندعوا جملة المعادلتين:

$$\begin{aligned}&\hat{\nabla}\left(\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{S}\right)-\mathbf{K}'\left[\ddot{\mathbf{S}}\right]+C_S^{-1}\mathbf{A}\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}=-\hat{\nabla}\left(\rho^{-1}\mathbf{b}\right)+C_S^{-1}\mathbf{A}\dot{r}\ ,\\&\nabla\left(C_S^{-1}\operatorname{div}\mathbf{q}\right)-\boldsymbol{\lambda}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}+\theta_0\nabla\left(C_S^{-1}\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)=\nabla\left(C_S^{-1}r\right)\ ,\end{aligned} \tag{4.19}$$

بالشكل التنسوري الصامد لمعادلات Ignaczak بلغة $\{\mathbf{S}, \mathbf{q}\}$ لأجل الجسم الترموديناميكي المعمم، المرن (L–S)، بزمن استرخاء واحد.

4.أ. الشكل التنسوري الصامد لقانون انحفاظ الطاقة الكلية للجسم الترموديناميكي المعمم، المرن (L–S)، وبزمن استرخاء واحد، بلغة $\{\mathbf{u}, \vartheta\}$:

هذا القانون يتوافق مع المعادلات (3.80)– (3.76) و(3.94)–(3.93). بهدف الحصول على هذه المعادلات، نطبق المؤثر L على المعادلات (3.79)–(3.76)، ونأخذ بعين الاعتبار استقلال المعاملات المادية عن الزمن، وأن المؤثر L تبديلي مع المشتقات الجزئية بالنسبة لمتحولات الموضع، فنحصل بذلك على المعادلات التالية:

$$\breve{\mathbf{E}} := \frac{1}{2}[\nabla \breve{\mathbf{u}} + (\nabla \breve{\mathbf{u}})^T] \tag{4.20}$$

$$\operatorname{div} \breve{\mathbf{S}} + \breve{\mathbf{b}} = \rho \ddot{\breve{\mathbf{u}}} \tag{4.21}$$

$$-\operatorname{div} \breve{\mathbf{q}} + \breve{r} = C_E \dot{\breve{\vartheta}} - \theta_0 \mathbf{M} : \dot{\breve{\mathbf{E}}} \ , \tag{4.22}$$

$$\breve{\mathbf{S}} = \mathbf{C}\left[\breve{\mathbf{E}}\right] + \mathbf{M}\breve{\vartheta} \ , \tag{4.23}$$

$$\breve{\mathbf{q}} = -\mathbf{k}\,\nabla \vartheta \ , \tag{4.24}$$

بضرب طرفي المعادلة (4.21)، داخلياً بـ $\dot{\breve{\mathbf{u}}}$، نجد:

$$\dot{\breve{\mathbf{u}}} . \operatorname{div} \breve{\mathbf{S}} + \breve{\mathbf{b}} . \dot{\breve{\mathbf{u}}} = \rho \dot{\breve{\mathbf{u}}} . \ddot{\breve{\mathbf{u}}} \ , \tag{4.25}$$

ينتج عن ذلك وعن (4.20) أن[8]:

$$\dot{\breve{\mathbf{u}}} . \operatorname{div} \breve{\mathbf{S}} + \breve{\mathbf{b}} . \dot{\breve{\mathbf{u}}} = \rho \dot{\breve{\mathbf{u}}} . \ddot{\breve{\mathbf{u}}} \ , \tag{4.26}$$

$$\operatorname{div}\left(\breve{\mathbf{S}}\dot{\breve{\mathbf{u}}}\right) - \dot{\breve{\mathbf{E}}} : \breve{\mathbf{S}} + \breve{\mathbf{b}} . \dot{\breve{\mathbf{u}}} = \frac{1}{2}\rho \frac{\partial}{\partial t} \dot{\breve{\mathbf{u}}}^2 \ , \tag{4.27}$$

هذا من جهة أولى. ومن جهة ثانية، ينتج عن (4.23) ، أن:

$$\dot{\breve{\mathbf{E}}} : \breve{\mathbf{S}} = \left(\mathbf{C}\left[\breve{\mathbf{E}}\right]\right) : \dot{\breve{\mathbf{E}}} + \left(\mathbf{M} : \dot{\breve{\mathbf{E}}}\right)\breve{\vartheta} \ , \tag{4.28}$$

ولكن ينتج عن الخواص التناظرية للمقطع التنسوري من المرتبة الرابعة: $\mathbf{C}$، أن:

$$\left(\mathbf{C}\left[\breve{\mathbf{E}}\right]\right) : \dot{\breve{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\mathbf{C}\left[\breve{\mathbf{E}}\right]\right) : \breve{\mathbf{E}}\right\} \ , \tag{4.29}$$

[8] من أجل أي مقطع تنسوري من المرتبة الثانية: $\mathbf{P}$ ، تتحقق العلاقة: $\breve{\mathbf{S}} : \mathbf{P} = \breve{\mathbf{S}} : \operatorname{sym}\mathbf{P}$.

بالتالي بتعويض (4.29) في (4.28)، نحصل على:

$$\dot{\breve{\mathbf{E}}}:\breve{\mathbf{S}}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\mathbf{C}\left[\breve{\mathbf{E}}\right]\right):\breve{\mathbf{E}}\right\}+\left(\mathbf{M}:\dot{\breve{\mathbf{E}}}\right)\breve{\vartheta}\ , \qquad (4.30)$$

فبتعويض (4.30) في (4.27)، نجد:

$$\operatorname{div}\left(\breve{\mathbf{S}}\dot{\breve{\mathbf{u}}}\right)+\breve{\mathbf{b}}.\dot{\breve{\mathbf{u}}}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\,\dot{\breve{\mathbf{u}}}^2+\left(\mathbf{C}\left[\breve{\mathbf{E}}\right]\right):\breve{\mathbf{E}}\right]+\left(\mathbf{M}:\dot{\breve{\mathbf{E}}}\right)\breve{\vartheta}, \qquad (4.27)$$

بمكاملة طرفي العلاقة السابقة في B، من ثم باستخدام الـDivergence Theorem، نجد:

$$\begin{aligned}&\int_{\partial B}\left(\breve{\mathbf{S}}\dot{\breve{\mathbf{u}}}\right).\mathbf{n}\,\mathrm{d}a+\int_{B}\breve{\mathbf{b}}.\dot{\breve{\mathbf{u}}}\,\mathrm{d}v=\\&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{B}\left[\left(\mathbf{C}\left[\breve{\mathbf{E}}\right]\right):\breve{\mathbf{E}}+\rho\,\dot{\breve{\mathbf{u}}}^2\right]\mathrm{d}v+\int_{B}\left(\mathbf{M}:\dot{\breve{\mathbf{E}}}\right)\breve{\vartheta}\,\mathrm{d}v\ ,\end{aligned} \qquad (4.28)$$

الآن، بتعويض (4.24) في (4.22)، نجد:

$$C_E\,\dot{\breve{\vartheta}}-\theta_0\,\mathbf{M}:\dot{\breve{\mathbf{E}}}=\operatorname{div}\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right)+\breve{r}\ , \qquad (4.29)$$

بالتالي:

$$\left(\mathbf{M}:\dot{\breve{\mathbf{E}}}\right)\breve{\vartheta}=\frac{C_E}{\theta_0}\,\breve{\vartheta}\,\dot{\breve{\vartheta}}-\frac{1}{\theta_0}\left[\operatorname{div}\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right)\right]\breve{\vartheta}-\frac{1}{\theta_0}\,\breve{r}\,\breve{\vartheta}\ , \qquad (4.30)$$

أو:

$$\left(\mathbf{M}:\dot{\breve{\mathbf{E}}}\right)\breve{\vartheta}=\frac{1}{2\,\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(C_E\,\breve{\vartheta}^2\right)-\frac{1}{\theta_0}\left[\operatorname{div}\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right)\right]\breve{\vartheta}-\frac{1}{\theta_0}\,\breve{r}\,\breve{\vartheta}\ , \qquad (4.31)$$

وبما أن [10]:

$$\left[\operatorname{div}\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right)\right]\breve{\vartheta}=\operatorname{div}\left[\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right)\,\breve{\vartheta}\right]-\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\nabla\breve{\vartheta}\ , \qquad (4.32)$$

بتعويض (4.32) في (4.31)، نجد:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{M}:\dot{\breve{\mathbf{E}}}\right)\breve{\vartheta}&=\frac{1}{2\,\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(C_E\,\breve{\vartheta}^2\right)+\frac{1}{\theta_0}\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\nabla\breve{\vartheta}\\&-\frac{1}{\theta_0}\operatorname{div}\left[\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right)\,\breve{\vartheta}\right]-\frac{1}{\theta_0}\,\breve{r}\,\breve{\vartheta}\ ,\end{aligned} \qquad (4.33)$$

وبما أن:

$$\nabla\breve{\vartheta}=\nabla\left[\left(1+t_0\frac{\partial}{\partial t}\right)\vartheta\right]=\nabla\vartheta+t_0\nabla\dot{\vartheta} \qquad (4.34)$$

فتصبح العلاقة (4.33) بالشكل:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{M}:\dot{\breve{\mathbf{E}}}\right)\breve{\vartheta} &= \frac{1}{2\,\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(C_E\,\breve{\vartheta}^2\right)+\frac{1}{\theta_0}\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\nabla\vartheta+\\ &+\frac{t_0}{\theta_0}\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\nabla\dot{\vartheta}-\frac{1}{\theta_0}\operatorname{div}\left[\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right)\,\breve{\vartheta}\right]-\frac{1}{\theta_0}\,\breve{r}\,\breve{\vartheta}\ ,\end{aligned}\tag{4.35}$$

لكن ينتج عن ذلك وعن الخواص التناظرية للمقطع التنسوري من المرتبة الثانية $\mathbf{k}$، أن:

$$\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\nabla\dot{\vartheta}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\nabla\vartheta\right],\tag{4.36}$$

وبذلك تصبح العلاقة (4.35) بالشكل:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{M}:\dot{\breve{\mathbf{E}}}\right)\breve{\vartheta} &= \frac{1}{2\,\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(C_E\,\breve{\vartheta}^2\right)+\frac{1}{\theta_0}\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\nabla\vartheta+\\ &+\frac{t_0}{2\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\nabla\vartheta\right]-\frac{1}{\theta_0}\operatorname{div}\left[\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right)\,\breve{\vartheta}\right]-\frac{1}{\theta_0}\,\breve{r}\,\breve{\vartheta}\ ,\end{aligned}\tag{4.37}$$

بمكاملة طرفي العلاقة (4.37) في B ،من ثم باستخدام الـDivergence Theorem، نجد:

$$\begin{aligned}\int_B\left(\mathbf{M}:\dot{\breve{\mathbf{E}}}\right)\breve{\vartheta}\,\mathrm{d}v &= \frac{1}{2\theta_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B C_E\,\breve{\vartheta}^2\,\mathrm{d}v+\frac{t_0}{2\theta_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_B\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\nabla\vartheta\,\mathrm{d}v+\\ &+\frac{1}{\theta_0}\int_B\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\nabla\vartheta\,\mathrm{d}v-\frac{1}{\theta_0}\int_{\partial B}\breve{\vartheta}\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\mathbf{n}\,\mathrm{d}a-\frac{1}{\theta_0}\int_B\breve{r}\,\breve{\vartheta}\,\mathrm{d}v\ ,\end{aligned}\tag{4.38}$$

أخيراً، بتعويض (4.38) في (4.28) نحصل على:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_B\rho\,\dot{\breve{\mathbf{u}}}^2\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\int_B\left(\mathbf{C}\left[\breve{\mathbf{E}}\right]\right):\breve{\mathbf{E}}\,\mathrm{d}v+\frac{1}{2\theta_0}\int_B C_E\,\breve{\vartheta}^2\,\mathrm{d}v+\right.\\ &\left.+\frac{t_0}{2\theta_0}\int_B\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\nabla\vartheta\,\mathrm{d}v\right]+\frac{1}{\theta_0}\int_B\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\nabla\vartheta\,\mathrm{d}v=\int_{\partial B}\left(\breve{\mathbf{S}}\dot{\breve{\mathbf{u}}}\right).\mathbf{n}\,\mathrm{d}a+\\ &+\int_B\dot{\breve{\mathbf{u}}}.\breve{\mathbf{b}}\ \ \mathrm{d}v+\frac{1}{\theta_0}\int_{\partial B}\breve{\vartheta}\left(\mathbf{k}\,\nabla\vartheta\right).\mathbf{n}\,\mathrm{d}a+\frac{1}{\theta_0}\int_B\breve{r}\,\breve{\vartheta}\,\mathrm{d}v\ ,\end{aligned}\tag{4.39}$$

وهو الشكل التنسوري الصامد لقانون انحفاظ الطاقة الكلية للجسم الترموديناميكي المعمم، المرن (L–S)، وبزمن استرخاء واحد، بلغة $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ [9].

4.ب. الشكل التنسوري الصامد لقانون انحفاظ الطاقة الكلية للجسم الترموديناميكي المعمم، المرن (L–S)، وبزمن استرخاء واحد، بلغة $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$:

يتعلق هذا القانون بالمعادلتين التنسوريتين (4.19)، ويمكن الوصول إلى هذا القانون باتباع مايلي. بضرب طرفي المعادلة $(4.19)_1$ داخلياً بـ $\dot{\mathbf{S}}$ وطرفي المعادلة $(4.19)_2$ داخلياً بـ $\dot{\mathbf{q}}$، وبالأخذ بعين الاعتبار الاسناد الهامشي 8، نحصل على المعادلتين التاليتين:

$$\begin{aligned}&\left[\nabla\left(\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{S}\right)\right]:\dot{\mathbf{S}}-\left(\mathbf{K}'\left[\ddot{\mathbf{S}}\right]\right):\dot{\mathbf{S}}+C_S^{-1}\left(\mathbf{A}\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}\right):\dot{\mathbf{S}}=\\&=-\left[\nabla\left(\rho^{-1}\mathbf{b}\right)\right]:\dot{\mathbf{S}}+C_S^{-1}(\mathbf{A}\dot{r}):\dot{\mathbf{S}},\end{aligned}\tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}&\left[\nabla\left(C_S^{-1}\operatorname{div}\mathbf{q}\right)\right].\dot{\mathbf{q}}-\left(\boldsymbol{\lambda}\,\ddot{\mathbf{q}}\right).\dot{\mathbf{q}}+\theta_0\left[\nabla\left(C_S^{-1}\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\right].\dot{\mathbf{q}}=\\&=\left[\nabla\left(C_S^{-1}r\right)\right].\dot{\mathbf{q}}\ ,\end{aligned}\tag{4.41}$$

لكن بالأخذ بعين الاعتبار أن [10]:

$$\left[\nabla\left(\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{S}\right)\right]:\dot{\mathbf{S}}=\operatorname{div}\left[\left(\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{S}\right)\dot{\mathbf{S}}\right]-\rho^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{S}).\left(\operatorname{div}\dot{\mathbf{S}}\right),\tag{4.42}$$

$$\left[\nabla\left(C_S^{-1}\operatorname{div}\mathbf{q}\right)\right].\dot{\mathbf{q}}=\operatorname{div}\left[C_S^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}\right]-C_S^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{q})(\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}})\ ,\tag{4.43}$$

$$\left[\nabla\left(C_S^{-1}\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\right].\dot{\mathbf{q}}=\operatorname{div}\left[C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\dot{\mathbf{q}}\right]-C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}\ ,\tag{4.44}$$

بتعويض (4.44)–(4.42)، في (4.40) و(4.41)، نجد:

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}\left[\left(\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{S}\right)\dot{\mathbf{S}}\right]-\rho^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{S}).\left(\operatorname{div}\dot{\mathbf{S}}\right)-\left(\mathbf{K}'\left[\ddot{\mathbf{S}}\right]\right):\dot{\mathbf{S}}+\\&+C_S^{-1}\left(\mathbf{A}\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}\right):\dot{\mathbf{S}}=-\left[\nabla\left(\rho^{-1}\mathbf{b}\right)\right]:\dot{\mathbf{S}}+C_S^{-1}(\mathbf{A}\dot{r}):\dot{\mathbf{S}},\end{aligned}\tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}\left[C_S^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}\right]-C_S^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{q})(\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}})-\left(\boldsymbol{\lambda}\,\ddot{\mathbf{q}}\right).\dot{\mathbf{q}}+\\&+\theta_0\operatorname{div}\left[C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\dot{\mathbf{q}}\right]-\theta_0C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}=\left[\nabla\left(C_S^{-1}r\right)\right].\dot{\mathbf{q}}\ ,\end{aligned}\tag{4.46}$$

---

[9] في (4.39) ينبغي استبدال كلاً من $\breve{\mathbf{E}}$ و $\breve{\mathbf{S}}$ بما يساويه بدلالة $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ باستخدام العلاقتين (4.20) و(4.23)؛ وتركت بهذا الشكل للسهولة.

بمكاملة طرفي العلاقتين السابقتين في B، من ثم باستخدام الـ Divergence Theorem، نجد أن:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B}\left(\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{S}\right).\left(\dot{\mathbf{S}}\mathbf{n}\right)\mathrm{d}a-\int_{B}\rho^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{S}).\left(\operatorname{div}\dot{\mathbf{S}}\right)dv\\
&-\int_{B}\left(\mathbf{K}'\left[\ddot{\mathbf{S}}\right]\right):\dot{\mathbf{S}}\,\mathrm{d}v+\int_{B}C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}v=\\
&=-\int_{B}\left[\nabla\left(\rho^{-1}\mathbf{b}\right)\right]:\dot{\mathbf{S}}\,\mathrm{d}v+\int_{B}C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\dot{r}\,\mathrm{d}v\,,
\end{aligned}\tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta_0}\int_{\partial B}C_S^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}.\mathbf{n}\,\mathrm{d}a-\frac{1}{\theta_0}\int_{B}C_S^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{q})(\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}})\,\mathrm{d}v\\
&-\frac{1}{\theta_0}\int_{B}\left(\lambda\,\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\right).\dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}v+\int_{\partial B}C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\dot{\mathbf{q}}\,.\mathbf{n}\,\mathrm{d}a\\
&-\int_{B}C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}v=\frac{1}{\theta_0}\int_{B}\left[\nabla\left(C_S^{-1}r\right)\right].\dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}v\,,
\end{aligned}\tag{4.48}$$

وبالأخذ بعين الاعتبار، الخواص التناظرية لكلٍ من المقطعين التنسوريين: $\mathbf{K}'$ و λ، وبما أن:

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}=\left(1+t_0\frac{\partial}{\partial t}\right)\dot{\mathbf{q}}=\dot{\mathbf{q}}+t_0\ddot{\mathbf{q}}\tag{4.49}$$

فتصبح العلاقتان (4.47) و(4.48) بالشكل:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B}\left(\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{S}\right).\left(\dot{\mathbf{S}}\mathbf{n}\right)\mathrm{d}a-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{B}\rho^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{S})^2\,dv\\
&-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{B}\left(\mathbf{K}'\left[\dot{\mathbf{S}}\right]\right):\dot{\mathbf{S}}\,\mathrm{d}v+\int_{B}C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}v=\\
&=-\int_{B}\left[\nabla\left(\rho^{-1}\mathbf{b}\right)\right]:\dot{\mathbf{S}}\,\mathrm{d}v+\int_{B}C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\dot{r}\,\mathrm{d}v\,,
\end{aligned}\tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta_0}\int_{\partial B}C_S^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}}.\mathbf{n}\,\mathrm{d}a-\frac{1}{2\theta_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{B}C_S^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{q})^2\,\mathrm{d}v\\
&-\frac{t_0}{2\theta_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{B}(\lambda\,\dot{\mathbf{q}}).\dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}v-\frac{1}{\theta_0}\int_{B}(\lambda\,\dot{\mathbf{q}}).\dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}v+\int_{\partial B}C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\dot{\mathbf{q}}\,.\mathbf{n}\,\mathrm{d}a\\
&-\int_{B}C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\operatorname{div}\dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}v=\frac{1}{\theta_0}\int_{B}\left[\nabla\left(C_S^{-1}r\right)\right].\dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}v\,,
\end{aligned}\tag{4.51}$$

إضافة المعادلتين السابقتين، ثم بترتيب الحدود، نحصل على قانون انحفاظ الطاقة الكلية الآتي للجسم الترموديناميكي المعمم، المرن (L–S)، وبزمن استرخاء واحد، بلغة $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_{B}\rho^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{S})^{2}dv+\frac{1}{2}\int_{B}\left(\mathbf{K}'\left[\dot{\mathbf{S}}\right]\right):\dot{\mathbf{S}}\,\mathrm{d}v+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\theta_0}\int_{B}C_S^{-1}(\operatorname{div}\mathbf{q})^{2}\,\mathrm{d}v+\frac{t_0}{2\theta_0}\int_{B}(\lambda\,\dot{\mathbf{q}}).\dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}v\right]+\frac{1}{\theta_0}\int_{B}(\lambda\,\dot{\mathbf{q}}).\dot{\mathbf{q}}\,\mathrm{d}v= \tag{4.52}$$
$$=\int_{B}\left\{\left[\nabla\left(\rho^{-1}\mathbf{b}\right)\right]:\dot{\mathbf{S}}-C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}\right)\dot{r}-\theta_0^{-1}\left[\nabla\left(C_S^{-1}r\right)\right].\dot{\mathbf{q}}\right\}\mathrm{d}v+$$
$$+\int_{\partial B}\left[\left(\rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{S}\right).\left(\dot{\mathbf{S}}\mathbf{n}\right)+C_S^{-1}\left(\mathbf{A}:\dot{\mathbf{S}}+\theta_0^{-1}\operatorname{div}\mathbf{q}\right)(\dot{\mathbf{q}}.\mathbf{n})\right]\mathrm{d}a$$

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولاً) <u>الاستنتاجات:</u> استنتجنا الشكل التنسوري الصامد لقانون انحفاظ الطاقة الكلية للجسم الترموديناميكي المعمم، المرن (L–S)، وبزمن استرخاء واحد، بلغة $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ وبلغة $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$، حيث الجسم (L–S) غير متجانس وغير متماثل المناحي، ويشغل في لحظة البدء منطقة بسيطة الترابط B محدودة في المتنوعة الاقليدية ثلاثية البعد R^3. وتكمن أهمية النتائج بأنه يمكن كتابة هذه الطاقة في نظام الإحداثيات المنحنية، الملائم الذي تسهل فيه حل المسألة.

ثانياً) <u>المقترحات:</u> يمكن أن نختتم البحث باقتراح ثلاث مسائل للمناقشة، هي الآتية:

المسألة الأولى: مناقشة الشكل التنسوري الناطق في نظام احداثي منحني كيفي، للأسس الترموديناميكية المعممة ولعملية Lame الترموديناميكية المعممة للجسم (L–S) المتجانس وغير متماثل المناحي.

المسألة الثانية: مناقشة مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية للجسم (L–S) بلغة $\{\mathbf{u},\vartheta\}$ وبلغة $\{\mathbf{S},\mathbf{q}\}$، ذلك بالشكل التنسوري الناطق في نظام احداثي منحني كيفي.

المسألة الثالثة: مناقشة الشكلين التنسورين الصامد والناطق في نظام إحداثي منحني كيفي لكلٍ من العملية الترموديناميكية المعممة بزمني استراحة وسلوك Lame الترموديناميكي المعمم بزمني استراحة، والمتوافقين مع الجسم (G–L) (Green-Lindsay) غير المتجانس وغير المتماثل المناحي.

المراجع:

[1]- Ignaczak, J., Starzewski, M.O., 2010 - Thermoelasticity with Finite Wave Speeds**,** Oxford University Press Inc., New York.

[2]- Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Eslami, M.R., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y.,2013 - Theory of Elasticity and Thermal Stresses**,** Springer Science+Business Media Dordrecht.

[3] – Hetnarski, R.B., and Ignaczak, J., 2011 - The Mathematical Theory of Elasticity , Second Edition , CRC Press,Taylor & Francis Group,6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300,Boca Raton, FL 33487-2742**.**

[4]- *Bertold Lysik, 1970* - Matematyczne Podstawy Teorii Sprężystości, Politechnika Wrocłwska.

[5]- Drobot , *S ,1971*-On Cosserat Continua , Zastos .Math. 12, 323 -346

[6]-*Heinbockel ,J.H, 1996*- Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics, Department of Mathematics and Statistics, Old Dominion University.

[7] - Al-Hasan, M. and Attiah, W., 2019 - The Hooke thermodynamical model in a curve coordinate system, Journal of Al-Baath University,Vol.41, Accepted for Publication in 15/7/2019.

[8]-*Philippe G.Ciarlet* , 2005 - An Introduction To Differential Geometry with Applications to Elasticity , Liu Bie Ju Centre For mathematical Sciences ,Gty Unversity of Hong Kong , Department of mathematics.

[9]- *K. Hackl & M. Goodarzi***,** 2010 - An Introduction to Linear Continuum Mechanics, Lecture Notes, Ruhr-University Bochum, Faculty of Civil and Environmental Engineering.

[10]- *Truesdell C.***,** 1984 - Mechanics of Solids, Volume II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH.

[11]- *Hung Nguyen-Schåfer*, 2017 - Tensor Analysis and Elementary Differential Geometry for Physicists and Engineers, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[12]- *Alaa Khallouf*, 2021-The foundations of the generalized thermoelasticity with one relax time in the invariable tensorial form,Accepted for Publication in August 2021, Journal of Tartous University.