تكاملات ريمان – ستيلجس المضاعفة لدوال من صف ليبشتز

الطالب: مصطفى سالم الرزوق

الأستاذ المشرف: أ. د. محمد عامر

قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث

ملخص

تم في دراسات سابقة وضع شروط كافية لوجود تكامل ريمان - ستيلجس المضاعف، كأن تكون الدالة المكاملة $f(x,y)$ مستمرة والدالة المكامل بالنسبة لها $g(x,y)$ ذات تغيرات محدودة (ذ ت م)، بالإضافة لتقديم طريقة لإيجاد قيمة هذا التكامل وذلك ضمن شروط تحققها كلاً من الدالتين f,g المفاضَلة و المكامَلة على الترتيب.

في دراستنا هذه نوضح العلاقة بين وجود هذا التكامل وانتماء الدالة المكامل بالنسبة لها $g(x,y)$ لصف ليبشتز نظراً لأهمية هذه الدوال في ضمان وجود الحل للمسألة المدروسة، إضافة لتقدير قيمة التكامل في هذه الحالة.

كلمات مفتاحية: الاستمرار المطلق للدوال بمتغيرين، شرط ليبشتز للدوال بمتغيرين، الدوال ذات التغيرات المحدودة على $\mathbb{R}^2$.

RS-double integrals of the Lipschitz's class functions

Abstract

In previous studies, sufficient conditions were set for the existence of the RS-double integral, such that the integral function $f(x,y)$ is continuous and the Integrator function $g(x,y)$ of bounded variation, in addition to presenting a method for finding the value of this integral within conditions that are fulfilled by both the functions $f \text{ and } g$ are Integrand and Integrator, respectively.

In our study, we explain the relationship between the existence of this integral and the belonging of this the integrator function $g(x,y)$ to Lipschitz's class, due to the importance of these functions in ensuring the existence of the solution to the studied problem, in addition to estimate the integral value in this case.

Key Word: Absolutely continuous for function of two variables, Lipschitz's condition for function of two variables, functions **of** bounded variation over $\mathbb{R}^2$.

1. مقدمة:

أجريت في القرون الماضية كثير من الدراسات والأبحاث حول تكامل ستيلجس البسيط، حيث تضمنت تلك الدراسات الحديث عن وجوده وحسابه وتطبيقاته في مختلف المجالات ولا سيما في نظرية الاحتمالات والتحليل الدالي والميكانيك.

وبالرغم من أهمية تلك الدراسات لكنها لا تقدم حلولاً للمسائل الرياضية والفيزيائية التي تعتمد على أكثر من متغير، ومن هنا جاءت فكرة دراسة تكامل ريمان - ستيلجس المضاعف (تكامل ستيلجس المضاعف) حيث قمنا في بحثنا هذا بإلقاء الضوء على العلاقة بين دوال صف ليبشتز بمتغيرين وبين تكامل ستيلجس المضاعف، بالإضافة لتعميم بعض المفاهيم اللازمة لذلك.

2. أهمية وهدف البحث:

نهدف في بحثنا هذا إلى تعميم بعض المفاهيم الضرورية للدوال بمتغيرين مثل: الاستمرار المطلق - الاطراد (بتزايد أو بتناقص) - الدوال ذات التغيرات المحدودة(ذ ت م) - نظيم التجزئة المضاعفة، بالإضافة لتعريف صف ليبشتز للدوال بمتغيرين.

3. مشكلة البحث:

اقتصار الدراسات السابقة على تكاملات ستيلجس البسيطة لدوال بمتغير واحد التي تحقق شرط ليبشتز على فترة ما.

4. مواد وطرائق البحث:

تعريف(1)[4] : لتكن D منطقة من $\mathbb{R}^2$، وليكن $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ أي عنصرين من D عندئذ إذا كان $x_1 \leq x_2$ و $y_1 \leq y_2$ فإن $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$.

تعريف$(2)[4]$: لتكن f دالة معرفة على المستطيل $Q=[a,b]\times[c,d]$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ عندئذ نقول إن f دالة متزايدة على Q إذا تحقق الشرط:

$$(x_1,y_1)\le(x_2,y_2)\Longrightarrow\ \Delta_{11}f(x_2,y_2)\ge 0$$

حيث:

$$\Delta_{11}f(x_2,y_2)=f(x_1,y_1)-f(x_1,y_2)-f(x_2,y_1)+f(x_2,y_2)$$

تعريف$(3)[4]$: لتكن f دالة معرفة على المستطيل $Q=[a,b]\times[c,d]$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ عندئذ نقول إن f دالة متناقصة على Q إذا تحقق الشرط:

$$(x_1,y_1)\le(x_2,y_2)\Longrightarrow\ \Delta_{11}f(x_2,y_2)\le 0$$

تعريف(4)**(شرط ليبشتز للدالة بمتغيرين)**$[2]$:

نقول إن الدالة f المعرفة على المستطيل $Q=[a,b]\times[c,d]$ تحقق شرط ليبشتز بالثابت الموجب L على المستطيل Q إذا تحققت المتراجحة:

$$|\Delta_{11}f(x_2,y_2)|\le L|x_2-x_1|.|y_2-y_1|$$

وذلك أيا كان $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ من Q.

تعريف(5): نرمز لجميع الدوال التي تحقق شرط ليبشتز على المستطيل Q بالرمز $Lip(Q,R)$ وندعوه صف ليبشتز للدوال بمتغيرين.

تعريف$(6)[5]$: إذا كانت الدالة f التابعة للمتحولين x,y معرفة في جوار ما للنقطة $M_0(x_0,y_0)$، عندئذ يقال إن هذه الدالة مستمرة في النقطة M_0 إذا كان بالإمكان إيجاد عدد حقيقي موجب $\delta>0$ من أجل أي عدد حقيقي موجب ε، بحيث إن:

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon\ ,\forall x,y\ :\ \ |x-x_0|<\delta\ ,\ \ |y-y_0|<\delta$$

ملاحظة (1) [6]: إن تعريف الاستمرار يكافئ الشروط الثلاث الآتية:

1− الدالة f معرفة عند النقطة $M_0(x_0, y_0)$.

2− $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = l$ أي أن النهاية موجودة.

3− $l = f(x_0, y_0)$، أي أن نهاية الدالة f عند النقطة (x_0, y_0) تساوي قيمتها في هذه النقطة.

تعريف(7) [6]: يقال إن الدالة f التابعة للمتحولين x, y مستمرة في المنطقة D من المستوي xoy إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من نقاطها.

تعريف (8)(الدالة ذات التغيرات المحدودة المضاعفة)[1]:

لتكن $f(x,y)$ دالة معرفة على المستطيل المحدود:

$$Q = [a,b] \times [c,d]$$

ولتكن

$$P = \{(x_i, y_j): x_{i-1} \le x \le x_i \,;\, y_{j-1} \le y \le y_j \,; i = 1 \dots n \,, j = 1 \dots m\}$$

تجزئة للمستطيل Q، ولنشكل المجموع:

$$V(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left|\Delta_{11} f(x_i, y_j)\right| \quad \dots\dots (1)$$

إذا كانت المجاميع(1) محدودة من الأعلى فإننا نقول إن االدالة $f(x,y)$ ذات تغيرات محدودة على المستطيل Q ويسمى في هذه الحالة الحد الأعلى الأصغري للمجاميع(1) بالتغير الكلي للدالة $f(x,y)$ في المستطيل Q ونكتب:

$$\bigvee_{Q}(f) = \bigvee_{a}^{b}\bigvee_{c}^{d}(f) = \sup\{V(f,P): P \in \mathbb{P}(Q)\}$$

تعريف (9) (نظيم التجزئة المضاعفة)[4]:

ليكن $Q: \left[\, a, b\right] \times \left[\, c, d\right]$ مستطيل من $\mathbb{R}^2$ ولتكن:

$$R = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \;\; , \; c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}$$

تجزئة لـ Q عندئذ نرمز لنظيم هذه التجزئة بـ $\lambda(R)$ ونعرفه بالشكل:

$$\lambda(R) = \; max\{ \max_{0 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) \, , \max_{0 \le j \le m} \left(y_j - x_{j-1}\right) \}$$

تعريف($\mathbf{10}$)(الاستمرار المطلق لدالة بمتغير واحد)[5]:

لتكن $f(x)$ دالة معرفة ومحدودة على المجال $[a, b]$، نقول عن $f(x)$ إنها مستمرة مطلقا على المجال $[a, b]$، إذا كان من أجل كل عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث إنه من أجل أية أسرة منتهية $([a_k, b_k])_{k=1}^{n}$ من المجالات الجزئية من $[a, b]$ والمنفصلة مثنى مثنى ومجموع أطوالها

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

فإن:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \left(f(b_k) - f(a_k) \right) \right| < \varepsilon$$

تعريف ($\mathbf{11}$)(الاستمرار المطلق لدالة بمتغيرين)[3]:

لتكن $f(x, y)$ دالة معرفة على المستطيل $Q = [a, b] \times [c, d]$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$، نقول عن الدالة f إنها مستمرة مطلقا على المستطيل Q، إذا كان من أجل كل عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث إنه من أجل أية أسرة منتهية

$$[x_{i-1}, x_i] \times \left[y_{j-1}, y_j\right] \;, (i = 1,2, \dots, n \;\;, \;\; j = 1,2, \dots, m \;)$$

من المستطيلات الجزئية من Q والمنفصلة مثنى مثنى يتحقق:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\Delta x_i)(\Delta y_j) < \delta \implies \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left|\Delta_{11} f(x_i, y_j)\right| < \varepsilon$$

ملاحظة (2):

سنعتمد على التمهيدية الآتية (نكتفي بالنص دون إدراج الإثبات وذلك لكبر مساحته):

تمهيدية: لتكن $g(x,y)$ دالة متزايدة على المستطيل $Q = [a,b] \times [c,d]$ عندئذ تكون العبارات الآتية متكافئة:

1) $f \in RS(g)$

2) من أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$، بحيث إنه إذا كان $\lambda(R) < \delta$ فإن:

$$0 \leq U(f,g,P) - L(f,g,P) < \varepsilon$$

3)

$$I_U = I_L$$

حيث $U(f,g,P), L(f,g,P)$ مجموعا ستيلجس داربو الأدنى والأعلى على الترتيب للدالة $f(x,y)$ بالنسبة للدالة $g(x,y)$ الموافقين للتجزئة P.

والرموز:

$$I_U = \inf_{P \in \mathbb{p}(Q)} U(f,g,P)$$

$$I_L = \sup_{P \in \mathbb{p}(Q)} L(f,g,P)$$

مبرهنة (1):

لتكن الدوال f_1, f_2, g معرفة على المستطيل $Q = [a,b] \times [c,d]$

وكان $f_2 \in RS(g)$ و $f_1 \in RS(g)$، فإنه من أجل أي عددين α_1, α_2 يكون

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in RS(g)$$

كما أن:

$$\int_a^b \int_c^d [\alpha_1 f_1(x,y) + \alpha_2 f_2(x,y)] dg(x,y) =$$

$$= \alpha_1 \int_a^b \int_c^d f_1(x,y) dg(x,y) + \alpha_2 \int_a^b \int_c^d f_2(x,y) dg(x,y)$$

الإثبات:

من أجل أية تجزئة للمستطيل Q:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \ , \ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}$$

نجد أن:

$$S(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g, P) = \alpha_1 S(f_1, g, P) + \alpha_2 S(f_2, g, P)$$

لأن:

$$S(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g, P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left[\alpha_1 f_1\left(\xi_i, \eta_j\right) + \alpha_2 f_2\left(\xi_i, \eta_j\right)\right] \times$$

$$\times \left[g\left(x_{i-1}, y_{j-1}\right) - g\left(x_i, y_{j-1}\right) - g\left(x_{i-1}, y_j\right) + g\left(x_i, y_j\right)\right] =$$

$$= \boldsymbol{\alpha_1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_1(\xi_i, \eta_j)[g(x_{i-1}, y_{j-1}) - g(x_i, y_{j-1}) - g(x_{i-1}, y_j) + g(x_i, y_j)]$$

$$+$$

$$+ \boldsymbol{\alpha_2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_2(\xi_i, \eta_j)[g(x_{i-1}, y_{j-1}) - g(x_i, y_{j-1}) - g(x_{i-1}, y_j) + g(x_i, y_j)]$$

$$=$$

$$= \alpha_1 S(f_1, g, P) + \alpha_2 S(f_2, g, P)$$

وبجعل $\lambda(R) \to 0$ تكون نهاية الطرف الأيمن موجودة وذلك لوجود كل من التكاملين فرضاً، وبالتالي نهاية الطرف الأيسر موجودة عندما $\lambda(R) \to 0$ وهذه النهايات هي تكاملات ستيلجس الموافقة للعلاقة المطلوبة.

مبرهنة (2):

إذا حققت الدالة $f(x, y)$ شرط ليبشتز على المستطيل $Q = [a, b] \times [c, d]$ فتكون ذات تغيرات محدودة على هذا المستطيل.

الإثبات:

من أجل أية تجزئة للمستطيل Q:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \ , \ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d\}$$

يكون:

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left|\Delta_{11} f\left(x_i, y_j\right)\right| \leq L \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) \left(y_j - y_{j-1}\right) =$$

$$= L(b - a)(d - c)$$

وهذا يعني أن الدالة $f(x, y)$ (ذ ت م) على المستطيل Q.

مبرهنة (3):

إذا كانت الدالة $f(x, y)$ كمولة حسب ريمان على المستطيل $Q = [a, b] \times [c, d]$ والدالة $g(x, y) \in Lip(Q, R)$ فيكون التكامل:

$$\boldsymbol{I} = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dg(x, y)$$

موجوداً، وتتحقق المتراجحة الآتية:

$$\left|\int_a^b\int_c^d f(x,y)dg(x,y)\right| \le \sup_{(x,y)\in Q}|f(x,y)|.\bigvee_Q(g)$$

الإثبات:

إن وجود تكامل ريمان $\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy$ يعني أنه من أجل أي عدد مفروض $0<\varepsilon$ يوجد عدد $\delta>0$، بحيث إنه إذا كان $\lambda(R)<\delta$ فإن:

$$U(f,P)-L(f,P)<\frac{\varepsilon}{L}$$

حيث تشير الرموز $L(f,P)$ و$U(f,P)$ إلى مجموعي ريمان ـ داربو الأعلى والأدنى على الترتيب وL هو ثابت ليبشتز.

لنفرض أولاً أن الدالة $g(x,y)$ متزايدة على المستطيل Q، عندئذ من أجل أية تجزئة

$$P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\ ,\ c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d\}$$

للمستطيل Q بحيث $\lambda(R)<\delta$ يكون:

$$U(f,g,P)-L(f,g,P)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[M_{ij}(f)-m_{ij}(f)][g(x_{i-1},y_{j-1})-g(x_i,y_{j-1})-g(x_{i-1},y_j)+g(x_i,y_j)]\le$$

$$\le L\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[M_{ij}(f)-m_{ij}(f)](x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})=L[U(f,P)-L(f,P)]$$

$$<\varepsilon$$

ومنه $f\in RS(g)$.

أما إذا لم تكن الدالة $g(x,y)$ متزايدة على المستطيل Q، ولكنها ذ ت م عندئذ

يمكن كتابتها بالشكل:

$$g(x,y) = g_1(x,y) - g_2(x,y) - g_3(x,y) + g_4(x,y)$$

حيث الدوال g_1, g_2, g_3, g_4 متزايدة على المستطيل Q وحسب ما تقدم فإن:

$$f \in RS(g_1)\,, f \in RS(g_2)\,, f \in RS(g_3)\,, f \in RS(g_4)$$

وبالتالي فإن $f \in RS(g_1 - g_2 - g_3 + g_4)$ ومنه $f \in RS(g)$.

ولإثبات صحة المتراجحة لدينا:

$$|\sigma| = \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta_{11}g(x_i,y_j)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |f(\xi_i,\eta_j)|.\left|\Delta_{11}g(x_i,y_j)\right| \leq$$

$$\leq M\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left|\Delta_{11}g(x_i,y_j)\right| \leq M.\bigvee_{Q} g \quad ; \quad M = \sup_{(x,y)\in Q}|f(x,y)|$$

وبأخذ النهاية في الطرفين عندما $n,m \to \infty$ نجد:

$$\left|\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)dg(x,y)\right| \leq \sup_{(x,y)\in Q}|f(x,y)|.\bigvee_{Q} g$$

مبرهنة (4):

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ كمولة حسب ريمان على المستطيل $Q = [a,b] \times [c,d]$ والدالة $g(x,y)$ تكتب بالشكل:

$$g(x,y) = e + \int_a^x \int_c^y h(s,t)dsdt \quad ; \quad (x,y) \in Q$$

حيث: $\int_a^b \int_c^d h(s,t)dsdt$ موجود ومحدود و e ثابت. عندئذ $f \in RS(g)$.

الإثبات:

نفرض أولاً أن $h(s,t) \geq 0$ وبالتالي تكون الدالة $g(x,y)$ متزايدة على المستطيل Q، ولنفرض أيضاً أنه من أجل كل $(s,t) \in Q$ يكون $|h(s,t)| \leq k$ حيث k ثابت موجب، عندئذ من أجل كل $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in Q$ حيث $x_1 < x_2 , y_1 < y_2$ يكون لدينا:

$$|g(x_1,y_1) - g(x_1,y_2) - g(x_2,y_1) + g(x_2,y_2)| =$$

$$= \left| \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} h(s,t)dsdt \right|$$

$$\leq \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} |h(s,t)|dsdt \leq k(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$$

ومنه حسب المبرهنة(3) يكون $f \in RS(g)$.

أما إذا لم تكن الدالة $h(s,t) \geq 0$ فنشكل الدالتين المساعدتين الآتيتين:

$$h_1(s,t) = \frac{|h(s,t)| + h(s,t)}{2} \quad , \quad h_2(s,t) = \frac{|h(s,t)| - h(s,t)}{2}$$

نجد أن $h_1(s,t) \geq 0$ وكذلك $h_2(s,t) \geq 0$ كما أن:

$$h(s,t) = h_1(s,t) - h_2(s,t)$$

وبالتالي:

$$g(x,y) = e + \int_a^x \int_c^y [h_1(s,t) - h_2(s,t)]dsdt =$$

$$= \left[e + \int_a^x \int_c^y h_1(s,t)dsdt \ - \int_a^x \int_c^y h_2(s,t)dsdt \right]$$

لنضع:

$$g_1(x,y) = \ e + \int_a^x \int_c^y h_1(s,t)dsdt \ \ , \ \ g_2(x,y) = \int_a^x \int_c^y h_2(s,t)dsdt$$

فنجد أن الدالتين $g_1(x,y), g_2(x,y)$ متزايدتان وحسب ما تقدم يكون

$f \in RS(g_1)$ و $f \in RS(g_2)$ وبالتالي يكون $f \in RS(g)$.

دليل المصطلحات العلمية والرموز

- التكامل $\iint_Q f(x,y)dg(x,y)$ موجود حيث الدالتين f, g معرفتين على المستطيل Q — $f \in RS(g)$
- صف ليبشتز للدوال المعرفة على المستطيل Q — $Lip(Q,R)$

التوصيات والمقترحات:

بعد التعرف على أهمية دوال صف ليبشتز في مسألة وجود تكامل ريمان - ستيلجس المضاعف نوصي ونقترح بدراسة المواضيع الآتية:

1. تكاملات ستيلجس المضاعفة للدوال ذات التغيرات المحدودة.

2. تكاملات ريمان ـ ستيلجس للدوال المستمرة مطلقاً.

3. تكاملات ريمان ـ ستيلجس للدوال المحدودة.

4. تكاملات ستيلجس الثلاثية لدوال صف ليبشتز الثلاثي.

المراجع:

[1] Clarkson, J. & Adams, C. R. 1933. On definitions of bounded variation for functions of two variables. Bulletin of the Australian Mathematical Society 35: 824–854

[2] C.R.ADAMS, J.A.Clarkson, properties of functions $f(x,y)$ of bounded variation,Trans.Amer.Math.soc.36 (1934) 711–730.

[3] J. Sremr, Absolutely continuous functions of two variables in the sense of caratheodory, vol. 2010(2010), No. 154, pp. 1–11.

[4] Mohammad W. Alomari, Numerous approximations of Riemann-Stieltjes double integrals, 2009.

[5] أ. د. إبراهيم إبراهيم،" تحليل5 " ، منشورات جامعة البعث، 1994.

[6] أ.د. محمد عامر،" محاضرات في التحليل2 " ، جامعة البعث، كلية العلوم، قسم الرياضيات 2019-2020.