التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر في فضاءات كيلير المكافئية

طالب الدراسات العليا: نمر حسن إيبو

دكتوراه رياضيات بحتة – كلية العلوم – جامعة البعث

بإشراف الدكتور : محسن شيحة

الملخص

نُدخل أهم المفاهيم المتعلقة بالبحث: فضاء كيلير المكافئي والمنحني الهولومورفي والتطبيق الهولومورفي الإسقاطي، ثم نعرّف التشوّه اللامتناهي في الصغر في فضاءات كيلير المكافئية والتشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر في فضاءات كيلير المكافئية ونثبت المبرهنات التي تعطي الشروط اللازمة والكافية لوجود تشوّه هولومورفي إسقاطي لامتناهٍ في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية والنتائج الهامة عنها، ونحدد فضاءات كيلير التي تسمح بتشوّه هولومورفي إسقاطي لامتناهٍ في الصغر غير مبتذل و كذلك نحدد فضاءات كيلير التي لا تسمح بتشوّه هولومورفي إسقاطي لامتناهٍ في الصغر غير مبتذل، و ندرس أيضاً تغيّر تنسوري ريمان و ريتشي لفضاء كيلير المكافئي بتأثير التشوهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر.

كلمات مفتاحية :

تشوّه هولومورفي إسقاطي لامتناهٍ في الصغر، فضاء كيلير المكافئي.

Infinitesimal Holomorphically projective Deformations in Kahler's Parabolic Spaces

Abstract

We introduce the most important concepts related to the research: Kahler's parabolic space, the holomorphic curve and the projective holomorphic application, then define the infinitesimal distortion in Kahler's parabolic spaces and the infinitesimally projective holomorphic Deformations in Kahler's parabolic spaces and prove the theorems that give the necessary and sufficient holomorph to the existence of a holomorph for a Deformations. Kahler's parabolic spaces and the significant consequences therefrom, and we define : Kahler's spaces that permit Infinitesimal projective holomorphic Deformations not vulgar and also define Kahler's spaces that do not allow Infinitesimal projective holomorphic Deformations not vulgar, and also study Riemann and Ritchie equivalent tensor variation of space Infinitesimal projective holomorphism.

Key words and phrases :

An Infinitesimal Holomorphically projective Deformation, Kahler's parabolic space,.

مقدمة :

تمت دراسة التطبيقات الجيوديزية والتشوّهات الجيوديزية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات ريمان من قبل العديد من العلماء أمثال يفيموف و باغاريلف و فيكوا وغيرهم [5,6,12,13]. وتمت دراسة التطبيقات الهولومورفية الإسقاطية من قبل العديد من العلماء [1,2,3,4,8,9, 10,11].

نتابع في هذا البحث دراسة التشوهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات كيلير المكافئية و التي هي تعميم للتشوّهات الجيوديزية اللامتناهية في الصغر بين فضاءات ريمان.

هدف البحث :

1) إيجاد الشروط اللازمة و الكافية لوجود تشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في الصغر بين فضائي كيلير المكافئيين.
2) تحديد بعض فضاءات كيلير التي تسمح بتشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في الصغر غير مبتذل و فضاءات كيلير التي لا تسمح بتشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في الصغر غير مبتذل.
3) ندرس تغيّر تنسوري ريمان و ريتشي في فضاء كيلير المكافئي $K_n^{0(m)}$ بتأثير التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر.

إن لدراسة التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر تطبيقات هامة في الفيزياء النظرية (الحقول التجاذبية و الكهربائية و المغناطيسية) وفي الحركات الميكانيكية و غيرها.

العمل و النتائج :

نعرض فيما يأتي أهم المفاهيم و المبرهنات المتعلّقة بفضاءات كيلير المكافئية :

تعريف (1): (فضاء كيلير المكافئي) $[1,2,3,4]$

يسمى فضاء ريمان V_n ، $m-$ فضاء كيلير المكافئي و نرمّزه بـ $K_{\mathrm{n}}^{0(\mathrm{m})}$ إذا وجد فيه بالإضافة إلى التنسور

المتري $g_{ij}(x)$ تركيب أفيني $F_i^h(x)$ رتبته $(m \geq 2)$ يحقق الشروط الآتية:

$$a)\quad F_\alpha^h F_i^\alpha = 0$$

$$b)\quad F_\alpha^h g_{\alpha j} + F_j^\alpha g_{\alpha i} = 0 \qquad\qquad (1)$$

$$c)\quad F_{i,j}^h = \frac{\partial F_i^h}{\partial x^j} + F_i^\alpha \Gamma_{\alpha j}^h - F_\alpha^h \Gamma_{ij}^\alpha = 0$$

حيث "," تعني المشتق موافق التغير ، و Γ_{ij}^h رموز كريستوفيل من النوع الثاني للفضاء $K_{\mathrm{n}}^{0(\mathrm{m})}$.

تعريف (2): (المنحني الهولومورفي) $[8]$

نسمي المنحني $\ell: x^h = x^h(t)$ في فضاء كيلير المكافئي $K_n^{0(m)}$ منحنياً مستوياً تحليليّاً (هولومورفياً) إذا

تحققت على طول المنحني الشروط:

$$\frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta = \rho_1(t)\lambda^h + \rho_2(t)\bar{\lambda}^h$$

حيث $\lambda^h = \frac{dx^h}{dt}$ متجه المماس للمنحني ℓ ، و $\bar{\lambda}^h = \lambda^\alpha F_\alpha^h$ ، و ρ_1, ρ_2 دالتان ما تتبعان للمتغيّر t.

تعريف (3): (التطبيق الهولومورفي الإسقاطي) [9]

ليكن لدينا فضاءي كيلير المكافئيين $K_n^{0(m)}\left(g_{ij}, F_i^h\right)$ و $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}\left(\bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h\right)$ يُسمى التطبيق من فضاء كيلير

المكافئي $K_n^{0(m)}$ إلى فضاء كيلير المكافئي $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}$ ، تطبيقاً هولومورفياً إسقاطياً إذا نقل كل منحنٍ مستوٍ تحليلي

من $K_n^{0(m)}$ إلى منحنٍ مستوٍ تحليلي في $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}$.

نعرض فيما يأتي المبرهنات التي تعطي الشروط اللازمة والكافية لوجود تطبيق هولومورفي إسقاطي غير مبتذل:

مبرهنة (1): $[10]$

يُطبق فضاء كيلير المكافئي $K_n^{0(m)}$ هولومورفياً إسقاطياً على فضاء كيلير المكافئي $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}$ ، إذا وفقط إذا

تحققت الشروط الآتية في أي نظام إحداثي عام x :

$$a)\quad \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \delta_{(i}^h\bar{\psi}_{j)} + F_{(i}^h\psi_{j)}$$

$$b)\quad \bar{F}_i^h(x) = \alpha F_i^h(x) \qquad (2)$$

حيث $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ مركبات الصلة للفضاءين $K_n^{0(m)}$ و $\bar{K}_n^{0(\bar{m})}$ على الترتيب، ψ_i متجه تدرّج ما، و $\bar{\psi}_i \equiv \psi_{\bar{\imath}}$ ،

و α ثابت غير معدوم.

مبرهنة $(\mathbf{2})$:$[\mathbf{10}]$

يُطبّق فضاء كيلير المكافئي $K_n^{0(m)}$ تطبيقاً هولومورفياً إسقاطياً على الفضاء $\overline{K}_n^{0(\bar{m})}$ إذا وفقط إذا تحققت

في $K_n^{0(m)}$ العلاقات:

$$\text{a)}\quad \bar{g}_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k \bar{g}_{ij} + \bar{\psi}_{(i}\bar{g}_{j)k} + \psi_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

$$\text{b)}\quad \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0 \qquad (3)$$

حيث : $\bar{F}_{ij} \equiv \bar{g}_{i\alpha}F_j^{\alpha}$، وَ $det\|\bar{g}_{ij}\| \neq 0$ ، $\bar{g}_{ij}$ التنسور المتري للفضاء $\overline{K}_n^{0(m)}$.

مبرهنة $(\mathbf{3})$: $[\mathbf{11}]$

الشرط اللازم و الكافي ليكون فضاء كيلير المكافئي $K_n^{0(m)}$ منطلقاً لتطبيق هولومورفي إسقاطي، هو أن يوجد

في هذا الفضاء تنسور a_{ij} من النوع $\binom{0}{2}$ متناظر غير صفري، ويحقق الشروط:

$$a)\ a_{ij,k} = \lambda_{(\bar{\imath}}g_{j)k} + \lambda_{(i}g_{\bar{\jmath})k}$$

$$b)\ \ a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} = 0 \qquad (4)$$

حيث: λ_{i} متجه ما، والتطبيق يكون غير مبتذل ضمن الشرط $\lambda_{\mathrm{i}} \neq 0$.

مبرهنة $(\mathbf{4})$: $[\mathbf{11}]$

يكون فضاء كيلير المكافئي $K_n^{0(m)}$ منطلقاً لتطبيق هولومورفي إسقاطي بشكل غير مبتذل إذا كانت جملة

المعادلات الخطية الآتية من نوع كوشي تمتلك حلاً بالنسبة للتنسور المتناظر وغير الصفري

$a_{ij}\left(a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} = 0\right)$ وبالنسبة للمتجه غير الصفري λ_i والصامد τ :

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \ a_{ij|k} = \bar{\lambda}_{(i}g_{j)k} + \lambda_{(i}g_{j)\bar{k}} \\ &b)\ \ \ \ \lambda_{i|j} = \tau g_{\bar{\imath}j} + a_{\alpha\beta}M_{ij}^{\alpha\beta} \\ &c)\ \ \ \ \tau_{,i} = \lambda_\alpha M_i^\alpha + a_{\alpha\beta}M_i^{\alpha\beta} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

من أجل القيم الابتدائية في النقطة χ_0 :

$$a_{ij}(\chi_0) = a_{ij}^0\,, \qquad \lambda_i(\chi_0) = \lambda_i^0\,, \qquad \tau(\chi_0) = \tau^0 \qquad (6)$$

والتي بالحقيقة تحقق الخواص :

$$a_{ij}^0 = a_{ji}^0\ \ , \qquad a_{\alpha(i}^0 F_{j)}^\alpha(\chi_0)\,, det\left\|a_{ij}^0\right\| \neq 0 \qquad (7)$$

حيث: $M_{ij}^{\alpha\beta} \equiv \mathrm{T}_{ij}^{\alpha\beta} + \varepsilon_{\bar{\jmath}}\left\{\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta}\varepsilon^j\varepsilon^k\eta^\ell - \varepsilon_{\bar{\imath}}\mathrm{T}_{\vartheta jk}^{\alpha\beta}\eta^\vartheta\eta^j\varepsilon^k\eta^\ell\right\}$

$$M_k^\alpha \equiv M_{ij\vartheta}^\alpha\varepsilon^i\eta^j\varepsilon^\vartheta\eta_{\bar{k}} - M_{ijk}^\alpha\varepsilon^i\eta^j$$

$$M_k^{\alpha\beta} \equiv M_{ij\vartheta}^{\alpha\beta}\varepsilon^i\eta^j\varepsilon^\vartheta\eta_{\bar{k}} - M_{ijk}^{\alpha\beta}\varepsilon^i\eta^j$$

$$M_{ijk}^{\alpha\beta} \equiv M_{ij|k}^{\alpha\beta} - M_{ik|j}^{\alpha\beta}$$

$$M_{ij}^{\gamma} \equiv -R_{ijk}^{\gamma} + M_{i[j}^{\bar{\gamma}\beta}g_{k]\beta} + M_{i[j}^{\beta\bar{\gamma}}g_{k]\beta} + M_{i[j}^{\gamma\beta}g_{\bar{k}]\beta} + M_{i[j}^{\beta\gamma}g_{\bar{k}]\beta}$$

$$M_{ijk}^{\alpha\beta} \equiv M_{ijk}^{\alpha\beta}\varepsilon^j\eta^i + \left[M_{\ell mj}^{\alpha\beta}g_{\bar{\imath}k} - M_{\ell mk}^{\alpha\beta}g_{\bar{\imath}j}\right]\eta^\ell\varepsilon^m$$

$M_{ijk}^{\alpha} \equiv M_{ijk}^{\alpha}\varepsilon^{j}\eta^{i} + \left[M_{\ell mj}^{\alpha}g_{\bar{\imath}k} - M_{\ell mk}^{\alpha}g_{\bar{\imath}j}\right]\eta^{\ell}\varepsilon^{m}$

$\mathrm{T}_{j\ell}^{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{2}\eta_{\bar{J}}\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta}\varepsilon^{j}\varepsilon^{k}\eta^{k} + \mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta}\varepsilon^{j}\eta^{k}$

$\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta} \equiv \mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta} - g_{k(\bar{\imath}}\mathrm{T}_{j)\ell}^{\alpha\beta} + g_{k(\bar{\imath}}\mathrm{T}_{j)k}^{\alpha\beta}$

$$\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta} \equiv \delta_{(i}^{\alpha}R_{j)k\ell}^{\beta} - \frac{1}{2n}\left\{g_{k(i}M_{j)\ell}^{\alpha\beta} - g_{\ell(i}M_{j)k}^{\alpha\beta}\right\}$$

سوف نرمز اختصاراً للفضاء $K_n^{0(m)}$ بالرمز k_m فيما يأتي:

التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية اللامتناهية في الصغر لفضاءات كيلير المكافئية:

ليكن k_m فضاء كيليرالمكافئي المنسوب إلى نظام إحداثي محلي $(y^1, \dots, y^m)$ عندئذٍ تحدد العلاقات :

$$y^{\alpha} = f^{\alpha}(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n) \qquad ; Rang \left\|\frac{\partial f}{\partial \chi^i}\right\| = n < m \qquad (8)$$

فضاءً جزئياً $k_n \subset k_m$.

إذا كان $a_{\alpha\beta}$ وَ g_{ij} التنسور المتري ل k_m وَ k_n على الترتيب فإنّه من[13] نجد:

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial \chi^i}\frac{\partial y^{\beta}}{\partial \chi^i} \qquad (9)$$

حيث: $\alpha, \beta = 1,2, \dots, m$ وَ $i, j = 1,2, \dots, n$ إذا لم نشر إلى غير ذلك.

ليكن $\xi^{\alpha}(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n)$ حقل متجهي مخالف التغير في k_m مُعطى في النقطة M من k_n .

عندئذٍ تُحدد العلاقات :

$$\tilde{y}^{\alpha} = y^{\alpha}(\chi) + \varepsilon\xi^{\alpha}(\chi) \quad ; \ \alpha = 1,2, \dots, m \qquad (10)$$

حيث: ε وسيط ذو قيمة صغيرة ، فضاءً $\tilde{k}_n$ يُسمى التشوّه اللامتناهي في الصغر للفضاء k_n ويُسمى الحقل

$\xi^{\alpha}(\chi)$ حقل الإزاحة وَ ξ^{α} يُسمى متجه الإزاحة.

في دراستنا للفضاء $\tilde{k}_n$ سوف نسقط ε^2 وكل ما يزيد عن ε^2 على اعتبار أنّ ε مقدار صغير.

لندرس ضمن هذه التشوّهات، التشوّهات الهولومورفية اللامتناهية في الصغر من المرتبة الأولى:

بفرض $A = A(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n)$ مقدار ما في الفضاء k_n (تنسور، صلة، دالة، ...)

عندئذٍ يوجد في $\tilde{k}_n$ ما يقابله $\tilde{A} = \tilde{A}(\chi^1, \chi^2, \dots, \chi^n, \varepsilon)$ الذي يمكن التعبير عنه بالشكل :

$$\tilde{A}(\chi, \varepsilon) = A(\chi) + \varepsilon\delta A + \varepsilon^2\delta^2 A + \dots + \varepsilon^n\delta^n A + \dots \qquad (11)$$

قيمة وسيط التشوّه ε في العلاقة (11) تُحدد على اعتبار أن المتسلسلة في (11) متقاربة دون النظر إلى $A(\chi)$.

تُسمى المعاملات في العلاقة (11) : $\delta^2 A, \delta A$, ... على الترتيب القيمة الأولى والثانية لتغير A بتأثير التشوّهات اللامتناهية في الصغر ل k_n. [2]

سوف نهتم بمبرهنة التغيّر التي نوهنا عنها أعلاه . عندما تنتهي هذه المتسلسلة عند الحد الثاني، أي سوف ندرس

التشوّهات اللامتناهية في الصغر من المرتبة الأولى ل k_n وفي كثير من الأحيان نُطلق عليها اسم التشوّهات

اللامتناهية في الصغر أو التشوهات للاختصار.

عندئذٍ يُكتب التنسور المتري ل $\tilde{k}_n$ على النحو :

$$\tilde{g}^{ij} = g^{ij} + \varepsilon\delta g^{ij} \quad \text{وَ} \quad \tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \varepsilon\delta g_{ij} \qquad (12)$$

تمهيدية $(\mathbf{1})$:

تتحقق في التشوّه اللامتناهي في الصغر للفضاء k_n في الفضاء $\tilde{k}_n$ العلاقات :

$$\text{a)}\ \delta y^{\alpha} = \xi^{\alpha}$$

$$b)\ \delta a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\xi^{\gamma} \qquad (13)$$

$$c)\ \delta g_{ij} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\xi^{\gamma} y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} + a_{\alpha\beta}(\xi^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{j})$$

حيث: g_{ij} ، $a_{\alpha\beta}$ التنسوران المتريان للفضاءين k_n ، k_m على الترتيب .

الإثبات :

a) من العلاقة (10) : $\tilde{y}^{\alpha} = y^{\alpha}(\chi) + \varepsilon\xi^{\alpha}(\chi)$ ، حيث $\alpha = 1,2,\dots,m$

وبما أنّ: $\tilde{y}^{\alpha} = y^{\alpha}(\chi) + \varepsilon\delta y^{\alpha}$

نجد: $.\delta y^{\alpha} = \xi^{\alpha}(\chi)$

b) من العلاقة (10) نجد :

$$\tilde{a}_{\alpha\beta}(\tilde{y}^{\gamma}) = a_{\alpha\beta}(\tilde{y}^{\gamma}) = a_{\alpha\beta}(y^{\gamma} + \varepsilon\xi) = a_{\alpha\beta}(y^{\gamma}) + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\xi^{\gamma}\varepsilon + \cdots$$

وبما أنّ: $\tilde{a}_{\alpha\beta}(\tilde{y}^{\gamma}) = a_{\alpha\beta}(y^{\gamma}) + \varepsilon\delta a_{\alpha\beta}(y^{\gamma})$

فإنّ: $\xi^{\gamma}\ . \delta a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}$

c) استناداً إلى العلاقة (9) والفقرة (b) نجد:

$$\begin{aligned}\delta g_{ij} = \delta\left(a_{\alpha\beta}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}\right) &= \delta a_{\alpha\beta}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + a_{\alpha\beta}\delta y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + a_{\alpha\beta}y^{\alpha}_{,i}\delta y^{\beta}_{,j} \\ &= \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\xi^{\gamma}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + a_{\alpha\beta}\left(\xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{,j}\right).\end{aligned}$$

أي :

$$\delta g_{ij} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\xi^{\alpha}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + a_{\alpha\beta}\left(\xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{,j}\right). \qquad (14)$$

تعريف (4):

يُسمى التشوّه اللامتناهي في الصغر تشوّهاً هولومورفياً إسقاطياً إذا حافظ على الخطوط الهولومورفية .

أي بمعنى أنّ الفضاءين k_n وَ $\tilde{k}_n$ يكونا هولومورفيين فيا بينهما حيث k_n وَ $\tilde{k}_n$ منسوبين إلى نظام إحداثي

مشترك (χ^i). وبالتالي يحققان العلاقات :

$$a)\ \tilde{g}_{ij,k} = 2\bar{\Psi}_k \tilde{g}_{ij} + \bar{\Psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \psi_{(i}\tilde{F}_{j)k}$$

$$b)\ \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0 \qquad (15)$$

حيث: $\bar{F}_{ij} \equiv \tilde{g}_{i\alpha}F_j^\alpha$ ، $\det\|\tilde{g}_{ij}\| \neq 0$ ، $\tilde{g}_{ij}$ التنسور المتري للفضاء $\tilde{k}_n$ و"," المشتق الموافق التغيّر في

الفضاء k_n و $\bar{\psi}_i = \frac{1}{2(n+2)}\partial_i \ln\left|\frac{\tilde{g}}{g}\right|$ متجه تدرّج وَ ψ_i متجه ما وَ $\tilde{g} =$ $\det\|\tilde{g}_{ij}\|$ وَ $g = \det\|g_{ij}\|$

وَ $\bar{\psi}_i \equiv \psi_{\bar{\imath}}$.

مبرهنة (5):

إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيليرالمكافئي k_n مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهياً في الصغر هو تحقق العلاقات :

$$a)\ \delta g_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_{(i}g_{j)k} + \psi_{(i}F_{j)k}$$

$$b)\ \delta g_{\bar{\imath}j} + \delta g_{i\bar{\jmath}} = 0 \qquad (16)$$

حيث: "," المشتق الموافق التغيّر في الفضاء k_n وَ $\delta g_{\bar{\imath}j} = \delta g_{i\alpha}F_j^\alpha$ وَ $\bar{\psi}_i \equiv \psi_{\bar{\imath}}$ وَ $\bar{F}_{ij} \equiv g_{i\alpha}F_j^\alpha$.

الإثبات :

($\Leftarrow$)(الشرط لزوم)

بفرض k_n وَ $\tilde{k}_n$ هولومورفيان فيما بينهما ومنسوبان إلى نظام إحداثي مشترك (χ^i) .
وبالتالي يحققان

العلاقات:

$$\text{a)}\quad \tilde{g}_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k \tilde{g}_{ij} + \bar{\psi}_i \tilde{g}_{jk} + \bar{\psi}_j \tilde{g}_{jk} + \psi_i \bar{F}_{jk} + \psi_j \bar{F}_{jk} \tag{17}$$

$$\text{b)}\quad \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0$$

حيث : $\bar{\psi}_i = \frac{1}{2(n+2)} \partial_i \ln \left|\frac{\tilde{g}}{g}\right|$ وَ $\bar{F}_{ij} \equiv \tilde{g}_{i\alpha} F_j^{\alpha}$.

وبما أنّ : $\bar{\psi} = \frac{1}{2(n+2)} \ln \left|\frac{\tilde{g}}{g}\right|$ حيث $g = \det\|g_{ij}\|$ وَ $\tilde{g} = \det\|\tilde{g}_{ij}\|$

ومن ناحية أخرى: $\tilde{g} = g + \varepsilon\delta g$ فإنّ:

$$2(n+2)\bar{\psi} = \ln \left|\frac{\tilde{g}}{g}\right| =$$
$$= \ln \left|\frac{g + \varepsilon\delta g}{g}\right|$$
$$= \ln \left|1 + \frac{\delta g}{g}\varepsilon\right| = \ln\left(1 + \frac{\delta g}{g}\varepsilon\right) = \varepsilon\frac{\delta g}{g} + \cdots$$

حيث $\bar{\psi}_i$ في $(17a)$ يجب تغييرها إلى $\varepsilon\bar{\psi}_i$ ، وَ استناداً إلى المبرهنة (1) وَ تحديداً
الشرط $\tilde{F}_i^h = \alpha F_i^h$

حيث نعوضه في العلاقة :

$$\tilde{F}_i^h = \alpha F_i^h + \varepsilon\delta F_i^h \Rightarrow \alpha F_i^h = \alpha F_i^h + \varepsilon\delta F_i^h \Rightarrow (\alpha - 1)F_i^h = \varepsilon\delta F_i^h$$

$$\Rightarrow F_i^h = \varepsilon\frac{\delta F_i^h}{\alpha - 1}$$

لذلك نستبدل εF_i^h ب F_i^h. ولدينا أيضاً:

$$\tilde{g}_{ij,k} = \underbrace{\tilde{g}_{ij,k}}_{0} + \varepsilon\delta g_{ij,k}$$

$$\tilde{g}_{ij,k} = \varepsilon\delta g_{ij,k} \qquad (18)$$

وأيضاً :

$$\tilde{F}_{jk} = \tilde{g}_{j\alpha}F_k^\alpha \quad \text{وَ} \quad \psi_{\bar{k}} = \psi_\alpha F_k^\alpha \qquad (19)$$

نعوض(18) و(19) في $(17a)$ ونستبدل $\varepsilon\psi_i$ ب ψ_i و كذلك نستبدل εF_i^h ب F_i^h

فنجد أنّ :

$$\delta g_{ij,k} = \varepsilon\left(2\bar{\psi}_k\big(g_{ij} + \varepsilon\delta g_{ij}\big)\right) + \bar{\psi}_i\big(g_{kj} + \varepsilon\delta g_{kj}\big) + \bar{\psi}_j(g_{ik} + \varepsilon\delta g_{ik}) + \big(\psi_i\bar{F}_{jk} + \psi_j\bar{F}_{ik}\big)$$

$$\begin{aligned}= \varepsilon\big(2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_i g_{kj} + \bar{\psi}_j g_{ik}\big)& \\ &+ \varepsilon^2\big(2\bar{\psi}_k - \delta g_{ij} + \psi_{\bar{\imath}}\delta g_{kj} + \psi_{\bar{\jmath}}\delta g_{ik}\big) \\ &+ \varepsilon\big(\psi_i\big(g_{j\alpha} + \varepsilon\delta g_{j\alpha}\big)F_k^\alpha + \psi_j(g_{i\alpha} + \varepsilon\delta g_{i\alpha})F_k^\alpha\big) \\ &= \varepsilon\big(2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_i g_{kj} + \bar{\psi}_j g_{ik}\big) + \varepsilon^2(\dots) \\ &+ \varepsilon\big(\psi_i g_{j\alpha}F_k^\alpha + \psi_j g_{i\alpha}F_k^\alpha\big) + \varepsilon^2(\dots)\end{aligned}$$

وبما أنّ دراستنا في التشوّهات اللامتناهية في الصغر من المرتبة الأولى وبالتالي نهمل ε^2 ، فإنّ:

$$\varepsilon\delta g_{ij,k} = \varepsilon\big(2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_i g_{ik} + \bar{\psi}_j g_{ik} + \psi_i F_{jk} + \psi_j F_{jk}\big)$$

$$\Rightarrow \delta g_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_{(i} g_{j)k} + \psi_{(i} F_{j)k}$$

نجد من العلاقات $(17b)$ أنّ: $\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0$

$$\Rightarrow \tilde{g}_{i\alpha} F_j^\alpha + \tilde{g}_{j\alpha} F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow (g_{i\alpha} + \varepsilon\delta g_{i\alpha})F_j^\alpha + \big(g_{j\alpha} + \varepsilon\delta g_{j\alpha}\big)F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow g_{i\bar{j}} + g_{\bar{i}j} + \varepsilon\big(\delta g_{i\alpha}F_j^\alpha + \varepsilon\delta g_{j\alpha}F_i^\alpha\big) = 0$$

وحسب تعريف فضاء كيلير نجد: $g_{i\bar{j}} + g_{\bar{i}j} = 0$ إذاً:

$$\delta g_{i\alpha}F_j^\alpha + \delta g_{j\alpha}F_i^\alpha = 0 \Rightarrow \delta g_{i\bar{j}} + \delta g_{\bar{i}j} = 0$$

وهو الشرط $(16b)$ تم إثبات لزوم الشرط.

$(\Rightarrow)$ (كفاية الشرط)

لنفرض تحقق العلاقات (16):

$$\varepsilon\delta g_{ij|k} = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_{(i} g_{j)k} + \psi_{(i} F_{j)k}$$

نضرب طرفي العلاقة ب ε نجد :

$$\varepsilon\delta g_{ij|k} = \varepsilon\big(2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_{(i} g_{j)k} + \psi_{(i} F_{j)k}\big) \qquad (20)$$

ومن ناحية أخرى لدينا :

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \varepsilon\delta g_{ij}$$

نضرب طرفي العلاقة ب ε فنجد :

$$\varepsilon\tilde{g}_{ij} = \varepsilon g_{ij} + \underbrace{\varepsilon^2\delta g_{ij}}_{0} \Rightarrow \varepsilon\tilde{g}_{ij} = \varepsilon g_{ij}$$

نستبدل $\varepsilon\tilde{g}_{ij}$ ب εg_{ij} في العلاقة (20) نجد :

$$\underbrace{g_{ij,k}}_{0} + \varepsilon\delta g_{ij,k} = 2\varepsilon\bar{\psi}_k\tilde{g}_{ij} + \varepsilon\bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \varepsilon\bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

$$= 2\varepsilon\bar{\psi}_k g_{ij} + \varepsilon\bar{\psi}_{(i}g_{j)k} + \varepsilon\psi_i\tilde{g}_{j\alpha}F_k^\alpha + \varepsilon\psi_i\tilde{g}_{k\alpha}F_j^\alpha$$

باستبدال ψ_i ب $\varepsilon\psi_i$ واستبدال F_i^h ب εF_i^h نجد :

$$\tilde{g}_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k\tilde{g}_{ij} + \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

حيث : $\bar{F}_{jk} = \tilde{g}_{j\alpha}F_k^\alpha$.

استناداً إلى العلاقة $(16b)$ نجد :

$$\delta g_{i\bar{j}} + \delta g_{\bar{i}j} = 0 \Rightarrow \varepsilon\delta g_{i\alpha}F_j^\alpha + \varepsilon\delta g_{j\alpha}F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{g_{i\bar{j}} + g_{\bar{i}j}}_{0} + \varepsilon\delta g_{i\alpha}F_j^\alpha + \varepsilon\delta g_{j\alpha}F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow g_{i\alpha}F_j^\alpha + \varepsilon\delta g_{j\alpha}F_i^\alpha + g_{j\alpha}F_i^\alpha + \varepsilon\delta g_{j\alpha}F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \left(g_{i\alpha} + \varepsilon\delta g_{j\alpha}\right)F_j^\alpha + \left(g_{j\alpha} + \varepsilon\delta g_{j\alpha}\right)F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{g}_{i\alpha}F_j^\alpha + \tilde{g}_{j\alpha}F_i^\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0$$

وبالتالي استناداً إلى المبرهنة (2) فالتشوه هولومورفي إسقاطي. تم إثبات كفاية الشرط.

وللسهولة سوف نرمز للتنسور المتناظر δg_{ij} ب h_{ij} فنكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية :

مبرهنة (6):

إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيليرالمكافئي k_n مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهياً في الصغر هو

أن يتواجد فيه تنسور متناظر h_{ij} يحقق الشروط :

$$a)\ \ h_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k \tilde{g}_{ij} + \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

$$b)\ \ h_{\bar{\imath}j} + h_{i\bar{\jmath}} = 0 \qquad (21)$$

حيث:$\bar{\psi}_i$ متجه تدرّج وَ $\bar{\psi}_i = \psi_{\bar{\imath}} = \psi_\alpha F_i^\alpha$ وَ ψ_i متّجه ما .

إذا فرضنا في الشروط (21) أنّ $\psi_i = 0$ و بالتالي $\bar{\psi}_i = 0$ عندئذٍ $h_{ij,k} = 0$ وهذا يتحقق في الحالتين الآتيتين :

<u>الحالة الأولى:</u> $h_{ij} = \mathrm{c}g_{ij}$ حيث $c = const$ ،عندئذٍ استناداً إلى (12) نجد:

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \varepsilon\delta g_{ij} = g_{ij} + \varepsilon h_{ij} = g_{ij} + \varepsilon \mathrm{c} g_{ij} = (1+\varepsilon c)g_{ij}$$

وعندئذٍ يتطابق التشوّه مع التحاكي اللامتناهي في الصغر.

<u>الحالة الثانية:</u> $h_{ij} \neq \mathrm{c}g_{ij}$ عندئذٍ في هذه الحالة يوجد في k_n تنسور متناظر ومشتقه ثابت.

وفي كلتا الحالتين من (15) ينتج أنّ: $\tilde{g} = cg$ أي أنّ التشوّه هو تحاكٍ لا متناهٍ في الصغر .

وسوف نعتبر أنّ هذه الحالات مبتذلة .

مبرهنة (7):

إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيليرالمكافئيk_n مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهٍ في الصغر هو

تحقق الشروط:

$$\left.\begin{array}{ll} a) & \delta\Gamma_{ij}^{h} = \delta_{(i}^{h}\bar{\varphi}_{j)} + F_{(i}^{h}\varphi_{j)} \\ b) & \delta g_{\bar{\imath}j} + \delta g_{i\bar{\jmath}} = 0 \end{array}\right\} \quad (22)$$

الإثبات :

($\Leftarrow$) **(لزوم الشرط)** .

بفرض أنّ k_n وَ $\tilde{k}_n$ هولومورفيان فيا بينهما ومنسوبان إلى نظام إحداثي مشترك (χ^i)

عندها استناداً إلى المبرهنة (1) تتحقق العلاقات :

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{h}(\chi) = \Gamma_{ij}^{h}(\chi) + \delta_{(i}^{h}\bar{\varphi}_{j)} + F_{(i}^{h}\varphi_{j)} \qquad (23)$$

حيث: $\bar{\varphi}_i = \frac{1}{2(n+2)}\partial_i \ln\left|\frac{\tilde{g}}{g}\right|$

وبما أنّ: $\bar{\varphi} = \frac{1}{2(n+2)}\ln\left|\frac{\tilde{g}}{g}\right|; \tilde{g} = det\|\tilde{g}_{ij}\|, g = det\|g_{ij}\|$

و أنّ $\tilde{g} = g + \varepsilon\delta g$ فإنّ:

$$2(n+2)\bar{\varphi} = \ln\left|\frac{\tilde{g}}{g}\right| = \ln\left|\frac{g+\varepsilon\delta g}{g}\right| = \ln\left|1+\varepsilon\frac{\delta g}{g}\right|$$
$$= \ln\left(1+\varepsilon\frac{\delta g}{g}\right) = \varepsilon\frac{\delta g}{g} + \cdots$$

حيث $\bar{\varphi}_i$: في (23) يجب تغييرها إلى $\varepsilon\bar{\varphi}_i$ ،واستناداً إلى المبرهنة (1) نجد :

$$\tilde{F}_i^h = \alpha F_i^h$$

نعوض في العلاقة : $\tilde{F}_i^h = F_i^h + \varepsilon\delta F_i^h$

نجد : $\alpha F_i^h = F_i^h + \varepsilon\delta F_i^h$

$$\Rightarrow F_i^h = \varepsilon\frac{\delta F_i^h}{\alpha - 1}$$

لذلك نستبدل εF_i^h ب F_i^h ، وبما أنّ $\tilde{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \varepsilon\delta\Gamma_{ij}^h$ نعوض في (23) نجد :

$$\Gamma_{ij}^h + \varepsilon\delta\Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \varepsilon\delta_{(i}^h\bar{\varphi}_{j)} + \varepsilon F_{(i}^h\varphi_{j)}$$
$$\Rightarrow \delta\Gamma_{ij}^h = \delta_{(i}^h\bar{\varphi}_{j)} + F_{(i}^h\varphi_{j)}$$

وهي العلاقة نفسها $(22a)$.

واستناداً إلى المبرهنة (5) نجد تحقق الشروط $(22b)$ $\delta g_{\bar{\imath}j} + \delta g_{i\bar{\jmath}} = 0$.

$(\Rightarrow)$ (كفاية الشرط) :

وبالعكس لنفرض تحقق العلاقات (22) :

$$\delta\Gamma_{ij}^h = \delta_{(i}^h\bar{\varphi}_{j)} + F_{(i}^h\varphi_{j)}$$

نضرب الطرفين ب ε نجد:

$$\varepsilon\delta\Gamma_{ij}^{h} = \varepsilon\delta_{(i}^{h}\bar{\varphi}_{j)} + \varepsilon F_{(i}^{h}\varphi_{j)}$$

نضيف Γ_{ij}^{h} إلى الطرفين نجد :

$$\Gamma_{ij}^{h} + \varepsilon\delta\Gamma_{ij}^{h} = \Gamma_{ij}^{h} + \varepsilon\delta_{(i}^{h}\bar{\varphi}_{j)} + \varepsilon F_{(i}^{h}\varphi_{j)}$$

باستبدال $\bar{\varphi}_j$ ب $\varepsilon\bar{\varphi}_j$ وَ $F_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}$ ب $\varepsilon F_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}$ وَبما أنّ $\tilde{\Gamma}_{ij}^{h} = \Gamma_{ij}^{h} + \varepsilon\delta\Gamma_{ij}^{h}$ نجد:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{h} = \Gamma_{ij}^{h} + \delta_{(i}^{h}\bar{\varphi}_{j)} + F_{(i}^{h}\varphi_{j)} \qquad (24)$$

بقي لدينا إثبات أنّ $\tilde{g}_{ij}$ هو تنسور قياس لفضاء كيليرالمكافئي $\tilde{k}_n$ تركيبه هو التنسور F_i^h أي $(\tilde{F}_i^h = F_i^h)$

والذي يجب أن يحقق شروط تعريف فضاء كيليرالمكافئي(1) والتي هي في هذه الحالة من الشكل :

$$1)\ F_{\alpha}^{h}F_{i}^{\alpha} = 0, \qquad 2)\ F_{(i}^{\alpha}\tilde{g}_{j)\alpha} = 0 \quad , \qquad 3)\ F_{i\|j}^{h} = 0$$

الشرط الأول محقق ل F_i^h حسب تعريف الفضاء k_n.

والشرط الثاني محقق لأنه استناداً إلى العلاقة $(22b)$: $\delta g_{\bar{\imath}j} + \delta g_{i\bar{\jmath}} = 0$ نجد:

$$\varepsilon\left[\delta g_{\bar{\imath}j} + \delta g_{i\bar{\jmath}}\right] = 0 \Rightarrow \underbrace{F_{ij} + F_{ji}}_{=0} + \varepsilon\left[\delta g_{i\alpha}F_j^{\alpha} + \delta g_{i\alpha}F_i^{\alpha}\right] = 0$$

$$\Rightarrow g_{i\alpha}F_j^{\alpha} + \varepsilon\delta g_{i\alpha}F_j^{\alpha} + g_{i\alpha}F_i^{\alpha} + \varepsilon\delta g_{j\alpha}F_i^{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow (g_{i\alpha} + \varepsilon\delta g_{i\alpha})F_j^{\alpha} + (g_{i\alpha} + \varepsilon\delta g_{j\alpha})F_i^{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{g}_{i\alpha}F_j^{\alpha} + \tilde{g}_{j\alpha}F_i^{\alpha} = 0 \Rightarrow F_{(i}^{\alpha}\tilde{g}_{j)\alpha} = 0$$

والشرط الثالث محقق لأنّ :

$$F^h_{i\|j} = \frac{\partial F^h_i}{\partial \chi^y} + F^\alpha_i \bar{\Gamma}^h_{\alpha j} - F^h_\alpha \bar{\Gamma}^h_{ij} =$$

$$= \frac{\partial F^h_i}{\partial \chi^j} + F^\alpha_i\left[\Gamma^h_{\alpha j} + \delta^h_{(\alpha}\bar{\varphi}_{j)} + F^h_{(\alpha}\varphi_{j)}\right] - \Gamma^h_\alpha\left[\Gamma^\alpha_{ij} + \delta^\alpha_{(i}\bar{\varphi}_{j)} + F^\alpha_{(i}\varphi_{j)}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{\partial F^h_i}{\partial \chi^j} + F^\alpha_i \Gamma^h_{\alpha j} - F^h_\alpha \Gamma^\alpha_{ij}}_{=0} + F^\alpha_i \delta^h_{(\alpha}\bar{\varphi}_{j)} + F^\alpha_i F^h_{(\alpha}\varphi_{j)} - F^h_\alpha \delta^\alpha_{(i}\bar{\varphi}_{j)} - F^h_\alpha F^\alpha_{(i}\varphi_{j)}$$

$$= 0 + F^h_i \bar{\varphi}_j + F^\alpha_i \varphi_{\bar{\alpha}} \delta^h_i + \underbrace{F^\alpha_i F^h_\alpha \varphi_i}_{0} + F^\alpha_i \varphi_\alpha F^h_j - F^h_i \bar{\varphi}_j - F^h_j \bar{\varphi}_i - \underbrace{F^h_\alpha F^\alpha_i \varphi_j}_{=0} - \underbrace{F^h_\alpha F^\alpha_j \varphi_i}_{=0}$$

$$= \underbrace{\varphi_{\bar{\bar{i}}}\delta^h_i}_{=0} + \bar{\varphi}_i F^h_j - \bar{\varphi}_i F^h_j = 0$$

وبالتالي نستنتج أنّ : $\tilde{F}^h_i(\chi) = \alpha F^h_i(\chi) \qquad (25)$

من العلاقات (24) وَ (25) واستناداً إلى المبرهنة (1) نجد أنّ التشوّه هو هولومورفي إسقاطي. تم إثبات المبرهنة.

مبرهنة $(\mathbf{8})$:

إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيليرالمكافئيk_n مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهٍ في الصغر غير

مبتذل هو أن يكون مطبقاً هولومورفياً إسقاطياً غير مبتذلاً .

الإثبات :

($\Leftarrow$)(لزوم الشرط):

لنفرض أنّ فضاء كيليرالمكافئي k_n مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهياً في الصغر غير مبتذلاً ، عندئذٍ الشروط

$(21a)$ تُكتب بالشكل :

$$h_{ij,k} - 2\bar{\psi}_k \tilde{g}_{ij} = \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

$$\Rightarrow \left(h_{ij} - 2\bar{\psi}\tilde{g}_{ij}\right)_{,k} = \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k} \qquad (26)$$

حيث : $\psi_i \neq 0$ متجه ما و $\bar{\psi}_i \neq 0$ متجه تدرّج (التشوه غير مبتذل فرضاً) .

أي أنّه يوجد في k_n تنسور متناظر $a_{ij} = h_{ij} - 2\bar{\psi}g_{ij}$ يحقق الشرط :

$$a_{ij,k} = \bar{\psi}_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \bar{\psi}_{(i}\bar{F}_{j)k}$$

وبما أنّ $F_{jk} = -F_{kj} = -g_{k\alpha}F_j^{\alpha} = -g_{\bar{j}k}$ نعوض في العلاقة السابقة نجد:

$$a_{ij,k} = \bar{\psi}_{(i}g_{j)k} - \psi_{(i}g_{\bar{j})k} \qquad (27)$$

من العلاقة : $a_{ij} = h_{ij} - 2\bar{\psi}g_{ij}$ نجد :

$$a_{\bar{i}j} = h_{\bar{i}j} - 2\bar{\psi}g_{\bar{i}j} \qquad (28)$$

$$a_{i\bar{j}} = h_{i\bar{j}} - 2\bar{\psi}g_{i\bar{j}} \qquad (29)$$

بجمع هاتين العلاقتين (29) وَ (28) طرفاً لطرف نجد :

$$a_{\bar{i}j} + a_{i\bar{j}} = \underbrace{h_{\bar{i}j} + h_{i\bar{j}}}_{=0} - 2\bar{\psi}\underbrace{\left(g_{\bar{i}j} + g_{i\bar{j}}\right)}_{=0}$$

وبما أنّ $g_{\bar{\imath}j} + g_{i\bar{\jmath}} = 0$ حسب تعريف فضاء كيلير المكافئي وَ $h_{\bar{\imath}j} + h_{i\bar{\jmath}} = 0$ حسب $(21b)$.

إذاً : $$a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} = 0 \qquad (30)$$

من العلاقات (30) وَ (27) واستناداً إلى المبرهنة (3) حيث $\lambda_i = \psi_i \neq 0$، نستنتج أنّ فضاء كيلير المكافئي k_n يُطبق هولومورفياً إسقاطياً غير مبتذل. تم إثبات لزوم الشرط.

$(\Rightarrow)$(كفاية الشرط):

والعكس صحيح، لنفرض أنّ فضاء كيلير المكافئي k_n يطبق هولومورفياً إسقاطياً غير مبتذل، عندئذٍ استناداً إلى

المبرهنة (3) يوجد في هذا الفضاء تنسور a_{ij} من النوع $\binom{0}{2}$ متناظر غير صفري ويحقق الشروط :

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \ a_{ij|k} = \lambda_{(\bar{\imath}}g_{j)k} - \lambda_{(i}g_{\bar{\jmath})k} \\ &b)\ \ a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

حيث $\lambda_i \neq 0$ متجه ما، لأن التطبيق غير مبتذل وَ $\bar{\lambda}_i = \lambda_{\bar{\imath}} = \lambda_\alpha F_i^\alpha$ وَ $F_{jk} = -g_{\bar{\jmath}k}$.

يمكن كتابة الشروط $(31a)$ بالشكل :

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i}g_{j)k} - \lambda_{(i}F_{j)k}$$

$$\Rightarrow a_{ij,k} + 2\bar{\lambda}_k g_{ij} = 2\bar{\lambda}_k g_{ij} + \lambda_{(i}g_{j)k} - \lambda_{(i}F_{j)k}$$

$$\Rightarrow \left(a_{ij} + 2\bar{\lambda} g_{ij}\right)_{|k} = 2\bar{\lambda}_k g_{ij} + \lambda_{(i}g_{j)k} - \lambda_{(i}F_{j)k}$$

بفرض: $\psi_i = \lambda_i \neq 0$ وَ $h_{ij} = a_{ij} + 2\bar{\lambda} g_{ij}$ نعوض في العلاقة السابقة نجد :

$$h_{ij,k} = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_{(i} g_{j)k} + \lambda_{(i} F_{j)k} \qquad (32)$$

وأيضاً :

$$h_{\bar{\imath}j} = a_{\bar{\imath}j} + 2\bar{\lambda} g_{\bar{\imath}j}$$

$$h_{i\bar{\jmath}} = a_{i\bar{\jmath}} + 2\bar{\lambda} g_{i\bar{\jmath}}$$

$$\Rightarrow h_{\bar{\imath}j} + h_{i\bar{\jmath}} = a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} + 2\bar{\lambda} \underbrace{\left(g_{\bar{\imath}j} + g_{i\bar{\jmath}}\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow h_{\bar{\imath}j} + h_{i\bar{\jmath}} = 0 \qquad (33)$$

من العلاقات (33) و (32) واستناداً إلى المبرهنة (6) نجد أنّ k_n مشوهاً هولومورفياً إسقاطياً لا متناهياً في

الصغر غير مبتذل. تم إثبات كفاية الشرط.

نتيجة $(\mathbf{1})$:

يسمح فضاء كيلير المكافئي k_n بتشوّه هولومورفي إسقاطي غير مبتذل إذا امتلكت جملة المعادلات الخطية الآتية

من نوع كوشي حلاً بالنسبة للتنسور المتناظر وغير الصفري$(a_{\bar{\imath}j} + a_{i\bar{\jmath}} = 0)a_{ij}$ وبالنسبة للمتجه

غير الصفري λ_i والصامد τ :

$$\left.\begin{array}{l} a)\ a_{ij,k} = \bar{\lambda}_{(i} g_{j)k} + \lambda_{(i} g_{j)\bar{k}} \\ b)\ \lambda_{i,k} = \tau g_{\bar{\imath} j} + a_{\alpha\beta} M_{ij}^{\alpha\beta} \\ c)\ \tau_{,i} = \lambda_\alpha M_i^\alpha + a_{\alpha\beta} M_i^{\alpha\beta} \end{array}\right\} \qquad (34)$$

من أجل القيم الابتدائية في النقطة χ_0 :

$$a_{ij}(\chi_0) = a_{ij}^0 , \qquad \lambda_i(\chi_0) = \lambda_i^0 , \qquad \tau(\chi_0) = \tau^0 \qquad (35)$$

والتي بالحقيقة تحقق الخواص :

$$a_{ij}^0 = a_{ji}^0 , \qquad a_{\alpha(i}^0 F_{j)}^\alpha(\chi_0) , \qquad det\|a_{ij}^0\| \neq 0 \qquad (36)$$

حيث: $M_{ij}^{\alpha\beta} \equiv \mathrm{T}_{ij}^{\alpha\beta} + \varepsilon_{\bar{\jmath}}\{\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta}\varepsilon^j\varepsilon^k\eta^\ell - \varepsilon_{\bar{\imath}}\mathrm{T}_{\vartheta jk}^{\alpha\beta}\eta^\vartheta\eta^j\varepsilon^k\eta^\ell\}$

$$M_k^\alpha \equiv M_{ij\vartheta}^\alpha \varepsilon^i\eta^j\varepsilon^\vartheta\eta_{\bar{k}} - M_{ijk}^\alpha\varepsilon^i\eta^j$$

$$M_k^{\alpha\beta} \equiv M_{ij\vartheta}^{\alpha\beta} \varepsilon^i\eta^j\varepsilon^\vartheta\eta_{\bar{k}} - M_{ijk}^{\alpha\beta}\varepsilon^i\eta^j$$

$$M_{ijk}^{\alpha\beta} \equiv M_{ij|k}^{\alpha\beta} - M_{ik|j}^{\alpha\beta}$$

$$M_{ij}^{\gamma} \equiv -R_{ijk}^{\gamma} + M_{i[j}^{\bar{\gamma}\beta} g_{k]\beta} + M_{i[j}^{\beta\bar{\gamma}} g_{k]\beta} + M_{i[j}^{\gamma\beta} g_{\bar{k}]\beta} + M_{i[j}^{\beta\gamma} g_{\bar{k}]\beta}$$

$$M_{ijk}^{\alpha\beta} \equiv M_{ijk}^{\alpha\beta}\varepsilon^j\eta^i + [M_{\ell mj}^{\alpha\beta} g_{\bar{\imath}k} - M_{\ell mk}^{\alpha\beta} g_{\bar{\imath}j}]\eta^\ell\varepsilon^m$$

$$M_{ijk}^{\alpha} \equiv M_{ijk}^{\alpha}\varepsilon^j\eta^i + [M_{\ell mj}^{\alpha} g_{\bar{\imath}k} - M_{\ell mk}^{\alpha} g_{\bar{\imath}j}]\eta^\ell\varepsilon^m$$

$$\mathrm{T}_{j\ell}^{\alpha\beta} \equiv -\tfrac{1}{2}\eta_{\bar{\jmath}}\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta}\varepsilon^j\varepsilon^k\eta^k + \mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta}\varepsilon^j\eta^k$$

$$\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta} \equiv \mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta} - g_{k(\bar{\imath}}\mathrm{T}_{j)\ell}^{\alpha\beta} + g_{k(\bar{\imath}}\mathrm{T}_{j)k}^{\alpha\beta}$$

$$\mathrm{T}_{ijk\ell}^{\alpha\beta} \equiv \delta_{(i}^{\alpha} R_{j)k\ell}^{\beta} - \frac{1}{2n}\left\{g_{k(i} M_{j)\ell}^{\alpha\beta} - g_{\ell(i} M_{j)k}^{\alpha\beta}\right\}$$

الإثبات :

ينتج مباشرةً من المبرهنة (8) ومن المبرهنة (4).

العلاقة بين فضاء كيلير المكافئي k_n وفضاءه المجسم k_m ومتّجه الإزاحة :

إنّ المسألة الأساسية في دراسة التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية هي دراسة العلاقة بين k_n و فضائه

المجسّم k_m و متّجه الإزاحة $\xi^{\alpha}(\chi)$.

المهم في هذه الحالة الحصول على المتجه $\xi^{\alpha}(\chi)$، و بالتالي الحصول على معادله تخصّه وذلك

بتعويض (14) في $(16a)$ نجد :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\vartheta}} y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,k} y^{\vartheta}_{,j} \xi^{\gamma} + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}} \left(y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} \xi^{\gamma}_{,k} + y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,jk} \xi^{\gamma} + y^{\alpha}_{,ik} y^{\beta}_{,j} \xi^{\gamma} \right) \\
&\qquad + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}} \left(\xi^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} \right) y^{\gamma}_{,k} \\
&\qquad + a_{\alpha\beta} \left(\xi^{\alpha}_{,ik} y^{\beta}_{,j} + \xi^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,jk} + y^{\alpha}_{,i} \xi^{\beta}_{,jk} + y^{\alpha}_{,ik} \xi^{\beta}_{,j} \right) \\
&\qquad = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_{(i} g_{j)k} + \psi_{(i} F_{j)k} \qquad (35)
\end{aligned}$$

حيث بتغيير في الإحداثيات للفضاء k_n يجب أن تكون جميع y^{α} وَ ξ^{α} صامدة لذلك فإنّ المشتقات الجزئية

الأولى لها تتطابق مع المشتقات موافقة التغيّر، واستفدنا من أنّ $a_{\alpha\beta}$ صامد في k_n .

المعادلات (35) أكثر تعقيداً وذلك لأنّها تولد حقل إزاحة ثنائي $\xi^{\alpha}_{,ik}$ و للتخلّص من ذلك تجزئ العملية الآّتية

على الأدلة i,k,j :

$$(i,,j,k\ )+(i,k,j\ )-(j,k,i)$$

نحصل على العلاقات:

$$A_{ijk}+B_{ijk}+C_{ijk}=D_{ijk} \qquad (36)$$

حيث:

$$A_{ijk}=\xi^{\gamma}\left(\underbrace{\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\vartheta}}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\vartheta}_{,k}}_{1}+\underbrace{\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\vartheta}}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,k}y^{\vartheta}_{,j}}_{2}-\underbrace{\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\alpha}}y^{\beta}_{,j}y^{\vartheta}_{,k}y^{\alpha}_{,i}}_{3}\right)$$

نبدل في الحد الثاني بين الدليلين $\beta \leftrightarrow \vartheta$ وفي الحد الثالث نجري المبادلة الآتية:

$$\vartheta\longrightarrow\alpha\,,\quad \beta\longrightarrow\ \vartheta,\quad \alpha\longrightarrow\beta$$

نجد:

$$A_{ijk}=\xi^{\gamma}\left(\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\vartheta}}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\vartheta}_{,k}+\frac{\partial^2 a_{\alpha\vartheta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\beta}}y^{\alpha}_{,i}y^{\vartheta}_{,k}y^{\beta}_{,j}-\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}\partial y^{\alpha}}y^{\beta}_{,j}y^{\vartheta}_{,k}y^{\alpha}_{,i}\right)$$

$$=\xi^{\gamma}\frac{\partial}{\partial y^{\gamma}}\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\vartheta}}+\frac{\partial a_{\alpha\vartheta}}{\partial y^{\beta}}-\frac{\partial a_{\beta\vartheta}}{\partial y^{\alpha}}\right)y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\vartheta}_{,k}$$

$$=2\xi^{\gamma}\frac{\partial\Gamma_{\alpha,\beta\vartheta}}{\partial y^{\gamma}}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\vartheta}_{,k} \qquad (37)$$

حيث: $\Gamma_{\alpha,\beta\vartheta}$ رموز كريستوفل من النوع الأول للفضاء k_n .

$$B_{ijk} = \partial a_{\alpha\beta}\left(y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}\xi^{\gamma}_{,k} + y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,jk}\xi^{\gamma} + y^{\alpha}_{,ik}y^{\beta}_{,j}\xi^{\gamma}\right)$$
$$+\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left(\xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\gamma}_{,k} + \xi^{\beta}_{,j}y^{\alpha}_{,j}y^{\gamma}_{,k}\right)$$
$$+\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left(y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,k}\xi^{\gamma}_{,j} + y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,kj}\xi^{\gamma} + y^{\alpha}_{,ij}y^{\beta}_{,k}\xi^{\gamma}\right)$$
$$+\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left(\xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\gamma}_{,k} + \xi^{\beta}_{,j}y^{\alpha}_{,j}y^{\gamma}_{,k}\right)$$
$$-\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left(y^{\alpha}_{,j}y^{\beta}_{,k}\xi^{\gamma}_{,i} + y^{\alpha}_{,j}y^{\beta}_{,ki}\xi^{\gamma} + y^{\alpha}_{,ji}y^{\beta}_{,k}\xi^{\gamma}\right)$$
$$-\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left(\xi^{\alpha}_{,j}y^{\beta}_{,k}y^{\gamma}_{,i} + \xi^{\beta}_{,k}y^{\alpha}_{,j}y^{\gamma}_{,i}\right)$$

نستطيع كتابة B_{ijk} بالشكل :

$$B_{ijk} = B^{1}_{ijk} + B^{2}_{ijk} + B^{3}_{ijk} + B^{4}_{ijk} \qquad (38)$$

حيث :

$$B^{1}_{ijk} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left[y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}\xi^{\gamma}_{,k} + \xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}y^{\gamma}_{,k} + \xi^{\beta}_{,j}y^{\alpha}_{,j}y^{\gamma}_{,k}\right]$$

$$B^{2}_{ijk} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left[y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,k}\xi^{\gamma}_{,j} + \xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,k}y^{\gamma}_{,j} + \xi^{\beta}_{,k}y^{\alpha}_{,i}y^{\gamma}_{,j}\right]$$

نبادل بين الدليلين $\gamma \leftrightarrow \beta$ نجد:

$$B^{2}_{ijk} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left[y^{\alpha}_{,i}y^{\gamma}_{,k}\xi^{\beta}_{,j} + \xi^{\alpha}_{,i}y^{\gamma}_{,k}y^{\beta}_{,j} + \xi^{\gamma}_{,k}y^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,j}\right]$$

$$B^{3}_{ijk} = -\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}\left[y^{\alpha}_{,j}y^{\beta}_{,k}\xi^{\gamma}_{,i} + \xi^{\gamma}_{,j}y^{\beta}_{,j}y^{\gamma}_{,\chi} + \xi^{\beta}_{,k}y^{\alpha}_{,j}y^{\gamma}_{,i}\right]$$

نجري عملية المبادلة الآتية : $\alpha \longrightarrow \beta$ ، $\beta \longrightarrow \gamma$ ، $\gamma \longrightarrow \alpha$ نجد:

$$B^3_{ijk} = -\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial y^\alpha}\left[y^\beta_{,j}y^\gamma_{,k}\xi^\gamma_{,i} + \xi^\beta_{,j}y^\gamma_{,k}y^\alpha_{,i} + y^\beta_{,j}\xi^\gamma_{,k}y^\alpha_{,i}\right]$$

$$B^4_{ijk} = \xi^\gamma\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\left[y^\alpha_{,i}y^\beta_{,jk} + y^\alpha_{ik}y^\beta_{,j} + y^\alpha_{,i}y^\beta_{,kj} + y^\alpha_{,ij}y^\beta_{k} - y^\alpha_{,j}y^\beta_{,ki} - y^\alpha_{,ji}y^\beta_{,k}\right]$$

$$= \xi^\gamma\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\left[\underbrace{2y^\alpha_{,i}y^\beta_{,jk}}_{1} + \underbrace{y^\alpha_{,ik}y^\beta_{,j}}_{2} - \underbrace{y^\beta_{,kj}y^\alpha_{,j}}_{3}\right]$$

نبادل في الثالث بين الدليلين $\beta \leftrightarrow \alpha$ علماً أنّ $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ نجد:

$$B^4_{ijk} = \xi^\gamma\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\left[2y^\alpha_{,j}y^\beta_{,jk} + \underbrace{y^\alpha_{,ik}y^\beta_{,j} - y^\alpha_{,ki}y^\beta_{,j}}_{=0}\right]$$

$$\Rightarrow B^4_{ijk} = 2\xi^\gamma\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}y^\alpha_{,i}y^\beta_{,jk}$$

نعوض: B^4_{ijk} ,B^3_{ijk} ,B^2_{ijk} ,B^1_{ijk} في العلاقة (38) نجد:

$$B_{ijk} = \left[\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} + \frac{\partial a_{\alpha\gamma}}{\partial y^\beta} - \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial y^\alpha}\right]\left(y^\alpha_{,i}y^\beta_{,j}\xi^\gamma_{,k} + y^\alpha_{,i}\xi^\beta_{,j}y^\gamma_{,k} + \xi^\alpha_{,i}y^\beta_{,j}y^\gamma_{,k}\right) + 2\xi^\gamma\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}y^\alpha_{,i}y^\beta_{,jk}$$

$$\Rightarrow B_{ijk} = 2\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}\left(y^\alpha_{,i}y^\beta_{,j}\xi^\gamma_{,k} + y^\alpha_{,i}\xi^\beta_{,j}y^\gamma_{,k} + \xi^\alpha_{,i}y^\beta_{,j}y^\gamma_{,k}\right) + 2\xi^\gamma\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}y^\alpha_{,i}y^\beta_{,jk} \qquad (39)$$

$$C_{ijk} = a_{\alpha\beta}\left[\xi^\alpha_{,ik}y^\beta_{,j} + \xi^\alpha_{,i}y^\beta_{,jk} + y^\alpha_{,i}\xi^\beta_{,j} + y^\alpha_{,ik}\xi^\beta_{,j} + \xi^\alpha_{,ij}y^\beta_{,k} + \xi^\alpha_{,i}y^\beta_{,kj} + y^\alpha_{,i}\xi^\beta_{,kj} + y^\alpha_{,ij}\xi^\beta_{,k} - \xi^\alpha_{,ji}y^\beta_{,k} - \xi^\alpha_{,j}y^\beta_{,ki} - \xi^\alpha_{,j}y^\beta_{,ki} - y^\alpha_{,ji}\xi^\beta_{,k}\right]$$

$$\Rightarrow C_{ijk} = a_{\alpha\beta}\left[2y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{,jk} + 2\xi^{\alpha}_{i}y^{\beta}_{,jk} + \left(\xi^{\alpha}_{,ik}y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,ik}\xi^{\beta}_{,j}\right) - \underbrace{\xi^{\beta}_{,ki}y^{\alpha}_{,j} + y^{\beta}_{,ki}\xi^{\alpha}_{,j}}_{1}\right]$$

نبادل في الحد الأول بين الدليلين $\alpha \leftrightarrow \beta$ علماً أنّ $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ نجد :

$$\Rightarrow C_{ijk} = a_{\alpha\beta}\left[2y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{,jk} + 2\xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,jk} + \underbrace{\left(\xi^{\alpha}_{,ik}y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,ik}\xi^{\beta}_{,j}\right) - \left(\xi^{\alpha}_{,ik}y^{\beta}_{,j} + y^{\alpha}_{,ik}\xi^{\beta}_{,j}\right)}_{=0}\right]$$

$$C_{ijk} = 2a_{\alpha\beta}\left[y^{\alpha}_{,i}\xi^{\beta}_{,jk} + \xi^{\alpha}_{,i}y^{\beta}_{,jk}\right] \qquad (40)$$

$$\begin{aligned} D_{ijk} = {} & 2\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_i g_{jk} + \bar{\psi}_j g_{ik} + \psi_i F_{jk} + \psi_j F_{ik} + 2\bar{\psi}_j g_{ik} + \bar{\psi}_i g_{kj} \\ & + \bar{\psi}_k g_{ij} + \psi_i F_{kj} + \psi_k F_{ij} - 2\bar{\psi}_i g_{jk} - \bar{\psi}_j g_{ki} - \bar{\psi}_k g_{ji} \\ & - \psi_j F_{ki} - \psi_k F_{ji} \end{aligned}$$

بما أنّ k_n فضاء كيلير المكافئي فحسب تعريف الفضاء k_n نجد: $F_{ij} = -F_{ji}$ ، وبما أنّ $g_{ij} = g_{ji}$ نجد:

$$\begin{aligned} D_{ijk} = {} & 2\bar{\psi}_k g_{ij} + 2\bar{\psi}_j g_{ik} + 2\psi_j F_{ik} + 2\psi_k F_{ij} + \bar{\psi}_i g_{jk} + \bar{\psi}_i g_{jk} \\ & - 2\bar{\psi}_i g_{jk} + \bar{\psi}_j g_{ik} - \bar{\psi}_j g_{ik} + \bar{\psi}_k g_{ji} - \bar{\psi}_k g_{ij} + \psi_i F_{jk} \\ & - \psi_i F_{jk} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D_{ijk} = 2\bar{\psi}_k g_{ij} + 2\bar{\psi}_j g_{ik} - 2\psi_j F_{ki} - 2\psi_k F_{ji}:$$

$$\Rightarrow D_{ijk} = 2\left[\bar{\psi}_k g_{ij} + \bar{\psi}_j g_{ik} - \psi_{(j}F_{k)i}\right] \qquad (41)$$

نعوض العلاقات (37) , (39) , (40) , (41) في العلاقات (36) وبعد تقسيم الطرفين على 2 نحصل على العلاقات :

$$a_{\alpha\beta}\left(y_{,i}^{\alpha}\xi_{,jk}^{\beta}+\xi_{,i}^{\alpha}y_{,jk}^{\beta}\right)+\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}\left(y_{,i}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}\xi_{,k}^{\gamma}+y_{,i}^{\alpha}\xi_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\gamma}+\xi_{,i}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\gamma}\right)+\xi^{\gamma}\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}y_{,i}^{\alpha}y_{,jk}^{\beta}+\frac{\partial\Gamma_{\alpha,\beta\vartheta}}{\partial y^{\gamma}}y_{,i}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\vartheta}\right)=\bar{\psi}_k g_{ij}+\bar{\psi}_j g_{ik}-\psi_{(j}F_{k)i} \qquad (42)$$

حيث: $\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}$ مركبات كريستوفل للفضاء k_m وَ $F_{ij}=g_{i\alpha}F_j^{\alpha}$ وَ $\bar{\psi}_i=\psi_{\bar{\imath}}$ وَ $F_{ij}+F_{ji}=0$.

وأيضاً لدينا من الشروط $(16b)$ أنّ: $\delta g_{\bar{\imath}j}+\delta g_{i\bar{\jmath}}=0$. المعادلات (35) وَ (42) متكافئة. وبالتالي نصل إلى صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة (9):

إنّ الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء كيلير المكافئي k_n المحتوى في فضاء كيلير المكافئي k_m ذو حقل الإزاحة $\xi^{\alpha}(\chi)$ مشوّهاً هومولورفياً إسقاطياً لا متناهٍ في الصغر هو تحقق الشروط :

$$\left.\begin{array}{l} a)\ a_{\alpha\beta}\left(y_{,i}^{\alpha}\xi_{,jk}^{\beta}+\xi_{,i}^{\alpha}y_{,jk}^{\beta}\right) \\ \quad +\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}\left(y_{,i}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}\xi_{,k}^{\gamma}+y_{,i}^{\alpha}\xi_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\gamma}+\xi_{,i}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\gamma}\right) \\ \quad +\xi^{\gamma}\left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^{\gamma}}y_{,i}^{\alpha}y_{,jk}^{\beta}+\frac{\partial\Gamma_{\alpha,\beta\vartheta}}{\partial y^{\gamma}}y_{,i}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\vartheta}\right) \\ \quad =\bar{\psi}_k g_{ij}+\bar{\psi}_j g_{ik}-\psi_{(j}F_{k)i} \\ b)\ \delta g_{\bar{\imath}j}+\delta g_{i\bar{\jmath}}=0 \end{array}\right\} \quad (43)$$

حيث : $\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}$ مركبات كريستوفل من النوع الأول للفضاء k_n. ψ_i متجه ما، $\bar{\psi}_i$ متجه تدرّج

$$\bar{\psi}_i = \psi_{\bar{\imath}} = \psi_\alpha F_i^\alpha \; . \; F_{ij} = g_{i\alpha} F_j^\alpha \text{ وَ } \delta g_{\bar{\imath}j} = \delta g_\alpha F_i^\alpha \; .$$

تعريف (5): $[3]$

يُسمى فضاء كيليرالمكافئي k_n فضاءً متقايساً (تقايسياً) إذا وجد فيه حقل متجهي دوراني ξ^n يحقق الشروط :

$$\xi_{,i}^h = \rho \delta_i^h \qquad (44)$$

حيث: ρ صامد ما.

إذا كان $\rho \neq 0$ ، فإن الفضاء k_n عندئذٍ يُسمى فضاءً متماثلاً تقايسياً من النوع الأساسي.

تمهيدية (2):$[3]$

تُطبق فضاءات كيلير المكافئية المتماثلة تقايسياً من النوع الأساسي تطبيقياً هولومورفياً إسقاطياً غير مبتذل.

مبرهنة (10):

تسمح فضاءات كيلير المكافئية المتماثلة تقايسياً من النوع الأساسي بتشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في

الصغر غير مبتذل.

الإثبات:

بما أنّ فضاءات كيلير المكافئية المتماثلة تقايسياً من النوع الأساسي تسمح بتطبيق هولومورفي إسقاطي غير

مبتذل حسب التمهيدية (2) وبالتالي فهي تسمح بتشوّه هولومورفي إسقاطي لا متناهٍ في الصغر غير مبتذل حسب

المبرهنة (8). تم إثبات المبرهنة.

تغيّر تنسوري ريمان و ريتشي لفضاء كيلير المكافئي k_n بتأثير التشوّهات الهولومورفية الإسقاطية

اللامتناهية في الصغر:

يعطى تنسور ريمان R_{ijk}^{h} للفضاء k_n بالعلاقة:

$$R_{ijk}^{h} = \partial_j \Gamma_{ik}^{h} - \partial_k \Gamma_{ij}^{h} + \Gamma_{j\alpha}^{h} \Gamma_{ik}^{\alpha} - \Gamma_{k\alpha}^{h} \Gamma_{ij}^{\alpha}$$

حيث Γ_{ij}^{h} رموز كريستوفيل.

يعطى تنسور ريتشي R_{ij} للفضاء k_n بالعلاقة:

$$R_{ij} = R^{\alpha}_{ij\alpha}$$

تمهيدية (3):

تتحقق بتأثير التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهٍ في الصغر للفضاء k_n العلاقات الآتية:

$$\delta R^h_{ijk} = \left(\delta \Gamma^h_{ik}\right)_{,j} - \left(\delta \Gamma^h_{ij}\right)_{,k} \qquad (45)$$

حيث: R^h_{ijk} تنسور ريمان للفضاء k_n، وَ Γ^h_{ij} رموز كريستوفيل.

الإثبات :

$$\left(\delta \Gamma^h_{ik}\right)_{,j} - \left(\delta \Gamma^h_{ij}\right)_{,k} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\left[\tilde{\Gamma}^{\ell}_{ik} - \Gamma^{\ell}_{ik}\right]_{,j} - \left[\tilde{\Gamma}^{\ell}_{ij} - \Gamma^{\ell}_{ij}\right]_{,k}\right)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\partial_j \tilde{\Gamma}^{\ell}_{ik} - \tilde{\Gamma}^{\ell}_{\alpha k}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{ij} - \tilde{\Gamma}^{\ell}_{i\alpha}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{kj} - \partial_j \Gamma^{\ell}_{ik} + \Gamma^{\ell}_{\alpha k}\Gamma^{\alpha}_{ij} + \Gamma^{\ell}_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{kj} - \partial_k \tilde{\Gamma}^{\ell}_{ij} + \tilde{\Gamma}^{\ell}_{\alpha j}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{ik} + \tilde{\Gamma}^{\ell}_{i\alpha}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{jk} + \partial_k \Gamma^{\ell}_{ij} - \Gamma^{\ell}_{\alpha j}\Gamma^{\alpha}_{ik} - \Gamma^{\ell}_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{jk}\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\tilde{R}^{\ell}_{ijk} - R^{\ell}_{ijk}\right] = \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon\delta\, R^{\ell}_{ijk} = \delta\, R^{\ell}_{ijk}$$

حيث : $\tilde{R}^h_{ijk}$ تنسور ريمان للفضاء $\tilde{k}_n$،

$$R^h_{ijk} = \partial_j \Gamma^h_{ik} - \partial_k \Gamma^h_{ij} + \Gamma^h_{j\alpha}\Gamma^{\alpha}_{ik} - \Gamma^h_{k\alpha}\Gamma^{\alpha}_{ij}$$

$$\tilde{R}^h_{ijk} = \partial_j \Gamma^h_{ik} - \partial_k \tilde{\Gamma}^h_{ij} + \tilde{\Gamma}^h_{j\alpha}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{ik} - \tilde{\Gamma}^h_{k\alpha}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{ij}$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial \chi^i}$$

مبرهنة (11):

إنّ تغيّر تنسوري ريمان وَ ريتشي للفضاء k_n بتأثير التشوّه الهولومورفي الإسقاطي اللامتناهي في الصغر

للفضاء k_n يُعطى بالعلاقات :

$$\left.\begin{array}{l} a)\ \delta R^h_{ijk} = \delta^h_k \bar{\varphi}_{i,j} - \delta^h_j \bar{\varphi}_{i,k} + F^h_k \varphi_{i,j} - F^h_j \varphi_{i,k} + F^h_i \varphi_{[k,j]} \\ b)\ \delta R_{ij} = -n\bar{\varphi}_{j,i} \end{array}\right\} (46)$$

حيث :" , " تعني المشتق الموافق التغيّر في الفضاء k_n. وَ $\bar{\varphi}_i = \varphi_{\bar{\imath}}$ متّجه تدرّج .

الإثبات :

استناداً إلى العلاقات $(22a)$ نجد :

$$\delta\Gamma^h_{ik} = \delta^h_{(i}\bar{\varphi}_{k)} + F^h_{(i}\varphi_{k)} = \delta^h_i \bar{\varphi}_k + \delta^h_k \bar{\varphi}_i + F^h_i \varphi_k + F^h_k \varphi_i$$

$$\delta\Gamma^h_{ij} = \delta^h_{(i}\bar{\varphi}_{j)} + F^h_{(i}\varphi_{j)} = \delta^h_i \bar{\varphi}_j + \delta^h_j \bar{\varphi}_i + F^h_i \varphi_j + F^h_j \varphi_i$$

$$\left(\delta\Gamma^h_{ik}\right)_{,j} = \overbrace{\delta^h_{i,j}\bar{\varphi}_k}^{=0} + \delta^h_i \bar{\varphi}_{k,j} + \overbrace{+\delta^h_{k,j}\bar{\varphi}_i}^{=0} + +\delta^h_k \bar{\varphi}_{i,j} + \overbrace{F^h_{i,j}\varphi_k}^{=0} + F^h_i \varphi_{k,j} + \underbrace{F^h_{k,j}\varphi_i}_{=0} + F^h_k \varphi_{i,j}$$

$$= \delta^h_i \bar{\varphi}_{k,j} + \delta^h_k \bar{\varphi}_{i,j} + F^h_i \varphi_{k,j} + F^h_k \varphi_{i,j}$$

$$\left(\delta\Gamma^h_{ik}\right)_{,k} = \delta^h_{i,k}\bar{\varphi}_j + \delta^h_i \bar{\varphi}_{j,k} + \delta^h_{j,k}\bar{\varphi}_i + \delta^h_j \bar{\varphi}_{i,k} + F^h_{i,k}\varphi_j + F^h_i \varphi_{j,k} + F^h_{j,k}\varphi_i + F^h_j \varphi_{i,k}$$

$$= \delta^h_i \bar{\varphi}_{j,k} + \delta^h_j \bar{\varphi}_{i,k} + F^h_i \varphi_{j,k} + F^h_j \varphi_{i,k}$$

حيث : $F^h_{i,j} = 0$ وَ $\delta^h_{i,j} = 0$ حسب تعريف فضاء كيليرالمكافئي.

نعوض العلاقات السابقة في العلاقة : (45) نجد:

$$\delta\ R_{ijk}^{h} = \delta_{i}^{h}\overbrace{\left[\bar{\varphi}_{k,j} - \bar{\varphi}_{j,k}\right]}^{=0} + F_{i}^{h}\left[\varphi_{k,j} - \varphi_{j,k}\right] + \delta_{k}^{h}\bar{\varphi}_{i,j} - \delta_{j}^{h}\bar{\varphi}_{i,k} + F_{k}^{h}\varphi_{i,j} - F_{j}^{h}\varphi_{i,k}$$

$$= \delta_{k}^{h}\bar{\varphi}_{i,j} - \delta_{j}^{h}\bar{\varphi}_{i,k} + F_{k}^{h}\varphi_{i,j} - F_{j}^{h}\varphi_{i,k} + F_{i}^{h}\varphi_{[k,j]}$$

$$\Rightarrow \delta\ R_{ijk}^{h} = \delta_{k}^{h}\bar{\varphi}_{i,j} - \delta_{j}^{h}\bar{\varphi}_{i,k} + F_{k}^{h}\varphi_{i,j} - F_{j}^{h}\varphi_{i,k} + F_{i}^{h}\varphi_{[k,j]}$$

وهي العلاقة $(46a)$. حيث : $\bar{\varphi}_{i,j} = \bar{\varphi}_{j,i}$ لأنّ $\bar{\varphi}_{i}$ متّجه تدرّج.بتقليص العلاقة $(46a)$ بالدليلين h, k نجد:

$$\delta R_{ij} = -n\bar{\varphi}_{j,i}$$

المراجع :

[1] Hinterleitner I, (2012)−**<u>On holomorphically projective mappings of e−K¨ahler manifolds</u>**. Arch. Mat. (Brno) 48, 333−338.

[2] Курчатова И.Н., М икеш Й, (1985)− **<u>Голоморфно_проективные отображения келеровых пространств.</u>** УЧ. пособие.− Одесса: ОГУ,

69 с.

[3] Hinterleitner I, (2015)− **<u>Holomorphically projective mappings of (pseudo−) K¨ahler manifolds preserve</u>**

the class of differentiability.Filomat.

[4] Mikeˇs J., Chud´a H., Hinterleitner I, (2014)- **Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition. Int. J. Geom. Methods Mod**. Phys. 11:5, 1450044,8p.

[5] VEKUA, I.N, 1959- **Generalized analytic functions**. (Russian) Moscow, Fizmatgiz.

[6] Gavril'chenko, M.L 1989-**Geodesic deformations of Riemannian space.**

Diff.Geom. and its Applications, World Sci., Singapore, 47-53.

[7] Chud´a H., Chodorov´a M., Shiha M, (2012)-**On composition of conformal and Holomorphically projective mappings between conformally K¨ahlerian spaces**. J. Appl. Math. Bratislava, 5:3, 91-96.

[8] Микеш Й, (1979)- **Геодезические и голоморфно_проективные отображения специалных римановых пространств**: дисс; канд. наук._Одесса, с.107.

[9] Yano K , (1965)- **"Differential geometry on complex**

and almost complex spaces," Oxford–London –New York–Paris–Frankfurt: Pergamon Press. XII, 323 p.

[10] Al Lamy Raad J., ˇSkodov´a M., Mikeˇs J, (2006)- **Onholomorphically projective mappings from equiaffine generally recurrent spaces onto K¨ahlerian spaces**. Arch. Math. Brno 42:5, 291–299.

[11] Mikeˇs, J. and Shiha M. and Vanˇzurov´a A , (2009)- **"Invariant objects by holomorhpically projective mappings of parabolically K¨ahler spaces**." J. Appl. Math. 2:1, pp. 135–141.

[12] Velimirović, Lj. S, (2009- **Infinitesimal bending, Faculty of Science and Mathematics**, Nis), ISBN 86-83481-42-5.

[13] Gavril'chenko, M. L, (1972)-**On geodesic deformations of hypersurfaces**, Proc. Conf. Samarkand.