تقريب دوال الفضاء $L_{(-\infty,+\infty)}$ باستخدام كثيرات حدود هرميت وكثيرات حدود تشيبيشف – هرميت

طالب الدكتوراه: عمر محمود نتوف

إشراف الأستاذ الدكتور: محمد عامر

جامعة البعث – كلية العلوم – قسم الرياضيات

الملخص

سنثبت في هذا البحث صحة مبرهنتين ، تتحدث الأولى عن درجة تقريب منشور فورييه ـ هرميت في النقطة $x = 0$ ، وتتحدث الثانية عن درجة تقريب منشور فورييه ـ تشيبيشيف ـ هرميت في النقطة $x = 0$ أيضاً ، معتمدين في كلا المبرهنتين على المؤثر المصفوفي وذلك في الفضاء $\boldsymbol{L}_{(-\infty,+\infty)}$.

كلمات مفتاحية:

كثيرات حدود هرميت، كثيرات حدود تشيبيشف – هرميت، متسلسلة فورييه– هرميت، متسلسلة فورييه – تشيبيشف – هرميت، الدالة المولدة، درجة التقريب.

Approximation of Functions of Space $L_{(-\infty,+\infty)}$ Using Hermite polynomials and Chebyshev Hermite polynomials

Abstract

In this research paper we will prove two theorems, the first one talks about the approximation`s degree of Fourier – Hermite series at the point x=0, and the second talks about the approximation`s degree of Fourier- Chebyshev –Hermite series at the point x=0 too, using the matrix operator in both cases and in the space $L_{(-\infty,+\infty)}$.

Key words:

Hermite Polynomial, Chebyshev - Hermite Polynomial, Fourier - Hermite Series, Fourier - Chebyshev - Hermite Series, Matrix Operator, the generated function, Degree of Approximation.

مقدمة:

إن تقريب دوال الفضاء $L_{(-\infty,+\infty)}$ باستخدام متسلسلات فورييه ـ هرميت ومتسلسلات فورييه ـ تشيبيشف ـ هرميت يتم عن طريق بعض التحويلات الخطية المتعلقة بهذه المتسلسلات وهي عبارة عن مؤثرات خطية محدودة تؤثر على متتالية المجاميع الجزئية لتلك المتسلسلات فتنقلها لمتتاليات أخرى تقرب باستخدام النظيم في الفضاء $L_{(-\infty,+\infty)}$ إلى الدوال نفسها وبدرجات تقريب متفاوتة.

هدف البحث:

إيجاد درجة تقريب كلاً من منشور فورييه – هرميت ومنشور فورييه – تشيبيشف – هرميت وذلك باستخدام وسائط المؤثر المصفوفي وتطبيقها على الحد العام لمتتالي المجاميع الجزئية لكلٍ من متسلسلة فورييه ــ هرميت ومتسلسلة فورييه – تشيبيشف – هرميت.

مواد وطرائق البحث:

تعريف (1) المؤثر المصفوفي : $(\boldsymbol{Matrix\ \ Operator})[\mathbf{4}]$

لتكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ولتكن $\{S_n\}$ متتالية مجاميعها الجزئية، عندئذٍ نعرف المؤثر المصفوفي (A)بالشكل الآتي:

$$t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k} S_{n-k} \qquad ; \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

والمصفوفة $A = \left(a_{n،k}\right)$هي مصفوفة مثلثية سفلى لا نهائية من الثوابت الحقيقية.

وسنعتبر في هذا البحث أن المصفوفة $A = \left(a_{n,k}\right)$ نظامية أي أنها تحقق الشروط الآتية:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0 \quad ; k = 0,1,2, \dots$$

$\sum_{k=0}^{n}\left|a_{n,k}\right| \leq M \;\; ; \;\; n = 1,2, \dots$ (حيث إن M ثابت لا يتعلق بـ n)

حيث نقول عن مؤثر إنه نظامي إذا أدى تطبيقه على متسلسلة متقاربة إلى المجموع المعتاد لهذه المتسلسلة.

تعريف (2) النظيم في الفضاء : $\boldsymbol{L}_{(-\infty,\infty)}$

إذا كانت الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ قابلة للمكاملة على فإن النظيم في الفضاء $\boldsymbol{L}_{(-\infty,\infty)}$ يأخذ الشكل:

$$||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})||_{L_{(-\infty,\infty)}} = \int_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \, dx$$

تعريف (3) كثيرات حدود هرميت $[1,2]$:

نعرف كثير حدود هرميت$H_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالشكل الآتي:

$$H_n(x) = (-1)^n \, e^{x^2} \, \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right) \quad ؛ n = 0,1,2 \dots$$

وهي حلول لمعادلة هرميت التفاضلية:

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

تعريف (4) الدالة المولدة لكثيرات حدود هرميت [1]:

تعطى الدالة المولدة لكثيرات حدود هرميت والنشر الموافق لها يعطى بالشكل الآتي:

$$e^{(2xt-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

حيث إن دوال هرميت متعامدة على الفترة $]-\infty, \infty[$ مع دالة الوزن $W(x) = e^{-x^2}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n . H_m \, dx = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & ; \quad m = n \end{cases}$$

ولنكتب بعض حدوديات هرميت: $H_0(x) = 1$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

تعريف (5) كثيرات حدود تشيبيشف – هرميت[3] :

نعرف كثير حدود تشيبشيف ـ هرميت $He_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بالشكل الآتي:

$$He_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \text{ ؛ } n = 0,1,2 \dots$$

وهي حلول لمعادلة تشيبشيف ـ هرميت التفاضلية:

$$y'' - xy' + ny = 0$$

تعريف (6) الدالة المولدة لكثيرات حدود تشيبيشف – هرميت [3]:

تعطى الدالة المولدة لكثيرات حدود تشيبيشف – هرميت بالشكل الآتي:

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} He_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{xt-\frac{t^2}{2}}$$

حيث إن دوال هرميت ـ تشيبشيف متعامدة على الفترة $]-\infty,\infty[$ مع دالة الوزن

$$W(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, He_n.He_m\, dx = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ n!\sqrt{2\pi} & ; \quad m = n \end{cases}$$

كما أن كثيرات حدود تشيبيشف – هرميت تحقق:

$$\frac{He_n^{(n)}(x)}{n!} = 1$$

$$He_{2n}(0) = \frac{(-1)^n(2n)!}{n!\,2^n}\ , \qquad He_{2n+1}(0) = 0$$

$$He_n(-x) = (-1)^n He_n(x)$$

وتحقق كثيرات حدود تشيبيشف – هرميت المعادلتين الآتيتين:

$$\acute{H}e_n(x) = nHe_{n-1}(x) \quad for \ \ n \geq 1$$

$$He_{n+1}(x) - xHe_n(x) + nHe_{n-1}(x) = 0 \ \ for \ \ n \geq 1$$

الجدول التالي يعطي كثيرات الحدود $He_n(x)$ حسب قيمة الدليل n:

n	$He_n(x)$
0	1
1	x
2	$x^2 - 1$
3	$x^3 - 3x$
4	$x^4 - 6x^2 + 3$
5	$x^5 - 10x^3 + 15x$

ملاحظة: تعطى العلاقة التي تربط بين كثيرات حدود هرميت وكثيرات حدود تشيبشيف ـ هرميت بالشكل الآتي [3]:

$$He_n(x) = 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

ملاحظة: علاقة كثيرات حدود هرميت وكثيرات حدود تشيبيشيف – هرميت مع متسلسلات القوى [3]:

$$He_n(x) = n! \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j x^{n-2j}}{2^j (n-2j)!\, j!}$$

$$H_n(x) = n! \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^j (2x)^{n-2j}}{(n-2j)!\, j!}$$

تعريف (7) :

يمكننا انَّ نعرف $(\boldsymbol{Big-O})$ $(\boldsymbol{O}$_الكبيرة$)$و$(\boldsymbol{o}-$ الصغيرة$)-\boldsymbol{Little})$ $\boldsymbol{o})$ كما يلي [5]:

1- نقول إن $f(x)=O\big(g(x)\big)$ عندما $x \to a$ إذا وجد ثابت cيحقق ما يلي:

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{c}|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|$$

2- نقول إن $f(x)=o\big(g(x)\big)$ عندما $x \to a$ إذا تحقق ما يلي

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

النتائج ومناقشتها:

تقريب دوال الفضاء $\boldsymbol{L}_{(-\infty,+\infty)}$ باستخدام كثيرات حدود هرميت:

لتكن $\left(a_{n,k}\right) \equiv T$ مصفوفة مثلثية سفلى لانهائية من الأعداد غير السالبة والتي تحقق

$$A_{n,k} = \sum_{r=k}^{n} a_{n,r} \;, A_{n,n} = 1\,; n \geq 0$$

$$t_n^T = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} S_k(f;x)$$

إن منشور فورييه – هرميت للدالة f حيث $f \in L_{(-\infty,+\infty)}$ يكتب بالشكل:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x)$$

حيث إن:

$$a_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(y) H_n(y)\, dy$$

تمهيدية (1) [3]:

لتكن $H_n(x)$ كثيرات حدود هرميت من الدرجة n.

عندئذٍ توجد ثوابت موجبة C، D، E تحقق:

1. $H_n{}^2(x) e^{-x^2} \le \frac{C}{\sqrt{2n+1-x^2}} \ ; \ |x| \le \sqrt{2n+1}$

2. $\max_{x\in\mathbb{R}} H_n{}^2(x) e^{-x^2} \le D n^{-\frac{1}{6}}$

3. $\max_{x\in\mathbb{R}} H_n{}^2(x) e^{-x^2} \ge E n^{-\frac{1}{6}}$

تمهيدية $[6]$:(2)

لتكن $H_n(x)$ كثيرات حدود هرميت من الدرجة n عندئذٍ يتحقق ما يلي:

$$|H_n(x)| = O\left(e^{\frac{x^2}{2}}\sqrt{2^n n!}\right) \;\; ; \quad |x| \geq \sqrt{\frac{n}{2}}$$

مبرهنـــة (1): إن درجـة تقريـب منشـور فورييـه – هرميـت فـي النقطـة $x = 0$ باستخدام المؤثر المصفوفي ذي المصفوفة T يعطى كما يلي:

$$\|t_n^T(0) - f(0)\|_{L_{(-\infty,+\infty)}} = o\big(\varphi(n)\big)$$

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi(y)| dy = O\left(t^{\alpha+1}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\right) \; ; \;\; t \longrightarrow 0$$

وبحيث تتحقق الفرضيات:

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} e^{\frac{y^2}{2}} |\phi(y)|\, dy = o\big(\varphi(n)\big)$$

$$\int_{\sqrt{4n+1}}^{+\infty} e^{\frac{y^2}{2}} |\phi(y)|\, dy = o\big(\varphi(n)\big)$$

$$\int_{-\sqrt{4n+1}}^{\sqrt{4n+1}} \frac{e^{\frac{y^2}{2}} |\phi(y)|}{\sqrt[4]{4n+1-y^2}}\, dy = o(\varphi(n) 2^{2n} n!)$$

حيث إن $\varphi(t)$ دالة موجبة متزايدة باطراد بالنسبة إلى t وتحقق:

$$\varphi(n) \to \infty \, ; n \to \infty$$

تقريب دوال الفضاء $L_{(-\infty,+\infty)}$ باستخدام كثيرات حدود تشيبيشيف - هرميت:

إن منشور فورييه – تشيبيشيف– هرميت للدالة f حيث $f \in L_{(-\infty,+\infty)}$ يكتب بالشكل:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n He_n(x) \; \dots \; (1)$$

حيث إن:

$$a_n = \frac{1}{n!\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} f(y) He_n(y)\, dy$$

ـ نعلم أن كثيرات حدود هرميت وكثيرات حدود هرميت ـ تشيبيشيف ترتبط مع بعضها بعلاقة مهمة وهي $H_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} He_n\left(\sqrt{2}x\right)$ واعتماداً على هذا الارتباط واعتماداً على كلاً من التمهيدية (1) و(2) نستطيع استنتاج التمهيديات الآتية:

تمهيدية (3):

لتكن $He_n(x)$ كثيرات حدود تشيبيشيف – هرميت من الدرجة n.

عندئذٍ يوجد ثابت موجب C يحقق:

$$2^n {He_n}^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{4n+2-x^2}} \;\; ; \; |x| \leq \sqrt{4n+2}$$

تمهيدية (4):

لتكن $He_n(x)$ كثيرات حدود تشيبيشيف – هرميت من الدرجة n عندئذٍ يتحقق ما يلي:

$$|He_n(x)| \leq O\left(e^{\frac{x^2}{4}}\sqrt{n!}\right) \;\; ; \; |x| \geq \sqrt{n}$$

مبرهنة (2): إن درجة تقريب منشور فورييه – تشيبيشيف – هرميت في النقطة $x = 0$ باستخدام المؤثر المصفوفي ذي المصفوفة A يعطى كما يلي:

$$\|t_n^A(f,0) - f(0)\|_{L_{(-\infty,+\infty)}} = o\big(\xi(n)\big)$$

$$\Psi(t) = \int_0^t \big|\psi(y)\big| dy = O\left(t^{\alpha+1}\xi\left(\frac{1}{t}\right)\right) \; ; \;\; t \longrightarrow 0$$

وبحيث تتحقق الفرضيات:

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{8n+2}} e^{\frac{y^2}{4}}\big|\psi(y)\big|\, dy = o\left(\frac{\xi(n)}{(2n)!}\right) \;\; ; \;\; n \longrightarrow \infty$$

$$\int_{\sqrt{8n+2}}^{+\infty} e^{\frac{y^2}{4}}\big|\psi(y)\big|\, dy = o\left(\frac{\xi(n)}{(2n)!}\right) \;\; ; \;\; n \longrightarrow \infty$$

$$\int_{-\sqrt{8n+2}}^{\sqrt{8n+2}} \frac{e^{\frac{y^2}{4}}\big|\psi(y)\big|}{\sqrt[4]{8n+2-y^2}} dy = o\left(\xi(n)\frac{2^n}{(2n-1)!!}\right) \;\; ; \;\; n \longrightarrow \infty$$

حيث إن $\xi(t)$ دالة موجبة متزايدة باطراد بالنسبة إلى t وتحقق:

$$\xi(n) \to \infty \, ; n \to \infty$$

إثبات المبرهنة (1):

من المعلوم أن الدالة المولدة لكثيرات حدود هرميت تأخذ الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{2xt-t^2}$$

$$x = 0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(0)}{n!}t^n = e^{-t^2}$$

لكن من المعلوم أن: $e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$ وبالتالي يكون:

$$1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}t^{2n} + \cdots = \frac{H_0(0)t^0}{0!} + \frac{H_1(0)t^1}{1!} + \frac{H_2(0)t^2}{2!} + \cdots + \frac{H_n(0)t^n}{n!} + \cdots$$

وبالمطابقة يكون:

$$H_0(0) = 1$$

$$H_1(0) = H_3(0) = \cdots = H_{2i+1}(0) = 0$$

$$H_2(0) = -2 \qquad , \qquad H_4(0) = 12$$

$$\frac{H_6(0)}{6!} = -\frac{1}{3!} \Longrightarrow H_6(0) = -\frac{6!}{3!} = -6 \times 5 \times 4 = -120 = -2^3 \times 1 \times 3 \times 5$$

وبصورة عامة فإن:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n.1.3\dots(2n-1)$$

لكن:

$$(2n+1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)(2n+1) \Longrightarrow$$

$$1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) = \frac{(2n+1)!!}{2n+1} \Longrightarrow$$

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n \frac{(2n+1)!!}{2n+1}$$

وبالتالي نحصل على:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \quad , \qquad H_{2n+1}(0) = 0$$

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f) H_k(0)$$

$$\|H_n(x)\|_{e^{-x^2}}^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

لذا نستطيع أن نكتب الآتي:

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}(f) H_{2k}(0)$$

حيث قمنا بتبديل كل k بـ $2k$، ومنه:

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2k}(2k)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(y) H_{2k}(y) dy \frac{(-1)^k (2k)!}{k!}$$

$$S_n(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(y) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!} H_{2k}(y) dy$$

وبما أن:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!} H_{2k}(y) = O\left[\frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(y)\right]$$

$$S_n(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(y)\, O\left[\frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(y)\right] dy$$

$$t_n^T(f,0) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[\frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(y)\, H_{2k}(y) dy\right]$$

ولنضع العلاقة المفيدة الآتية:

$$\phi(y) = \frac{e^{-y^2}[f(y) - f(0)]}{\sqrt{\pi}}$$

$$t_n^T(f,0) - f(0) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[\frac{(-1)^k}{2^{2k} k!} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y)\, H_{2k}(y) dy\right]$$

$$t_n^T(f,0) - f(0)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[\frac{(-1)^k}{2^{2k} k!}\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} + \int_{-\sqrt{4n+1}}^{\sqrt{4n+1}} + \int_{\sqrt{4n+1}}^{+\infty}\right) \phi(y) H_{2k}(y) dy\right]$$

$$= I_1 + I_2 + I_3$$

$$|I_1| \leq \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[\frac{1}{2^{2k}k!}\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} |\phi(y)|\,|H_{2k}(y)|dy\right]$$

وحسب التمهيدية (2) نجد:

$$|I_1| = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[\frac{1}{2^{2k}k!} O\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} |\phi(y)|\, e^{\frac{y^2}{2}}\sqrt{2^{2k}(2k)!}\, dy\right)\right]$$

$$= O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!}\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} |\phi(y)|\, e^{\frac{y^2}{2}} dy\right)$$

$$= O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{\sqrt{(2k)!}}{(2k)!!}\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} |\phi(y)|\, e^{\frac{y^2}{2}} dy\right)$$

$$\leq O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} e^{\frac{y^2}{2}} |\phi(y)|\, dy\right)$$

$$= O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\int_{-\infty}^{-\sqrt{4n+1}} e^{\frac{y^2}{2}} |\phi(y)|\, dy\right)$$

حيث إن:

$$\frac{\sqrt{(2k)!}}{(2k)!!} = \frac{\sqrt{(2k)!!}\sqrt{(2k-1)!!}}{(2k)!!} = \frac{\sqrt{(2k-1)!!}}{\sqrt{(2k)!!}} = \sqrt{\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2k-1)(2k-3)(2k-3)\times\ldots\times 5\times 3\times 1}{(2k)(2k-2)(2k-4)\times\ldots\times 6\times 4\times 2}} < 1$$

وحسب الفرضية (1):

$$I_1 = |I_1| \le O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, o\big(\varphi(n)\big)\right) = o\big(\varphi(n)\big)\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}$$
$$= o\big(\varphi(n)\big)$$

وبطريقة مماثلة تماماً نحصل على:

$$I_3 = |I_3| \le o\big(\varphi(n)\big)$$

$$I_2 = |I_2| \le \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\; O\left[\frac{1}{2^{2k}k!}\int_{-\sqrt{4n+1}}^{\sqrt{4n+1}} |\phi(y)|\,|H_{2k}(y)|dy\right]$$

لـــدينا مـــن التمهيديـــة (1): $H_n{}^2(y)e^{-y^2} \le \frac{c}{\sqrt{2n+1-y^2}}$; $|y| \le$ $\sqrt{2n+1}$

ومنه نحصل على:

$$H_{2n}{}^2(y) \le \frac{ce^{y^2}}{\sqrt{4n+1-y^2}} \quad ; \quad |y| \le \sqrt{4n+1}$$

$$|I_2| \le \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\; O\left[\frac{1}{2^{2k}k!}\int_{-\sqrt{4n+1}}^{\sqrt{4n+1}} |\phi(y)|\frac{\sqrt{c}e^{\frac{y^2}{2}}}{\sqrt[4]{4n+1-y^2}}dy\right]$$

ولنفرض أن: $4n + 1 = a^2 > 0$

$$|I_2| \le \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} O\left[\frac{\sqrt{c}}{2^{2k}k!}\int_{-a}^{+a} \frac{|\phi(y)|e^{\frac{y^2}{2}}}{\sqrt[4]{a^2-y^2}}dy\right]$$

وحسب الفرضية الثالثة $\int_{-a}^{+a} \frac{|\phi(y)|\, e^{\frac{y^2}{2}}}{\sqrt[4]{a^2-y^2}}\, dy = o\left(2^{2n} n!\, \varphi(n)\right)$

نجد ما يلي:

$$|I_2| \leq \frac{\sqrt{c}}{2^{2n} n!} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} O\left[o\left(2^{2n} n!\, \varphi(n)\right) dy\right] = o\left(\varphi(n)\right)$$

واعتماداً على ما سبق نجد:

$$\|t_n^T(0) - f(0)\|_{L_{(-\infty,+\infty)}} = o\left(\varphi(n)\right)$$

وبهذا يكتمل إثبات المبرهنة الأولى.

إثبات المبرهنة الثانية:

نعلم أنَ:

$$He_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!\, 2^n} \quad , \qquad H_{2n+1}(0) = 0$$

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f) He_k(0)$$

$$\|H_n(x)\|^2_{e^{-\frac{x^2}{2}}} = \sqrt{2\pi} n!$$

لذا نستطيع أن نكتب الآتي:

$$S_n(0) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}(f) He_{2k}(0)$$

$$S_n(0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}f(y)He_{2k}(y)dy\frac{(-1)^k(2k)!}{k!\,2^k}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}f(y)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k k!}He_{2k}(y)dy\ \ldots\ (*)$$

لكن:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k k!}He_{2k}(x)=O\left[\frac{(2n)!\,(-1)^n}{2^n n!}He_{2n}(x)\right]$$

ومن العلاقة $(*)$ نحصل على:

$$S_n(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}f(y)\ O\left[\frac{(2n)!\,(-1)^n}{2^n n!}He_{2n}(y)\right]dy$$

$$t_n^A(f,0)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\ O\left[\frac{(2k)!\,(-1)^k}{2^k k!\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}f(y)\,He_{2k}(y)dy\right]$$

ولنضع العلاقة المفيدة الآتية:

$$\psi(y)=\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}[f(y)-f(0)]}{\sqrt{2\pi}}$$

$$t_n^A(f,0)-f(0)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\ O\left[\frac{(2k)!\,(-1)^k}{2^k k!}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(y)\,He_{2k}(y)dy\right]$$

حيث أنَّ

$$2^k k! = (2k)!!\,, (2k)! = (2k)!!\,(2k-1)!!$$

$$t_n^A(f,0) - f(0) =$$
$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[(2k - 1)!!\,(-1)^k \left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{8n+2}} + \int_{-\sqrt{8n+2}}^{\sqrt{8n+2}} + \int_{\sqrt{8n+2}}^{+\infty}\right)\psi(y) He_{2k}(y)\,dy\right]$$
$$= I_1 + I_2 + I_3$$

$$|I_1| \le \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[(2k-1)!!\int_{-\infty}^{-\sqrt{8n+2}} \left|\psi(y)\right|\,|He_{2k}(y)|\,dy\right]$$

وحسب التمهيدية (4):

$$|I_1| = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[(2k - 1)!!\, O\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{8n+2}} \left|\psi(y)\right| e^{\frac{y^2}{4}} \sqrt{(2k)!}\,dy\right)\right]$$
$$= O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \frac{\sqrt{(2k)!}\,(2k)!}{(2k)!!} \int_{-\infty}^{-\sqrt{8n+2}} \left|\psi(y)\right| e^{\frac{y^2}{4}} dy\right)$$

وحسب الفرضية (1) نجد:

$$I_1 = |I_1| \leq O\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} o\big(\xi(n)\big)\right) = o\big(\xi(n)\big) \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = o\big(\xi(n)\big)$$

وبالمثل نجد:

$$I_3 = |I_3| = o\big(\xi(n)\big)$$

$$I_2 = |I_2| \leq \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[(2k-1)!! \int_{-\sqrt{8n+2}}^{\sqrt{8n+2}} \big|\psi(y)\big|\, |He_{2k}(y)| dy\right]$$

واعتماداً على التمهيدية (3) نستطيع أن نكتب:

$$|I_2| \leq \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[(2k-1)!! \int_{-\sqrt{8n+2}}^{\sqrt{8n+2}} \big|\psi(y)\big| \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{c}e^{\frac{y^2}{4}}}{2^k \sqrt[4]{8k+2-y^2}} dy\right]$$

ولنفرض أن $8n + 2 = b^2 > 0$ ومنه نجد:

$$|I_2| \leq \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[\frac{\sqrt{c}(2k-1)!!\, \sqrt[4]{2}}{2^k} \int_{-b}^{+b} \big|\psi(y)\big| \frac{e^{\frac{y^2}{4}}}{\sqrt[4]{b^2-y^2}} dy\right]$$

وحسب الفرضية الثالثة: $\int_{-b}^{+b}|\psi(y)|\frac{e^{\frac{y^2}{4}}}{\sqrt[4]{b^2-y^2}}dy = o\left(\frac{2^n}{(2n-1)!!}\xi(n)\right)$

نجد ما يلي:

$$|I_2| \leq \frac{\sqrt{c}(2n-1)!!\sqrt[4]{2}}{2^n}\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, O\left[o\left(\frac{2^n}{(2n-1)!!}\xi(n)\right)\right]$$
$$= o\big(\xi(n)\big) \ ;$$

$$n \longrightarrow \infty$$

حيث:

$$O(1)o(1) = o(1) \ ، \sqrt{c}\sqrt[4]{2} = O(1)$$

واعتماداً على ما سبق نجد:

$$\|t_n^A(f,0) - f(0)\|_{L_{(-\infty,+\infty)}} = o\big(\xi(n)\big)$$

وبهذا يكتمل إثبات المبرهنة الثانية.

التوصيات والمقترحات:

يمكننا دراسة التقريب باستخدام كثيرات حدود هرميت بمتغيرين ودليل واحد، حيث نستطيع أن نكتب[7]:

$$H_n(x,y) = n!\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{y^r x^{n-2r}}{r!\,(n-2r)!} \quad ,H_n(x,0) = x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x,y) = e^{xt-yt^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H_n(x,y) = n(n-1)H_{n-2}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H_n(x,y) = nH_{n-1}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H_n(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_n(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} H_n(x,y) = e^{y\frac{\partial^2}{\partial x^2}}(x^n)$$

$$H_n(2x,-1) = H_n(x) = n!\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^r x^{n-2r}}{r!\,(n-2r)!}$$

$$H_n\left(x,-\frac{1}{2}\right)=He_n(x)=n!\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^r x^{n-2r}}{2^r r!\,(n-2r)!}$$

$$He_n(x)=2^{-\frac{n}{2}}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$H_n(cx,dy)=\left(\frac{c}{a}\right)^n e^{\frac{a^2d-c^2b}{(ac)^2}y\frac{\partial^2}{\partial x^2}}H_n(ax,by)$$

$$He_n(x)=\frac{1}{2^n}e^{-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}H_n(x,y)$$

$$H_n^{(m)}(x,y)=n!\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\frac{y^r x^{n-mr}}{r!\,(n-mr)!}\quad ,H_n^{(m)}(x,0)=x^n$$

$$\frac{\partial}{\partial y}H_n^{(m)}(x,y)=\frac{n!}{(n-m)!}H_{n-m}^{(m)}(x,y)$$

$$H_n(-x)=(-1)^n H_n(x)$$

المراجع:

1. **T.H Fay and p.Hendrik Kloppers, 2006,"The Gibbs phenomenon for series of orthogonal polynomials " international journal of mathematical education**
2. **G. Szego, 1975, " Orthogonal polynomials ", New York, NY Press Colloquium Publication American Mathematical Society, (440).**
3. **K.Y. Patarroyo,2020, "A digression on Hermite polynomials".$(1-43)$.**

4. **A. Alotaibi, M. Mursaleen, 2013 " Applications of Hankel and Regular Metrices in Fourier series ", (1-3)**
5. **Gradshteyn and I. M. Ryzhik " Table of integrals series and products seventh edition "**
6. **E. Kogbetliantz ,1932, "Annales scientifiques de E.N.S. "$(137-221)$**
7. **G. Dattoli , S.Lorenzutta ,and D.Sacchettl,2000 "A note on operational rules for Hermite and Laguerre polynomials " $(7-17)$**