قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة

طالبة الدكتوراه: غنى الهاشمي

قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث

الأستاذ المشرف: أ. د. محمد عامر

ملخص

ندرس في هذا البحث قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة والتي تعتمد على الفروق بشكل عام.

وقد تم وضع التعاريف والمفاهيم الأساسية اللازمة لهذه الدراسة.

وتم الإثبات على مبرهنتين هامتين جديدتين، وتم الحصول على نتيجتين جديدتين من هاتين المبرهنتين حول قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة.

كلمات مفتاحية: قابلية الجمع، المتسلسلة المتعامدة المضاعفة، الطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة، طريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة.

On absolute double matrix summability of double orthogonal series

Phd.student: Ghina alhashemi

Supervised by: Prof: Mohammad Amer

Summary

In this paper we study absolute double matrix summability of double orthogonal series which depends in general on differences.

We present the basic definitions and concepts required for this study.

We proved two new important theorems, and we obtained two new results from these theorems on absolute generalized Norlund summability of double orthogonal series.

Key words: summability, double orthogonal series, absolute double matrix summability, absolute double generalized Norlund summability.

1. مقدمة:

تعدّ المتسلسلات من المواضيع الهامة في الرياضيات الحديثة وخاصةً الرياضيات التطبيقية، وقد اهتمّ بدراستها الكثير من العلماء، وقد جاءت نظرية المتسلسلات المتعامدة كتعميم طبيعي لنظرية المتسلسلات، حيث نقصد بالمتسلسلة المتعامدة أنها المتسلسلة التي تتعامل مع جملة من الدوال المتعامدة.

وقد لعب تطور نظرية المتسلسلات المتعامدة دوراً بارزاً في حل العديد من المسائل الرياضية والفيزيائية ومعالجة المشكلات المعقدة في مجال العلوم التطبيقية.

لقد تمت دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بالعديد من الطرائق مثل طرائق سيزارو _ ريس _ نيورلند _ نيورلند المعممة _ باناخ والطريقة المصفوفية.

في هذا البحث نقوم بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة بطرائق تختلف عن الطرائق السابقة، وتعتمد على الفروق بشكل عام (تقدمية كانت أم تراجعية)، تسمى الطرائق المطلقة.

تعدّ الطريقة المصفوفية المطلقة من أهم الطرائق المطلقة، لأن معظم الطرائق المطلقة ماهي إلا حالات خاصة من الطريقة المصفوفية المطلقة.

في هذه الدراسة سوف نقوم بإثبات مبرهنتين جديدتين حول قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة (بحالتها العامة المثقلة) وسنحصل من هاتين المبرهنتين على نتيجتين جديدتين حول قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة وذلك بعد تبيان علاقتها بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة.

وسنعتمد في هذا البحث على بعض الأبحاث والمقالات العلمية الحديثة.

2. مشكلة البحث: تكمن مشكلة البحث في تباعد المتسلسلات المتعامدة بشكل عام، وفي اقتصار الدراسات السابقة على دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة البسيطة بالطريقة المصفوفية المطلقة.

3. أهمية وهدف البحث: إن هدف هذا البحث بشكل أساسي هي دراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة، وتحديد علاقتها بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة.

4. طرائق البحث:

تعاريف ومفاهيم أساسية:

تعريف 1: <المتسلسلة المتعامدة المضاعفة>: [2]

لتكن $\{\phi_{m,n}; m,n = 0,1,\ldots\}$ جملة متعامدة معرفة على المجال (a,b) .

المتسلسلة المتعامدة لأي دالة حقيقية f من الصف $L_2(a,b)$ بدلالة الجملة $\{\phi_{m,n}\}$ تعطى بالشكل:

$$f \sim \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\phi_{m,n}(x)$$

حيث أن:

$$a_{m,n} = \int_a^b f(x)\,\phi_{m,n}(x)dx \quad ; \quad m,n = 0,1,2,\ldots$$

$\boldsymbol{L_2(a,b)}$: هو فضاء التوابع المعرفة والمقيسة على المجال (a,b) والمحققة للشرط:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

ملاحظة: نقصد بالمتسلسلة المتعامدة أي جملتها متعامدة.

وبالتالي من أجل أي جملة متعامدة نحصل على متسلسلة متعامدة.

تعريف 2: <الطريقة المصفوفية المضاعفة>: [1]

لتكن $A=(a_{m,j})$ و $B=(b_{n,k})$ مصفوفتين مثلثيتين سفليتين غير منتهيتين،

ولتكن $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ متسلسلة مضاعفة،

ولتكن $S_{m,n}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}u_{j,k}$ متتالية مجاميعها الجزئية.

وليكن: $t_{m,n}^{(A,B)}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{m,j}b_{n,k}S_{j,k}$

تكون المتسلسلة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة (A,B) إذا كانت $\lim_{m,n\to\infty}t_{m,n}^{(A,B)}=s$

ونقول إن المتسلسلة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ قابلة للجمع (A,B) إلى المجموع s.

ونكتب: $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}=s\quad(A,B)$.

تعريف 3: <الطرائق المصفوفية المضاعفة المطلقة>: [4]

لتكن $A=(a_{m,j})$ و $B=(b_{n,k})$ مصفوفتين مثلثيتين سفليتين غير منتهيتين،

ولتكن $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ متسلسلة مضاعفة

ولتكن $S_{m,n}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}u_{j,k}$ متتالية مجاميعها الجزئية،

وليكن: $t_{m,n}^{(A,B)}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{m,j}b_{n,k}S_{j,k}$

عندئذٍ من أجل أي متتالية مضاعفة (v_{mn}) نعرف Δ_{11} بالعلاقة:

$$\Delta_{11}v_{m,n}=v_{m,n}-v_{m+1,n}-v_{m,n+1}+v_{m+1,n+1}$$

تكون المتسلسلة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة $|A,B|$ إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta_{11}t_{m-1,n-1}\right|<\infty$$

وتكون المتسلسلة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}u_{m,n}$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة المثقلة $|A,B|_k$, $1\le k$ إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|\Delta_{11}t_{m-1,n-1}\right|^{k}<\infty$$

وتكون قابلة للجمع $|A,B,\delta|_k$, $1\le k$, $0\le\delta$ إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{\delta k+k-1}\left|\Delta_{11}t_{m-1,n-1}\right|^{k}<\infty$$

وتكون قابلة للجمع $|A,B,p_m,q_n|_k$, $1\le k$ إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{mnp_mq_n}{P_mQ_n}\right)^{k-1}\left|\Delta_{11}t_{m-1,n-1}\right|^{k}<\infty$$

حيث $P_n=\sum_{k=0}^{n}p_k \quad , \quad Q_n=\sum_{j=0}^{n}q_j$

وتكون قابلة للجمع $|A,B,p_m,q_n,\delta|_k$, $1\le k$, $0\le\delta$ إذا كان:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{mnp_mq_n}{P_mQ_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\Delta_{11}t_{m-1,n-1}\right|^{k}<\infty$$

تعريف 4: <طريقة نيورلند المعممة المضاعفة>: [2]

لتكن $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$ متسلسلة مضاعفة، ولتكن $\{S_{m,n}\}$ متتالية مجاميعها الجزئية، ولتكن $\{p_{m,n}\}$ و $\{q_{m,n}\}$ متتاليتين مضاعفتين ولنرمز لهما بالرمز p و q .

من أجل المتتاليتين p و q نعرف جداء التلاف بالشكل:

$$R_{m,n} \coloneqq (p*q)_{m,n} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{i,k}\, q_{m-i,n-k} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{m-i,n-k}\, q_{i,k}$$

ولنرمز بـ:

$$R_{m,n}^{v,\mu} = \sum_{i=v}^{m}\sum_{k=\mu}^{n} p_{m-i,n-k}\, q_{i,k} \quad , \quad R_{m,n}^{0,0} = R_{m,n}$$

$$R_{m,n-1}^{v,n} = R_{m-1,n-1}^{v,n} = 0 \ ; \ 0 \le v \le m$$

$$R_{m,n-1}^{m,\mu} = R_{m-1,n-1}^{m,\mu} = 0 \ ; \ 0 \le \mu \le n$$

$$\Delta_{11}\left(\frac{R_{m,n}^{v,\mu}}{R_{m,n}}\right) \coloneqq \frac{R_{m,n}^{v,\mu}}{R_{m,n}} - \frac{R_{m,n-1}^{v,\mu}}{R_{m,n-1}} - \frac{R_{m-1,n}^{v,\mu}}{R_{m-1,n}} + \frac{R_{m-1,n-1}^{v,\mu}}{R_{m-1,n-1}}$$

حيث: $R_{m,n} = (p*q)_{m,n} \neq 0$

إن تحويل طريقة نيورلند المعممة المضاعفة $t_{m,n}^{(N^{(2)},p,q)}$ يأخذ الشكل:

$$t_{m,n}^{(N^{(2)},p,q)} = \frac{1}{(p*q)_{m,n}} \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{m-i,n-k}\, q_{i,k}\, S_{i,k}$$

تعريف 5: <طريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة>: [2]

تكون المتسلسلة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة المثقلة $\left|N^{(2)},p,q\right|_k = |N,p,q,\grave{p},\grave{q}|_k$ حيث $(k \geq 1)$ إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|t_{m,n}^{(N^{(2)},p,q)} - t_{m,n-1}^{(N^{(2)},p,q)} - t_{m-1,n}^{(N^{(2)},p,q)} + t_{m-1,n-1}^{(N^{(2)},p,q)}\right|^k$$

متقاربة. وبحيث يتحقق:

$$t_{m,-1}^{(N^{(2)},p,q)} = t_{-1,n}^{(N^{(2)},p,q)} = t_{-1,-1}^{(N^{(2)},p,q)} = 0\ ;\ m,n = 0,1,2,\ldots$$

ونكتب باختصار: $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n} \in \left|N^{(2)},p,q\right|_k$

تمهيدية بيبو–ليفي: [3]

إذا كانت لدينا متتالية الدوال f_n غير سالبة $\{f_n(x) \geq 0\}_{n\geq 1}$ وكمولة لوبيغياً على E ، أي $f_n \in L(E)$، وكان: $\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(t)dt < \infty$، عندئذٍ تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ متقاربة تقريباً في كل مكان على E من الدالة $f \in L(E)$.

علاوةً على ذلك تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(t)dt$ أيضاً متقاربة من الدالة f بالنظيم في $L(E)$.

متراجحة هولدر للمجاميع: [6]

$$\sum_{k=0}^{n}|a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\ ;\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

متراجحة هولدر للتكاملات: [6]

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} ; \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

بوضع $p=\frac{2}{k}$ و $g(x)=1$ نجد أن:

$$\int_a^b |f(x)|^k dx \le (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

علاقة فوبيني للمجاميع: [5]

$$\sum_{i=0}^{m} f(i) \sum_{j=0}^{n} g(j) = \sum_{j=0}^{m} g(j) \sum_{i=j}^{m} f(i)$$

5. النتائج ومناقشتها:

إن تحويل الطريقة المصفوفية المضاعفة يعطى بالعلاقة:

$$t_{m,n}^{(A,B)} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{m,i} b_{n,j} S_{i,j}$$

حيث: $S_{i,j} = \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} u_{k,l}$ هي متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$. وإذا رمزنا بـ:

$$\bar{a}_{m,i} = \sum_{k=i}^{m} a_{m,k} \quad , \quad \bar{b}_{n,j} = \sum_{l=j}^{n} b_{n,l} \quad ; m,n,i,j = 0,1,\dots$$

$$\hat{a}_{m,i} = \bar{a}_{m,i} - \bar{a}_{m-1,i} \quad , \quad \hat{b}_{n,j} = \bar{b}_{n,j} - \bar{b}_{n-1,j}$$

$$\bar{a}_{m-1,m} = \bar{b}_{n-1,n} = 0$$

عندئذٍ يكون:

$$t_{m,n}^{(A,B)} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{m,i} b_{n,j} S_{i,j} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{m,i} b_{n,j} \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} u_{k,l}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} u_{k,l} \sum_{i=k}^{m}\sum_{j=l}^{n} a_{m,i} b_{n,j} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} \bar{a}_{m,k} \bar{b}_{n,l} u_{k,l}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \bar{a}_{m,i} \bar{b}_{n,j} u_{i,j}$$

ولنثبت صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1: إذا كانت المتسلسلات:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left| a_{m,m} b_{n,n} c_{0,0} \right|^{k}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left(\sum_{p=1}^{m} \left\{ \Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,\mathrm{p}} \bar{b}_{n,0} \right) \right\}^{2} \left| c_{p,0} \right|^{2} \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left(\sum_{q=1}^{n} \left\{ \Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0} \bar{b}_{n,q} \right) \right\}^{2} \left| c_{0,q} \right|^{2} \right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,\mathrm{p}}\bar{b}_{n,q}\right)\right\}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

متقاربة من أجل $1 \le k \le 2$، كانت المتسلسلة المتعامدة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المطلقة $|A,B|_k$ تقريباً في كل مكان.

الإثبات: لدينا:

$$t_{m,n}^{(A,B)} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{m,i}b_{n,k}S_{i,k}(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{m,i}b_{n,k}\sum_{p=0}^{i}\sum_{q=0}^{k} c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$= \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} c_{p,q}\phi_{p,q}(x)\sum_{i=p}^{m}\sum_{k=q}^{n} a_{m,i}b_{n,k}$$

$$= \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

وبالتالي فإن:

$$\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)} = t_{m,n}^{(A,B)} - t_{m,n-1}^{(A,B)} - t_{m-1,n}^{(A,B)} + t_{m-1,n-1}^{(A,B)}$$

$$= \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} \bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x) - \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n-1} \bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$-\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$+\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

لكن فرضاً لدينا: $\bar{a}_{m-1,m}=\bar{b}_{n-1,n}=0$ وبالتالي:

$$\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}=\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$-\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$-\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)+\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

وبالتالي فإن:

$$\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}=\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x)+\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$-\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x)-\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$-\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x)-\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$+\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x)+\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=0}^{n}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

كما أن:

$$\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}=\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,0}c_{0,0}\phi_{0,0}(x)+\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x)$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,0}\phi_{p,0}(x)+\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$-\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,0}c_{0,0}\phi_{0,0}(x)-\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x)$$

$$-\sum_{p=1}^{m}\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,0}c_{p,0}\phi_{p,0}(x)-\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$-\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,0}c_{0,0}\phi_{0,0}(x)+\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x)$$

$$-\sum_{p=1}^{m}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,0}c_{p,0}\phi_{p,0}(x)-\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

$$+\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,0}c_{0,0}\phi_{0,0}(x)+\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,q}c_{0,q}\phi_{0,q}(x)$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,0}c_{p,0}\phi_{p,0}(x)+\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

عندئذٍ نجد أن:

$$\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}=\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,0}-\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,0}-\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,0}+\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,0}\right)\times c_{0,0}\phi_{0,0}(x)$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}-\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,0}-\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,0}+\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,0}\right)\times c_{p,0}\phi_{p,0}(x)$$

$$+\sum_{q=1}^{n}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}-\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,q}-\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,q}+\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,q}\right)\times c_{0,q}\phi_{0,q}(x)$$

$$+\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}-\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}-\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}-\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}\right)\times c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

لكن:

$$\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,0}-\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,0}-\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,0}+\bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,0}$$

$$=\bar{a}_{m,0}(\bar{b}_{n,0}-\bar{b}_{n-1,0})-\bar{a}_{m-1,0}(\bar{b}_{n,0}-\bar{b}_{n-1,0})$$

$$=\left(\bar{a}_{m,0}-\bar{a}_{m-1,0}\right)\left(\bar{b}_{n,0}-\bar{b}_{n-1,0}\right)$$

لكن: $\bar{b}_{n,j}=\sum_{l=j}^{n}b_{n,l}$, $\bar{a}_{m,i}=\sum_{k=i}^{m}a_{m,k}$ وبالتالي:

$$\bar{a}_{m,0}-\bar{a}_{m-1,0}=\sum_{k=0}^{m}a_{m,k}-\sum_{k=0}^{m-1}a_{m,k}=a_{m,m}$$

$$\bar{b}_{n,0} - \bar{b}_{n-1,0} = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} - \sum_{k=0}^{n-1} b_{n,k} = b_{n,n}$$

وبالتالي فإن:

$$\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,0} - \bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n-1,0} - \bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n,0} + \bar{a}_{m-1,0}\bar{b}_{n-1,0} = a_{m,m}b_{n,n}$$

أما بالنسبة لباقي الأسطر نستفيد من العلاقة:

$$\Delta_{11}v_{m,n} = v_{m,n} - v_{m,n-1} - v_{m-1,n} + v_{m-1,n-1}$$

عندئذٍ:

$$\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)} = a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\phi_{0,0}(x) + \sum_{p=1}^{m} \Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}\right)c_{p,0}\phi_{p,0}(x)$$

$$+\sum_{q=1}^{n} \Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)c_{0,q}\phi_{0,q}(x) + \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} \Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)c_{p,q}\phi_{p,q}(x)$$

وبتطبيق المتراجحة الآتية ثلاث مرات متتالية، وبمكاملة الطرفين نستطيع أن نكتب:

$$|\alpha + \beta|^r \le 2^r(|\alpha|^r + |\beta|^r) \quad ; r \ge 1$$

$$\int_a^b \left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^k dx \le 2^k \int_a^b \left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\phi_{0,0}(x)\right|^k dx$$

$$+4^k \int_a^b \left|\sum_{p=1}^{m} \Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}\right)c_{p,0}\phi_{p,0}(x)\right|^k dx$$

$$+8^k \int_a^b \left|\sum_{q=1}^{n} \Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)c_{0,q}\phi_{0,q}(x)\right|^k dx$$

$$+8^k \int_a^b \left|\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} \Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)c_{p,q}\phi_{p,q}(x)\right|^k dx$$

وبتطبيق متراجحة هولدر مع فرض أن: $p = \frac{2}{k} > 1$ نجد أن:

$$\int_a^b \left|\Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)}\right|^k dx \le 2^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left(\int_a^b \left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\phi_{0,0}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+4^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left(\int_a^b \left|\sum_{p=1}^{m} \Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}\right)c_{p,0}\phi_{p,0}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left(\int_a^b \left|\sum_{q=1}^{n} \Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)c_{0,q}\phi_{0,q}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left(\int_a^b \left|\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} \Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)c_{p,q}\phi_{p,q}(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{k}{2}}$$

لكن وبسبب التعامد نجد أن:

$$\int_a^b \left|\Delta_{11} t_{m,n}^{(A,B)}\right|^k dx \le 2^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^k$$

$$+4^k (b-a)^{1-\frac{k}{2}} \left(\sum_{p=1}^{m} \left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}\right)\right\}^2 \left|c_{p,0}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left(\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)\right\}^2\left|c_{0,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)\right\}^2\left|c_{p,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

إذن:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\int_a^b\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^k dx$$

$$\leq 2^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^k$$

$$+4^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}\right)\right\}^2\left|c_{p,0}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)\right\}^2\left|c_{0,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)\right\}^2\left|c_{p,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

والمتسلسلات الأربعة الأخيرة متقاربة فرضاً أي أن:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\int_{a}^{b}\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}dx<\infty$$

كما أن الدالة $\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}$ غير سالبة وبالتالي حسب تمهيدية بيبو ليفي نجد أن المتسلسلة: $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}$ متقاربة تقريباً في كل مكان، وبالتالي تكون المتسلسلة المتعامدة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة المثقلة $|A,B|_k$ تقريباً في كل مكان.

و نكتب: $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)\in|A,B|_k$

ملاحظة 1: بوضع $k=1$ يكون: $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)\in|A,B|$

ملاحظة 2: يمكننا استبدال الرمز $\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)$ بالرمز $\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{n,q}$.

وذلك لأن:

$$\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)=$$
$$=\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}-\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}-\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}+\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}$$

كما أن:

$$\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{n,q}=\left(\bar{a}_{m,p}-\bar{a}_{m-1,p}\right)\left(\bar{b}_{n,q}-\bar{b}_{n-1,q}\right)$$
$$=\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}-\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n-1,q}-\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n,q}+\bar{a}_{m-1,p}\bar{b}_{n-1,q}$$

- الآن لنفرض أن:

$$w^{(0,1)}(p,q;k) := \frac{1}{q^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{n=q}^{\infty} n^{\frac{2}{k}} \left(\hat{a}_{p,0} \hat{b}_{n,q}\right)^2$$

$$w^{(1,0)}(p,q;k) := \frac{1}{p^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{m=p}^{\infty} m^{\frac{2}{k}} \left(\hat{a}_{m,p} \hat{b}_{q,0}\right)^2$$

$$w^{(1,1)}(p,q;k) := \frac{1}{(pq)^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{m=p}^{\infty} \sum_{n=q}^{\infty} (mn)^{\frac{2}{k}} \left(\hat{a}_{m,p} \hat{b}_{n,q}\right)^2$$

ولنثبت صحة المبرهنة الآتية:

مبرهنة 2: لتكن $\{\Omega(m,n)\}$ متتالية مضاعفة موجبة تحقق أن $\left\{\frac{\Omega(m,n)}{mn}\right\}$ متناقصة بالنسبة لكل من m و n. وبفرض أن المتسلسلة $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn\Omega(m,n)}$ متقاربة.

ولتكن المصفوفتان $A = (a_{m,i}), B = (b_{n,k})$ مصفوفتين مثلثيتين سفليتين غير منتهيتين نظاميتين.

إذا تقاربت المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left|a_{m,m} b_{n,n} c_{0,0}\right|^k$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left|c_{m,0}\right|^2 n\, \Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n) w^{(1,0)}(m,n;k)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left|c_{0,n}\right|^2 m\, \Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n) w^{(0,1)}(m,n;k)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{m,n}\right|^{2}\,\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)w^{(1,1)}(m,n;k)$$

كانت المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية $|A,B|_k$ من أجل $1 \le k \le 2$ تقريباً في كل مكان.

الإثبات: من المبرهنة السابقة وباستبدال مايلي:

$$\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,0}\right)=\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{n,0}\quad ,\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,0}\bar{b}_{n,q}\right)=\hat{a}_{m,0}\hat{b}_{n,q}$$

$$\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)=\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{n,q}$$

نجد أن:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\int_{a}^{b}\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^{k}dx \le$$

$$\le 2^{k}(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^{k}$$

$$+4^{k}(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,0}{}^{2}\left|c_{p,0}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^{k}(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,0}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\left|c_{0,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$+8^{k}(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= G_1 + G_2 + G_3 + G_4$$

$$G_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^k$$

هذه المتسلسة متقاربة فرضاً.

$$G_2 = 4^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{n,0}{}^2\left|c_{p,0}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= A\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\{mn\Omega(m,n)\}^{1-\frac{k}{2}}}\left\{mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\sum_{p=1}^{m}\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{n,0}{}^2\left|c_{p,0}\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبتطبيق متراجحة هولدر للمجاميع، بوضع $\frac{1}{p} = 1 - \frac{k}{2}$ ، نجد أن:

$$G_2 \le A\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\Omega(m,n)}\right)^{1-\frac{k}{2}} \times \left\{\sum_{n=1}^{\infty} n\sum_{m=1}^{\infty} m\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\sum_{p=1}^{m}\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{n,0}{}^2\left|c_{p,0}\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبتطبيق علاقة فوبيني وبالاستفادة من التقارب نجد أن:

$$G_2 \le A\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\left|c_{p,0}\right|^2 \times \sum_{m=p}^{\infty} mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{n,0}{}^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= A\left\{\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\left|c_{p,0}\right|^2 \times \sum_{m=p}^{\infty} mq\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,q)\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{q,0}{}^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= A\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,0}\right|^2 \times \sum_{m=p}^{\infty} mq\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,q)\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{q,0}{}^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= A\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,0}\right|^2 \times \sum_{m=p}^{\infty} m.\frac{m^{\frac{2}{k}-1}}{m^{\frac{2}{k}-1}} q\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,q)\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{q,0}{}^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\leq A\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,0}\right|^2 \left(\frac{\Omega(p,q)}{p}\right)^{\frac{2}{k}-1} q\sum_{m=p}^{\infty} m^{\frac{2}{k}}\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{q,0}{}^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= A\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,0}\right|^2 q\Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,q)w^{(1,0)}(p,q;k)\right\}^{\frac{k}{2}}$$

- الآن:

$$G_3 = 8^k(b-a)^{1-\frac{k}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,0}{}^2\hat{b}_{n,q}{}^2\left|c_{0,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= B\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,0}{}^2\hat{b}_{n,q}{}^2\left|c_{0,q}\right|^2\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= B\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\{mn\Omega(m,n)\}^{1-\frac{k}{2}}}\left\{mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,0}{}^2\hat{b}_{n,q}{}^2\left|c_{0,q}\right|^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

ولنطبق متراجحة هولدر للمجاميع، بوضع $\frac{1}{p} = 1 - \frac{k}{2}$:

$$\leq B\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\Omega(m,n)}\right)^{1-\frac{k}{2}}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}m\sum_{n=1}^{\infty}n\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,0}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\left|c_{0,q}\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبتطبيق علاقة فوبيني وبالاستفادة من التقارب نجد أن:

$$G_3\leq B\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{0,q}\right|^{2}\times\sum_{n=q}^{\infty}mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\hat{a}_{m,0}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$=B\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{0,q}\right|^{2}\times\sum_{n=q}^{\infty}pn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,n)\hat{a}_{p,0}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$=B\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{0,q}\right|^{2}\times\sum_{n=q}^{\infty}pn.\frac{n^{\frac{2}{k}-1}}{n^{\frac{2}{k}-1}}\Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,n)\hat{a}_{p,0}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\leq B\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{0,q}\right|^{2}\left(\frac{\Omega(p,q)}{q}\right)^{\frac{2}{k}-1}p\sum_{n=q}^{\infty}n^{\frac{2}{k}}\hat{a}_{p,0}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$=B\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{0,q}\right|^{2}p\Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,q)w^{(0,1)}(p,q;k)\right\}^{\frac{k}{2}}$$

- الآن:

$$G_4=8^{k}(b-a)^{1-\frac{k}{2}}$$
$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$G_4 = C\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$= C\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\{mn\Omega(m,n)\}^{1-\frac{k}{2}}}\left\{mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

ولنطبق متراجحة هولدر للمجاميع، بوضع $\frac{1}{p} = 1 - \frac{k}{2}$:

$$\leq C\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\Omega(m,n)}\right)^{1-\frac{k}{2}}$$

$$\times\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

وبتطبيق علاقة فوبيني وبالاستفادة من التقارب نجد أن:

$$\leq C\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,q}\right|^{2}\times\sum_{m=p}^{\infty}\sum_{n=q}^{\infty}mn\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$= C\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right.$$

$$\left.\times\sum_{m=p}^{\infty}\sum_{n=q}^{\infty}mn\frac{(mn)^{\frac{2}{k}-1}}{(mn)^{\frac{2}{k}-1}}\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)\hat{a}_{m,p}{}^{2}\hat{b}_{n,q}{}^{2}\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$\leq C\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,q}\right|^2\left(\frac{\Omega(p,q)}{pq}\right)^{\frac{2}{k}-1}\sum_{m=p}^{\infty}\sum_{n=q}^{\infty}(mn)^{\frac{2}{k}}\hat{a}_{m,p}{}^2\hat{b}_{n,q}{}^2\right\}^{\frac{k}{2}}$$

$$=C\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\left|c_{p,q}\right|^2\Omega^{\frac{2}{k}-1}(p,q)w^{(1,1)}(p,q;k)\right\}^{\frac{k}{2}}$$

من G_1 و G_2 و G_3 و G_3 وبما أن المتسلسلات الأربعة متقاربة فرضاً، فإن:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\int_a^b\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^k dx<\infty$$

أي المتسلسلة متقاربة. كما أن الدالة $\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^k$ غير سالبة، وبالتالي وحسب تمهيدية بيبو ليفي تكون المتسلسلة $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|\Delta_{11}t_{m,n}^{(A,B)}\right|^k$ متقاربة تقريباً في كل مكان.

وبالتالي تكون المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بالطريقة المصفوفية $|A,B|_k$ تقريباً في كل مكان.

- الآن لنعرّف المصفوفتين A و B كمايلي:

$$a_{m,j}=\frac{p_{m-j}q_j}{R_m},\qquad b_{n,k}=\frac{\acute{p}_{n-k}\acute{q}_k}{\acute{R}_n}$$

ونعلم أن:

$$t_n^{(N,p,q)}=\frac{1}{R_n}\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}q_kS_k$$

حيث:

$$R_n = (p * q)_n = \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} q_m \quad , R_n^j = \sum_{m=j}^{n} p_{n-m} q_m$$

عندئذٍ نجد أن:

$$\bar{a}_{m,\mathrm{j}} = \sum_{l=j}^{m} a_{m,l} = \sum_{l=j}^{m} \frac{p_{m-l} q_l}{R_m} = \frac{\sum_{l=j}^{m} p_{m-l} q_l}{R_m} = \frac{R_m^j}{R_m}$$

$$\bar{b}_{n,k} = \sum_{l=k}^{n} b_{n,l} = \sum_{l=k}^{n} \frac{\acute{p}_{n-l} \acute{q}_l}{\acute{R}_n} = \frac{\sum_{l=k}^{n} \acute{p}_{n-l} \acute{q}_l}{\acute{R}_n} = \frac{R_n^k}{\acute{R}_n}$$

أي أن:

$$\bar{a}_{m,\mathrm{j}} . \bar{b}_{n,k} = \frac{R_m^j}{R_m} . \frac{R_n^k}{\acute{R}_n}$$

فيكون:

$$\hat{a}_{m,i} = \bar{a}_{m,i} - \bar{a}_{m-1,i} = \frac{R_m^i}{R_m} - \frac{R_{m-1}^i}{R_{m-1}}$$

$$\hat{b}_{n,j} = \bar{b}_{n,j} - \bar{b}_{n-1,\mathrm{j}} = \frac{R_n^j}{R_n} - \frac{R_{n-1}^j}{R_{n-1}}$$

لكن:

$$\frac{R_m^j}{R_m} . \frac{R_n^k}{\acute{R}_n} = \frac{\sum_{i=j}^{m} p_{m-i} q_i}{\sum_{i=0}^{m} p_{m-i} q_i} . \frac{\sum_{l=k}^{n} \acute{p}_{n-l} \acute{q}_l}{\sum_{l=0}^{n} \acute{p}_{n-l} \acute{q}_l} = \frac{\sum_{i=j}^{m} \sum_{l=k}^{n} p_{m-i} \acute{p}_{n-l} q_i \acute{q}_l}{\sum_{i=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} p_{m-i} \acute{p}_{n-l} q_i \acute{q}_l}$$

ونعلم أن:

$$t_{m,n}^{(N^{(2)},p,q)} = \frac{1}{(p*q)_{m,n}} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_{m-i,n-k}\, q_{i,k}\, S_{i,k}$$

ولنضع:

$$p_{m-i}\acute{p}_{n-l} = p_{m-i,n-l} \quad , \qquad q_i \acute{q}_l = q_{i,l}$$

نجد:

$$R_m . \acute{R}_n = R_{m,n}$$

$$R_{m,n}^{j,k} = \sum_{i=j}^{m} \sum_{l=k}^{n} p_{m-i,n-l} . q_{i,l}$$

$$R_{m,n} = (p*q)_{m,n} = R_{m,n}^{0,0} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} p_{m-i,n-l} . q_{i,l}$$

وبالتالي فإن:

$$\bar{a}_{m,\mathrm{j}} . \bar{b}_{n,k} = \frac{R_m^j}{R_m} . \frac{R_n^k}{\acute{R}_n} = \frac{R_{m,n}^{j,k}}{R_{m,n}}$$

وبتبديل هذه العلاقة في المبرهنة 1 نحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة 1: إذا كانت المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (mn)^{k-1} \left| a_{m,m} b_{n,n} c_{0,0} \right|^k$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\left\{\Delta_{11}\left(\frac{R_{m,n}^{p,0}}{R_{m,n}}\right)\right\}^{2}\left|c_{p,0}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\frac{R_{m,n}^{0,q}}{R_{m,n}}\right)\right\}^{2}\left|c_{0,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left(\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}\left\{\Delta_{11}\left(\frac{R_{m,n}^{p,q}}{R_{m,n}}\right)\right\}^{2}\left|c_{p,q}\right|^{2}\right)^{\frac{k}{2}}$$

متقاربة من أجل $1 \leq k \leq 2$. عندئذٍ تكون المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة المثقلة $|N,p,q,\acute{p},\acute{q}|_k = \left|N^{(2)},p,q\right|_k$ تقريباً في كل مكان.

ملاحظة: وجدنا أنه بإمكاننا استبدال الرمز $\Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right)$ بالرمز $\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{n,q}$.

لكن: $\bar{a}_{m,\mathrm{p}}.\,\bar{b}_{n,q} = \frac{R_{m,n}^{p,q}}{R_{m,n}}$ أي أن:

$$\hat{a}_{m,p}\hat{b}_{n,q} = \Delta_{11}\left(\bar{a}_{m,p}\bar{b}_{n,q}\right) = \Delta_{11}\left(\frac{R_{m,n}^{p,q}}{R_{m,n}}\right)$$

الآن لنضع:

$$w^{(1,0)}(p,q;k) := \frac{1}{p^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{m=p}^{\infty} m^{\frac{2}{k}}\left[\Delta_{11}\left(\frac{R_{m,q}^{p,0}}{R_{m,q}}\right)\right]^{2}$$

$$w^{(0,1)}(p,q;k) := \frac{1}{q^{\frac{2}{k}-1}}\sum_{n=q}^{\infty} n^{\frac{2}{k}}\left[\Delta_{11}\left(\frac{R_{p,n}^{0,q}}{R_{p,n}}\right)\right]^{2}$$

$$w^{(1,1)}(p,q;k) \coloneqq \frac{1}{(pq)^{\frac{2}{k}-1}} \sum_{m=p}^{\infty} \sum_{n=q}^{\infty} (mn)^{\frac{2}{k}} \left[\Delta_{11} \left(\frac{R_{m,n}^{p,q}}{R_{m,n}} \right) \right]^2$$

وبالاستفادة من المبرهنة 2 نحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة 2: لتكن $\{\Omega(m,n)\}$ متتالية مضاعفة موجبة تحقق أن المتتالية $\left\{\frac{\Omega(m,n)}{mn}\right\}$ متناقصة بالنسبة لكل من m و n. وبفرض أن المتسلسلة $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{mn\Omega(m,n)}$ متقاربة.

ولتكن المتتاليتين $\{p_{m,n}\}$ و $\{q_{m,n}\}$ موجبتين. عندئذٍ إذا تقاربت المتسلسلات الآتية:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(mn)^{k-1}\left|a_{m,m}b_{n,n}c_{0,0}\right|^k$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{m,0}\right|^2 n\,\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)w^{(1,0)}(m,n;k)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{0,n}\right|^2 m\,\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)w^{(0,1)}(m,n;k)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{m,n}\right|^2\,\Omega^{\frac{2}{k}-1}(m,n)w^{(1,1)}(m,n;k)$$

كانت المتسلسلة المتعامدة المضاعفة $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{m,n}\,\phi_{m,n}(x)$ قابلة للجمع بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة المثقلة $|N,p,q,\acute{p},\acute{q}|_k$ من أجل $1 \le k \le 2$ تقريباً في كل مكان.

حيث: $a_{m,m} = \frac{p_{m-m}q_m}{R_m} = \frac{p_0 q_m}{R_m}$, $b_{n,n} = \frac{\acute{p}_{n-n}\acute{q}_n}{\acute{R}_n} = \frac{\acute{p}_0\acute{q}_n}{\acute{R}_n}$

6. الاستنتاجات والتوصيات:

في هذا البحث قمنا بدراسة قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بالطريقة المصفوفية المضاعفة المطلقة بحالتها العامة المثقلة، وتوصّلنا وبالإثبات إلى أن المتسلسلات المتعامدة المضاعفة قابلة للجمع بهذه الطريقة ضمن شروط معينة.

وحصلنا على نتيجتين هامتين حول قابلية جمع المتسلسلات المتعامدة المضاعفة بطريقة نيورلند المعممة المضاعفة المطلقة.

ونوصي بدراسة قابلية جمع متسلسلة فورييه المضاعفة بهذه الطريقة كونها تعد من أهم المتسلسلات المتعامدة المضاعفة.

7. المراجع:

[1]. S. Lal, V. N. Tripathi, "On the study of double Fourier series by double matrix summability method", Tamkang journal of mathematics, (2003).

[2]. Xhevat Z. Krasniqi, "On absolute generalized Norlund summability of double orthogonal series", (2011).

[3]. Xhevat Z. Krasniqi, "Certain sufficient conditions on $|N, p_n, q_n|_k$ summability of orthogonal series", (2014).

[4]. V. N. Misra, S. K. Pakray, P. Palo, P. N. Samanta, M. Misra, U. K. Misra, "On double absolute factorable matrix summability", De gruyter, (2017).

[5]. https://web.math.ucsb.edu/~cmart07/fubini.pdf, (2020).

[6]. أ. كولموغوروف، س. فومين، "مبادئ في نظرية التوابع وفي التحليل التابعي"، تعريب أبو بكر خالد سعد الله، (1973).