دراسة حول اختبار التماثل لفئة خاصة من البيانات

آلاء سلامه[1] وَ أ.م. د. محمد فراس الحلبي[2]

قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة دمشق

الملخص

انتشرت الشبكات انتشاراً واسعاً في العالم كشبكات الإنترنيت و الشبكات الاجتماعية والنقل وغيرها. تعد الشبكة مثالاً واضحاً على البيان. لكن يمكن للبيان أن يظهر بتمثيلات مختلفة، مما يثير السؤال حول مدى صعوبة معرفة ما إذا كان بيانان مختلفان ظاهرياً لكن متماثلان. يعرف هذا السؤال بمشكلة تماثل البيانات. تعتبر مشكلة تماثل البيانات من أكثر المشاكل الأساسية في نظرية البيان من الناحية النظرية والعملية وما زالت مسألة التعقيد فيها غير محلولة. عمل الباحثين جلياً في هذا المجال، وقاموا بإيجاد خوارزميات متعددة. منها خوارزميات عامة تختبر تماثل أي بيانين، إلا أنها احتوت على مشاكل عديدة. ركز بعض الباحثين على إيجاد تماثل لصفوف خاصة من البيانات. سنقوم في هذه الورقة البحثية بالتركيز على فئة البيانات غير الموجهة. سنقدم خوارزمية جديدة فعالة تختبر تماثل بيانين غير موجهين. كما سنقوم بعرض محاكاة لهذه الخوارزمية باستخدام بيئة الماتلاب.

الكلمات المفتاحية: البيان، البيانات غير الموجهة، تماثل البيانات، التعقيد.

A study about the isomorphism of a special class of graphs

Mohamad Firas Alhalabi, **Alaa Salameh**

Department of Mathematics – Faculty of Science – Damascus University

Abstract

Networks are everywhere. We encounter them every day, in the form of the internet, or the social, transport and utility networks we depend upon .In Mathematics, a network is an example of a graph The problem is that the same graph can appear in different guises which prompts the question of how hard it is difficult to decide whether two apparently different graphs are actually the same. That question is known as the graph isomorphism problem. The graph isomorphism problem has received a great deal of attention on both theoretical and practical domain. the researchers have worked a lot in this field, creating multiple algorithms, including general algorithms that check the isomorphism of any two graph, but they contain many problems. Some of them focused on testing isomorphism for special categories of graphs, and we also work in our research in this direction. In this paper, we focused on the undirected category of graphs. We propose a new polynomial efficient algorithm that check the isomorphism of two undirected graph. We show a simulation of this algorithm was performed using Matlab.

Keywords: Graph, Undirected Graph, Graph Isomorphism, Complexity.

1 المقدمة

تعد مسألة تحديد فيما إذا كان بيانان متماثلان أحد أكثر المسائل شهرة وبحثاً في نظرية البيان، ولها العديد من التطبيقات العملية حيث تشمل أتمتة التصميم الإلكتروني (التحقق من تكافؤ التمثيلات المختلفة لتصميم الدائرة الالكترونية)، فهرسة الصور، التعرف على الوجوه وبصمات الأصابع، وتحليل الشبكات العصبية والاجتماعية ... إلخ [1]. إن مشكلة تماثل البيانات واحدة من المسائل الاثني عشر المذكورة لدى Carey و Jonson وواحدة فقط من المسألتين الحسابيتين، التي مازالت مسألة التعقيد فيها غير محلولة، حيث طرحت في عام 1979 [2]. أحد الطرائق للتحقق فيما إذا كانت البيانات متماثلة هي مطابقة العقد في البيان الأول مع العقد في البيان الثاني، لكن بالنسبة للبيان الذي يمتلك n عقدة يكون عدد المطابقات $n!$، ولا يمكن تنفيذه حاسوبياً. في عام 1983 تم وضع خوارزمية لتماثل البيانات على يد الباحث Eugene Luks، ذلك بالاعتماد على أعمال سابقة له عام 1981 بالإضافة لأعمال الباحث László Babai عام 1982، وتعمل هذه الخوارزمية في وقت أسي [3]. تم دراسة مشكلة تماثل البيانات بشكل مكثف من وجهة نظر التعقيد الحسابي في الثمانينيات وأوائل التسعينيات، ثم أصبح التقدم بطيئاً في السنوات الأخيرة. مع ذلك قام الباحثين بإيجاد خوارزميات متعددة الحدود لصفوف خاصة من البيانات. لكن معظم هذه الخوارزميات ليس لها وقت كثير الحدود في أسوأ الحالات [2]. في عام 2015 أعلن الباحث László Babai من جامعة شيكاغو أنه توصل إلى خوارزمية جديدة لمشكلة تماثل البيانات وبتعقيد شبه متعدد الحدود، وهي أكثر فعالية من الخوارزمية السابقة، والتي احتفظت بالسجل لأكثر من 30 عاماً [4]. وفي عام 2017 تراجع الباحث László Babai عن ادعائه بأن الخوارزمية تعمل في وقت شبه متعدد الحدود. سنقوم باقتراح خوارزمية جديدة تعمل في وقت كثير الحدود، تمكننا من التحقق فيما إذا كان بيانين غير موجهين متماثلين. بغية الوصول إلى هدف البحث يتم البدء بعرض المفاهيم والتعاريف والمصطلحات الأساسية المناسبة والتي يمكن من خلالها مناقشة موضوع تماثل البيانات. نوضح أهمية وهدف البحث في الفقرة 2. كما سنقوم بعرض طرق البحث ومواده في الفقرة 3. أخيراً سنعرض النتائج والمناقشة التي

تتضمن الخوارزمية المقترحة وتعقيدها الحسابي بالإضافة إلى عرض مثال يوضح هذه الخوارزمية
في الفقرة 4. نختتم البحث بمجموعة من الاستنتاجات والتوصيات في الفقرة 5.

2 أهمية البحث وأهدافه

تعتبر مشكلة تماثل البيانات من أكثر المشاكل الأساسية في نظرية البيان من الناحية النظرية والعملية. لجأ الباحثون إلى تطوير العديد من الخوارزميات، منها خوارزميات عامة تثبت تماثل أي بيانين مثل VF2 [14]، VF3 [15]، Nauty [16] وخوارزمية LAD و RI. على الرغم من دقة هذه الخوارزميات إلا أن تعقيدها يصبح أسياً في العديد من الحالات الخاصة [5]. أما بعض الباحثين فقد قاموا بإيجاد خوارزميات اقتصرت على صفوف خاصة من البيانات، على سبيل المثال ركز بعض الباحثين على صف البيانات غير الموجهة الموزونة. حيث في [1] تم اقتراح خوارزمية تستند إلى القيم الذاتية لمصفوفة. ايضاً في [6] تم إيجاد خوارزمية تجريبية (Heuristics) استخدمت هذه الخوارزمية البرمجة الخطية بتعقيد زمني على شكل حدودية من المرتبة الثالثة $O\left(n^3\right)$.
أما في البيانات المستوية والبيانات الشجرية فتعد الخوارزميتان PlanarGI [11] وTreeGI من أشهر الخوارزميات، التي درست تماثل هذا النوع من البيانات في وقت كثير الحدود [5]. من جهة أخرى بعض الأبحاث ركزت على دراسة البيانات المنتظمة. تتعدد الأمثلة لصفوف البيانات التي تمت دراستها. نهدف في هذا البحث إلى اقتراح خوارزمية جديدة فعالة تختبر تماثل صف البيانات غير الموجهة. الخوارزمية المقترحة بتعقيد زمني $O\left(n^4\right)$ (حيث n هي عدد عقد البيان).

3 مواد وطرق البحث

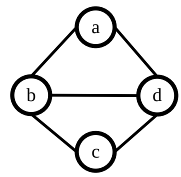
نقدم فيما يلي بعض المفاهيم المتعلقة بالبيان [9]. كما أننا سوف نقوم بتعريف مصطلحات سنستخدمها في الخوارزمية المقترحة.

3.1 البيان (Graph)

يتألف البيان G من مجموعة V غير خالية من العناصر تدعى مجموعة العقد، ومجموعة E كل عنصر منها مؤلف من عنصرين من V، وتدعى هذه العناصر بالأضلاع. نعرف الدالة f بالشكل التالي: $f: E \to V*V$ ؛ أي إذا كان $e \in E$

ضلعاً، وكانت $x,y\in V$ عقدتين بحيث $f(e)=(x,y)$ ، عندها فإن الضلع e يربط العقدتين x,y . ندعو العقدتان x,y بطرفي الضلع e .

نسمي الثنائية المرتبة $G=(V,E)$ بياناً، ويسمى هذا البيان بالبيان غير الموجه. كما نقول إن الثنائية (V,E) هي بيان منتهي إذا كانت كل من المجموعتين V وَ E مجموعة منتهية. يمثل الشكل (1) بيان غير موجه.



الشكل (1) البيان H غير الموجه.

$$V(H)=\{a,b,c,d\}$$
$$E(H)=\{ab,ad,db,bc,cd\}$$

3.2 البيان الموجه (Directed Graph)

البيان الموجه هو بيان زودت أضلاعه باتجاه ويرمز للبيان الموجه بالثنائية المرتبة $V.\vec{G}=(V,\vec{E})$ هي مجموعة العقد، $\vec{E}$ مجموعة من الأزواج المرتبة من العقد تعرف بالأسهم أو الأضلاع الموجهة.

3.3 العروة (Loop)

إذا كان $e=(v,v)$ ، فإننا نسمي e عروة عند v . يكون للضلع نهايتان متطابقتان.

3.4 الضلع المضاعف (Multiple Edge)

إذا كان $e_1=e_2=(x,y)$ بحيث $x\neq y$ عندئذ نسمي كلاً من e_1 و e_2 ضلع مضاعف. أما إذا كان $e_1=e_2=(x,y)$ وكان $x=y$ عندئذ نسمي كلاً من العروة e_1 والعروة e_2 عروة مضاعفة عند العقدة x .

3.5 البيان البسيط (Simple Graph)

نسمي البيان $G=(V,E)$ بيان بسيط إذا كان البيان G لا يملك أضلاع مضاعفة، ولا يملك عرى. على سبيل المثال البيان H في الشكل (1) هو بيان بسيط.

3.6 درجة العقدة (Node Degree)

نعرف درجة العقدة v_i على أنها عدد المرات التي تلتقي فيها أضلاع G مع v_i، وهذا العدد مختلف عن عدد الأضلاع المؤثرة في v_i، لأن العروة تلتقي مع الرأس مرتين.

نرمز لدرجة v_i بـ $\deg v_i$ أو $d(v_i)$، وتحسب درجة v_i بالعلاقة التالية:

$$\deg v_i = \left|\{e : v_i \in f(e), v_i \neq f(e)\}\right| + 2\left|\{e : f(e) = v_i\}\right| \qquad (1)$$

أي أن درجة العقدة تحسب كمجموع لعددين، الأول هو عدد أضلاع البيان المؤثرة بالعقدة عدا العرى، والعدد الثاني هو ضعف عدد العرى الموجودة على العقدة.

3.7 مصفوفة التجاور (Adjacency Matrix)

ليكن $G=(V,E)$ بيان بسيط حيث مجموعة عقده $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ ومجموعة أضلاعه $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$. نعرف مصفوفة التجاور للبيان $G=(V,E)$ بالمصفوفة $A=(a_{ij})_{n\times n}$، حيث:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i,v_j) \in E \\ 0 & (v_i,v_j) \notin E \end{cases} \qquad (2)$$

في هذا البحث، مفهوم مصفوفة تجاور البيان بالنسبة للمتجهة سيكون كما في التعريف السابق مع مراعاة أخذ العقد في المصفوفة وفقاً لترتيبها في المتجهة.

3.8 مجاورات العقدة بالنسبة للمتجهة

ليكن $G(V,E)$ بيان غير موجه ولتكن P متجهة مرتب فيها عقد البيان G. عندئذ نعرف مجاورات العقدة $y\in V$ بالنسبة لـ P بأنها المجموعة M التي عناصرها هي أدلة العقد المضافة في المتجهة P قبل العقدة y، والتي تجاور y في البيان G. ثم نجمع عدد الأضلاع المشتركة بين العقدة y مع دليل كل عقدة في المجموعة M فنحصل على مجموعة مجاورات العقدة y بالنسبة للمتجهة P.

3.9 تماثل بيانين (Graph Isomorphism)

ليكن G و H بيانين بسيطين، وليكن $f:V(G)\to V(H)$ تطبيقاً. نقول إن f تماثل من G إلى H إذا تحقق ما يلي :

(1) f تطبيق متباين وغامر.

(2) من أجل كل $x,y\in V(G)$ وكان $(x,y)\in E(G)$ عندئذ فإن:

$$(f(x), f(y)) \in E(H)$$

في هذه الحالة نقول إن G و H متماثلان، نرمز لهذا التماثل بالرمز $G \cong H$، ونقول إن f تطبيق محافظ على الشكل.

مبرهنة (1)

لتكن $f:V(G)\rightarrow V(H)$ تشاكلاً من البيان البسيط G إلى البيان البسيط H عندئذ:

1. $|V(G)| = |V(H)|$ و $|E(H)| = |E(G)|$.
2. $\forall x \in V(G)$ فإن $\deg(f(x)) = \deg(x)$.
3. عدد العقد التي قدرة كل منها m في البيان G يساوي عدد العقد التي قدرة كل منها m في البيان H.
4. عدد الدوائر التي طول كل منها r في البيان G يساوي عدد الدوائر التي طول كل منها r في البيان H.
5. G بيان مترابط إذا وفقط إذا كان H بيان مترابط.

4 النتائج والمناقشة

تحتل مشكلة تماثل البيانات مكانة مهمة في نظرية التعقيدات، من حيث انتماء المشكلة في التسلسل الهرمي لصفوف التعقيد. سنعرض أولاً التعقيد الزمني لمشكلة تماثل البيانات. ثم ننتقل إلى اقتراح خوارزمية جديدة وفعالة لتماثل البيانات غير الموجهة ومثال توضيحي لها. بعد ذلك ندرس التعقيد الزمني للخوارزمية المقترحة وبعض الأعمال ذات الصلة.

4.1 التعقيد الزمني لمشكلة تماثل البيانات

فيما يتعلق بالتعقيد الزمني للخوارزميات [13] تعتبر مشكلة تماثل البيانات مشكلة متوسطة في الصف NP. من وجهة نظر الخوارزميات، فإن هذه النتيجة غير مرضية، لأن أي مشكلة ليست في الصف P تكون غير قابلة للحل بكفاءة (على الأقل في أسوأ الحالات)، بغض النظر فيما إذا كانت من الصف NP-Complete أو لا. بالنظر إلى اثنين من البيانات فإن أحد الطرائق للتحقق فيما إذا كانت متماثلة هي مطابقة العقد في البيان الأول مع العقد في البيان الثاني. لكن بالنسبة للبيان الذي يملك n عقدة يكون عدد المطابقات $n!$، وهذا غير عملي مطلقاً. إن أشهر خوارزمية معروفة لتماثل البيانات كانت في عام 1983 [4]. لكن هذه الخوارزمية تعمل في وقت أسي $2^{O(\log n)^c}$ حيث c

عدد صحيح ثابت صغير كفاية. تعتبر هذه الخوارزمية أسية معتدلة لحل المشكلة. الأسية المعتدلة تعني أن المشكلة من الحجم n، زمن التنفيذ t لها يعطى بالعلاقة: $n^k < t < a^n$ حيث أن $k, a > 1$ هي أعداد حقيقية عشوائية [7]. هذا يعني الأس في زمن التنفيذ هو دالة تنمو بشكل أبطأ من n. اتبع الباحثون العديد من الأساليب لتحديد مدى تعقيد مشكلة تماثل البيانات. أحد هذه الأساليب هو تحديد صف التعقيد الخاص بمشكلة تماثل البيانات، ومعرفة المشاكل الأخرى التي تقع ضمن الصف نفسه. يعتبر هذا الأسلوب صعب التطبيق نوعاً ما. أسلوب آخر هو تعميم مفهوم NP في مفاهيم أكثر تعقيداً، ودراسة موقع مشكلة تماثل البيانات في صفوف التعقيد الجديدة. الأسلوب الثالث هو محاولة إيجاد خوارزميات حدودية لصفوف خاصة من البيانات. خلال دراستنا وجدنا أن بعض الباحثين قاموا بإيجاد خوارزميات متعددة لصفوف خاصة من البيانات. لكن معظم هذه الخوارزميات تكون من المرتبة الأسية في أسوأ الحالات. نتبع الأسلوب الثالث في دراستنا الحالية ذلك باقتراح خوارزمية تدرس تماثل البيانات غير الموجهة.

4.2 الخوارزمية المقترحة

بعد طرح مشكلة تماثل البيانات وأهميتها في نظرية التعقيدات، توجه بعض الباحثين نحو إيجاد خوارزميات لصفوف خاصة من البيانات. تم في هذا القسم اقتراح خوارزمية جديدة تمكّن من اختبار تماثل البيانات غير الموجهة. نعتمد في الخوارزمية المقترحة على فرض قيود وشروط على البيانات وثم مقارنة مصفوفتي التجاور للبيانين. قبل البدء بطرح الخوارزمية المقترحة نبحث عن وجود عرى في البيانين، إذا وجدنا عرى نقوم بإضافة عقدة جديدة إلى البيان الذي يحوي هذه العرى. هذه العقدة ترتبط بالعقدة التي تمتلك عروة، ومن ثم نحذف العروة. وفيما يلي الخوارزمية المقدمة لتحديد تماثل أو عدم تماثل البيانين.

Input: $G_1(V_1,E_1)$, $G_2(V_2,E_2)$

1:$P_1=\Phi$; //G_1 متجهة فارغة للبيان

2:While($V_1(G_1)>0$){

// نختار عقدة X ذات الدرجة الأعلى

3:determine a vertex X of a maximal degree in G;

// إذا وجد أكثر من عقدة لها نفس درجة X نضعهم في المجموعة M

4:if found more than a vertex equal to degree X put in M;

```
NN=set of vertex non−neighbors of X; // مجموعة العقد غير المجاورة لـ X
// مجموعة العقد غير المجاورة لـ X ولها مجاورات مشتركة مع X //
Q−X=set of non−neighbors of X and have common neighbors with X;
// مجموعة درجات عقد المجموعة Q−X //
T−X=set of degrees group vertexes Q−X ;
// المجموع الكلي لدرجات مجاورات عقد Q−X //
R−X= sum of neighbors vertexes Q−X ;
// مجموع عدد المجاورات المشتركة بين X وعقد Q−X //
W−X=sum number of common neighbors of Q−X and X;
// مجاورات k بالنسبة للمتجهة P1 //
ad−k=set vertex neighbors of k Relative to a P1;
// مجموع درجات العقد المجاورة لـ k //
gk=sum of degrees of adjacent vertex k;
while(|NN|>0){ // اختيار العقدة التي لها أكبر عدد من العقد المجاورة المشتركة مع X
max Ci=0;
for every vertex Z ∈ NN { // عدد المجاورات المشتركة بين Z و X
Ci=number of common neighbors of Z and X;
if(Ci>max Ci){ // اختيار العقدة التي لها اكبر عدد من الأعمدة المشتركة مع Z و X
Y=Z;
max Ci=Ci;}}
if(max Ci==0){ // في حال عدم وجود عقد في NN لها مجاورات مشتركة مع X
Y=vertex of maximal degree in NN;} // نختار العقدة ذات الدرجة الأكبر في N
put Y in P1; // نضع Y في المتجهة P1
find set elements ad−Y; // إيجاد مجموعة عناصر ad−Y بالنسبة لـ Y
Update the set NN of non−neighbors of X;} // تحديث NN
// أصبحت X مجاورة لكل العقد غير المضافة في P1 بالتالي نضيف X للمتجهة //
put X in P1;
```

// نأخذ مجموعة عناصر ad−X بالنسبة لـ X //

find set elements ad−X;}

write adjacency matrix for P_1; // مصفوفة تجاور G_1 بالنسبة للمتجهة P_1

$P_2=\Phi$; // متجهة فارغة للبيان G_2

While($V_2(G_2)>0$){

adz−k=set neighbors of k relative to a P_2; // مجاورات k بالنسبة للمتجهة P_2

// مجموع درجات العقد المجاورة لـ k //

M_k=sum of degrees of adjacent vertex k;

// نختار عقدة 'X ذات الدرجة الأعلى في البيان G_2 //

determin a vertex X' of a maximal degree in G_2;

// إذا كانت درجة 'X لا تساوي درجة X التي تم اختيارها في البيان G_1 فإن البيانين غير متماثلين //

if(degree(X') $\neq$ degree(X));

then G_1 is not isomorphism G_2;

Stop;

else

// إذا وجد أكثر من عقدة لها نفس درجة 'X نضعهم في N. نختار منها عقدة تكون مجاوراتها بالنسبة لـP_2 مساويه لمجاورات X بالنسبة لـP_1 ومجموع درجات العقد المجاورة لها يساوي مجموع درجات العقد المجاورة لـ X عدد العقد في Q−X يساوي عدد العقد في 'Q−X ومجموع درجات عقد Q−X يساوي مجموع درجات عقد Q−X وعناصر المجموعة Q−X هي نفسها عناصر المجموعة Q−X //

if found more than a vale max equal put in N and choose X' considering(adz−X'=ad−x and $M_{X'}$==g_X and |Q−X|=|Q−X'| and W−X=W−X' and T−X=T−X' and R−X=R−X');

// إذا كان عدد العقد ذات الدرجة الأعظم في G_2 لا تساوي مقابلاتها في G_1 يكون $G_2 \ncong G_1$ //

if(|N|$\neq$|M|) then G_2 is not isomorphism G_1;

stop;

// إذا لم يوجد أي عقدة في N مجاوراتها بالنسبة لـ P_2 تساوي مجاورات X بالنسبة لـ P_1 يكون $G_2 \ncong G_1$ //

else if ($\forall X' \in N \quad adz - X' \neq ad - X$)

then G_2 is not isomorphism G_1;

stop;

39:else{

//X' مجموعة العقد غير المجاورة لـ X'//

40:MM=set vertex of non−neighbors of X';

// X' اختيار العقدة التي لها أكبر عدد من العقد المجاورة المشتركة مع //

41:While (|MM|>0){

42:max C_i=0;

43:for every vertex $Z \in MM${

// X' و Z عدد المجاورات المشتركة بين //

44:C_i=number of common neighbors of Z and X';

نختار عقدة من M بحيث يكون لها العدد الأكبر من العقد المشتركة مع X' تكون درجتها ومجاوراتها بالنسبة لـ P_2 تساوي درجة ومجاورات Y المختارة في G_1 بالنسبة لـ P_1 وايضاً مجموع درجات مجاوراتها تساوي مجموع درجات مجاورات Y والمجموع الكلي لدرجات مجاورات العقد في Q−Y يساوي المجموع الكلي لدرجات مجاورات العقد غير المجاورة للعقدة التي سنختارها ولها مجاورات مشتركة معها//

45:if(C_i>max C_i and adz−Z=ad−Y and degree(Y)=degree(Z') and g_Y=M_Z and R−Y=R−Z){

46:Y'=Z';

47:max C_i=C_i;}}

// X′ في حال عدم وجود عقد في MM لها مجاورات مشتركة مع //

48:if(max C_i=0){

نختار Y' بحيث تكون العقدة ذات الدرجة الأكبر في MM والمجموع الكلي لدرجات مجاورات العقد في Q−Y يساوي المجموع الكلي لدرجات مجاورات العقد في Q−Y' //

49:Y'=vertex of maximal degree in MM and R−Y=R−Y';

نختار Y' بحيث تكون درجتها ومجاوراتها بالنسبة لـ P_2 تساوي درجة ومجاورات Y المختارة في G_1 بالنسبة لـ P_1 وايضاً مجموع درجات مجاوراتها تساوي مجموع درجات مجاورات Y //

50: choose Y' consider(adz−Y'=ad−Y and g_Y=$M_{Y'}$);

// $G_2 \ncong G_1$ إن لم يوجد عقدة في MM تحقق الشروط المذكورة في التعليمة السابقة يكون البيانين //

51: $\forall Y' \in MM$ if (adz−Y '≠ ad−Y or g_Y=$M_{Y'}$)

then G_2 is not isomorphism G_1;

52:break;}

53:put Y' in P_2; // P_2 في المتجهة Y' نضع

54:Update the set MM of non−neighbors of X'; }// MM تحديث المجموعة

// أصبحت X' مجاورة لكل العقد غير المضافة في P_2 بالتالي نضيف X' للمتجهة //

55:put X' in P_2;}

56:write adjacency matrix for P_2; // نكتب مصفوفة تجاور G_2 بالنسبة لـ P_2 //

// إذا كانت المصفوفتين متساويتين يكون البيانين متماثلان وإلا غير متماثلان //

57:if (adjacency matrix for P_2=adjacency matrix for P_1)

Then G_1 is isomorphism G_2;

58:else

G_1 is not isomorphism G_2;

Output: $G_2 \ncong G_1 \; or \; G_2 \cong G_1$

سنقوم بشرح خطوات الخوارزمية وفق ما يلي:

المدخلات: البيانين $G_1(V_1,E_1)$ ، $G_2(V_2,E_2)$

المخرجات: تماثل أو عدم تماثل البيانين G_1 و G_2

- **الخطوة الأولى**

لتكن لدينا P_1 متجهة فارغة. نبدأ في البيان G_1 نختار عقدة x ذات الدرجة الأعلى ونقوم بإيجاد مجموع درجات العقد المجاورة لها. في حال وجود أكثر من عقدة لها نفس درجة العقدة x نضعهم في مجموعة M.

- **الخطوة الثانية**

نقوم بإيجاد العقد غير المجاورة لـ x ونضعهم في المجموعة NN. نختار من NN العقد التي تمتلك عقد مجاورة مشتركة مع x ونضعهم في المجموعة Q_1. ثم نقوم بما يلي:

- حساب عدد المجاورات المشتركة بين كل عقدة من Q_1 مع x ونجمعهم وليكن المجموع هو S_1. ثم نأخذ مجموع درجات مجاورات كل عقدة من Q_1 وليكن المجموع الكلي لدرجات مجاورات العقد في Q_1 هو S_2.
- نختار y غير المجاورة لـ x والتي تمتلك أكبر عدد من العقد المجاورة المشتركة مع x.

- **الخطوة الثالثة**

في هذه الخطوة نقوم بما يلي:

- نضيف y إلى P_1. ثم نقوم بإيجاد مجاورات y بالنسبة إلى P_1.
- نضيف العقد الأخرى من NN إلى P_1، مع مراعاة أخذ العقد التي تمتلك أكبر عدد من العقد المجاورة المشتركة مع x. نوجد مجاورات العقد بالنسبة لـ P_1.

• الخطوة الرابعة

إذا أصبحت x تجاور كل العقد التي لم يتم إضافتها إلى P_1، نقوم بإضافة x إلى P_1 وإيجاد مجاوراتها بالنسبة لـ P_1. نستمر بتكرار الخطوات السابقة واستثناء كل عقدة تمت إضافتها إلى P_1 حتى يتم إضافة كل العقد إلى P_1.

• الخطوة الخامسة

نكتب مصفوفة التجاور للبيان G_1 وفق ترتيب العقد في P_1. إذا كان البيان يحوي على عرى وتمت إضافة عقد جديدة له يتم حذف هذه العقد من المتجهة عند كتابة المصفوفة. نكتب المصفوفة للبيان بالنسبة للمتجهة مع مراعاة وجود العرى.

• الخطوة السادسة

ننتقل إلى G_2 ونختار عقدة x' ذات الدرجة الأعلى في G_2 مع مراعاة ما يلي:

- نحسب درجة x' يجب أن تكون مساويه لدرجة x المختارة في البيان G_1. مجموع درجات مجاوراتها لها نفس مجموع درجات مجاورات x.
- إذا وجد أكثر من عقدة لها نفس درجة x' نضعهم في مجموعة M'، في حال كانت عدد العقد الموجودة في M' لا يساوي عدد العقد الموجودة في M يكون البيانين G_1 و G_2 غير متماثلين.
- نوجد مجاورات x' بالنسبة إلى P_2. يجب أن تكون مجاورات x' بالنسبة إلى P_2 مساويه لمجاورات x بالنسبة للعقد الموجودة في P_1.
- نقوم بإيجاد العقد التي لا تجاور x' ونضعهم في المجموعة NN'. يجب أن يكون عدد العقد NN' يساوي عدد العقد في NN.
- نقوم بإيجاد درجات العقد في NN' ونقارنها بدرجات العقد في NN (على سبيل المثال: إذا وجد في NN عقدتين درجتهما 5 يجب أن يكون في NN' عقدتين درجتهما 5).

- نقوم بإيجاد العقد غير المجاورة لـ x' والتي تمتلك عقد مجاورة مشتركة مع x' ونضعهم في المجموعة Q_2.
- نقارن عدد العقد في Q_1 مع عدد العقد في Q_2 ويجب أن يكون $Q_1=Q_2$. نقوم بحساب عدد العقد المشتركة بين كل عقدة من Q_2 مع x' ونجمعهم وليكن المجموع هو S'_1. يجب أن يكون $S'_1=S_1$.
- نأخذ مجموع درجات مجاورات كل عقدة من Q_2 وليكن المجموع الكلي لدرجات كل العقد المجاورة للعقد في Q_2 هو S'_2. يجب أن يكون $S_2=S'_2$. إذا لم يوجد أي عقدة في البيان الثاني تحقق الشروط السابقة كلها يكون البيانين غير متماثلين.

● الخطوة السابعة

نأخذ العقدة y' غير المجاورة لـ x' والتي تمتلك أكبر عدد من العقد المجاورة المشتركة مع x'. نراعي ما يلي:

- أن تكون y' لها نفس درجة العقدة y التي تم إيجادها في الخطوة 2.
- أن تكون مجموع درجات مجاورات y' لها نفس مجموع درجات مجاورات y.
- أن يكون مجموع درجات مجاورات العقد غير المجاورة لـ y' وتشترك معها بعقد مجاورة مساوي لمجموع درجات مجاورات العقد التي لا تجاور y وتشترك معها بعقد مجاورة. بعد ذلك نوجد مجاورات y' بالنسبة إلى P_2. يجب أن تكون مجاورات y' بالنسبة إلى P_2 مساويه لدليل مجاورات y بالنسبة للعقد الموجودة في P_1 والتي تم إيجادها في الخطوة الثالثة.

في حال عدم وجود عقدة تحقق الشروط السابقة في G_2 يكون G_1 و G_2 غير متماثلين.

● الخطوة الثامنة

في هذه الخطوة نضيف y' إلى P_2. ثم نضيف العقد في NN' في حال وجودها مع مراعاة الشروط الأربعة المذكورة في الخطوة السابعة ونضيفها بالترتيب إلى P_2. تقارن العقدة المراد حذفها وإضافتها إلى الخانة i في P_2 مع العقدة المضافة في الخانة i في P_1.

● الخطوة التاسعة

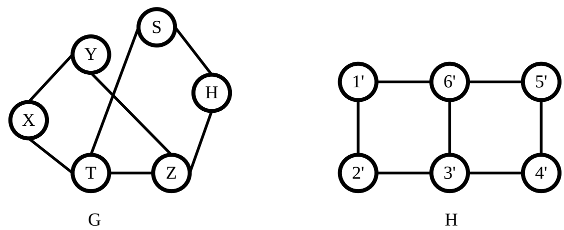
إذا أصبحت العقدة x' مجاورة لكل عقد G_2، نختزلها ونضيفها إلى P_2 ونعود للخطوة السادسة. نكرر الخطوات من السادسة إلى التاسعة حتى يتم اختزال كل عقد البيان G_2 وإضافتها إلى P_2.

•الخطوة العاشرة

نكتب مصفوفة التجاور لـ G_2 وفق ترتيب العقد في P_2. إذا كانت مصفوفة التجاور لـ G_1 تساوي مصفوفة التجاور للبيان G_2 يكون البيانين متماثلين. أما إذا كانت مصفوفة التجاور للبيانين غير متساوتين يكون البيانين غير متماثلين.

ملاحظة(2)

نبدأ بوضع العقد في المتجهة من الدليل رقم 1. عندما لا تجاور العقدة أي من العقد المضافة التي تسبقها في المتجهة نقول إن مجاوراتها هي 0.



الشكل 2 البيانيان H و G.

مثال (1)

أثبت تماثل البيانين H و G المبينين في الشكل (2).

سنعمل على إثبات التماثل وفقاً لخطوات الخوارزمية المقترحة.

- **الخطوة الأولى**

نضع P_1 متجهة فارغة. نبدأ في البيان G نجد أن العقد ذات الدرجة الأكبر هي $M_1=\{T,Z\}$، نختار العقدة T.

- **الخطوة الثانية**

العقد غير المجاورة لـ T هي $NN_1=\{Y,H\}$. نختار من NN_1 العقد التي تمتلك عقد مجاورة مشتركة مع T ونضعهم في المجموعة $Q_1=\{Y,W\}$. ثم نقوم بما يلي:

1. نجمع عدد المجاورات المشتركة بين كل عقدة من Q_1 مع T وليكن المجموع $S_1=4$.
2. نحسب مجموع درجات مجاورات كل عقدة من Q_1. فنجد أن المجموع الكلي لدرجات مجاورات العقد في Q_1 هو $S_2=10$.

3. بما أن العقدتين في Q_1 لهما نفس عدد المجاورات المشتركة مع T نختار أي عقدة منهما ولتكن Y.

- **الخطوة الثالثة**

في هذه الخطوة نقوم بما يلي:

1. نضيف Y إلى P_1.
2. مجاورات Y بالنسبة إلى P_1 هي {0}.
3. نضيف الآن العقدة H إلى P_1, مجاوراتها بالنسبة لـ P_1 هي {0}.

- **الخطوة الرابعة**

T تجاور كل العقد التي لم يتم اضافتها إلى P_1. نقوم بإضافة T إلى P_1. مجاورات T بالنسبة لـ P_1 هي {0}. أصبحت المتجهة P_1=[Y,H,T]. نستمر بتكرار الخطوات السابقة واستثناء كل عقدة تمت إضافتها إلى P_1. العقدة ذات الدرجة الأكبر هي Z نأخذ العقد غير المجاورة لـ Z ونجد أنها NN_2={S,X}. نختار من NN_2 العقد التي تمتلك عقد مجاورة مشتركة مع Z ونضعهم في المجموعة Q_2={S,X}. ثم نقوم بالخطوات التالية:

1. مجموع عدد المجاورات المشتركة بين كل عقدة من Q_2 مع Z ونجمعهم. فنجد المجموع هو $S_3=4$.
2. نحسب مجموع درجات مجاورات كل عقدة من Q_2. فنجد أن المجموع الكلي لدرجات مجاورات العقد في Q_2 هو $S_4=10$.
3. بما أن العقدتين في Q_2 لهما نفس عدد المجاورات المشتركة مع Z نختار أي عقدة منهما ولتكن X. نضيف X إلى P_1.
4. مجاورات X بالنسبة إلى P_1 هي {2,4}.
5. نضيف الأن العقدة S إلى P_1، مجاوراتها بالنسبة لـ P_1 هي {3,4}.

أصبحت Z عقدة وحيدة بعد إضافة كل العقد إلى P_1. نقوم بإضافة Z إلى P_1. مجاورات Z بالنسبة لـ P_1 هي {2,3,4}. أصبحت المتجهة P_1=[Y,H,T,X,S,Z] بالتالي أضفنا كل العقد إلى P_1.

- **الخطوة الخامسة**

مصفوفة التجاور للبيان G وفق ترتيب العقد في P_1 هي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **الخطوة السادسة**

ننتقل إلى البيان H، نضع P_2 متجهة فارغة. نجد أن العقد ذات الدرجة الأكبر هي $M'_1=\{3',6'\}$ نلاحظ أن عدد العقد في M_1 يساوي عدد العقد M'_1. نختار عقدة من M'_1 ولتكن $3'$ ونتحقق من الشروط التالية:

1. درجة العقدة $3'$ تساوي درجة العقدة T المختارة في البيان G_1. مجموع درجات مجاورات العقدة $3'$ هي 7 تساوي مجموع درجات مجاورات T.
2. مجاورات $3'$ بالنسبة إلى P_2 هي $\{0\}$ وتساوي مجاورات T بالنسبة لـ P_1.
3. مجموعة العقد التي لا تجاور $3'$ $NN'_1=\{1',5'\}$. نلاحظ أن عدد العقد في NN'_1 يساوي عدد العقد في NN_1.
4. درجات العقد في NN'_1 تساوي درجات العقد في NN_1.
5. مجموعة العقد غير المجاورة لـ $3'$ والتي تمتلك عقد مجاورة مشتركة مع $3'$ هي $Q'_1=\{1',5'\}$.
6. عدد العقد في Q'_1 يساوي عدد العقد في Q_1. نجمع عدد العقد المشتركة بين كل عقدة من Q'_1 مع $3'$ وليكن المجموع هو $S'_1=4$. نلاحظ أن $S'_1=S_1$.
7. المجموع الكلي لدرجات مجاورات كل عقدة من Q'_1 هو $S'_2=10$. نلاحظ أن $S_2=S'_2$.

- **الخطوة السابعة**

بما أن كل العقد في Q'_1 لها نفس عدد المجاورات المشتركة مع $3'$ بالتالي نختار أي عقدة من Q'_1 ولتكن $5'$ ونتحقق من الشروط التالية:

1. العقدة $5'$ لها نفس درجة العقدة Y في البيان G.

2. مجموع درجات مجاورات '5 هي 5 وتساوي مجموع درجات مجاورات Y.
3. العقد غير المجاورة لـ '5 وتشترك معها بعقد مجاورة هي {'1',3}. مجموع درجات مجاورات هذه العقد هو 12 ويساوي مجموع درجات مجاورات العقد التي لا تجاور Y وتشترك معها بعقد مجاورة.
4. مجاورات '5 بالنسبة لـ P_2 هي {0}. نلاحظ أن مجاورات '5 بالنسبة إلى P_2 تساوي مجاورات Y بالنسبة لـ P_1.

تحقق العقدة '5 كل الشروط بالتالي نختارها وننتقل إلى الخطوة الثامنة.

- **الخطوة الثامنة**

نضيف '5 إلى P_2. ثم ننتقل إلى العقدة '1 ونتحقق من الشروط المذكورة في الخطوة السابعة نلاحظ أن العقدة '1 لها نفس درجة العقدة H في البيان G. مجموع درجات مجاورات العقدة '1 هي 5 وتساوي مجموع درجات مجاورات العقدة H. العقد غير المجاورة لـ '1 وغير المضافة للمتجهة وتشترك مع '1 بعقد مجاورة هي {'3}. مجموع درجات مجاورات هذه العقد هو 7 ويساوي مجموع درجات مجاورات العقد التي لا تجاور H وتشترك معها بعقد مجاورة. مجاورات '1 بالنسبة لـ P_2 هي {0}. نلاحظ أن مجاورات '1 بالنسبة إلى P_2 تساوي مجاورات H بالنسبة لـ P_1. بالتالي نضيف '1 إلى P_2.

- **الخطوة التاسعة**

العقدة '3 مجاورة لكل عقد البيان G_2 غير المضافة إلى P_2، بالتالي نضيفها إلى P_2. أصبحت المتجهة كما يلي P_2=['5','1',3']. ونعود للخطوة السادسة. نكرر الخطوات من السادسة إلى التاسعة مع استثناء العقد المضافة في P_2. العقدة ذات الدرجة الأكبر الأن هي '6 نتحقق من الشروط التالية:

1. درجة العقدة '6 تساوي درجة العقدة Z المختارة في البيان G_1. مجموع درجات مجاورات العقدة '6 هي 7 تساوي مجموع درجات مجاورات Z.
2. مجاورات '6 بالنسبة إلى P_2 هي {2,3,4} تساوي مجاورات Z بالنسبة لـ P_1.
3. مجموعة العقد التي لا تجاور '6 هي NN'_2={'2',4'}. نلاحظ أن عدد العقد في NN'_2 يساوي عدد العقد في NN_2.

4. درجات العقد في NN'_2 تساوي درجات العقد في NN_2.
5. نقوم بإيجاد العقد غير المجاورة لـ '6 والتي تمتلك عقد مجاورة مشتركة مع '6 ونضعهم في المجموعة $Q'_2=\{2',4'\}$.
6. عدد العقد في Q'_2 يساوي عدد العقد في Q_2. نجمع عدد العقد المشتركة بين كل عقدة من Q'_2 مع '6 وليكن المجموع هو $S'_3=4$. نلاحظ $S'_3=S_3$.
7. مجموع درجات مجاورات كل عقدة من Q'_2 هو $S'_4=10$. نلاحظ أن $S_4=S'_4$.

بما أن كل العقد في Q'_2 لها نفس عدد المجاورات المشتركة مع '6 بالتالي نختار أي عقدة من Q'_2 ولتكن '2 ونتحقق من الشروط:

1. العقدة '2 لها نفس درجة العقدة X في البيان G.
2. مجموع درجات مجاورات '2 هي 5 وتساوي مجموع درجات مجاورات X.
3. العقد غير المجاورة لـ '2 وتشترك معها بعقد مجاورة هي {'4',6}. مجموع درجات مجاورات هذه العقد هو 12 ويساوي مجموع درجات مجاورات العقد التي لا تجاور X وتشترك معها بعقد مجاورة.
4. مجاورات '2 بالنسبة لـ P_2 هي {3,4}. نلاحظ أن مجاورات '2 بالنسبة إلى P_2 لا تساوي مجاورات X بالنسبة لـ P_1. بالتالي لا يمكن اختيارها ننتقل إلى اختبار العقدة '4. العقدة '4 لها نفس درجة العقدة X في البيان G. مجموع درجات مجاورات العقدة '4 هي 5 وتساوي مجموع درجات مجاورات العقدة X. العقد غير المجاورة لـ '4 وتشترك معها بعقد مجاورة هي {'2',6}. مجموع درجات مجاورات هذه العقد هو 12 ويساوي مجموع درجات مجاورات العقد التي لا تجاور X وتشترك معها بعقد مجاورة. مجاورات '4 بالنسبة لـ P_2 هي {2,4}. نلاحظ أن مجاورات '4 بالنسبة إلى P_2 تساوي مجاورات X بالنسبة لـ P_1.

تحقق العقدة '4 كل الشروط بالتالي نختارها ونضيفها إلى المتجهة P_2. ننتقل الان إلى العقدة '2 ونتحقق من الشروط التالية:

1. العقدة '2 لها نفس درجة العقدة S في البيان G.
2. مجموع درجات مجاورات العقدة '2 هي 5 وتساوي مجموع درجات مجاورات S.

3. العقد غير المجاورة لـ '2 وتشترك معها بعقد مجاورة هي {'6}. مجموع درجات مجاورات هذه العقد هو 7 ويساوي مجموع درجات مجاورات العقد التي لا تجاور S وتشترك معها بعقد مجاورة.
4. مجاورات '2 بالنسبة لـ P_2 هي {3,4}. نلاحظ أن مجاورات '2 بالنسبة إلى P_2 تساوي مجاورات S بالنسبة لـ P_1. بالتالي نضيفها إلى P_2. لم يتبقى لدينا إلا '6 نضيفها إلى P_2 وأصبحت كالتالي P_2=[5',1',3',4',2',6'].

- **الخطوة العاشرة**

مصفوفة التجاور للبيان H بالنسبة لـ P_2 هي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن مصفوفتي التجاور للبيانين H و G متساويتين بالتالي البيانين متماثلين.

4.3 تعقيد الخوارزمية

من الخطوة 1 في الخوارزمية إلى الخطوة 26 التعقيد يكون بالشكل التالي: بفرض أن عدد عقد البيان هي n. نحتاج إلى $O(n)$ لتحديد العقدة x، التي لها أكبر درجة في البيان. اختزال جميع العقد غير المجاورة لـ x، التي تكمن بالبحث عن العقدة v مع العدد الأكبر من المجاورات المشتركين مع x هو $O(n^2)$، ومنه يكون تعقيد القسم الأول هو: $T_1 = O(n^2) * O(n) = O(n^3)$.

من الخطوة 27 إلى الخطوة 58 يكون التقعيد بالشكل التالي: نحتاج إلى $O(n)$ لتحديد العقدة x' التي لها أكبر درجة بالإضافة إلى $O(n)$ لمقارنة مجاورات x' بالنسبة لـ P_2 مع مجاورات x بالنسبة لـ P_1. في أسوأ الحالات سوف نقوم بـ n مقارنة. نقوم بمقارنة واحدة لمجموع درجات مجاورات x مع مجموع درجات مجاورات x'. اختزال جميع العقد غير المجاورة لـ x'، التي تكمن بالبحث عن العقدة v' مع العدد الأكبر من المجاورات المشتركين مع x' هو $O(n^2)$، ومنه يكون تعقيد القسم الثاني هو: $T_2 = O(n^2) * O(n) * O(n) = O(n^4)$.

تعقيد المقارنة بين مصفوفتين التجاور للبيانين هي $O(n^2)$. التعقيد الكلي للخوارزمية هو:
$\cdot T_1 + T_2 + O(n^2) = O(n^3) + O(n^4) + O(n^2) = O(n^4)$

4.4 الاعمال ذات الصلة

لجأ الباحثون إلى تطوير العديد من الخوارزميات، التي تثبت تماثل وعدم تماثل صفوف خاصة من البيانات. نذكر بعض من هذه الخوارزميات:

1. قدم Weinberg خوارزمية تختبر تماثل البيانات المستوية والمرتبطة من الدرجة 3. تقوم الخوارزمية بحساب ترميز (code) لكل من البيانين. إذا كان الترميز للبيان الأول مساوياً للترميز في البيان الثاني نقول أن البيانين متماثلين. التعقيد الزمني لخوارزمية Weinberg هو $O(n^2)$. تم تطوير هذه الخوارزمية وتوسيعها من قبل Hopcroft و Tavjan فأصبحت الخوارزمية تختبر تماثل البيانات المستوية وبتعقيد زمني O(n logn). الخوارزمية ذات تعقيد زمني جيد لكنها تقتصر على البيانات المستوية [11].
2. استخدم الباحثين المشي الكمومي (Quantum Walk) كنموذج جديد للحساب الكمومي، من أجل اكتشاف البيانات المتماثلة وتحسين التعقيد الزمني مقارنة بنموذج الحساب الكلاسيكي(Classical Computation Model). لكن الخوارزميات المستوحاة من الكم لا تعمل بشكل جيد وفي بعض الاحيان تتوقف عن العمل في البيانات المنتظمة. لذلك في [5] اقترح الباحثين خوارزمية MapEff التي تعتمد على استخدام المشي الكمي في الوقت المنفصل (DTQW)، ذلك من أجل تحسين دقة الكشف عن تماثل البيانات المنتظمة.
3. استهدفت إحدى الخوارزميات البيانات غير الموجهة حيث عملت على إيجاد التماثل من خلال بناء البيان المعطى كبيان متعدد المستويات. الخوارزمية فعالة وذات تعقيد زمني هو $O(n^4)$. لكن اقتصرت الخوارزمية فقط على البيانات غير الموجهة المنتظمة [7].
4. في [12] تم اقتراح خوارزمية متعددة الحدود تثبت تماثل البيانات غير الموجهة، حيث تعمل الخوارزمية على إيجاد تطبيق التقابل بين البيانين G_1 و G_2 من خلال اختيار عقدة v وبناء بيان موجة مساعد للبيان الأول $\vec{G}_1(v)$، ثم اختيار عقدة u من البيان G_2 وبناء بيان موجة مساعد $\vec{G}_2(u)$. أخيراً تقوم الخوارزمية بمقارنة خصائص العقد

لـ $\vec{G}_1(v)$ مع $\vec{G}_2(u)$ وتحديد أزواج العقد ذات الخصائص المتساوية لنحصل على دالة التماثل تدريجياً، وحذف تلك العقدتين من $\vec{G}_1(v)$ و $\vec{G}_2(u)$. يتم تكرار العملية حتى نحصل على جميع أزواج العقد المقابلة. تعقيد الخوارزمية هو $O(n^5)$ لكنها لا تعمل إلا على البيانات البسيطة.

5. في [10] تم إيجاد خوارزمية حدودية تثبت تماثل أي بيانين غير موجهين في وقت حدودي وتنفذ وفق الخطوات التالية:

- الدخل: يتم إدخال مصفوفتي التجاور للبيانين المراد اختبار تماثلهما. في البداية نقارن عدد العقد وعدد الأضلاع للبيانين. ثم نقوم بتجميع العقد التي لها نفس الدرجة ونضعهم في صف. عدد الصفوف في المصفوفتين يجب أن يكون نفسه. إذا كانت جميع الثوابت السابقة متساوية للمصفوفتين نكمل وننتقل للخطوة الثانية. يتم تمثيل المصفوفتين في حقول كما في الجدول الموضح في الشكل 4. يتضمن هذا الجدول الحقول التالية: (I) حقل vertex الذي يمثل عقد البيانين، (II) حقل d_1 يحتوي الصفوف التي تنتمي إليه العقد المقابلة في البيان الأول، (III) حقل d_2 يحتوي على الصفوف التي تنتمي إليها العقد المقابلة في البيان الثاني، (IV) حقل Res يحتوي على العقد من البيان الثاني المقابلة للعقد في البيان الأول، (V) حقل yes يحتوي 1 إذا وجدنا مقابل للعقدة في البيان الأول، (VI) حقل Attach هو حقل الارتباط وله أهمية في مقارنة العقد، حيث أنه بمجرد العثور على عقدة مقابلة من البيان الثاني للعقدة في البيان الأول فإنه يجب أن تتوافق جميع العقد المتجاورة لكلا العقدتين مع بعضها البعض.
- المعالجة: تقوم دالة التماثل بالعثور على جميع العقد المقابلة إذا كان البيانين متماثلين. تعمل دالة التماثل كما يلي:

تختار العقدة الأولى من الصف الأول وتقارنها بعقد من نفس الصف في البيان الثاني. تسمى العقدة المختارة بالعقدة الرئيسية. تتم مقارنة كل حقل من حقول العقدة الرئيسية والعقدة المجاورة لها. جميع العناصر المجاورة للعقدة المختارة من البيان الثاني تتوافق مع العقدة الرئيسية لذلك لا تتم المقارنة مرة

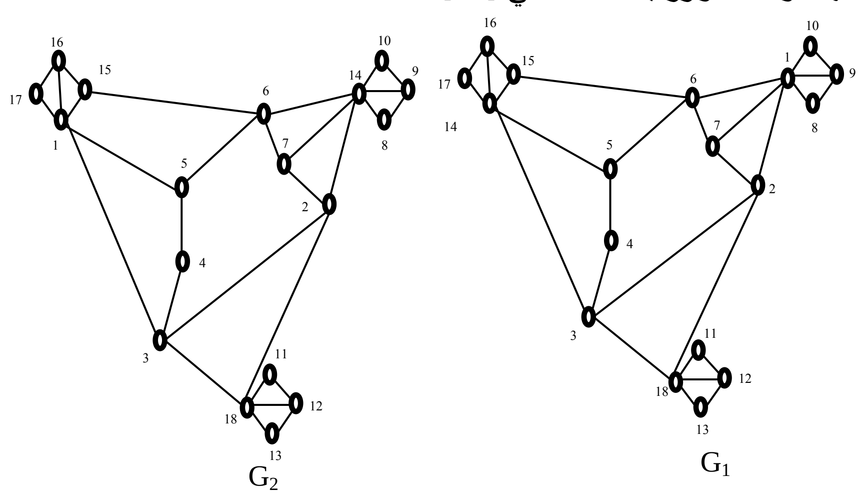
أخرى. إذا لم يتم العثور على عقدة تحقق المطلوب عندئذ البيانين غير متماثلين، وإلا نكمل حتى نحصل على جميع العقد المقابلة. نغير مواضع العقد في المصفوفة الثانية وفقاً لمقابلاتها في المصفوفة الأولى ونقارن المصفوفتين.

- الخرج: البيانين متماثلين أو لا.

لكن بعد ما قمنا بتطبيق الخوارزمية المقدمة في [10] على المثال (2) وجدنا أنها غير صالحة لكل البيانات غير الموجهة حيث أعطت نتيجة خاطئة.

مثال (2)

ليكن لدينا البيانين G_1 وG_2 المتماثلين والموضحين في الشكل (3). سنحاول إثبات تماثلهما وفقاً للخوارزمية المقدمة في [10].



الشكل (3) البيانين G_1 و G_2 المتماثلين

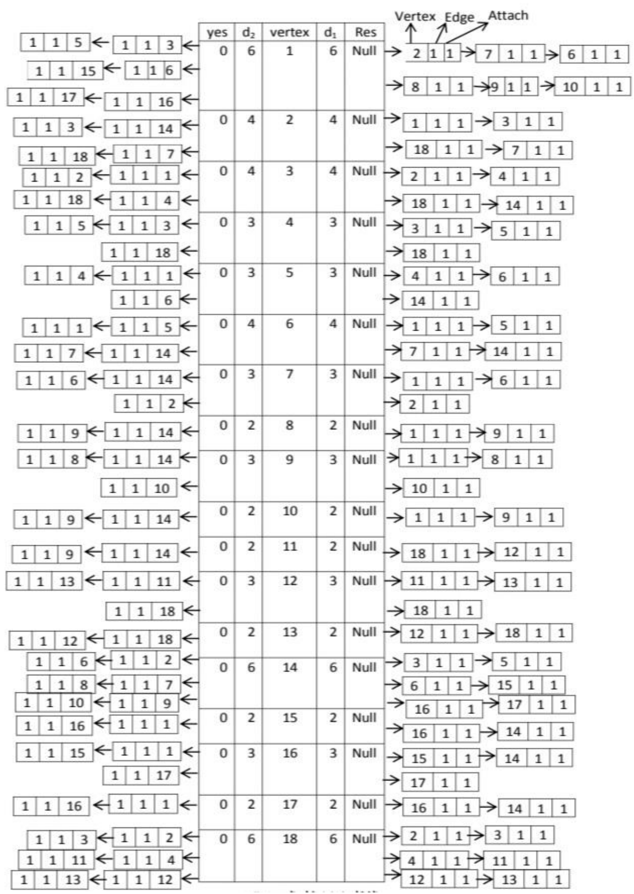
مصفوفة التجاور للبيان $\mathbf{G_1}$ تعطى كما يلي:

$$
\begin{array}{r}
1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\14\\15\\16\\17\\18
\end{array}
\begin{bmatrix}
0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
$$

مصفوفة التجاور للبيان G_2 هي:

$$\begin{bmatrix}
0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

يتم تمثيل المصفوفتين تبعاً للخوارزمية في [10] كما موضح في الشكل (4).



الشكل (4) تمثيل المصفوفتين كما في [10]

إن عدد العقد والأضلاع والصفوف في البيان G_1 يساوي عدد العقد والأضلاع والصفوف في البيان G_2. لنطبق دالة التماثل ولنبدأ في البيان G_1 ولتكن العقدة 1 هي العقدة الرئيسية. إن العقد التي لها نفس صف العقدة 1 في البيان G_2 هي 18 و14 و1 لنختار منها العقدة 18. إن حقول العقدة 1 وحقول مجاوراتها تطابق حقول العقدة 18 وحقول مجاوراتها. بالتالي العقدة 18 تقابل العقدة 1.

ننتقل إلى العقدة 2 ولتكن هي العقدة الرئيسية. إن العقد التي تنتمي إلى صف العقدة 2 في G_2 هي 2 و3 و6 لنختار منها العقدة 3. حيث نلاحظ أن جميع حقول العقدة 3 وحقول مجاوراتها تطابق حقول العقدة 2 وحقول مجاوراتها. بالتالي العقدة 2 تقابل العقدة 3.

ننتقل إلى العقدة 3 ولتكن هي العقدة الرئيسية. إن العقد التي تنتمي إلى صف العقدة 3 في البيان G_2 هي 2 و6. لنختار منها العقدة 2. إن جميع حقول العقدة 2 وحقول مجاوراتها تطابق حقول العقدة 3 وحقول مجاوراتها. بالتالي العقدة 3 تقابل العقدة 2.

ننتقل إلى العقدة 4 ولتكن هي العقدة الرئيسية. إن العقد التي تنتمي إلى صف العقدة 4 في البيان G_2 هي 4 و 5 و7و 9 و12 و 16 لنختار منها العقدة 5. إن جميع حقول العقدة 5 وحقول مجاوراتها تطابق حقول العقدة 4 وحقول مجاوراتها. بالتالي العقدة 4 تقابل العقدة 5.

نكمل بنفس الطريقة فنحصل على المقابلات التالية:

$$1 \to 18, 2 \to 3, 3 \to 2, 4 \to 5, 5 \to 4, 6 \to 6, 7 \to 7, 8 \to 13, 9 \to 12,$$
$$10 \to 11, 11 \to 10, 12 \to 9, 13 \to 8, 14 \to 14, 15 \to 15, 16 \to 16, 17 \to 17, 18 \to 1$$

يتم إعادة تمثيل الشكل (3) بحيث نملئ الحقل yes بالرقم 1 والحقل Res بالعقد التي أوجدنا أنها تقابل العقد في البيان G.

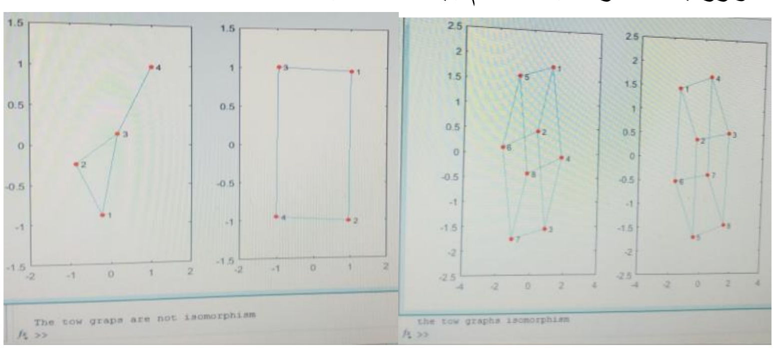
إن مصفوفة تجاور G_2 مع مراعاة ترتيب العقد في المصفوفة تبعاً لمقابلاتها هي:

$$\begin{array}{c} 18\\3\\2\\5\\4\\6\\7\\13\\12\\11\\10\\9\\8\\14\\15\\16\\17\\1 \end{array}
\begin{bmatrix}
0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن مصفوفة التجاور للبيان G_2 مع مراعاة ترتيب العقد فيها تبعاً لمقابلاتها في البيان G_1 لا تساوي مصفوفة التجاور للبيان G_1. بالتالي يكون البيانين غير متماثلين وهذه نتيجة خاطئة ومنه الخوارزمية لا تعطي نتيجة صحيحة لكل البيانات غير الموجهة. في المقابل يستطيع القارئ بكل سهولة تطبيق خوارزميتنا المقترحة على البيانين والتي عرضناها في الفقرة 4.2 والتأكد من تماثلهما.

5 الاستنتاجات والتوصيات

تم في هذا البحث تقديم خوارزمية جديدة لتماثل البيانات، تختبر تماثل أو عدم تماثل أي بيانين غير موجهين. الاعتماد على مقارنة مصفوفتي التجاور للبيانين مكّننا من التحقق من التماثل. قمنا بحساب التعقيد الزمني للخوارزمية المقترحة وهي حدودية بتعقيد $O(n^4)$. بالإضافة إلى ذلك قمنا باختبار الخوارزمية على العديد من البيانات ومحاكاتها على برنامج الماتلاب. يوصى بمحاولة تطوير الخوارزمية لتصبح قادرة على اختبار تماثل كافة أنواع البيانات ضمن تعقيد حدودي. يبين الشكل (5) بعض من التطبيق العملي للخوارزمية المقترحة باستخدام بيئة الماتلاب.



الشكل (5) التطبيق العملي للخوارزمية المقترحة باستخدام بيئة الماتلاب.

6 المراجع

[1] KLUS S; SAHAI T, 2017 - A Spectral Assignment Approach for the Graph Isomorphism Problem**.** *Information and Inference: A Journal of the IMA*, **7**(4), 689-706.

[2] BABAI L, 2018 - Group, Graphs, Algorithms: The Graph Isomorphism Problem. *Rio de Janeiro*.4, 3337-3354.

[3] KOBLER J; SCHÖNING U.; TORÁN J., 2012 - The Graph Isomorphism Problem, Its Structural Complexity. Springer Science and Business Media.

[4] BABAI L; DAWAR A.; SCHWEITZER P.; TORAN J., 2016 - The Graph Isomorphism Problem. Dagstuhl Reports ,**5**, *Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik*, 17 Pages.

[5] LIU K; ZHANG Y.; LU K.; WANG X.; TIAN G., 2019- MapEff: An Effective Graph Isomorphism Algorithm Based on the Discrte-Time Quantum Walk. Entropy, **21**(**6**), 16 Pages.

[6]TAKAPOUI R; BOYD S, 2016 - Linear Programming Heuristics for the Graph Isomorphism Problem. ArXiv Preprint ArXiv:1611.00711, 17 Pages.

[7] FORTIN S, 1996 - The Graph Isomorphism Problem. Department of Computing Science The University Of Alberta, 25 Pages.

[8] MENDIVELSO J, KIM S., ELNIKETY S.; HE Y.; HWANG S-W.; PINZON Y., 2013 - Solving Graph Isomorphism Using Parameterized Matching. International Symposium on String Processing and Information Retrieval, Springer, Cham, 230-242.

[9]ALKHANIFUS K, 2010- Graph Theory. Publication of Damascus University Faculty of science, Syria, 285 page.

[10] RIAZ K., SIKANDER M., KHIYAL H., ARSHAD M, 2005. Matrix equality: An application of graph isomorphism. Information Technology Journal, 4(1), 6 Pages.

[11] THIERAUF T., WAGNER F, 2010. The isomorphism problem for planar 3-connected graphs is in unambiguous logspace. Theory of computing systems, 47(3), 655-673.

[12] PLOTNIKOV A. D. 2018. Searching isomorphic graphs. arXiv preprint arXiv:1802.03611.17 Pages.

[13] JAMES A., 2017. Notes on Computational Complexity Theory. CPSC 468/568, Spring 2020.227 Pages.

[14]CORDELLA L. P., FOGGIA P., SANSONE C., VWNTO M. 2004. A (sub) graph isomorphism algorithm for matching large graphs. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 26(10), 1367-1372.

[15] CARLETTI V., FOGGIA P., SAGESE A., VENTO M. 2017. Challenging the time complexity of exact subgraph isomorphism for huge and dense graphs with VF3. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 40(4), 804-818.
[16] MCKAYK B. D., PIPERNO, A. 2014. Practical graph isomorphism, II. Journal of Symbolic Computation, 60, 94-112.