الشروط المقاربية والتمثيلات التكاملية الموافقة للحل في الجسم الترموديناميكي المرن دقيق الاستقطاب (E-N:6) بوجود حمول حجمية ومصادر حرارية

د. منتجب الحسن[†] حسام شقوف [‡]

ملخص البحث:

يتعلق البحث بالنموذج الرياضي للجسم الصلب دقيق الاستقطاب ذي ست درجات حرية (ثلاث إزاحات وثلاثة توجهات مستقلة عن هذه الإزاحات) والمتماثل المناحي والمتجانس والمعين بستة ثوابت مادية، وذي التشوهات الصغيرة، ويشغل في لحظة البدء، منطقة ثنائية الترابط، محدودة في الفضاء الإقليدي R^3، والمدروس من قبل الباحثين Eringen [2] وNowacki [1]، والذي اختصاراً سنرمز له بالرمز (E−N:6). فيه هذا البحث، تم أولاً، كتابة نموذج لامي الرياضي للجسم المذكور بوجود حقلي قوى حجمية وعزوم حجمية وحقل مصادر حرارية. بعدها باستخدام طريقة كمونات نوفاتسكي المكتوبة بتقنية إغناتشاك− ديشليفيتش، تم كتابة المسالة لأجل الجزء الكموني والجزء الدوار لحقلي الإزحات والدورانات ولأجل الحقل الحراري. وبافتراض أن كافة المسببات والنتائج تتغير توافقياً مع الزمن وبتردد $(\omega > 0)$، كتبنا المعادلات الموافقة، لأجل سعات:الجزء الكموني والجزء الدوار لكلٍ من حقلي الإزاحات والدورنات، ولأجل سعة الحقل الحراري. بعدها تم عرض مبرهنتين هامتين من أجل مؤثر هيلمهولتز البسيط ومن أجل جداء مؤثري هيلمهولتز البسيطين. في النهاية تمت مناقشة الشروط المقاربية من نوع Sommerfeld[3]للجزء الكموني والجزء الدوار لسعات الإزاحات والدراونات وكذلك لسعة

[†] أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

[‡] طالب ماجستير في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث.

الكلمات المفتاحية: الشروط المقاربية من نمط سومرفيلد لحل الجسم المرن دقيق الاستقطاب، بوجود حمول حجمية ومصادر حرارية.

الحرارة، واستنتجنا التمثيلات التكاملية المقابلة لهذه الشروط. وتم انهاء البحث بعدد من المسائل للمناقشة.

The radiation conditions and the corresponding integral representation for the solution of the micropolar elastic body with no vanishing body loads and heat source harmonically varying in time

Dr.Mountajab Al-Hasan † & **Husam Shakkouf** ‡

Abstract

This paper concerns the mathematical, linear model of elastic, homogeneous and isotropic micropolar body, of considerable microstructure and of infinitesimal elastic and microelastic deformations, and of sixth material constants in the frame of the linear theory of micropolar elasticity; proposed by Eringen [2] and Nowacki [1],and shortly called (E-N:6).In this paper, first we introduce the mathematical Lame model for the considerable body in the case of the body loads and heat sources existence. Then,by using the Nowaki's potential method of Ignaczak-Dyszlewicz technique, we write the problem for the potential and rotational parts of the displacement and rotation vector fields and for the temperature field. Next,by assuming that all the causes and conclusions varying harmoni-cally in time with frequency $(\omega > 0)$ we derive the corresponding equ-ations for the amplitudes of the potential and rotational parts of the displacement and rotation vector fields and for the amplitude of the temperature field. Then, we introduce two important theorems for the simple and double Helmholtz differential operator. Next, we discuss the Sommerfeld radiation conditions for the amplitudes of the poten-tial and rotational parts of the displacement and rotation vector fields and for the amplitude of the temperature field, and we conclude the corresponding integral representations for these amplitudes. Finally, we end the paper by suggesting several problems for discussion.

† Professor At Department of Mathematics – Faculty of Science – Al–Baath University.
‡ PH.D Student in Department of Mathematics–Faculty of Science–Al–Baath University.

Key words: The Sommerfeld radiation conditions for the solution of micropolar elastic body with no vanishing body loads and heat sources.

1.مقدمة :

قام العديد من الباحثين مثل Kupradse و Ignaczak وغيرهم باستنتاج الشروط المقاربية من نوع Sommerfeld للحل الموافق لجسم Hooke المرن والمتجانس والمتماثل المناحي المرونة وذلك في حال انعدام الحمول الحجمية[4,10]. بعدها قام نفس الباحث Ignaczak بمناقشة ذلك للحالة الحرارية للجسم في حالة انعدام الحمول حجمية والمصادر الحرارية. وفي [5,6] تم استنتاج الشروط المقاربية والتمثيلات التكاملية للحل لأجل جسم Hooke المرن المتجانس، والمتماثل المناحي، ولأجل الجسم المرن الاستقطابي، المتجانس والمتماثل المناحي من نوع Koiter–Mindlin ، وذلك عندما تكون الحمول الحجمية متغيرة توافقيا مع الزمن. عودة لعام 2001 فقد تم في [8]،استنتاج الشروط المقاربية والتمثيلات التكاملية الموافقة لأجل الحل للجسم الترموديناميكي المرن دقيق الاستقطاب (E–N:6) المتجانس والمتماثل المناحي، في حال غياب الحمول الحجمية والمصادر الحرارية.

2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى مناقشة الشروط المقاربية والتمثيلات التكاملية الموافقة لأجل الحل للجسم (E–N:6) المتجانس والمتماثل المناحي، بوجود حمول حجمية ومصادر حرارية، متغيرة توافقياً مع الزمن.

3.أهمية البحث:

استنتاج معادلات الحلول للجسم المعتبر بشكل أقل تعقيدا وهو مايمكن الاستفادة منه في مخبر صناعات المواد

4. طرق لبحث:

سنستنتج الشروط المقاربية للحل للجسم المعتبر والتمثيلات التكاملية الموافقة وذلك باتباع تعميم للطريقة المستخدمة في[8].لهذا الغرض نعتبر الجسم الترموديناميكي المرن دقيق الاستقطاب (E–N:6) المتجانس والمتماثل المناحي وذي ستة ثوابت مادية $(\mu > 0 , \lambda > 0 , \alpha > 0, \beta > 0 , \gamma > 0, \varepsilon > 0)$ والذي حالتة اللاغرانجية Ω المنطقة بسيطة الترابط وغير محدودة $\Omega := R^3 - N(O,a)$ حيث $N(O, a)$ هي الكرة المفتوحة في R^3، ذات المركز O، ونصف القطر a. كما سنفترض أن كافة المقاطع التنسورية

الفيزيائية التي تصف الحالة الترموديناميكية للجسم تملك مركبات ملساء بالقدر الكافي، تتبع لنقاط Ω وللزمن t . فيمايلي من أجل متطلبات البحث سنعرض معادلات Lame للجسم (E−N:6) ومعادلات كمونات Nowacki−Ignaczak−Dyszlewicz، الموافقة، والمعادلات المستقلة المتعلقة بها [8,11].

أ) إن معادلات Lame الترموديناميكية للجسم المرن دقيق الاستقطاب (E−N:6)، هي جملة المعادلات الاشتقاقية، الجزئية التالية، المحققة في $]0,\infty[\times\Omega$:

$$\square_2\hat{\mathbf{u}}+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathbf{grad}\;\mathbf{div}\,\hat{\mathbf{u}}+2\alpha\,\mathbf{curl}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\nu_{\mathrm{T}}\,\mathbf{grad}\,\hat{\theta}+\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{0} \quad (3.1)$$

$$\square_4\hat{\boldsymbol{\varphi}}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathbf{grad}\;\mathbf{div}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}+2\alpha\,\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{Y}}=\mathbf{0} \quad (3.2)$$

$$\mathrm{D}\,\hat{\theta}-\eta_0\,\mathbf{div}\,\dot{\hat{\mathbf{u}}}=-\frac{\hat{\mathrm{Q}}}{\kappa} \quad (3.3)$$

حيث: $\square_2=(\mu+\alpha)\vec{\nabla}^2-\rho\partial_t^2$ و $\square_4=(\gamma+\varepsilon)\vec{\nabla}^2-4\alpha-J\partial_t^2$ و $\vec{\nabla}^2$ هو مؤثر Laplace المتجهي؛ الذي يعطى بالعلاقة: $\vec{\nabla}^2=\mathbf{grad}\;\mathbf{div}-\mathbf{curl}\;\mathbf{curl}$، المؤثر: $\mathrm{D}=\nabla^2-\frac{1}{\kappa}\partial_t$، حيث: $\nabla^2=\mathbf{div}\;\mathbf{grad}$ هو مؤثر Laplace السلمي، ∂_t المشتق الجزئي الزمني الأول؛ $\partial_t^2=\partial_t\,\partial_t$، رمز النقطة، أيضاً يدل على المشتق الجزئي الزمني الأول، الرمزان: ρ و J ، على الترتيب، يرمزان للكتلة الحجمية، والعطالة الدورانية للجسم المعتبر، وهما مقداران ثابتان كون الجسم متجانس، كما أنهما موجبان. فيماسبق الرمزان $\hat{\mathbf{u}}$ و $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$، على الترتيب، يدلان على مقطع الإزاحة ومقطع التوجه، المتجهيان، الرمز: $\hat{\theta}=\mathrm{T}-\mathrm{T}_0$ هو المقطع الحراري، والذي يدل على تغير الحرارة المطلقة T عن حرارة الحالة الطبيعية: T_0 للجسم. إضافةً لما تقدم ذكره،الرمزان: $\hat{\mathbf{X}}$و $\hat{\mathbf{Y}}$، على الترتيب، هما مقطع القوة الحجمية ومقطع العزم الحجمي، المتجهيان. الرمز: $\hat{\mathrm{Q}}$ هو مقطع المصادر الحرارية السلمي. الرمز: $\nu_{\mathrm{T}}=(2\mu+3\lambda)\alpha_{\mathrm{T}}$ ، حيث: α_{T} هو معامل التمدد الخطي الحراري للجسم، الرمزان: $\kappa=\lambda_0/c_{\varepsilon}$، $\eta_0=\nu_{\mathrm{T}}\mathrm{T}_0/\lambda_0$، حيث: λ_0 هو معامل التوصيل الحراري للجسم و c_{ε} هي الحرارة النوعية للجسم خلال تشوه ثابت له، كما أن: كما أن: $\kappa>0\,,\;\;\nu_{\mathrm{T}}/\eta_0>0$. فيمايلي سنعتمد مبرهنة Stockes−Helmholtz التالية، المكتوبة بتقنية Ignaczak−Dyszlewicz [11].

مبرهنة: إذا كان $\vec{U}$ مقطعاً متجهياً معرفاً ومستمراً في المنطقة بسيطة الترابط Ω عندئذ يمكن كتابة هذا المقطع بالشكل التالي: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{(p)} + \mathbf{u}_{(s)}$

حيث:
$$\mathbf{div\ u}_{(s)} = 0\ ,\ \mathbf{curl\,u}_{(p)} = \mathbf{0}$$

بهذا الشكل يمكن كتابة المقاطع المتجهية المجهولة: $\hat{\mathbf{u}}\,,\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ والمعلومة: $\hat{\mathbf{X}}\,,\,\hat{\mathbf{Y}}$ بالشكل التالي في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_{(p)} + \hat{\mathbf{u}}_{(s)}\ \ ,\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(p)} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(s)} \tag{3.4}$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}_{(p)} + \hat{\mathbf{X}}_{(s)}\ \ ,\ \hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{Y}}_{(p)} + \hat{\mathbf{Y}}_{(s)} \tag{3.5}$$

حيث:

$$\mathbf{curl}\ \hat{\mathbf{u}}_{(p)} = \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{curl}\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(p)} = \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{div}\ \hat{\mathbf{u}}_{(s)} = 0\ ,\ \mathbf{div}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(s)} = 0$$
$$\mathbf{curl}\ \hat{\mathbf{X}}_{(p)} = \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{curl}\ \hat{\mathbf{Y}}_{(p)} = \mathbf{0}\ ,\ \mathbf{div}\ \hat{\mathbf{X}}_{(s)} = 0\ ,\ \mathbf{div}\hat{\mathbf{Y}}_{(s)} = 0$$

وللحصول، الآن، على معادلات تحريك الجسم بكمونات Nowacki تقنية Ignaczak وDyszlewicz، نتبع الآتي [11]. نعوض (3.4) و(3.5) في (3.1) و(3.2) و(3.3)، فنحصل على المعادلات التالية المحققة في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$\begin{aligned} &\square_2 \hat{\mathbf{u}}_{(p)} + (\lambda+\mu-\alpha)\mathbf{grad\ div}\ \hat{\mathbf{u}}_{(p)} - \nu_T \mathbf{grad}\,\hat{\theta} + \\ &+ \square_2 \hat{\mathbf{u}}_{(s)} + 2\alpha\ \mathbf{curl}\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(s)} = -\hat{\mathbf{X}}_{(p)} - \hat{\mathbf{X}}_{(s)}\ , \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\square_4 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(p)} + (\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathbf{grad\ div}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(p)} + \square_4 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(s)} + \\ &+ 2\alpha\ \mathbf{curl}\ \hat{\mathbf{u}}_{(s)} = -\hat{\mathbf{Y}}_{(p)} - \hat{\mathbf{Y}}_{(s)}\ , \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\mathrm{D}\,\hat{\theta} - \eta_0 \mathbf{div}\dot{\hat{\mathbf{u}}}_{(p)} = -\frac{\hat{\mathrm{Q}}}{\kappa} \tag{3.8}$$

بما أن:
$$\mathbf{grad\ div}\hat{\mathbf{u}}_{(p)} = \vec{\nabla}^2 \hat{\mathbf{u}}_{(p)}\ ,\ \mathbf{grad\ div}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(p)} = \vec{\nabla}^2 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(p)}$$

تصبح المعادلتان (3.6) و(3.7) بالشكل التالي في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$\square_1 \hat{\mathbf{u}}_{(p)} - \nu_T \mathbf{grad}\,\hat{\theta} + \square_2 \hat{\mathbf{u}}_{(s)} + 2\alpha\ \mathbf{curl}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(s)} = -\hat{\mathbf{X}}_{(p)} - \hat{\mathbf{X}}_{(s)}\ , \tag{3.9}$$

$$\square_3 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(p)} + \square_4 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(s)} + 2\alpha\ \mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{u}}_{(s)} = -\hat{\mathbf{Y}}_{(p)} - \hat{\mathbf{Y}}_{(s)}\ , \tag{3.10}$$

حيث: $\square_1 = (\lambda+2\mu)\vec{\nabla}^2 - \rho\partial_t^2\ ,\ \square_3 = (\beta+2\gamma)\vec{\nabla}^2 - 4\alpha - J\partial_t^2$

ولنلاحظ الآن الآتي. تتحقق المعادلات (3.9) و (3.10) و (3.8)، إذا تحققت المعادلات المتجهية التالية في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$\square_1 \hat{\mathbf{u}}_{(\mathrm{p})} - \nu_{\mathrm{T}} \mathbf{grad}\, \hat{\theta} = -\hat{\mathbf{X}}_{(\mathrm{p})}\,,\quad \mathrm{D}\,\hat{\theta} - \eta_0 \mathbf{div}\, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_{(\mathrm{p})} = -\frac{\hat{\mathrm{Q}}}{\kappa}\,,$$
$$\square_3 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(\mathrm{p})} = -\hat{\mathbf{Y}}_{(\mathrm{p})}\,, \tag{3.11}$$
$$\square_2 \hat{\mathbf{u}}_{(\mathrm{s})} + 2\alpha\, \mathbf{curl}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(\mathrm{s})} = -\hat{\mathbf{X}}_{(\mathrm{s})}\,,\quad \square_4 \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(\mathrm{s})} + 2\alpha\, \mathbf{curl}\, \hat{\mathbf{u}}_{(\mathrm{s})} = -\hat{\mathbf{Y}}_{(\mathrm{s})}$$

نسمي المعادلات (3.11) بمعادلات كمونات Nowacki تقنية Ignaczak و Dyszlewicz للجسم الترموديناميكي المرن دقيق الاستقطاب (E–N:6). إن المعادلتين الأولى والثانية في (3.11) هما جملة معادلتين بالمجهولين $\hat{\mathbf{u}}_{(\mathrm{p})}$ و $\hat{\theta}$، والمعادلة الثالثة في (3.11) هي معادلة مستقلة بـ $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(\mathrm{p})}$، أما المعادلتين الأخيرتين في (3.11) فهما جملة معادلتين بالمجهولين $\hat{\mathbf{u}}_{(\mathrm{s})}$ و $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(\mathrm{s})}$. فيمايلي من أجل متطلبات البحث، سنفصل المعادلات المرتبطة السابقة.

أولاً: فصل جملة المعادلتين $(3.11)_{1,2}$: لهذا الغرض نضع:

$$\square_1 = (\lambda + 2\mu)\nabla^2 - \rho\partial_t^2\,,\ \mathbf{D} = \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{\kappa}\partial_t\,,$$
$$\mathbf{D}_2 = \square_1 \mathbf{D} - \eta_0 \nu_{\mathrm{T}} \partial_t \vec{\nabla}^2\,, \mathrm{D}_2 = \square_1 \mathrm{D} - \eta_0 \nu_{\mathrm{T}} \partial_t \nabla^2 \tag{3.12}$$

بتطبيق المؤثر $\mathbf{D}$ على طرفي المعادلة $(3.11)_1$ والمؤثر $\square_1$ على طرفي المعادلة $(3.11)_2$ وبالأخذ بعين الاعتبار أن:

$$\mathbf{div}\ \square_1 = \square_1\ \mathbf{div}\,,\quad \mathbf{D}\,\mathbf{grad} = \mathbf{grad}\,\mathrm{D} \tag{3.13}$$

من ثم بالاستفادة من المعادلتين $(3.11)_{1,2}$ مرة أخرى، نحصل بعد التبسيط والاختصار على المعادلتين المستقلتين التاليتين، المحققتين في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$\mathbf{D}_2 \hat{\mathbf{u}}_{(\mathrm{p})} = -\mathbf{D}\,\hat{\mathbf{X}}_{(\mathrm{p})} - \frac{\nu_{\mathrm{T}}}{\kappa}\mathbf{grad}\,\hat{\mathrm{Q}}\,,\ \mathrm{D}_2\hat{\theta} = -\frac{1}{\kappa}\square_1 \hat{\mathrm{Q}} - \eta_0\partial_t\,\mathbf{div}\,\hat{\mathbf{X}}_{(\mathrm{p})} \tag{3.14}$$

وهما المعادلتان المستقلتان من أجل كل من $\hat{\mathbf{u}}_{(\mathrm{p})}$ و $\hat{\theta}$، والمحققتان في $\Omega \times]0,\infty[$.

ثانياً: فصل جملة المعادلتين $(3.11)_{4,5}$: لهذا الغرض نطبق المؤثر $\mathbf{curl}$ على كلتا المعادلتين الأخيرتين في (3.11)، نحصل على المعادلتين التاليتين في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$\Box_2 \,\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{u}}_{(\mathrm{s})} - 2\alpha\vec{\nabla}^2\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(\mathrm{s})} = -\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}_{(\mathrm{s})},\ \Box_4 \,\mathbf{curl}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(\mathrm{s})} - 2\alpha\vec{\nabla}^2\hat{\mathbf{u}}_{(\mathrm{s})} = -\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{Y}}_{(\mathrm{s})}$$

الأن،بتطبيق المؤثر $\Box_4$ على المعادلة الرابعة في (3.11)، والمؤثر $\Box_2$ على المعادلة الخامسة في (3.11)، من ثم بالاستفادة من المعادلتين السابقتين، نحصل بعد الاختصار والتبسيط على المعادلتين المستقلتين التاليتين المحققتين في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$(\Box_2\Box_4 + 4\alpha^2\vec{\nabla}^2)\hat{\mathbf{u}}_{(\mathrm{s})} = -\Box_4\hat{\mathbf{X}}_{(\mathrm{s})} + 2\alpha\,\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{Y}}_{(\mathrm{s})} \tag{3.15}$$

$$(\Box_2\Box_4 + 4\alpha^2\vec{\nabla}^2)\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(\mathrm{s})} = 2\alpha\,\mathbf{curl}\,\hat{\mathbf{X}}_{(\mathrm{s})} - \Box_2\hat{\mathbf{Y}}_{(\mathrm{s})} \tag{3.16}$$

ومن أجل متطلبات البحث أيضاً، تلزمنا دراسة الحالة الخاصة التالية؛ المسماة بالحالة التوافقية، حيث المسببات والنتائج تتغير توافقياً مع الزمن بتردد $\omega > 0$. في هذه الحالة، تأخذ المسببات الشكل التالي في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$\begin{gathered}\hat{\mathbf{X}}_{(\mathrm{p})} = \mathbf{X}_{(\mathrm{p})}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \qquad \hat{\mathbf{Y}}_{(\mathrm{p})} = \mathbf{Y}_{(\mathrm{p})}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\\ \hat{\mathbf{X}}_{(\mathrm{s})} = \mathbf{X}_{(\mathrm{s})}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \qquad \hat{\mathbf{Y}}_{(\mathrm{s})} = \mathbf{Y}_{(\mathrm{s})}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\\ \hat{\mathrm{Q}} = \mathrm{Q}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\end{gathered} \tag{3.17}$$

وتأخذ النتائج الشكل التالي في $\Omega \times]0,\infty[$:

$$\begin{gathered}\hat{\mathbf{u}}_{(\mathrm{p})} = \mathbf{u}_{(\mathrm{p})}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(\mathrm{p})} = \boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{p})}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\\ \hat{\mathbf{u}}_{(\mathrm{s})} = \mathbf{u}_{(\mathrm{s})}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(\mathrm{s})} = \boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{s})}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\\ \hat{\theta} = \theta(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\end{gathered} \tag{3.18}$$

وعندئذٍ تأخذ المعادلات السابقة الشكل التالي في Ω:

المعادلات (3.11) تأخذ الشكل التالي في Ω:

$$(\vec{\nabla}^2 + \sigma_1^2)\mathbf{u}_{(\mathrm{p})} - m\ \mathbf{grad}\,\theta = -\frac{\mathbf{X}_{(\mathrm{p})}}{\lambda + 2\mu}, \tag{3.19}$$

$$(\vec{\nabla}^2 + q)\theta + \frac{q\varepsilon}{m}\ \mathbf{div}\ \mathbf{u}_{(\mathrm{p})} = -\frac{\mathrm{Q}}{\kappa}, \tag{3.20}$$

$$(\vec{\nabla}^2 + \hat{\sigma}_3^2)\boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{p})} = -\frac{\mathbf{Y}_{(\mathrm{p})}}{\beta + 2\gamma}, \tag{3.21}$$

$$(\vec{\nabla}^2 + \sigma_2^2)\mathbf{u}_{(\mathrm{s})} + s\ \mathbf{curl}\ \boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{s})} = -\frac{\mathbf{X}_{(\mathrm{s})}}{\mu + \alpha}, \tag{3.22}$$

$$(\vec{\nabla}^2+\hat{\sigma}_4^2)\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}+p\ \mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}=-\frac{\mathbf{Y}_{(s)}}{\gamma+\varepsilon} \tag{3.23}$$

حيث:

$$\sigma_1=\frac{\omega}{c_1},\ \sigma_2=\frac{\omega}{c_2},\ \sigma_3=\frac{\omega}{c_3},\ \sigma_4=\frac{\omega}{c_4}, \tag{3.24}$$

$$c_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}\ ,\ \mathrm{c}_2=\sqrt{\frac{\mu+\alpha}{\rho}},\ \mathrm{c}_3=\sqrt{\frac{\beta+2\gamma}{J}},\ \mathrm{c}_4=\sqrt{\frac{\gamma+\varepsilon}{J}}, \tag{3.25}$$

$$s=\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\ ,p=\frac{2\alpha}{\gamma+\varepsilon},\ q=\frac{i\,\omega}{\kappa},\ i=\sqrt{-1}\ ,\ m=\frac{\nu_{\mathrm{T}}}{\lambda+2\mu},\ \varepsilon=m\,\kappa\eta_0, \tag{3.26}$$

$$\tau_0^2=\frac{4\alpha}{\beta+2\gamma},\nu_0^2=2p\ ,\hat{\sigma}_3^2=\sigma_3^2-\tau_0^2>0,\ \hat{\sigma}_4^2=\sigma_4^2-\nu_0^2>0, \tag{3.27}$$

وإذا وضعنا:

$$\vec{\Box}_k^2=\vec{\nabla}^2+k^2,\ \Box_k^2=\nabla^2+k^2 \tag{3.28}$$

فالمعادلات المستقلة (3.14) و(3.15) و(3.16) تأخذ في هذه الحالة الشكل التالي في Ω:

$$\Box_{\mu_1}^2\Box_{\mu_2}^2\,\mathbf{u}_{(p)}=-\frac{1}{\lambda+2\mu}(\vec{\nabla}^2+q)\mathbf{X}_{(p)}-\frac{m}{\kappa}\mathbf{grad}\ \mathrm{Q}, \tag{3.29}$$

$$\Box_{\mu_1}^2\Box_{\mu_2}^2\,\theta=-\frac{1}{\kappa}(\nabla^2+\sigma_1^2)\mathrm{Q}+\frac{q\,\kappa\eta_0}{\lambda+2\mu}\mathbf{div}\,\mathbf{X}_{(p)}, \tag{3.30}$$

$$\Box_{\lambda_1}^2\Box_{\lambda_2}^2\,\mathbf{u}_{(s)}=-\frac{1}{\mu+\alpha}(\nabla^2+\hat{\sigma}_4^2)\mathbf{X}_{(s)}+\frac{s}{\gamma+\varepsilon}\mathbf{curl}\ \mathbf{Y}_{(s)}, \tag{3.31}$$

$$\Box_{\lambda_1}^2\Box_{\lambda_2}^2\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}=\frac{p}{\gamma+\varepsilon}\mathbf{curl}\ \mathbf{X}_{(s)}-\frac{\lambda+2\mu}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}(\vec{\nabla}^2+\sigma_2^2)\mathbf{Y}_{(s)} \tag{3.32}$$

حيث λ_1 و λ_2 هي أصفار كثير الحدود من الدرجة الرابعة:

$$P_4(\lambda)\equiv\lambda^4-(\sigma_2^2+\hat{\sigma}_4^2+ps)\,\lambda^2+\sigma_2^2\,\hat{\sigma}_4^2 \tag{3.33}$$

أما μ_1 و μ_2 هي أصفار كثير الحدود من الدرجة الرابعة:

$$Q_4(\mu)\equiv\mu^4-[\sigma_1^2+q\,(1+\varepsilon)]\,\mu^2+q\,\sigma_1^2 \tag{3.34}$$

ينتج عن المتراجحة$_4$ (3.27 وعن(3.24) و(3.25) و(3.26)، أن λ_1 و λ_2 تملك القيم الحقيقية [8,9,11]:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_2^2 + \hat{\sigma}_4^2 + ps \pm \sqrt{\Delta_1})^{1/2} \tag{3.35}$$

حيث:

$$\sqrt{\Delta_1} = [(\hat{\sigma}_4 - \sigma_2)^2 + ps\ ]^{1/2}[(\hat{\sigma}_4 + \sigma_2)^2 + ps\ ]^{1/2} \tag{3.36}$$

في الوقت الذي تأخذ فيه μ_1 و μ_2 قيماً عقدية من الشكل:

$$\begin{gathered} \mu_1 = \alpha_1 + i\,\beta_1\ ,\ \mu_2 = \alpha_2 + i\,\beta_2\ , \\ \beta_1 \geq 0, \qquad \beta_1 \geq 0 \end{gathered} \tag{3.37}$$

تملك مربعاتها الشكل التالي:

$$\mu_{1,2}^2 = \frac{1}{2}[\ \sigma_1^2 + q\,(1+\varepsilon) \pm \sqrt{\Delta_2}\ ] \tag{3.38}$$

حيث:

$$\Delta_2 = [\ \sigma_1^2 + q\,(1+\varepsilon)\ ]^2 - 4q\,\sigma_1^2 \tag{3.39}$$

وإذا وضعنا:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{\lambda + 2\mu}(\vec{\nabla}^2 + q)\mathbf{X}_{(\mathrm{p})} + \frac{m}{\kappa}\,\mathbf{grad}\ \mathrm{Q}\,,\ \mathbf{B} = \frac{\mathbf{Y}_{(\mathrm{p})}}{\beta + 2\gamma}\,, \tag{3.40}$$

$$\mathrm{A}_2 = \frac{1}{\kappa}(\nabla^2 + \sigma_1^2)\mathrm{Q} - \frac{q\,\kappa\eta_0}{\lambda + 2\mu}\,\mathbf{div}\,\mathbf{X}_{(\mathrm{p})}\,, \tag{3.41}$$

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{\mu + \alpha}(\nabla^2 + \hat{\sigma}_4^2)\,\mathbf{X}_{(\mathrm{s})} - \frac{s}{\gamma + \varepsilon}\,\mathbf{curl}\ \mathbf{Y}_{(\mathrm{s})}\,, \tag{3.42}$$

$$\mathbf{C}_2 = -\frac{p}{\gamma + \varepsilon}\mathbf{curl}\ \mathbf{X}_{(\mathrm{s})} + \frac{\lambda + 2\mu}{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}(\vec{\nabla}^2 + \sigma_2^2)\mathbf{Y}_{(\mathrm{s})} \tag{3.43}$$

فتأخذ المعادلات المستقلة -(3.32)-(3.29) و (3.21) الشكل التالي في Ω:

$$\square_{\mu_1}^2 \square_{\mu_2}^2 \mathbf{u}_{(\mathrm{p})} = -\mathbf{A}_1,\ \square_{\mu_1}^2 \square_{\mu_2}^2 \theta = -\mathrm{A}_2\,, (\vec{\nabla}^2 + \hat{\sigma}_3^2)\boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{p})} = -\mathbf{B} \tag{3.44}$$

$$\square_{\lambda_1}^2 \square_{\lambda_2}^2 \mathbf{u}_{(\mathrm{s})} = -\mathbf{C}_1\,,\quad \square_{\lambda_1}^2 \square_{\lambda_2}^2 \boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{s})} = -\mathbf{C}_2 \tag{3.45}$$

قبل الدخول في الفقرة القادمة التي تعطينا النتائج والمناقشة تلزمنا المبرهنة التالية التي تعطينا تحويلان تكامليان حجميان سطحيان لأجل مؤثر هيلمهولتز الاشتقاقي ولأجل بيهلمهولتز الاشتقاقي في منطقة ثنائية الترابط يشغلها جزء من الجسم في اللحظة الابتدائية $t = 0$. لهذا الغرض نرمز بـ S_a لسطح الكرة $N\,(o,a)$ ولتكن $\xi \in \Omega$ نقطة

مادية ما تقع خارج السطح S_a ولنأخذ r كبير بالقدر الكافي بحيث أن الكرة المفتوحة $N(\xi, r)$ التي مركزها ξ ونصف قطرها r تحتوي الكرة المفتوحة $N(o,r)$. أخيراً لنرمز بـ S_r لسطح الكرة المفتوحة $N(\xi, r)$ وبـ Ω_r للمنطقة ثنائية الترابط في R^3 والمحصورة بين السطحين S_a و S_r والتي يشغلها جزء من الجسم (E–N:6) في لحظة البدء. عندئذ لدينا المبرهنة التالية [7]:

مبرهنة [7]:

1) لتكن لدينا معادلة هيلمهولتز الاشتقاقية المتجهية ومعادلة هيلمهولتز الاشتقاقية السلمية، التاليتين المحققين في المنطقة ثنائية الترابط Ω_r:

$$\Box_C^2\, \mathrm{U}(\mathbf{x}) = -\mathrm{A}(\mathbf{x}) \tag{3.46}$$

$$\Box_C^2\, \mathbf{U}(\mathbf{x}) = -\mathbf{E}(\mathbf{x}) \tag{3.47}$$

حيث $\mathrm{U}(\mathbf{x})$ دالة سلمية مجهولة و $\mathrm{A}(\mathbf{x})$ دالة سلمية معلومة و $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ مقطع متجهي مجهول و $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ مقطع متجهي معلوم. عندئذ المعادلة الأولى تكافئ المعادلة التكاملية التالية في Ω_r:

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(\xi) = {} & \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_r} \mathrm{A}(\mathbf{x})\,\frac{e^{iCR}}{R}\, d\,\Omega_r\ (\mathbf{x}) \ + \\ & + \frac{1}{4\pi}\left\{ \Big(\int_{S_a} + \int_{S_r}\Big)\Big[\ \frac{e^{iCR}}{R}\ \frac{\partial\, \mathrm{U}}{\partial n}(\mathbf{x}) \right. \\ & \left. -\ \mathrm{U}(\mathbf{x})\ \frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{iCR}}{R}\Big)\ \Big]\ d\,S\,(\mathbf{x}) \right\}\end{aligned} \tag{3.48}$$

حيث: $\mathbf{x}, \xi \in \Omega_r$; $R = |\mathbf{x} - \xi|$ ،

أما المعادلة المتجهية (3.47) فهي تكافئ المعادلة التكاملية التالية في Ω_r:

$$\mathbf{U}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_r} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \frac{e^{iCR}}{R} \, d\,\Omega_r\,(\mathbf{x}) \; + $$
$$+ \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\int_{S_a} + \int_{S_r} \right) \left[\; \frac{e^{iCR}}{R} \, \frac{\partial\, \mathbf{U}}{\partial\, n}(\mathbf{x}) \right. \right. \tag{3.49}$$
$$\left. \left. - \; \mathbf{U}(\mathbf{x}) \, \frac{\partial}{\partial\, n} \left(\frac{e^{iCR}}{R} \right) \right] d\,S\,(\mathbf{x}) \right.$$

في (3.48) و(3.49)، لدينا: $d\,\Omega_r\,(\mathbf{x}) = d\,x_1 d\,x_2 d\,x_3$ $(\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3))$،

أما $\frac{\partial\,\mathrm{U}}{\partial\, n}$ فهو مشتق الدالة U وفق متجه واحدة الناظم $\mathbf{n} \equiv (n_1\,, n_2\,, n_3)$، على كلٍ

من السطحين S_a و S_r، والموجَّه نحو داخل S_a (في حال كونه ناظماً لـ S_a)، ونحو

خارج S_r (في حال كونه ناظماً لـ S_r)؛ $\left(\frac{\partial\,\mathrm{U}}{\partial\, n} = \mathbf{n}\,.\,\mathbf{grad}\,\mathrm{U} = n_i \, \frac{\partial\,\mathrm{U}}{\partial x_i} \right)$ ،

وإذا فرضنا: $\mathbf{U} \equiv (U_1\,, U_2\,, U_3)$ ، فإن: $\frac{\partial\,\mathbf{U}}{\partial\, n} := \left(\frac{\partial U_1}{\partial\, n}, \frac{\partial U_2}{\partial\, n}, \frac{\partial U_3}{\partial\, n} \right)$ ، كما

أن الأدلة اللاتينية... $i\,,j\,,k\,,$ تأخذ القيم 1 , 2 , 3 ، حيث نستخدم رموز Einstein.

2) لتكن لدينا معادلة بيهيلمهولتز الاشتقاقية السلمية ومعادلة بيهيلمهولتز الاشتقاقية المتجهية، التاليتين المحققين في المنطقة ثنائية الترابط Ω_r:

$$\square^2_{C_1} \square^2_{C_2} \, \mathrm{V}(\mathbf{x}) = -\,\mathrm{F}(\mathbf{x}) \tag{3.50}$$

$$\square^2_{C_1} \square^2_{C_2} \, \mathbf{V}(\mathbf{x}) = -\,\mathbf{L}(\mathbf{x}) \tag{3.51}$$

حيث $\mathrm{V}(\mathbf{x})$ دالة سلمية مجهولة و $\mathrm{F}(\mathbf{x})$ دالة سلمية معلومة و $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ مقطع متجهي مجهول و $\mathbf{L}\,(\mathbf{x})$ مقطع متجهي معلوم. عندئذ المعادلة الأولى تكافئ المعادلة التكاملية التالية في Ω_r:

$$\begin{aligned} 4\pi(C_1^2-C_2^2)\,\mathrm{V}(\mathbf{y}) &= \int_{\Omega_r} \frac{e^{iC_1 R}-e^{iC_2 R}}{R}\,\mathrm{F}(\mathbf{x})\,d\Omega_r(\mathbf{x}) + \\ &+\Big(\int_{S_a}+\int_{S_r}\Big)\Big\{\frac{e^{iC_1 R}-e^{iC_2 R}}{R}\,\frac{\partial}{\partial n}[\square_C^2\mathrm{V}(\mathbf{x})] \\ &-[\square_C^2\mathrm{V}(\mathbf{x})]\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{iC_1 R}-e^{iC_2 R}}{R} + \\ &+\frac{C_2^2 e^{iC_2 R}-C_1^2 e^{iC_1 R}}{R}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}(\mathbf{x}) \\ &-\mathrm{V}(\mathbf{x})\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{C_2^2 e^{iC_2 R}-C_1^2 e^{iC_1 R}}{R}\Big\}\,dS(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3.52}$$

أما معادلة بيهلمهولتز الاشتقاقية المتجهية (3.51)، فتكافئ في Ω_r المعادلة التكاملية المتجهية التالية:

$$\begin{aligned} 4\pi(C_1^2-C_2^2)\,\mathbf{V}(\mathbf{y}) &= \int_{\Omega_r} \frac{e^{iC_1 R}-e^{iC_2 R}}{R}\,\mathbf{L}(\mathbf{x})\,d\Omega_r(\mathbf{x}) + \\ &+\Big(\int_{S_a}+\int_{S_r}\Big)\Big\{\frac{e^{iC_1 R}-e^{iC_2 R}}{R}\,\frac{\partial}{\partial n}[\square_C^2\mathbf{V}(\mathbf{x})] \\ &-[\square_C^2\mathbf{V}(\mathbf{x})]\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{iC_1 R}-e^{iC_2 R}}{R} + \\ &+\frac{C_2^2 e^{iC_2 R}-C_1^2 e^{iC_1 R}}{R}\,\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n}(\mathbf{x}) \\ &-\mathbf{V}(\mathbf{x})\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{C_2^2 e^{iC_2 R}-C_1^2 e^{iC_1 R}}{R}\Big\}\,dS(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{3.53}$$

حيث في (3.52) و(3.53): $R=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\ ;\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega_r$ كما أن: $C^2=C_1^2+C_2^2$.

5. النتائج والمناقشة:

أولا: التمثيلات التكاملية في Ω_r لكل من سعات الأجزاء الكمونية والأجزاء الدوارة للازاحات والدورانات، ولسعة الحقل الحراري في الجسم الصلب دقيق الاستقطاب (E−N:6)، عندما تتغير الحقول الفيزيائية توافقياً مع الزمن، حيث الحمول الترموديناميكية غير معدومة.

لإيجاد هذه التمثيلات التكاملية المطلوبة يكفي تطبيق المبرهنة السابقة على المعادلات المستقلة (3.44) و(3.45) لأجل السعات: $\mathbf{u}_{(p)}, \theta, \boldsymbol{\varphi}_{(p)}, \mathbf{u}_{(s)}, \boldsymbol{\varphi}_{(s)}$، وذلك باتباع مايلي.

أ) بتطبيق البند الأول من المبرهنة السابقة على المعادلة $_3$(3.44)، حيث:

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\varphi}_{(p)}, C = \hat{\sigma}_3 \;, \mathbf{E} = \mathbf{B} \tag{4.1}$$

يأخذ التمثيل التكاملي لـ $\boldsymbol{\varphi}_{(p)}$ الشكل التالي في Ω_r:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_{(p)}(\boldsymbol{\xi}) = {} & \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_r} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \frac{e^{i\,\hat{\sigma}_3 R}}{R}\, d\,\Omega_r\,(\mathbf{x}) \; + \\ & + \frac{1}{4\pi} \Big\{ \Big(\int_{S_a} + \int_{S_r} \Big) \Big[\frac{e^{i\,\hat{\sigma}_3 R}}{R} \frac{\partial\, \boldsymbol{\varphi}_{(p)}}{\partial n}(\mathbf{x}) \\ & - \boldsymbol{\varphi}_{(p)}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{i\,\hat{\sigma}_3 R}}{R}\Big) \Big]\, d\,S\,(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{4.2}$$

حيث: $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

ب) أما بتطبيق البند الثاني من المبرهنة على معادلة بيهلمهولتز الاشتقاقية المتجهية $_1$(3.44) المتعلقة بـ $\mathbf{u}_{(p)}$، فنجد:

$$4\pi\,(\mu_1^2-\mu_2^2)\,\mathbf{u}_{(p)}(\mathbf{y}) = \int_{\Omega_r} \frac{e^{i\mu_1 R}-e^{i\mu_2 R}}{R}\,\mathbf{A}_1(\mathbf{x})\,d\Omega_r(\mathbf{x}) +$$
$$+\left(\int_{S_a}+\int_{S_r}\right)\left\{\frac{e^{i\mu_1 R}-e^{i\mu_2 R}}{R}\,\frac{\partial}{\partial n}\left[\Box_C^2\mathbf{u}_{(p)}(\mathbf{x})\right]\right.$$
$$-\left[\Box_C^2\mathbf{u}_{(p)}(\mathbf{x})\right]\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{i\mu_1 R}-e^{i\mu_2 R}}{R} + \tag{4.3}$$
$$+\frac{\mu_2^2 e^{i\mu_2 R}-\mu_1^2 e^{i\mu_1 R}}{R}\,\frac{\partial\,\mathbf{u}_{(p)}}{\partial n}(\mathbf{x})$$
$$\left.-\,\mathbf{u}_{(p)}(\mathbf{x})\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mu_2^2 e^{i\mu_2 R}-\mu_1^2 e^{i\mu_1 R}}{R}\right\}dS(\mathbf{x})$$

وبما أن:

$$\Box_C^2\,\mathbf{u}_{(p)} = (\vec{\nabla}^2+\mu_1^2+\mu_2^2)\,\mathbf{u}_{(p)}\,,\quad \mu_1^2+\mu_2^2=\sigma_1^2+q\,(1+\varepsilon) \tag{4.4}$$

فينتج عن ذلك وعن بحسب (3.19) أن:

$$\Box_C^2\,\mathbf{u}_{(p)} = q\,(1+\varepsilon)\,\mathbf{u}_{(p)} + m\,\mathbf{grad}\,\theta - \frac{\mathbf{X}_{(p)}}{\lambda+2\mu} \tag{4.5}$$

وبذلك فتصبح المعادلة (4.3) بالشكل:

$$4\pi\,(\mu_1^2-\mu_2^2)\,\mathbf{u}_{(p)}(\mathbf{y}) = \int_{\Omega_r} \frac{e^{i\mu_1 R}-e^{i\mu_2 R}}{R}\,\mathbf{A}_1(\mathbf{x})\,d\Omega_r(\mathbf{x}) +$$
$$+\left(\int_{S_a}+\int_{S_r}\right)\left\{\frac{e^{i\mu_1 R}-e^{i\mu_2 R}}{R}\,\frac{\partial}{\partial n}\left[q(1+\varepsilon)\,\mathbf{u}_{(p)}+m\,\mathbf{grad}\,\theta-\frac{\mathbf{X}_{(p)}}{\lambda+2\mu}\right]\right.$$
$$-\left[q(1+\varepsilon)\,\mathbf{u}_{(p)}+m\,\mathbf{grad}\,\theta-\frac{\mathbf{X}_{(p)}}{\lambda+2\mu}\right]\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{i\mu_1 R}-e^{i\mu_2 R}}{R} + \tag{4.6}$$
$$+\frac{\mu_2^2 e^{i\mu_2 R}-\mu_1^2 e^{i\mu_1 R}}{R}\,\frac{\partial\,\mathbf{u}_{(p)}}{\partial n}(\mathbf{x})$$
$$\left.-\,\mathbf{u}_{(p)}(\mathbf{x})\,\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mu_2^2 e^{i\mu_2 R}-\mu_1^2 e^{i\mu_1 R}}{R}\right\}dS(\mathbf{x})$$

ولكن ينتج عن (4.6) وعن العلاقتين [7,11]:

$$\left(\int_{S_a}+\int_{S_r}\right)\left(u\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n}-\mathbf{v}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS(\mathbf{x})=\int_{\Omega_r}\left(u\,\vec{\nabla}^2\mathbf{v}-\mathbf{v}\nabla^2 u\right)d\,\Omega_r\,(\mathbf{x}) \qquad (4.7)$$

$$\nabla^2\left(\frac{e^{i\,k\,R}}{R}\right)=\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)-k^2\,\frac{e^{i\,k\,R}}{R} \qquad (4.8)$$

أن التمثيل التكاملي لـ $\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}$ يملك الشكل الأخير التالي في Ω_r:

$$4\pi(\mu_1^2-\mu_2^2)\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}(\mathbf{y})=\int_{\Omega_r}\{\frac{e^{i\mu_1 R}-e^{i\mu_2 R}}{R}[\mathbf{A}_1-\frac{1}{\lambda+2\mu}\vec{\nabla}^2\,\mathbf{X}_{(\mathrm{p})}]+$$

$$+\frac{1}{\lambda+2\mu}\,\frac{\mu_2^2\,e^{i\mu_2 R}-\mu_1^2\,e^{i\mu_1 R}}{R}\,\mathbf{X}_{(\mathrm{p})}\}\,d\,\Omega_r\,(\mathbf{x})+$$

$$+\left(\int_{S_a}+\int_{S_r}\right)\{\frac{e^{i\mu_1 R}-e^{i\mu_2 R}}{R}\,\frac{\partial}{\partial n}\,[\,q(1+\varepsilon)\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m\,\mathbf{grad}\,\theta\,]$$

$$-[\,q(1+\varepsilon)\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m\,\mathbf{grad}\,\theta\,]\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{e^{i\mu_1 R}-e^{i\mu_2 R}}{R}+$$

$$+\frac{\mu_2^2\,e^{i\mu_2 R}-\mu_1^2\,e^{i\mu_1 R}}{R}\,\frac{\partial\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}}{\partial n}(\mathbf{x})$$

$$-\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}(\mathbf{x})\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\mu_2^2\,e^{i\mu_2 R}-\mu_1^2\,e^{i\mu_1 R}}{R}\}\,dS(\mathbf{x}) \qquad (4.9)$$

ج) أما بتطبيق البند الثاني من المبرهنة على معادلة بيهلمهولتز الاشتقاقية السلمية المتعلقة بـ θ، من ثم بالاستفادة من المعادلة: $(3.44)_2$

$$\Box_C^2\,\theta=(\sigma_1^2+q\,\varepsilon)\,\theta-\frac{q\varepsilon}{m}\,\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}-\frac{\mathrm{Q}}{\kappa} \qquad (4.10)$$

نجد أن التمثيل التكاملي لـ θ يملك الشكل الأخير التالي في Ω_r:

$$4\pi(\mu_1^2-\mu_2^2)\,\theta(\mathbf{y})=\int\limits_{\Omega_r}\{\frac{e^{\,i\,\mu_1 R}-e^{\,i\,\mu_2 R}}{R}[\mathrm{A}_2-\frac{1}{\kappa}\nabla^2\,\mathrm{Q}]+$$

$$+\frac{1}{\kappa}\frac{\mu_2^2\,e^{\,i\,\mu_2 R}-\ \mu_1^2\,e^{\,i\,\mu_1 R}}{R}\ \mathrm{Q}\,\}\,d\,\Omega_r\ (\mathbf{x})+$$

$$+(\int\limits_{S_a}+\int\limits_{S_r})\{\frac{e^{\,i\,\mu_1 R}-\ e^{\,i\,\mu_2 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}[\,(\sigma_1^2+q\,\varepsilon)\,\theta-\frac{q\varepsilon}{m}\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}]$$

$$-\ [\,(\sigma_1^2+q\,\varepsilon)\,\theta-\frac{q\varepsilon}{m}\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}]\ \frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{\,i\,\mu_1 R}-\ e^{\,i\,\mu_2 R}}{R}\ +$$

$$+\ \frac{\mu_2^2\,e^{\,i\,\mu_2 R}-\ \mu_1^2\,e^{\,i\,\mu_1 R}}{R}\ \frac{\partial\ \theta}{\partial n}(\,\mathbf{x}\,)$$

$$-\ \theta(\,\mathbf{x}\,)\ \frac{\partial}{\partial n}\frac{\mu_2^2\,e^{\,i\,\mu_2 R}-\ \mu_1^2\,e^{\,i\,\mu_1 R}}{R}\ \}\,d\,S\,(\mathbf{x})\ , \qquad (4.11)$$

د) أما بتطبيق البند الثاني من المبرهنة على معادلة بيهلمهولتز الاشتقاقية المتجهية المتعلقة بـ $\mathbf{u}_{(\mathrm{s})}$، من ثم بالاستفادة من المعادلة: $(3.45)_1$

$$\Box_C^2\,\mathbf{u}_{(\mathrm{s})}=(\vec{\nabla}^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2)\,\mathbf{u}_{(\mathrm{s})}=$$
$$=(\hat{\sigma}_4^2+ps)\mathbf{u}_{(\mathrm{s})}-s\ \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{s})}-\frac{\mathbf{X}_{(\mathrm{s})}}{\mu+\alpha} \qquad (4.12)$$

نجد أن التمثيل التكاملي لـ $\mathbf{u}_{(\mathrm{s})}$ يملك الشكل الأخير التالي في Ω_r:

$$4\pi(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\mathbf{u}_{(s)}(\mathbf{y})=\int_{\Omega_r}\{\frac{e^{i\lambda_1 R}-e^{i\lambda_2 R}}{R}[\mathbf{C}_1-\frac{1}{\mu+\alpha}\vec{\nabla}^2\mathbf{X}_{(s)}]+$$

$$+\frac{1}{\mu+\alpha}\frac{\lambda_2^2 e^{i\lambda_2 R}-\lambda_1^2 e^{i\lambda_1 R}}{R}\mathbf{X}_{(s)}\}\,d\Omega_r(\mathbf{x})+$$

$$+(\int_{S_a}+\int_{S_r})\{\frac{e^{i\lambda_1 R}-e^{i\lambda_2 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}[(\hat{\sigma}_4^2+ps)\mathbf{u}_{(s)}-s\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}]$$

$$-[(\hat{\sigma}_4^2+ps)\mathbf{u}_{(s)}-s\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}]\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{i\lambda_1 R}-e^{i\lambda_2 R}}{R}+$$

$$+\frac{\lambda_2^2 e^{i\lambda_2 R}-\lambda_1^2 e^{i\lambda_1 R}}{R}\frac{\partial\,\mathbf{u}_{(s)}}{\partial n}(\mathbf{x})$$

$$-\mathbf{u}_{(s)}(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial n}\frac{\lambda_2^2 e^{i\lambda_2 R}-\lambda_1^2 e^{i\lambda_1 R}}{R}\}\,dS(\mathbf{x}) \qquad (4.13)$$

هـ) أما بتطبيق البند الثاني من المبرهنة على معادلة بيهلمهولتز الاشتقاقية المتجهية المتعلقة بـ $\boldsymbol{\varphi}_{(s)}$، من ثم بالاستفادة من المعادلة: (3.45)$_2$

$$\Box_C^2\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}=(\vec{\nabla}^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2)\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}=$$

$$=(\sigma_2^2+ps)\mathbf{u}_{(s)}-p\;\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}-\frac{\mathbf{Y}_{(s)}}{\gamma+\varepsilon} \qquad (4.14)$$

نجد أن التمثيل التكاملي لـ $\boldsymbol{\varphi}_{(s)}$ يملك الشكل الأخير التالي في Ω_r:

$$4\pi(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\boldsymbol{\varphi}_{(s)}(\mathbf{y})=\int_{\Omega_r}\{\frac{e^{i\lambda_1 R}-e^{i\lambda_2 R}}{R}[\mathbf{C}_2-\frac{1}{\gamma+\varepsilon}\vec{\nabla}^2\,\mathbf{Y}_{(s)}]+$$

$$+\frac{1}{\gamma+\varepsilon}\frac{\lambda_2^2\,e^{i\lambda_2 R}-\;\lambda_1^2\,e^{i\lambda_1 R}}{R}\,\mathbf{Y}_{(s)}\,\}\,d\,\Omega_r\,(\mathbf{x})+$$

$$+(\int_{S_a}+\int_{S_r})\{\frac{e^{i\lambda_1 R}-\;e^{i\lambda_2 R}}{R}\;\frac{\partial}{\partial n}[\,(\sigma_2^2+ps)\mathbf{u}_{(s)}-p\;\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}]$$

$$-\;[\,(\sigma_2^2+ps)\mathbf{u}_{(s)}-p\;\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}]\frac{\partial}{\partial n}\;\frac{e^{i\lambda_1 R}-\;e^{i\lambda_2 R}}{R}\;+$$

$$+\;\frac{\lambda_2^2\,e^{i\lambda_2 R}-\;\lambda_1^2\,e^{i\lambda_1 R}}{R}\;\frac{\partial\;\boldsymbol{\varphi}_{(s)}}{\partial n}(\,\mathbf{x}\,)$$

$$-\;\boldsymbol{\varphi}_{(s)}(\,\mathbf{x}\,)\;\frac{\partial}{\partial n}\;\frac{\lambda_2^2\,e^{i\lambda_2 R}-\;\lambda_1^2\,e^{i\lambda_1 R}}{R}\;\}\;d\,S(\mathbf{x})\qquad(4.15)$$

إن التمثيلات التكاملية الخمسة السابقة يمكن كتابتها بالشكل التالي الأكثر اختصاراً في Ω_r :

$$\mathbf{u}_{(p)}(\mathbf{y})=\frac{1}{4\pi(\mu_1^2-\mu_2^2)}[\int_{\Omega_r}\{\frac{e^{i\,\mu_1 R}-e^{i\,\mu_2 R}}{R}[\mathbf{A}_1-\frac{1}{\lambda+2\mu}\vec{\nabla}^2\,\mathbf{X}_{(p)}]$$

$$+\frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\mu_2^2\,e^{i\,\mu_2 R}-\;\mu_1^2\,e^{i\,\mu_1 R}}{R}\,\mathbf{X}_{(p)}\,\}\,d\,\Omega_r\,(\mathbf{x})+$$

$$+(\int_{S_a}+\int_{S_r})d\,S\,(\mathbf{x})\{\frac{e^{i\,\mu_1 R}}{R}\;\frac{\partial}{\partial n}\,[\,(\mu_2^2-\sigma_1^2)\,\mathbf{u}_{(p)}+m\;\mathbf{grad}\,\theta]$$

$$-\,[\,(\mu_2^2-\sigma_1^2)\,\mathbf{u}_{(p)}+m\;\mathbf{grad}\,\theta\,]\;\frac{\partial}{\partial n}\,(\frac{e^{i\,\mu_1 R}}{R})\,\}$$

$$-\,(\int_{S_a}+\int_{S_r})d\,S\,(\mathbf{x})\{\frac{e^{i\,\mu_2 R}}{R}\;\frac{\partial}{\partial n}\,[\,(\mu_1^2-\sigma_1^2)\,\mathbf{u}_{(p)}+m\;\mathbf{grad}\,\theta]$$

$$-\,[\,(\mu_1^2-\sigma_1^2)\,\mathbf{u}_{(p)}+m\;\mathbf{grad}\,\theta\,]\;\frac{\partial}{\partial n}\,(\frac{e^{i\,\mu_2 R}}{R})\quad\}\,]\,,\qquad(4.16)$$

$$\theta(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi(\mu_1^2-\mu_2^2)} [\int_{\Omega_r} \{ \frac{e^{i\mu_1 R} - e^{i\mu_2 R}}{R} [A_2 - \frac{1}{\kappa}\nabla^2 Q] +$$

$$+ \frac{1}{\kappa} \frac{\mu_2^2 e^{i\mu_2 R} - \mu_1^2 e^{i\mu_1 R}}{R} Q \} d\Omega_r (\mathbf{x}) +$$

$$+ (\int_{S_a} + \int_{S_r}) dS(\mathbf{x}) \{ \frac{e^{i\mu_1 R}}{R} \frac{\partial}{\partial n} [(\mu_2^2 - q)\theta - \frac{q\varepsilon}{m} \mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(p)}]$$

$$- [(\mu_2^2 - q)\theta - \frac{q\varepsilon}{m} \mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(p)}] \frac{\partial}{\partial n} (\frac{e^{i\mu_1 R}}{R}) \}$$

$$- (\int_{S_a} + \int_{S_r}) dS(\mathbf{x}) \{ \frac{e^{i\mu_2 R}}{R} \frac{\partial}{\partial n} [(\mu_1^2 - q)\theta - \frac{q\varepsilon}{m} \mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(p)}]$$

$$- [(\mu_1^2 - q)\theta - \frac{q\varepsilon}{m} \mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(p)}] \frac{\partial}{\partial n} (\frac{e^{i\mu_2 R}}{R}) \}], \qquad (4.17)$$

$$\varphi_{(p)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \{ \int_{\Omega_r} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \frac{e^{i\hat{\sigma}_3 R}}{R} d\Omega_r(\mathbf{x}) +$$

$$+ (\int_{S_a} + \int_{S_r}) [\frac{e^{i\hat{\sigma}_3 R}}{R} \frac{\partial \varphi_{(p)}}{\partial n}(\mathbf{x}) \qquad (4.18)$$

$$- \varphi_{(p)}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n} (\frac{e^{i\hat{\sigma}_3 R}}{R})] dS(\mathbf{x}) \}$$

$$\mathbf{u}_{(s)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\Big[\int_{\Omega_r}\Big\{\frac{e^{i\lambda_1 R}-e^{i\lambda_2 R}}{R}\Big[\mathbf{C}_1-\frac{1}{\mu+\alpha}\vec{\nabla}^2\mathbf{X}_{(s)}\Big]$$

$$+\frac{1}{\mu+\alpha}\frac{\lambda_2^2 e^{i\lambda_2 R}-\lambda_1^2 e^{i\lambda_1 R}}{R}\mathbf{X}_{(s)}\Big\}\,d\Omega_r(\mathbf{x})+$$

$$+\Big(\int_{S_a}+\int_{S_r}\Big)\,dS(\mathbf{x})\Big\{\frac{e^{i\lambda_1 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}\big[(\lambda_2^2-\sigma_2^2)\mathbf{u}_{(s)}-s\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}\big]$$

$$-\big[(\lambda_2^2-\sigma_2^2)\mathbf{u}_{(s)}-s\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}\big]\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{i\lambda_1 R}}{R}\Big)\Big\}$$

$$-\Big(\int_{S_a}+\int_{S_r}\Big)\,dS(\mathbf{x})\Big\{\frac{e^{i\lambda_2 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}\big[(\lambda_1^2-\sigma_2^2)\mathbf{u}_{(s)}-s\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}\big]$$

$$-\big[(\lambda_1^2-\sigma_2^2)\mathbf{u}_{(s)}-s\,\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}\big]\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{i\lambda_2 R}}{R}\Big)\Big\}\Big] \qquad (4.19)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{(s)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\Big[\int_{\Omega_r}\Big\{\frac{e^{i\lambda_1 R}-e^{i\lambda_2 R}}{R}\Big[\mathbf{C}_2-\frac{1}{\gamma+\varepsilon}\vec{\nabla}^2\mathbf{Y}_{(s)}\Big]$$

$$+\frac{1}{\gamma+\varepsilon}\frac{\lambda_2^2 e^{i\lambda_2 R}-\lambda_1^2 e^{i\lambda_1 R}}{R}\mathbf{Y}_{(s)}\Big\}\,d\Omega_r(\mathbf{x})+$$

$$+\Big(\int_{S_a}+\int_{S_r}\Big)\,dS(\mathbf{x})\Big\{\frac{e^{i\lambda_1 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}\big[(\lambda_2^2-\hat{\sigma}_4^2)\mathbf{u}_{(s)}-p\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}\big]$$

$$-\big[(\lambda_2^2-\hat{\sigma}_4^2)\mathbf{u}_{(s)}-p\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}\big]\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{i\lambda_1 R}}{R}\Big)\Big\}$$

$$-\Big(\int_{S_a}+\int_{S_r}\Big)\,dS(\mathbf{x})\Big\{\frac{e^{i\lambda_2 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}\big[(\lambda_1^2-\hat{\sigma}_4^2)\mathbf{u}_{(s)}-p\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}\big]$$

$$-\big[(\lambda_1^2-\hat{\sigma}_4^2)\mathbf{u}_{(s)}-p\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}\big]\frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{i\lambda_2 R}}{R}\Big)\Big\}\Big] \qquad (4.20)$$

لنختبر الآن التكاملين المتعلق بـ $\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}(\mathbf{y})$ و $\theta(\mathbf{y})$ عندما $r\to\infty$. باستخدام خواص التكامل السطحي والاحداثيات الكروية (r,ψ,φ) فإن جزئي التكاملين السطحيين: $\mathbf{I}_{S_r}^{(1)}$ و $\mathrm{I}_{S_r}^{(1)}$ على S_r ، المتعلقين بـ $\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}(\mathbf{y})$ و $\theta(\mathbf{y})$، على الترتيب، يأخذان الشكل التالي:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{S_r}^{(1)} = \int_{S_r} \frac{dS_r}{r^2}\{ & r e^{-\beta_1 r} e^{i\alpha_1 r}(\frac{\partial}{\partial r}-i\mu_1)[(\mu_2^2-\sigma_1^2)\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m\ \mathbf{grad}\,\theta]+\\ & +e^{-\beta_1 r} e^{i\alpha_1 r}[(\mu_2^2-\sigma_1^2)\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m\ \mathbf{grad}\,\theta]\\ & -r e^{-\beta_2 r} e^{i\alpha_2 r}(\frac{\partial}{\partial r}-i\mu_2)[(\mu_1^2-\sigma_1^2)\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m\ \mathbf{grad}\,\theta]\\ & -e^{-\beta_2 r} e^{i\alpha_2 r}[(\mu_1^2-\sigma_1^2)\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m\ \mathbf{grad}\,\theta]\},\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{S_r}^{(2)} = \int_{S_r} \frac{dS_r}{r^2}\{ & r e^{-\beta_1 r} e^{i\alpha_1 r}(\frac{\partial}{\partial r}-i\mu_1)[(\mu_2^2-q)\,\theta-\frac{q\varepsilon}{m}\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}]+\\ & +e^{-\beta_1 r} e^{i\alpha_1 r}[(\mu_2^2-q)\,\theta-\frac{q\varepsilon}{m}\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}]\\ & -r e^{-\beta_2 r} e^{i\alpha_2 r}(\frac{\partial}{\partial r}-i\mu_2)[(\mu_1^2-q)\,\theta-\frac{q\varepsilon}{m}\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}]\\ & -e^{-\beta_2 r} e^{i\alpha_2 r}[(\mu_1^2-q)\,\theta-\frac{q\varepsilon}{m}\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}]\}\end{aligned} \tag{4.22}$$

حيث : $dS_r = r^2\sin\psi d\psi d\varphi\ ,\ \ 0\le\psi\le\pi\ ,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi$

من التكاملين السابقين ينتج أنه: أولاً) إذا كان التابعين $\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}$ و θ يحققان في جوار اللانهاية $(r\to\infty)$ الشروط المقاربية:

$$\begin{aligned} & r e^{-\beta_1 r}(\frac{\partial}{\partial r}-i\mu_1)[(\mu_2^2-\sigma_1^2)\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m\ \mathbf{grad}\,\theta]=\mathbf{0}(1)\\ & r e^{-\beta_2 r}(\frac{\partial}{\partial r}-i\mu_2)[(\mu_1^2-\sigma_1^2)\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m\ \mathbf{grad}\,\theta]=\mathbf{0}(1)\\ & e^{-\beta_1 r}[(\mu_2^2-\sigma_1^2)\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m\ \mathbf{grad}\,\theta]=\mathbf{0}(1)\\ & e^{-\beta_2 r}[(\mu_1^2-\sigma_1^2)\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m\ \mathbf{grad}\,\theta]=\mathbf{0}(1)\end{aligned} \tag{4.23}$$

وكان التكامل الحجمي التالي متقارباً:

$$\mathbf{I}_{\Omega}^{(1)} := \int_{\Omega} \{ \frac{e^{i\mu_1 R} - e^{i\mu_2 R}}{R} [\mathbf{A}_1 - \frac{1}{\lambda + 2\mu} \vec{\nabla}^2 \mathbf{X}_{(\mathrm{p})}] + \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\mu_2^2 e^{i\mu_2 R} - \mu_1^2 e^{i\mu_1 R}}{R} \mathbf{X}_{(\mathrm{p})} \} \, d\,\Omega\,(\mathbf{x}) \qquad (4.24)$$

حيث الرمز: $\mathbf{f}(r) = \mathbf{0}(1)$ يعني أن: $\mathbf{f}(r) \to \mathbf{0}$ عندما $r \to \infty$،

اذا تحققت الشروط السابقة فإن التكامل السطحي $\mathbf{I}_{S_r}^{(1)}$ يؤول إلى الصفر ويأخذ التمثيل التكاملي (4.16) الشكل التالي في Ω:

$$\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi(\mu_1^2 - \mu_2^2)} [\ \mathbf{I}_{\Omega}^{(1)} + \int_{S_a} d\,S\,(\mathbf{x}) \{ \frac{e^{i\mu_1 R}}{R} \frac{\partial}{\partial n} [\,(\mu_2^2 - \sigma_1^2)\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})} + m\ \mathbf{grad}\,\theta] - [\,(\mu_2^2 - \sigma_1^2)\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})} + m\ \mathbf{grad}\,\theta\,] \frac{\partial}{\partial n} (\frac{e^{i\mu_1 R}}{R}) \} - \int_{S_a} d\,S\,(\mathbf{x}) \{ \frac{e^{i\mu_2 R}}{R} \frac{\partial}{\partial n} [\,(\mu_1^2 - \sigma_1^2)\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})} + m\ \mathbf{grad}\,\theta] - [\,(\mu_1^2 - \sigma_1^2)\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})} + m\ \mathbf{grad}\,\theta\,] \frac{\partial}{\partial n} (\frac{e^{i\mu_2 R}}{R}) \}]\,, \qquad (4.25)$$

حيث: $\mathbf{y} \in \Omega$،

ثانياً) إذا كان التابعين $\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}$ و θ يحققان في جوار اللانهاية $(r \to \infty)$ الشروط المقاربية:

$$\begin{aligned} & r\,e^{-\beta_1 r} (\frac{\partial}{\partial r} - i\mu_1)[(\mu_2^2 - q)\,\theta - \frac{q\varepsilon}{m} \mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}] = 0(1) \\ & r\,e^{-\beta_2 r} (\frac{\partial}{\partial r} - i\mu_2)[(\mu_1^2 - q)\,\theta - \frac{q\varepsilon}{m} \mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}] = 0(1) \\ & e^{-\beta_1 r}[(\mu_2^2 - q)\,\theta - \frac{q\varepsilon}{m} \mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}] = 0(1) \\ & e^{-\beta_2 r}[(\mu_1^2 - q)\,\theta - \frac{q\varepsilon}{m} \mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}] = 0(1) \end{aligned} \qquad (4.26)$$

وكان التكامل الحجمي التالي متقارباً:

$$\mathrm{I}_{\Omega}^{(2)} := \int_{\Omega} \{ \frac{e^{i\mu_1 R} - e^{i\mu_2 R}}{R} [\mathrm{A}_2 - \frac{1}{\kappa}\nabla^2 \mathrm{Q}] + \frac{1}{\kappa} \frac{\mu_2^2 e^{i\mu_2 R} - \mu_1^2 e^{i\mu_1 R}}{R} \mathrm{Q} \} \, d\,\Omega(\mathbf{x}) \tag{4.27}$$

حيث الرمز: $f(r) = 0(1)$ يعني أن: $f(r) \to 0$ عندما $r \to \infty$،

اذا تحققت الشروط السابقة فإن التكامل السطحي $\mathrm{I}_{S_r}^{(2)}$ يؤول إلى الصفر ويأخذ التمثيل التكاملي (4.17) الشكل التالي في Ω:

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi(\mu_1^2 - \mu_2^2)} [\, & \mathrm{I}_{\Omega}^{(2)} + \\ & + \int_{S_a} d\,S(\mathbf{x}) \{ \frac{e^{i\mu_1 R}}{R} \frac{\partial}{\partial n} [(\mu_2^2 - q)\,\theta - \frac{q\varepsilon}{m} \mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}] \\ & - [(\mu_2^2 - q)\,\theta - \frac{q\varepsilon}{m} \mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}] \frac{\partial}{\partial n} (\frac{e^{i\mu_1 R}}{R}) \} \\ & - \int_{S_a} d\,S(\mathbf{x}) \{ \frac{e^{i\mu_2 R}}{R} \frac{\partial}{\partial n} [(\mu_1^2 - q)\,\theta - \frac{q\varepsilon}{m} \mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}] \\ & - [(\mu_1^2 - q)\,\theta - \frac{q\varepsilon}{m} \mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}] \frac{\partial}{\partial n} (\frac{e^{i\mu_2 R}}{R}) \} \,] \end{aligned} \tag{4.28}$$

حيث: $\mathbf{y} \in \Omega$. وإذا وضعنا الآن:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\Omega}^{(3)} &:= \int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \frac{e^{i\hat{\sigma}_3 R}}{R} \, d\,\Omega(\mathbf{x}) \,, \\ \mathbf{I}_{\Omega}^{(4)} &:= \int_{\Omega} \{ \frac{e^{i\lambda_1 R} - e^{i\lambda_2 R}}{R} [\mathbf{C}_1 - \frac{1}{\mu + \alpha} \vec{\nabla}^2 \mathbf{X}_{(\mathrm{s})}] + \frac{1}{\mu + \alpha} \frac{\lambda_2^2 e^{i\lambda_2 R} - \lambda_1^2 e^{i\lambda_1 R}}{R} \mathbf{X}_{(\mathrm{s})} \} \, d\,\Omega(\mathbf{x}) \,, \\ \mathbf{I}_{\Omega}^{(5)} &:= \int_{\Omega} \{ \frac{e^{i\lambda_1 R} - e^{i\lambda_2 R}}{R} [\mathbf{C}_2 - \frac{1}{\gamma + \varepsilon} \vec{\nabla}^2 \mathbf{Y}_{(\mathrm{s})}] + \frac{1}{\gamma + \varepsilon} \frac{\lambda_2^2 e^{i\lambda_2 R} - \lambda_1^2 e^{i\lambda_1 R}}{R} \mathbf{Y}_{(\mathrm{s})} \} \, d\,\Omega(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{4.29}$$

فبإعادة نفس العملية على الأجزاء التكاملية السطحية على S_r في باقي التمثيلات التكاملية المتعلقة بـ $\boldsymbol{\varphi}_{(p)}(\mathbf{y})$ و $\mathbf{u}_{(s)}(\mathbf{y})$ و $\boldsymbol{\varphi}_{(s)}(\mathbf{y})$ يمكن أن نضع نتائجنا بالمبرهنة التالية:

مبرهنة:

1) إذا كان التكاملان الحجميان $\mathbf{I}_{\Omega}^{(1)}$ و $\mathrm{I}_{\Omega}^{(2)}$ متقاربان، وتحققت الشروط المقاربية لتالية:

$$\begin{aligned}
&e^{-\beta_1 r}[\mathbf{u}_{(p)} + m_1\ \mathbf{grad}\,\theta] = \mathbf{0}(1)\\
&e^{-\beta_2 r}[\mathbf{u}_{(p)} + m_2\ \mathbf{grad}\,\theta] = \mathbf{0}(1)\\
&e^{-\beta_1 r}[\theta - h_1\,\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(p)}] = 0(1)\\
&e^{-\beta_2 r}[\theta - h_2\,\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(p)}] = 0(1)\\
&e^{-\beta_1 r}(\frac{\partial}{\partial r} - i\mu_1)\,[\mathbf{u}_{(p)} + m_1\ \mathbf{grad}\,\theta] = \mathbf{0}(r^{-1})\\
&e^{-\beta_2 r}(\frac{\partial}{\partial r} - i\mu_2)[\mathbf{u}_{(p)} + m_2\ \mathbf{grad}\,\theta] = \mathbf{0}(r^{-1})\\
&e^{-\beta_1 r}(\frac{\partial}{\partial r} - i\mu_1)[\theta - h_1\,\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(p)}] = 0(r^{-1})\\
&e^{-\beta_2 r}(\frac{\partial}{\partial r} - i\mu_2)[\theta - h_2\,\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(p)}] = 0(r^{-1})
\end{aligned} \tag{4.30}$$

حيث الرمز $\mathbf{f}(r) = \mathbf{0}(r^{-1})$ يعني أن: $r\mathbf{f}(r) = \mathbf{0}(1)$، والرمز $f\,(r) = 0(r^{-1})$ يعني أن: $rf\,(r) = 0(1)$، كما أن:

$$\begin{aligned}
&m_1 = \frac{m}{\mu_2^2 - \sigma_1^2}\ , \qquad m_2 = \frac{m}{\mu_1^2 - \sigma_1^2}\ ,\\
&h_1 = \frac{q\varepsilon}{m\,(\mu_2^2 - q)}\ , \qquad h_2 = \frac{q\varepsilon}{m\,(\mu_1^2 - q)}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

عندئذ يتحقق التمثيلان التكامليان التاليان:

$$\begin{aligned}
&4\pi(\mu_1^2-\mu_2^2)\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}(\mathbf{y})=\mathbf{I}_\Omega^{(1)}\\
&-(\mu_1^2-\sigma_1^2)\int_{S_a}\{\frac{e^{i\mu_2 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}[\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m_2\ \mathbf{grad}\,\theta]\\
&-[\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m_2\ \mathbf{grad}\,\theta]\frac{\partial}{\partial n}(\frac{e^{i\mu_2 R}}{R})\}\ dS(\mathbf{x})+\\
&+(\mu_2^2-\sigma_1^2)\int_{S_a}\{\frac{e^{i\mu_1 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}[\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m_1\ \mathbf{grad}\,\theta]\\
&-[\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}+m_1\ \mathbf{grad}\,\theta]\frac{\partial}{\partial n}(\frac{e^{i\mu_1 R}}{R})\}\ dS(\mathbf{x}),
\end{aligned}\tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
&4\pi(\mu_1^2-\mu_2^2)\,\theta(\mathbf{y})=\mathrm{I}_\Omega^{(2)}\\
&-(\mu_1^2-q)\int_{S_a}\{\frac{e^{i\mu_2 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}[\theta-h_2\,\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}]\\
&-[\theta-h_2\,\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}]\frac{\partial}{\partial n}(\frac{e^{i\mu_2 R}}{R})\}\ dS(\mathbf{x})+\\
&+(\mu_2^2-q)\int_{S_a}\{\frac{e^{i\mu_1 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}[\theta-h_1\,\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}]\\
&-[\theta-h_1\,\mathbf{div}\,\mathbf{u}_{(\mathrm{p})}]\frac{\partial}{\partial n}(\frac{e^{i\mu_1 R}}{R})\}\ dS(\mathbf{x}),
\end{aligned}\tag{4.33}$$

2) اذا كان التكامل الحجمي $\mathbf{I}_\Omega^{(3)}$ متقارب وحقق $\boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{p})}$ الشروط المقاربية :

$$\boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{p})}=\mathbf{0}(1)\ ,\quad (\frac{\partial}{\partial r}-i\,\hat{\sigma}_3)\,\boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{p})}=\mathbf{0}(r^{-1})\tag{4.34}$$

عندئذ يتحقق التمثيل التكاملي التالي:

$$4\pi\,\boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{p})}(\mathbf{y})=\mathbf{I}_\Omega^{(3)}+\int_{S_a}[\frac{e^{i\hat{\sigma}_3 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}\boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{p})}-\boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{p})}\frac{\partial}{\partial n}(\frac{e^{i\hat{\sigma}_3 R}}{R})]\,dS(\mathbf{x})\tag{4.35}$$

3) اذا كان التكاملان الحجميان $\mathbf{I}_\Omega^{(4)}$ و $\mathbf{I}_\Omega^{(5)}$ متقاربان وكانت $\mathbf{u}_{(\mathrm{s})}(\mathbf{y})$ و $\boldsymbol{\varphi}_{(\mathrm{s})}(\mathbf{y})$

تحقق في جوار اللانهاية، الشروط المقاربية:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_{(s)} = \mathbf{0}(1)\ , \qquad \mathbf{curl}\ \mathbf{u}_{(s)} = \mathbf{0}(1)\\
&\boldsymbol{\varphi}_{(s)} = \mathbf{0}(1)\ , \qquad \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)} = \mathbf{0}(1)\\
&(\frac{\partial}{\partial r} - i\lambda_1)[\mathbf{u}_{(s)} - s_1\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}] = \mathbf{0}(r^{-1})\\
&(\frac{\partial}{\partial r} - i\lambda_2)[\mathbf{u}_{(s)} - s_2\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}] = \mathbf{0}(r^{-1})\\
&(\frac{\partial}{\partial r} - i\lambda_1)[\boldsymbol{\varphi}_{(s)} - p_1\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}] = \mathbf{0}(r^{-1})\\
&(\frac{\partial}{\partial r} - i\lambda_2)[\boldsymbol{\varphi}_{(s)} - p_2\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}] = \mathbf{0}(r^{-1})
\end{aligned} \tag{4.36}$$

حيث:

$$s_1 = \frac{s}{\lambda_2^2 - \sigma_2^2}\ ,\ s_2 = \frac{s}{\lambda_1^2 - \sigma_2^2}\ ,\ p_1 = \frac{p}{\lambda_2^2 - \hat{\sigma}_4^2}\ ,\ p_2 = \frac{p}{\lambda_1^2 - \hat{\sigma}_4^2} \tag{4.37}$$

عندئذ يتحقق التمثيلان التكامليتان التاليتان:

$$\begin{aligned}
&4\pi(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\mathbf{u}_{(s)}(\mathbf{y}) = \mathbf{I}_{\Omega}^{(4)}\\
&-(\lambda_1^2 - \sigma_2^2)\int_{S_a}\{\frac{e^{i\lambda_2 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}[\mathbf{u}_{(s)} - s_2\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}]\\
&-[\mathbf{u}_{(s)} - s_2\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}]\frac{\partial}{\partial n}(\frac{e^{i\lambda_2 R}}{R})\ \}\,dS(\mathbf{x})\\
&+(\lambda_2^2 - \sigma_2^2)\int_{S_a}\{\frac{e^{i\lambda_1 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}[\mathbf{u}_{(s)} - s_1\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}]\\
&-[\mathbf{u}_{(s)} - s_1\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}]\frac{\partial}{\partial n}(\frac{e^{i\lambda_1 R}}{R})\ \}\,dS(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$
\begin{aligned}
&4\pi(\lambda_1^2-\lambda_2^2)\,\boldsymbol{\varphi}_{(s)}(\mathbf{y})=\mathbf{I}_{\Omega}^{(5)} \\
&-(\lambda_1^2-\hat{\sigma}_4^2)\int_{S_a}\{\frac{e^{i\lambda_2 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}[\boldsymbol{\varphi}_{(s)}-p_2\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}] \\
&-[\boldsymbol{\varphi}_{(s)}-p_2\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}]\frac{\partial}{\partial n}(\frac{e^{i\lambda_2 R}}{R})\}\,dS(\mathbf{x}) \qquad (4.39) \\
&+(\lambda_2^2-\hat{\sigma}_4^2)\int_{S_a}\{\frac{e^{i\lambda_1 R}}{R}\frac{\partial}{\partial n}[\boldsymbol{\varphi}_{(s)}-p_1\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}] \\
&-[\boldsymbol{\varphi}_{(s)}-p_1\,\mathbf{curl}\,\mathbf{u}_{(s)}]\frac{\partial}{\partial n}(\frac{e^{i\lambda_1 R}}{R})\}\,dS(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

6. الاستنتاجات والمقترحات:

أولاً: الاستنتاجات: في البحث تم استنتاج الشروط المقاربية والتمثيلات التكاملية الموافقة لأجل الجزء الكموني والجزء الدوار لكل من سعة مقطع الإزاحة وسعة مقطع التوجه ولأجل سعة المقطع الحراري، التي توافق الحل في الجسم الترموديناميكي المرن دقيق الاستقطاب **(E−N:6)** بوجود حمول حجمية ومصادر حرارية، متغيرة توافقياً مع الزمن. تمثل هذه النتائج تعميم لنتائج البحث [8]، حيث نتائج البحث [8] هي حالة خاصة من نتائج البحث، لأجل حالة انعدام الحمول الترموديناميكية.

ثانياً: فيمايلي يمكن أن نقترح المسائل التالية، الجديدة، للمناقشة:

i. إيجاد حلول المعادلات التكاملية التي تم الحصول عليها في البحث إما بالطرق التحليلية أو بالطرق العددية.

ii. إيجاد التمثيلات التكاملية والشروط المقاربية المتعلقة بها لأجل $\mathbf{u}_{(p)}, \theta, \boldsymbol{\varphi}_{(p)}, \mathbf{u}_{(s)}, \boldsymbol{\varphi}_{(s)}$ في جسم مرن دقيق الاستقطاب، أعقد من الجسم المرن دقيق الاستقطاب السابق.

iii. إيجاد الحلول التحليلية أو الحلول العددية للمعادلات التكاملية التي يتم الحصول عليها في المسألة ii.

المراجع

[1] –Nowacki, W , **1986** - Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.
[2] – Eringen , A .C, **1966** - Linear theory of micropolar elasticity, J.Math. Mech., 15 , 909 – 930.
[3]-Sommerfeld A.,**1950**-*Mechanics of Deformable Bodies*,New York.
[4]-Hanaa Kazem, , **2014** – The Sommerfeld radiation conditions for the Nowacki's potential problem of the Hooke elastic body in the case of nonzero body loads, harmonically varying in time, Journal of Al-Baath University,Vol.36.
[5]-Mountajab Al-Hasan and Husam Shakkouf , **2016** – The Sommerfeld asymptotic conditions for displacements in Hooke elastic body with no vanishing body loads harmonically varying in time, Journal of Al-Baath University,Vol.38, Nr.4, p. 11-24.
[6]-Mountajab Al-Hasan and Husam Shakkouf,**2020** –The Sommerfeld asymptotic conditions for Nowacki's potentials corresponding to the solution for the Koiter−Mindlin elastic body with no vanishing body loads harmonically varying in time, Journal of Al-Baath University, Accepted for Publication at 31 august 2020.
[7]- Kamel Mouhamad, Mountajab Al-Hasan, **2011** – An integral – differential mathematical model of elastic body in the frame of linear dynamic thermoelasticity, Journal of Al-Baath University,Vol.33, Nr.25, p.119 -148.
[8] Al-Hasan M., Dyszlewicz J., **2001**- Radiation conditions and integral representations of a solution in coupled micropolar thermoelasticity, **J**. Thermal Stresses, **24** (2001), 1007 – 1018.
[9]-Ignaczak , **1972** - Radiation conditions in asymmetric elasticity, J.Ela.**2**,307-321.
[10] Ignaczak J. , Nowacki W., **1962** -The Sommerfeld radiation conditions for coupled thermoelasticity, Arch. Mech. Stos.**14**,3– 13.
[11]- Dyszlewicz , J, **2004** - Micropolar Theory of Elasticity , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .