تحويل كثيرات حدود ليجندر إلى مصفوفة مربعة مثلثية

الدكتور: أحمد الجاعور
أستاذ مساعد في كلية العلوم – جامعة البعث

الملخص

نعلم أن كثيرات حدود ليجندر المستنتجة من معادلة رودريغ التفاضلية العادية من المرتبة n وهي:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}.\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

تولد كثيرات حدود جبرية من الدرجة n والتي تستخدم في العديد من التطبيقات الهندسية والتقنية.. الخ

وفي بحثنا هذا نقوم بصياغة كثيرات الحدود على شكل مصفوفات مربعة مثلثية من المرتبة n لتسهيل التعامل مع كثيرات الحدود من الناحية التطبيقية والحاسوبية ولتوظيفها في المجالات الهندسية.

الكلمات المفتاحية: كثيرات حدود ليجندر، مصفوفة كثيرات حدود ليجندر، مصفوفة (ماركوف بالقياس الأولي n)، المصفوفة المثلثية السفلى، مقلوب مصفوفة. علاقة رودريغ.

Converting Legendre Polynomials to Square triangle Matrix

Summary

We know that Legendre polynomials deduced from the ordinary differential equation of nth magnitude are:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n . n!} . \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

Generates n-degree algebraic polynomials, which are used in many engineering and algebraic applications.etc

In our research, we formulate polynomials in the form of an n-ranked square matrix to facilitate dealing with polynomials from an applied and computational point of view, and to employ them in engineering fields.

key words:

Legendre polynomial, matrix Legendre polynomial, matrix (Markov with prime n), lower trigonometric matrix, invers matrix, Rodrig relation.

1. مقدمة:

مع تقدم تكنولوجيا المعلومات، اكتسبت كثيرات حدود ليجندر أهمية في تحديد الوظائف الموجية للإلكترونات في مدارات الذرة، وهي قابلة للتطبيق في ديناميكا الموائع، وأيضا في النماذج الطيفية للأرصاد الجوية. وعلى سبيل المثال، نظام التنبؤ العالمي، بالإضافة لاستخدامها في فيزياء المفاعلات النووية، وبالتالي، كان لابد من نقل الأشكال والعلاقات العلمية إلى شكل علمي يعتمد على المصفوفات لسهولة التعامل معها حاسوبيا، كما تعد مصفوفة ماركوف (ومصفوفة ماركوف بالقياس الأولي n) من المصفوفات الهامة للاستفادة منها في التطبيقات الهندسية، وكذلك حفظ المعلومات، والتي تعتمد على نظرية الأعداد، وخصوصاً النظير الضربي بالقياس n، معتمدين في ذلك على برنامج حاسوبي ليعطي نتائج سريعة وكبيرة.

2. دراسة مرجعية: [1]

إن علاقة (رودريغ) لكثيرات حدود ليجندر التفاضلية الشهيرة:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n . n!} . \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \qquad (1)$$

التي تولد كثيرات حدود جبرية من الدرجة n، تتصف بصفات كثيرة، تساعد الباحثين على الاعتماد عليها،
وهي حل عام للمعادلة التفاضلية:

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' + n(n-1)\mathrm{y} = 0 \qquad (2)$$

وبما أن كل كثيرة حدود جبرية من الدرجة K ترد إلى مجموع كثيرات حدود ليجندر من المرتبة K وفق حساب ثوابت ليجندر $a_0 , a_1 , \dots , a_n$ ، فإن هذا الموضوع يساعدنا في حل العديد من القضايا الرياضية، مثل الاستيفاء الرياضي ، وفي تحديد الوظائف الموجية للإلكترونات في مدارات الذرة .

3. هدف البحث:

ايجاد الثوابت المولدة لكل كثيرة حدود من الدرجة K اعتمادا على مقلوب مصفوفة مربعة (مثلثية سفلى) $L^{-1}{}_k$ نسميها مقلوب مصفوفة ليجندر ،لتسهيل التعامل مع كثيرات الحدود تقنيا وحاسوبيا**[5−6]** ، ومن ثم تشكيل كثيرات حدود من درجة (فردية ، زوجية ، مختلطة) ،اعتماداً على ثوابت و مصفوفة ليجندر L_k .

كثيرات حدود ليجندر:[2−3−4]

من علاقة ليجندر التفاضلية (1) نستنتج بعضاً من كثيرات الحدود من خلال اشتقاقها عدداً من المرات كما يأتي:

لدينا، من منشور ثنائي حد نيوتن:

$$\begin{aligned}(x^2-1)^n = {} & C_n^0 x^{2n} - C_n^1 x^{2n-1} + C_n^2 x^{2n-2} \\ & - \cdots (-1)^{2n-k} C_n^k x^{2n-k} + .. (-1)^{2n-n} C_n^n x^{2n-n}\end{aligned}$$

وبالإصلاح نجد:

$$(x^2-1)^n = x^{2n} - nx^{2n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{2n-2} - \cdots (-1)^{2n-k}\frac{(n)!}{(k)!\,(n-k)!}x^{2n-k} + ..(-1)^n x^n$$

وبإدخال خاصة المشتق النوني نجد:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}.\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = \frac{1}{2^n.n!}.\frac{d^n}{dx^n}\ [x^{2n} - nx^{2n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{2n-2} - \cdots (-1)^{2n-k}\frac{(n)!}{(k)!\,(n-k)!}x^{2n-k} + ..(-1)^n x^n\ ]$$

وبالإصلاح نجد:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}.\left[\frac{(2n)!}{n!}x^{2n} - n\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}x^{2n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{(2n-2)!}{(n-2)!}x^{2n-2} - \cdots (-1)^{2n-k}\frac{(n)!}{(k)!\,(n-k)!}\frac{(2n-k)!}{(n-k)!}x^{2n-k} + ..(-1)^n\frac{(n)!}{(n)!}x^n\right]$$

وبأخذ المشتقات $P_n(x)$ على التوالي:

	$P_n(x) =$
عدد مرات الاشتقاق صفر	$P_0(x) = 1$
المشتق الأول	$P_1(x) = x$
المشتق الثاني	$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
المشتق الثالث	$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
المشتق الرابع	$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
المشتق الخامس	$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
المشتق السادس	$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
المشتق السابع	$P_7(x) = \frac{429 \cdot x^7}{16} - \frac{693 \cdot x^5}{16} + \frac{315 \cdot x^3}{16} - \frac{35 \cdot x}{16}$
المشتق الثامن	$P_8(x) = \frac{6435 \cdot x^8}{128} - \frac{3003 \cdot x^6}{32} + \frac{3465 \cdot x^4}{64} - \frac{315 \cdot x^2}{32} + \frac{35}{128}$
المشتق التاسع	$P_9(x) = \frac{12155 \cdot x^9}{128} - \frac{6435 \cdot x^7}{32} + \frac{9009 \cdot x^5}{64} - \frac{1155 \cdot x^3}{32} + \frac{315 \cdot x}{128}$
المشتق العاشر	$P_{10}(x) = \frac{46189 \cdot x^{10}}{256} - \frac{109395 \cdot x^8}{256} + \frac{45045 \cdot x^6}{128} - \frac{15015 \cdot x^4}{128} + \frac{3465 \cdot x^2}{256} - \frac{63}{256}$

نتيجة : مجموع المعاملات لأية كثيرة حدود $P_n(1)$ هي الواحد ، أي أن :

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n.n!}.\left[\frac{(2n)!}{n!} - n\frac{(2n-1)!}{(n-1)!} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{(2n-2)!}{(n-2)!} - \cdots (-1)^{2n-k}\frac{(n)!}{(k)!(n-k)!}\frac{(2n-k)!}{(n-k)!} +..(-1)^n\right] = 1$$

خصائص كثيرات حدود ليجندر:

تتصف كثيرات حدود ليجندر بالآتي:

1) $P_n(1) = 1 \quad ; \quad \forall n \in N$

2) $P_n(0) = 0 \;;\; \forall\, n = 2k-1 \quad , \quad k \in N$

3) $P_n(-1) = -1 \quad ; \quad \forall\, n = 2k-1 \quad , \quad k \in N$

4) $P_n(-1) = 1 \quad ; \quad \forall\, n = 2k \quad , \quad k \in N$

علاقة الارتباط بين كثيرة حدود ليجندر وأية كثيرة حدود جبرية:

تعريف مصفوفة ليجندر:

مصفوفة ليجندر من المرتبة k هي مصفوفة مربعة من المرتبة k تنتج من معاملات كثيرات حدود ليجندر

$$\{P_n\ (x)\}_{n=0}^{k}$$

حيث نضع ثوابت P_0 في السطر الأول ، ونضع ثوابت P_1 في السطر الثاني ، ونضع ثوابت P_2 في السطر الثالث وهكذا .....

مثال (1):

لنكتب مصفوفة ليجندر من المرتبة الرابعة (L_3): ومقلوبها $L_3{}^{-1}$ هو مصفوفة مثلثية سفلى أيضاً

$$L3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \qquad (L3)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن مجموع عناصر أي سطر من المصفوفة L_3 أو المصفوفة $L_3{}^{-1}$ هو الواحد

مثال (2):

لنكتب مصفوفة ليجندر من المرتبة السادسة (L_5): ومقلوبها (L_5^{-1}) هو مصفوفة مثلثية سفلى أيضاً

$$L5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{-30}{8} & 0 & \frac{35}{8} & 0 \\ 0 & \frac{15}{8} & 0 & \frac{-70}{8} & 0 & \frac{63}{8} \end{bmatrix} \qquad (L5)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{7} & 0 & \frac{8}{35} & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{8}{63} \end{bmatrix}$$

وهنا نلاحظ أن مجموع عناصر أي سطر من المصفوفة L_5 أو المصفوفة ${L_5}^{-1}$ هو الواحد

أهم نتائج البحث:

نقوم بإثبات مبرهنتين أساسيتين الأولى أن كل مصفوفة ليجندر $L_n \;\; , n = 1,2,..10$ ، تكتب على شكل مصفوفة مثلثية سفلى ومقلوبها أيضاً مصفوفة مثلثية سفلى ، والمبرهنة الثانية كل كثيرة حدود جبرية

$B_n \;\; , n = 1,2,..10$ من الدرجة n ترد إلى جداء مقلوب مصفوفة ليجندر (L_n^{-1}) مع مصفوفة ثوابت B_n

مبرهنة (1):

تكتب مصفوفة ليجندر $Ln \quad , n = 1,2,..10$ على شكل مصفوفة مثلثية سفلى ومقلوبها أيضاً ${L_n}^{-1}$ مصفوفة مثلثية سفلى

الإثبات:

لدينا مصفوفة ليجندر من المرتجة (11) التي تحتوي جميع المصفوفات الجزئية من جميع المراتب من الأولى وحتى المرتبة الحادية عشرة.

$$L_{10} := \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{8} & 0 & \frac{-30}{8} & 0 & \frac{35}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{15}{8} & 0 & \frac{-70}{8} & 0 & \frac{63}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-5}{16} & 0 & \frac{105}{16} & 0 & \frac{-315}{16} & 0 & \frac{231}{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{-35}{16} & 0 & \frac{315}{16} & 0 & \frac{693}{16} & 0 & \frac{429}{16} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{35}{128} & 0 & \frac{315}{32} & 0 & \frac{3465}{64} & 0 & \frac{3003}{32} & 0 & \frac{6435}{128} & 0 & 0 \\
0 & \frac{315}{128} & 0 & \frac{-1155}{32} & 0 & \frac{9009}{64} & 0 & \frac{-6435}{32} & 0 & \frac{12155}{128} & 0 \\
\frac{-63}{256} & 0 & \frac{3465}{256} & 0 & \frac{-15015}{128} & 0 & \frac{45045}{128} & 0 & \frac{-10939563}{256} & 0 & \frac{46189}{256}
\end{bmatrix}$$

وبما أنها مثلثية سفلى فإن مقلوبها يحتوي مقلوب جميع المصفوفات الجزئية $\{L_n^{-1}\}_{n=1}^{10}$ من جميع المراتب من الأولى وحتى المرتبة الحادية عشرة.

$$\left(L_{10}\right)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{7} & 0 & \frac{8}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{8}{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{10}{21} & 0 & \frac{24}{77} & 0 & \frac{16}{231} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{41}{39} & 0 & -\frac{434}{429} & 0 & -\frac{8}{39} & 0 & \frac{16}{429} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3557}{6435} & 0 & -\frac{2104}{1287} & 0 & -\frac{592}{715} & 0 & -\frac{64}{495} & 0 & \frac{128}{6435} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6465}{2431} & 0 & -\frac{6440}{2431} & 0 & -\frac{688}{1105} & 0 & \frac{192}{2431} & 0 & \frac{128}{12155} & 0 \\ -\frac{4329246939}{33025135} & 0 & -\frac{2561437878}{6605027} & 0 & -\frac{341652144}{1738165} & 0 & -\frac{78135648}{2540395} & 0 & \frac{155584896}{33025135} & 0 & \frac{256}{46189} \end{bmatrix}$$

نتيجة (1):

1. من المثالين السابقين (1) و (2) نجد أن مقلوب أية مصفوفة من النمط $Ln \quad , n = 1,2,..10$ متضمنا في مقلوب المصفوفة $L_n^{-1} \quad , n = 1,2,..10$
2. نلاحظ أن مجموع عناصر أي سطر من المصفوفة L_n أو المصفوفة ${L_{\mathrm{n}}}^{-1}$هو الواحد

مبرهنة (2):

كل كثيرة حدود جبرية Bn من الدرجة n معاملاته $[b_0 \ , b_1 \ \ , b_2 \ , \dots b_n]$ ترتبط بمقلوب مصفوفة ليجندر من المرتبة $L^{-1}n$ و ثوابت ليجندر $[a_0 \ , a_1 \ \ , a_2 \ , \dots a_n]$ بالعلاقة الآتية:

$$[a_0 \ , a_1 \ \ , a_2 \ , \dots a_n] = [b_0 \ , b_1 \ \ , b_2 \ , \dots b_n] . L_n^{-1}$$

الإثبات:

بما أن كل كثيرة حدود جبرية Bn تكتب على شكل مجموع لكثيرات حدود ليجندر من المرتبة n

كما يلي

$$Bn = \sum_{k=0}^{n} a_k \, P_k \ (x)$$

نستنتج أن:

$$[b_0 \ , b_1 \ \ , b_2 \ , \dots b_n] = [a_0 \ , a_1 \ \ , a_2 \ , \dots a_n] . L_n$$

وبضرب الطرفين بالمصفوفة L_n^{-1} نجد أن :

$$[a_0 \ , a_1 \ \ , a_2 \ , \dots a_n] = [b_0 \ , b_1 \ \ , b_2 \ , \dots b_n] . L_n^{-1}$$

مثال (3):

لنوجد ثوابت ليجندر $[a_0 \ , a_1 \ \ , a_2 \ , \dots a_n]$ المكونة لكثيرة الحدود من الدرجة الثالثة

$$B_3 = 1 + 3x - 5x^2 + 7x^3$$

الحل: بتطبيق المبرهنة (2) نجد أن:

$$[a_0 \ , a_1 \ \ , a_2 \ , \dots a_n] = [b_0 \ , b_1 \ \ , b_2 \ , \dots b_n] . L_n^{-1}$$

$$[\,a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_n] = [\,1 \quad 3 \quad -5 \quad 7].\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

حيث إن مقلوب المصفوفة $L3$ هي المصفوفة ${L_3}^{-1}$ الآتية :

$$\left(L_3\right)^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

وبالإصلاح تكون ثوابت ليجندر:

$$[\,a_0 \;, a_1 \;, a_2 \;, \ldots a_n] = \left[-\frac{2}{3} \;, \frac{36}{5} \;, -\frac{10}{3} \;, \frac{14}{5}\right]$$

وللتحقق من صحة الحل نجد:

$$[\,1 \quad 3 \quad -5 \quad 7] = \left[-\frac{2}{3}\ ,\frac{36}{5}\quad ,-\frac{10}{3}\ ,\frac{14}{5}\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

نتائج هامة:

1. من أجل جميع كثيرات الحدود من الدرجة n نستنتج أن:

$\sum_{k=0}^{n} b_k \ = \sum_{k=0}^{n} a_k$

مثال (4):

لنوجد مجموع ثوابت ليجندر $[\,a_0\ ,a_1 \quad ,a_2\ ,\dots a_n]$ المكونة لكثيرة الحدود من الدرجة الثالثة

$$B_3 = 1 + 3x - 5x^2 + 7x^3$$

الحل: بتطبيق النتيجة (1) نجد أن:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \ = 1 + 3 - 5 + 7 = -\frac{2}{3} + \frac{36}{5} - \frac{10}{3} + \frac{14}{5} = 6 = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

2. لتوليد كثيرات حدود من الدرجة n ذات حدود زوجية نختار الحدود $a_{k=}\,[\,a_0 \quad 0 \quad a_2 \ \dots \ a_{2k}]$ فنحصل على كثيرة حدود زوجية .

مثال (5):

لنوجد ذلك من ثوابت ليجندر [0,2,0, 3− , 0, 1] المكونة لكثيرة الحدود من الدرجة الرابعة

فيكون لدينا

$$[\, b_0 \ \ , b_1 \ \ \ , b_2 \ \ , \ldots b_n] \ = [\, a_0 \ \ , a_1 \ \ \ , a_2 \ \ , \ldots a_n]. L_4$$

$$[\, b_0 \ \ , b_1 \ \ \ , b_2 \ \ , \ldots b_n] \ = \qquad [\, a_0 \ \ , a_1 \ \ \ , a_2 \ \ , \ldots a_n] \ . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{-30}{8} & 0 & \frac{35}{8} \end{bmatrix}$$

$$[\, b_0 \ \ , b_1 \ \ \ , b_2 \ \ , \ldots b_n] \ = \ \left[\frac{3 \cdot a4}{8} + \left(a0 - \frac{a2}{2} \right) \ 0 \ - \frac{15 \cdot a4}{4} + \frac{3 \cdot a2}{2} \ 0 \ \frac{35 \cdot a4}{8} \right]$$

حيث إن:

$$b_0 \ + b_1 \ \ + \ b_2 \ + b_3 + b_4 \ = a_0 \ + a_1 \ \ + \ a_2 \ + a_3 + a_4$$
$$= 1 + 0 - 3 + 0 - 2 + 0 = -4$$

$$[b_0 \,, b_1 \ \ , b_2 \,, b_3 , b_4] = \\ [1 \ \ 0 \ \ -3 \ \ 0 \ \ 2 \ \ ]. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{-30}{8} & 0 & \frac{35}{8} \end{bmatrix}$$

الحل:

بتطبيق النتيجة (1) نجد أن:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = 1 + 3 - 5 + 7 = -\frac{2}{3} + \frac{36}{5} - \frac{10}{3} + \frac{14}{5} = 6 = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

3. لتوليد كثيرات حدود من الدرجة n ذات حدود فردية نختار الحدود $a_{k=} [\, 0 \quad a_1 \quad 0 \quad a_3 \;\; \dots \;\; a_{2k+1}]$ فنحصل على كثيرة حدود فردية.

مثال (6):

لنوجد من ثوابت ليجندر [0 , 3 ,0,5,0,7] المكونة لكثيرة الحدود من الدرجة الخامسة

$$B_5 = 3x + 5x^3 + 7x^5$$

الحل:

$$[\, b_0 \;\; , b_1 \quad , b_2 \;\; , \dots b_n] = [\, a_0 \;\; , a_1 \quad , a_2 \;\; , \dots a_n]. L_5$$

حيث إن:

$L5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{7} & 0 & \frac{8}{35} & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{8}{63} \end{bmatrix}$	$A5 := [0\ 3\ 0\ 5\ 0\ 7]$	$A5 \cdot L5 \rightarrow \left[0\ 9\ 0\ \frac{46}{9}\ 0\ \frac{8}{9}\right]$

فنحصل على كثيرة الحدود An وثوابته $[b_0\ , b_1\ \ , b_2\ , \dots b_n]$

كما نلاحظ النتيجة (1) محققة أن مجموع الثوابت محققة :

$$0+3+0+5+0+7=0+9+0+\frac{46}{9}+0+\frac{8}{9}=15$$

مقترحات:[7−8]

1. بما أن المصفوفة L_n مصفوفة مثلثية سفلى ونظامية فهي تصلح للتشفير وحفظ البيانات وكذلك L_n^{-1} تصلح لفك التشفير .
2. يمكن تمديد المصفوفة المثلثية L_n. بحيث يصبح n عدد طبيعي بقدر ما نشاء ،وهذا يتطلب اثباته بالاستقراء الرياضي .

Reference

1. L. Bos1, A. Narayan, N. Levenberg and F. Piazzon4, An Orthogonality Property of Legendre Polynomials, April 27, USA 2015
2. Yang Xiao-Jun, Theory and Applications of Special Functions for Scientists and Engineers, Book, Springer 2021.DOI: 10.1007/978-981-33-6334-2.
3. Francis J. Narcowich , Notes on Special Functions, Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, TX 77843-3368, Springer 2005
4. Leon M. Hall, Special Functions, Copyright c 1995 by. All rights reserved.
5. Modern Cryptography: Applied Mathematics for Encryption and Information Security، Springer, William Easttom 2020.
6. Cryptology Classical and Modern By Richard E. Klima،Neil، P.Sigmon ،Neil Sigmon Copyright Year 2019
7. Al Khatib and Shamma, An algorithm for determining a relatively prime number and its symmetric product with base n. Journal of Natural Sciences and Mathematics (jnm) Vol.3 No.1 (2009).
8. Al Khatib and Shamma, the encryption using the operator integration applied to the system ASCII encoded messages, Journal of AL Baath University, Volume 38 (2015)