

# المحاكاة العددية لانتشار الأمواج الزلزالية

## في الأوساط المتجانسة

حمزه محمد<sup>1</sup>

د. وعد صافتي<sup>2</sup>

### ملخص

تمثل معادلات نافير-لامي التفاضلية الجزئية في علم المرونة الديناميكية نموذجاً رياضياً للاضطرابات الحاصلة في حقول الإزاحة، والانفعال، والإجهاد بوصفها أمواج منتشرة في الوسط، بيد أنه من المعروف أنه يصعب إيجاد حلول دقيقة لهذه المعادلات بالطرق التحليلية، ويعود ذلك لعدم التجانس الغالب في الأوساط المرنة أو كونها ذات حدود هندسية غير منتظمة. لهذا فإن تقديم صياغة عددية لمسائل المرونة الديناميكية تمكّن من إجراء محاكاة حاسوبية لتصرّف هذه الأوساط تحت تأثير القوى المختلفة. يقدم هذا البحث صياغات عددية تقريبية لمعادلات نافير-لامي (2) في المرونة الديناميكية، والتي بدورها تمكّن من محاكاة بعض الظواهر الفيزيائية الهامة كانتشار الأمواج الزلزالية في الأوساط المتجانسة.

**الكلمات المفتاحية:** أمواج المرونة، موجة الضغط، موجة القص، الحل العددي، طريقة الفروق المنتهية، مؤثر الفروق المركزي، الشبكة المتداخلة.

<sup>1</sup> طالب دراسات عليا (ماجستير)، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث.

<sup>2</sup> أستاذ، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث.

# Numerical Simulation of seismic waves propagation in homogeneous media

Hamza Mohammad<sup>1</sup>  
Dr: Waad Saftly<sup>2</sup>

## Abstract

In dynamical elasticity the navier–lame partial differential equations represent a model of perturbations take place in displacement, strain, and stress fields described as wave propagation through media. However, it is known that Exact solutions for these equations are hard to be obtained by analytical methods, because of the usual inhomogeneity of elastic media or its irregular geometric boundaries. Thus, presenting numerical formulations of elastodynamic problems enables running computational simulations of behaviors of media under different acting forces.

This work presents numerical approximate formulations for navier–lame equations in elastodynamics, which in its turn enables the simulation of some important physical phenomena such as propagation of seismic waves in homogeneous media.

**Key words:** Elastic Waves, P–Wave, S–Wave, Numerical Solution, Finite Difference Methods, Centered Differences Operator, Staggered Grid.

<sup>1</sup> Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Al–Baath University.

<sup>2</sup> Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Al–Baath University.

## 1. مقدمة:

إن تقديم إجابات متعلقة بخصائص مكونات الإنشاءات الصناعية، يتطلب دراسة الانفعالات الديناميكية الخاصة بهذه المكونات تحت تأثير قوى شد عامة، ولأجل ذلك درس الرياضيون نماذج من المعادلات التفاضلية التي تصف المرونة الديناميكية للأوساط المختلفة، ويعد انتشار الأمواج في الأوساط المرنة أو اللزجة مشكلة يتم مواجهتها في العديد من مجالات العلوم والهندسة المعمارية [12]، كما تعتبر الأمواج الزلزالية من أهم مجالات تطبيق نظرية الموجات في الأوساط المرنة، ولا تزال تخضع لأبحاث مكثفة سواء من منظور تجريبي أو نظري.

إن معظم مسائل المرونة الخطية لا يمكن حلها عملياً بالطرائق التحليلية، لذلك نلجأ إلى الطرائق العددية لحل مثل هذه المسائل والتي تعطي بدورها تقريب مقبول للحل ومن هذه الطرائق طريقة الفروق المنتهية التي تُستخدم في إيجاد الحلول العددية لمسائل قيم حدية لمعادلات تفاضلية جزئية، حيث يؤول الحل إلى حل جمل معادلات جبرية نوجد حلولها التقريبية، وهو ما تمّ اعتماده في هذا البحث باستخدام مفهوم الشبكات المتداخلة لحل مسائل انتشار أمواج المرونة وفهم سلوكها في وسط مرن متجانس وذو كثافة ثابتة.

## 2. هدف البحث:

يهدف البحث إلى دراسة الحلول العددية لمسائل المرونة الديناميكية المستوية لوسط متجانس موحد خصائص المرونة وتقديم الصيغ العددية للتقريب لموجة المرونة باستخدام طريقة الفروق المنتهية وتقديم محاكاة عددية لانتقال الأمواج الزلزالية في الأوساط المتجانسة من البعد الثاني.

### 3. طرائق البحث ومواده:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية، وبشكل خاص في مجال التحليل العددي والميكانيك، إذ يعتمد على طرائق التحليل العددي الأساسية، ويوظفها لمعالجة المعادلات التفاضلية الجزئية عددياً.

### 4. أمواج المرنة:

قبل البدء لا بد من التنويه أنّ كلاً من حقل الإزاحة  $u_i$  الذي نرغب بتحديدده أو تحديد  $v_i = \partial_t u_i$  الذي يمثل حقل السرعة، هما متغيران بالنسبة للموضع والزمن يحددان دورهما حقل الانفعال  $\epsilon_{ij}$  المتناسب مع حقل الإجهاد  $\sigma_{ij}$ .

بالانطلاق من العلاقات الأساسية في المرونة الديناميكية:

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_i &= \partial_j \sigma_{ij} + F_i \\ \sigma_{ij} &= \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \\ \epsilon_{kl} &= \frac{1}{2} (\partial_k u_l + \partial_l u_k) \end{aligned} \quad (1)$$

تمثل الثوابت  $\mu$  و  $\lambda$  ثوابت لامي، و  $\rho$  الكثافة، و  $F_i$  للقوى المؤثرة.

وتعطى معادلات لامي في الحالة الديناميكية بالشكل:

$$(\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2)$$

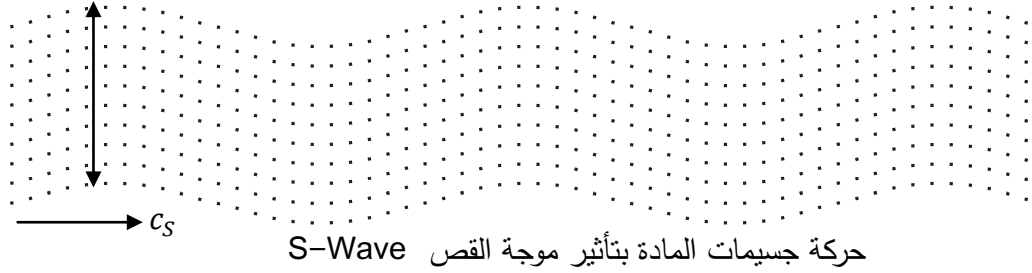
تصف المعادلة الأساسية في المرونة الديناميكية (2) انتقال موجة الإزاحة عبر الوسط

المرن، وتتربك الموجة المنتشرة من نوعين مختلفين من الأمواج، النوع الأول يعرف

بإزاحة الضغط  $u_{p,i}$  والآخر متعلق بالدوران  $u_{s,i}$  ويسمى موجة القص وبذلك تكون

موجة الإزاحة الإجمالية:

$$u_i = u_{p,i} + u_{s,i}$$



الشكل (1): مركبات موجة الإزاحة في الحالة المستوية

تنتشر الإزاحة كموجات بسرعات الطور  $c_p$  و  $c_s$  على التوالي في أي وسط ، ويوضح الشكل (1) حركة جسيمات المادة بتأثير كلا الموجتين.

بالتالي تتركب موجة المرنة من موجتين رئيسيتين، الأولى تعبر عن اهتزاز مواز لجهة انتقال الموجة يحدث إجهاد شد Tension Stress، والثانية تعبر عن اهتزاز عمودي على جهة انتقال الموجة يحدث إجهاد قص Shear Stress. يمكن باستخدام المعادلة (2) فصل هاتين المركبتين عن طريق تطبيق المؤثر  $\nabla = \partial_i$  للحصول على تفرق الإزاحة  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  الذي يحقق أن  $\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$ ، وبالتالي تغيب الإزاحة العمودية على جهة الانتقال وتصبح الموجة خالية من التدوير وتسمى موجة ضغط  $P - Wave$ . وباستخدام المعادلة (2) وتدوير الإزاحة  $\nabla \times \mathbf{u}$ ، بحيث يتحقق  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$ ، تبقى الإزاحة العمودية على جهة الانتقال وتغيب إزاحة الضغط وتسمى الموجة الناتجة بموجة القص  $S - Wave$ .

### 5. التقريب العددي لمعادلة موجة المرونة:

تعتبر الفروق المنتهية إحدى طرق الحلول العددية التي تستخدم لحل المعادلات التفاضلية الجزئية التي يصعب حلها بالطرق التحليلية وتعتمد على استبدال المشتقات الجزئية في المعادلات التفاضلية بتقريبات متقطعة (أي أن الحل العددي معروف في عدد محدد من النقاط يتم تحديدها من قبل مستخدم الطريقة) بهدف الوصول إلى حل تقريبي متقطع للمسألة المدروسة، ويزيادة عدد هذه النقاط تزداد دقة الحل العددي.

لإيجاد الحل العددي لمسألة انتشار موجة المرونة، لا بد من تقديم صياغة لمعادلة موجة المرونة يتم استخدامها في المعالجة العددية لانتشار موجة المرونة في وسط متجانس وموحد خصائص المرونة، ولتبيان هذه الصياغة نطلق من المعادلات الأساسية (1) بوضع

الثانية والثالثة بالنسبة للزمن نجد:

$$\begin{aligned}\rho \partial_t v_i &= \partial_j \sigma_{ij} + F_i \\ \partial_t \sigma_{ij} &= \lambda \partial_t \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \partial_t \epsilon_{ij} \\ \partial_t \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)\end{aligned}$$

بالتالي يمكن كتابة المعادلات السابقة في الحالة المستوية بالشكل:

$$\begin{cases} \partial_t v_x = \frac{1}{\rho} (\partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{xy}) + \frac{1}{\rho} F_x \\ \partial_t v_y = \frac{1}{\rho} (\partial_x \sigma_{xy} + \partial_y \sigma_{yy}) + \frac{1}{\rho} F_y \\ \partial_t \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \partial_x v_x + \lambda \partial_y v_y \\ \partial_t \sigma_{yy} = (\lambda + 2\mu) \partial_y v_y + \lambda \partial_x v_x \\ \partial_t \sigma_{xy} = \mu (\partial_y v_x + \partial_x v_y) \end{cases} \quad (3)$$

تدعى الصياغة (3) صياغة إجهاد-سرعة لمعادلة موجة المرونة، وسيتم استخدام هذه الصياغة لإيجاد الحلول العددية لموجة انتشار الزلزال، وعليه يجب إيجاد معادلات

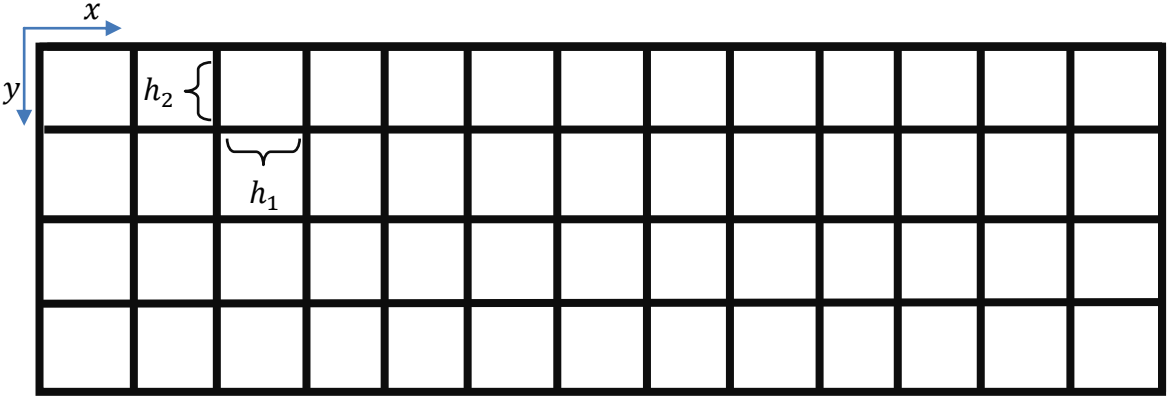
متقطعة كتقريب لمعادلات الموجة باستخدام صياغة إجهاد- سرعة، لذلك نقوم بتقطيع منطقة العمل المكانية ثنائية البعد  $x, y \in (a, b) \times (c, d)$  ، والمجال الزمني  $t \in [0, T]$  لنصل إلى شبكة ثنائية البعد تتعرض لتحديث زمني على نقاط زمنية متقطعة، وتكون المسافة بين كل نقطتين سواء على المحور الأفقي أو المحور الشاقولي متساوية كما في الشكل (2) كالآتي:

$$\left. \begin{array}{l} x_i = ih_1; i = 0, 1, \dots, M_1 \\ y_j = jh_2; j = 0, 1, \dots, M_2 \end{array} \right\} ; h_1 = \frac{(b-a)}{M_1}, \quad h_2 = \frac{(d-c)}{M_2}$$

حيث  $M_1, M_2 > 0$  ثابتين صحيحين و  $h_1, h_2 > 0$  تمثلان طول الخطوة المكانية، وبالتالي نحصل على نقاط شبكة التقطيع وهي مؤلفة من  $(M_1 + 1) \times (M_2 + 1)$  نقطة كما في الشكل (2)، وكذلك الأمر بالنسبة للتقطيعات الزمنية حيث تمثل  $\tau > 0$  طول الخطوة الزمنية:

$$t_n = n\tau ; n = 0, 1, \dots, N, \quad \tau = T/N$$

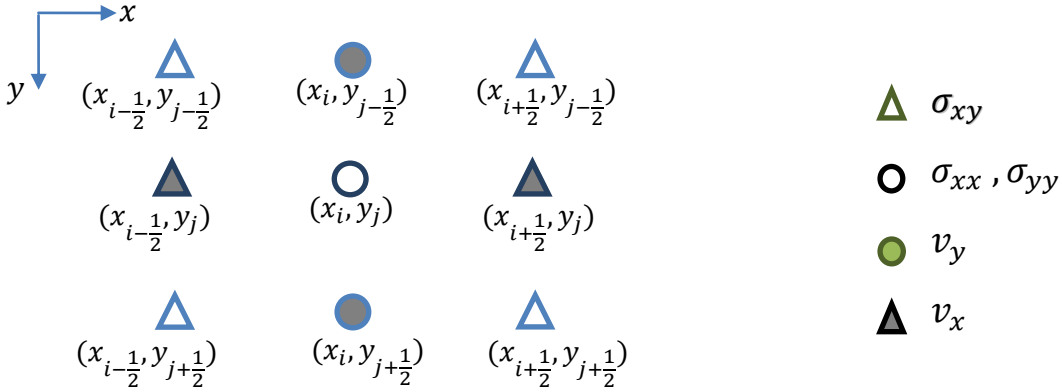
يمكن عندئذٍ تعريف كل من المقادير المجهولة  $v_y, v_x, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, \sigma_{xx}$  في الصياغة (3) بأن نفترض وجود شبكة خاصة بكل متحول منها، وفي هذه الحالة يمكن أن نعرف من أجل  $(x_i, y_j, t_n)$  القيم  $v_x(x_i, y_j, t_n)$  و  $v_y(x_i, y_j, t_n)$  و  $\sigma_{xy}(x_i, y_j, t_n)$  و  $\sigma_{yy}(x_i, y_j, t_n)$  و  $\sigma_{xx}(x_i, y_j, t_n)$  ولكن وبهذه الطريقة لا بد من اختيار أحد المؤثرات الفروقية كـ  $\delta^+$  و  $\delta^-$  لتقريب المشتقات المكانية، ومن المعروف أنّ هذه التقريبات هي تقريبات من المرتبة الأولى وبالتالي فإننا بحاجة إلى عدد كبير من نقاط التقطيع لكي نصل إلى دقة مفيدة، وعليه فإنه يمكن القيام بعملية إزاحة الشبكات لكل متحول بشكل يمكننا من استخدام مؤثر الفروق المركزية  $\bar{\delta}$  للحصول على دقة من المرتبة الثانية.



الشكل (2): شبكة التقطيع المكانية لمنطقة العمل

تسمى هذه الفكرة بالشبكة المتداخلة *Staggered Grid*، وتتلخّص في تجزيء المتحولات إلى جزئين جزء منها يتم حسابه في اللحظة  $t_n + \frac{1}{2}\tau$  والآخر في اللحظة  $t_n$ ، يمكن تركيب الشبكة المتداخلة بأخذ الحقلين  $\sigma_{xx}$  و  $\sigma_{yy}$  بحيث يقعان على مراكز خلايا الشبكة المتداخلة واعتبار الشبكة الخاصة بكل منهما والمركبتين فوق بعضهما بالشبكة الأساسية غير المزاحة، ومنه فإنّ قيمة الحقلين  $\sigma_{xx}$  أو  $\sigma_{yy}$  ستحسب عند نقاط من الشكل  $(x_i, y_j, t_n)$ ، بينما يتم حساب قيم  $v_x, v_y, \sigma_{xy}$  في اللحظات الزمنية الكسرية، بعد إزاحة شبكات هذه المتحولات لنتمكن من استخدام التقريب المركزي، وإنه وعدا عن القيم الحدية فإن لكل قيمة  $\sigma_{xx}(x_i, y_j, t_n)$  توجد قيمتان لـ  $v_x$ ، واحدة على اليمين تبعد  $\frac{h}{2}$ ، وأخرى على اليسار تبعد  $\frac{h}{2}$ ، وكذلك الأمر بالنسبة لـ  $v_y$  من الأعلى والأسفل ويمكن تلخيص ذلك من أجل كل خلية كما في الشكل (3):





الشكل (3): يوضح خلية من الشبكة المتداخلة لحل معادلات إجهاد - سرعة

وبناءً على الشبكة المتداخلة الموضحة في الشكل (3) سوف نستخدم مؤثر الفروق

المركزية من المرتبة الأولى لتقريب المشتقات من المراتب الأولى في معادلات إجهاد -

سرعة (3) وفق الآتي:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_\tau v_x \left( i + \frac{1}{2}, j, n \right) &= \frac{1}{\rho} \left( \bar{\delta}_{h_1} \sigma_{xx} \left( i + \frac{1}{2}, j, n \right) + \bar{\delta}_{h_2} \sigma_{xy} \left( i + \frac{1}{2}, j, n \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} F_x \left( i + \frac{1}{2}, j, n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_\tau v_y \left( i, j + \frac{1}{2}, n \right) &= \frac{1}{\rho} \left( \bar{\delta}_{h_1} \sigma_{xy} \left( i, j + \frac{1}{2}, n \right) + \bar{\delta}_{h_2} \sigma_{yy} \left( i, j + \frac{1}{2}, n \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} F_y \left( i, j + \frac{1}{2}, n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_\tau \sigma_{xx} \left( i, j, n + \frac{1}{2} \right) &= (\lambda + 2\mu) \bar{\delta}_{h_1} v_x \left( i, j, n + \frac{1}{2} \right) + \lambda \bar{\delta}_{h_2} v_y \left( i, j, n + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_\tau \sigma_{yy} \left( i, j, n + \frac{1}{2} \right) &= (\lambda + 2\mu) \bar{\delta}_{h_2} v_y \left( i, j, n + \frac{1}{2} \right) + \lambda \bar{\delta}_{h_1} v_x \left( i, j, n + \frac{1}{2} \right) \\ \bar{\delta}_\tau \sigma_{xy} \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right) &= \\ &\mu \left( \bar{\delta}_{h_2} v_x \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\delta}_{h_1} v_y \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

وبهذا تلخص الصيغة النهائية للتقريب وفق الآتي:

$$\begin{aligned} &\frac{v_x \left( i + \frac{1}{2}, j, n + \frac{1}{2} \right) - v_x \left( i + \frac{1}{2}, j, n - \frac{1}{2} \right)}{\tau} \\ &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\sigma_{xx}(i+1, j, n) - \sigma_{xx}(i, j, n)}{h_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_{xy} \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, n \right) - \sigma_{xy} \left( i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, n \right)}{h_2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho} F_x \left( i + \frac{1}{2}, j, n \right) \\ &\frac{v_y \left( i, j + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right) - v_y \left( i, j + \frac{1}{2}, n - \frac{1}{2} \right)}{\tau} \\ &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\sigma_{xy} \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, n \right) - \sigma_{xy} \left( i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, n \right)}{h_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_{yy}(i, j+1, n) - \sigma_{yy}(i, j, n)}{h_2} \right) + \frac{1}{\rho} F_y \left( i + \frac{1}{2}, j, n \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_{xx}(i, j, n + 1) - \sigma_{xx}(i, j, n)}{\tau} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_x\left(i + \frac{1}{2}, j, n + \frac{1}{2}\right) - v_x\left(i - \frac{1}{2}, j, n + \frac{1}{2}\right)}{h_1} + \lambda \frac{v_y\left(i, j + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) - v_y\left(i, j - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)}{h_2}$$

$$\frac{\sigma_{yy}(i, j, n + 1) - \sigma_{yy}(i, j, n)}{\tau} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_y\left(i, j + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) - v_y\left(i, j - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)}{h_2} + \lambda \frac{v_x\left(i + \frac{1}{2}, j, n + \frac{1}{2}\right) - v_x\left(i - \frac{1}{2}, j, n + \frac{1}{2}\right)}{h_1}$$

$$\frac{\sigma_{xy}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, n + 1\right) - \sigma_{xy}\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, n\right)}{\tau} = \mu \left( \frac{v_x\left(i + \frac{1}{2}, j + 1, n + \frac{1}{2}\right) - v_x\left(i + \frac{1}{2}, j, n + \frac{1}{2}\right)}{h_2} + \frac{v_y\left(i + 1, j + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) - v_y\left(i, j + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)}{h_1} \right)$$

المعادلات الخمس أعلاه تُمثل تقريباً منقطعاً للمعادلات (3).

## 6. النتائج و المناقشة:

إن الظاهرة الفيزيائية المتمثلة بانتشار أمواج المرونة عبر الأوساط المادية المتجانسة وموحدة خصائص المرونة يُمكن نمذجتها، باستخدام معادلات لامي الديناميكية، وهذا النموذج يشكّل ضابطاً عاماً لسلوك أمواج المرونة عبر الوسط المحدد بثوابت لامي، فالمعادلة التفاضلية الجزئية التي تشكّل النموذج الرياضي العام، ومعها الشروط الحدية المتعلقة بشكل وحالة الوسط، والشروط الابتدائية المتعلقة بحالته الابتدائية، جميعها يطلق عليها تسمية (مسألة القيمة الابتدائية الحدية) والتي بحلّها تُقدّم محاكاة دقيقة إلى حد دقة النموذج الرياضي للظاهرة الفيزيائية المدروسة، وبإيجاد تقريب لحلّها تُقدّم محاكاة عددية تقريبية للظاهرة المدروسة، وسنعمد في هذا البحث على لغة البرمجة Mathematica12 لتنفيذ البرامج الحاسوبية المبنية وفق التقريبات العددية المقترحة.

### مصدر موجة المرونة:

لمحاكاة أمواج المرونة الزلزالية، فإنه لابد من وجود مصدر لهذه الموجة، يمكن نمذجة مصدر زلزالي بكونه شرط ابتدائي، كما يمكن أن يكون شرط حدي، أو قوى خارجية أو داخلية مطبقة عبر حد المصدر في معادلة نافير\_لامبي (2)، كما يمكننا إدخاله على شكل انفجار يحدث في داخل منطقة العمل كما في المرجع [6]، ويتم بإحداث تغيير قسري في قيمة الإجهاد  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  في نقطة معينة من داخل منطقة العمل  $\Omega$ ، يدعى ذلك مصدر انفجاري للزلزال وسيؤدي إلى انتشار هذا التغيير على شكل موجة مرونية عبر الوسط، وبشكل عام يمكن تعديل قيمة تنسور الاجهاد في معادلة التوازن بالشكل:

$$\rho \partial_t^2 u_i = \partial_j (\sigma_{ij} + M_{ij}) + F_i$$

ويدعى  $M_{ij}$  بتنسور العزم الزلزالي [مرجع 3-صفحة 17].

في حالتنا سوف نستخدم حد المصدر الانفجاري في نقطة معينة  $(x_0, y_0)$  والذي يمكننا التعبير عنه باستخدام تنسور العزم الزلزالي وتابع النبضة الغوسية ذات التردد  $\alpha$  والسعة  $r$  بالشكل:

$$M_{xx}(\mathbf{P}, t) = M_{yy}(\mathbf{P}, t) = \begin{cases} re^{-\alpha(t-t_0)^2}, & \text{at } \mathbf{P} = (x_0, y_0), t \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = 0, \quad \forall \mathbf{P} \in \Omega, t \geq 0 \quad (4)$$

محاكاة انتشار موجة زلزالية في وسط متجانس موحد خصائص المرنة:

نبدأ من تعريف المنطقة المستطيلة  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ ، وباستخدام معادلات (إجهاد-سرعة) الصياغة (3)، والتي ستمثل على شبكة التقطيع باستخدام التقريبات العددية.

وسيتم تقديم نموذج انتشار الموجة الزلزالية من أجل الشروط الحدية من نوع ديرخلية (أي عدم وجود ازاحة مكانية على الحدود، وبالتالي فإن سرعة الإزاحة معدومة) وتحقق:

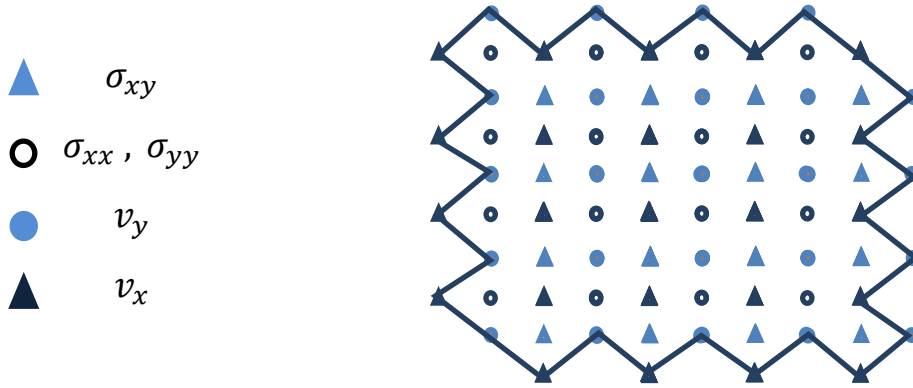
$$v_i(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega, t \geq 0$$

ومصدر الزلزال في النموذج سيكون تابع المصدر الانفجاري العلاقة (4)، كما سيحدد الوضع الابتدائي للحقول الواردة في المعادلات (3) على فرض أن الانطلاق من حالة السكون وفق:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

$$v_i(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

حيث تم بناء الشبكة المتداخلة بحيث تكون جميع قيم الحقل الواقعة على الحدود تعود لحقل السرعة  $v_i$ ، وهي تخضع للشروط الحدية من النوع ديرخلية كما في الشكل (4).



الشكل (4): شبكة توضح كيفية بناء الشبكة للمحاكاة

وهكذا يتم اكمال وصف المسألة الحدية الابتدائية عددياً، وسنستعين بالمعادلات التقريبية والشروط الحدية والابتدائية، لتحديد الحقول في لحظات زمنية مختلفة كما في التجربة الآتية:

تجربة انتشار موجة زلزالية حدودها لا تتعرض للإزاحة:

بتطبيق الصيغ العددية المقترحة من أجل الوسائط التالية:

$$b = d = 10000 , a = c = -10000 , T = 3$$

$$\rho = 1000 \mu = 3 * 10^{10} , \lambda = 3 * 10^{10} ,$$

$$\tau = \frac{3}{1000} h_2 = 50 , h_1 = 50 ,$$

وإدخال حد المصدر في النقطة  $(x_0, y_0) = (0,0)$  بتردد  $\alpha = 600$  وسعة  $10^{11}$

وفق العلاقة (4)، والتحقق من شرط استقرار الحل (5) الوارد في المرجع [6]:

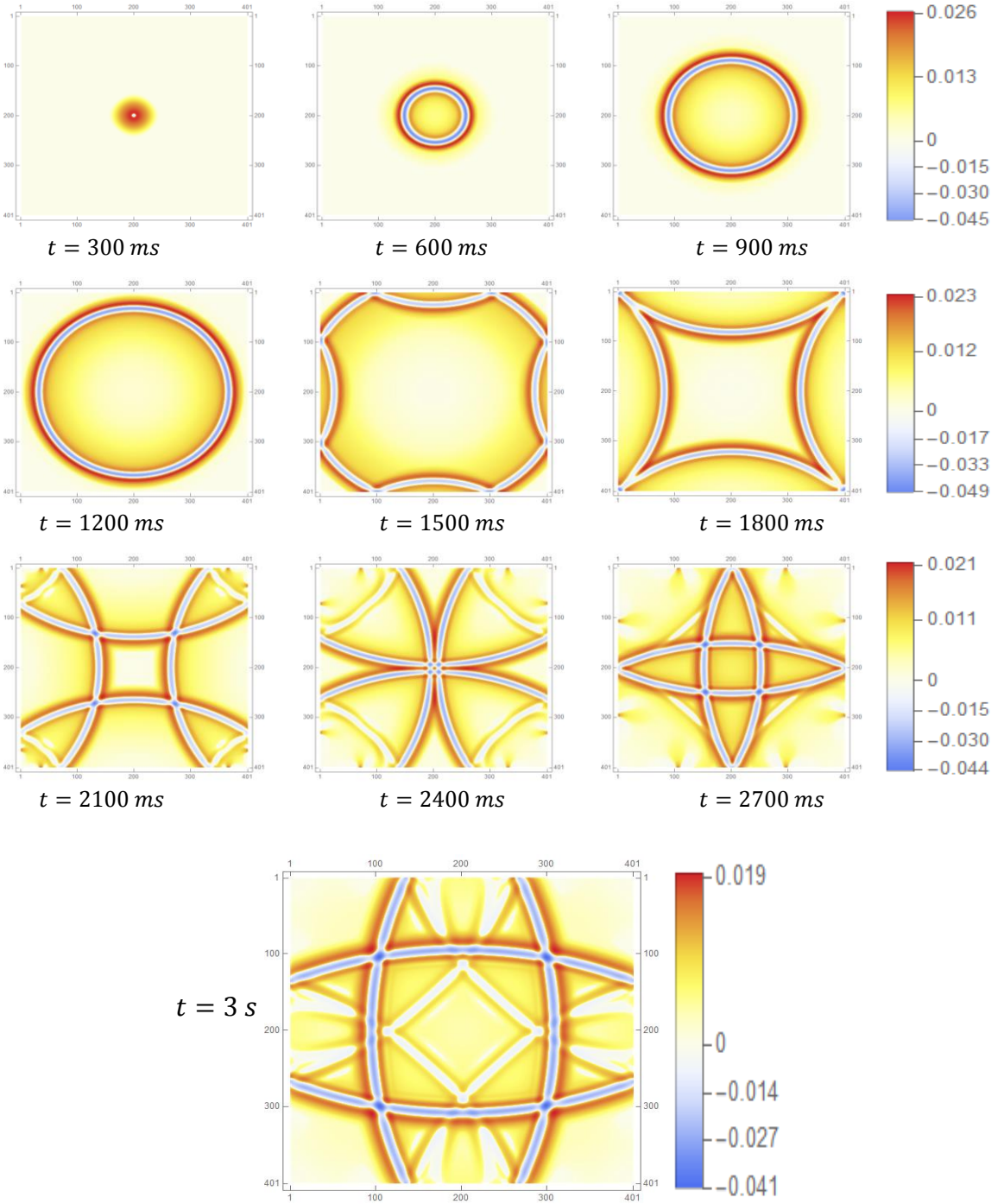
$$\frac{c_p \tau}{h_1} < \frac{1}{\sqrt{2}} , \quad c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (5)$$

نلاحظ من الشكل (5) انتشار موجة الضغط المرورية وارتدادها عن الحدود والتي نحصل عليها من قيم حقل الإزاحة الناتجة باستخدام العلاقة  $\nabla \mathbf{u}$ ، وتعتبر هذه الموجة نموذجاً

لانتشار الأمواج الصوتية عبر الأوساط المختلفة، كما أنّ التناظر الظاهر في الشكل هو نتيجة كون نقطة التأثير في مركز تناظر الوسط المتجانس الموحد خصائص المرونة، وهذه المحاكاة تقدّم ملاحظات مهمّة لطبيعة انتشار الأمواج في الأوساط المتجانسة أو تلك القريبة من المتجانسة كما هو الحال في صحراء رملية او في مياه البحر.

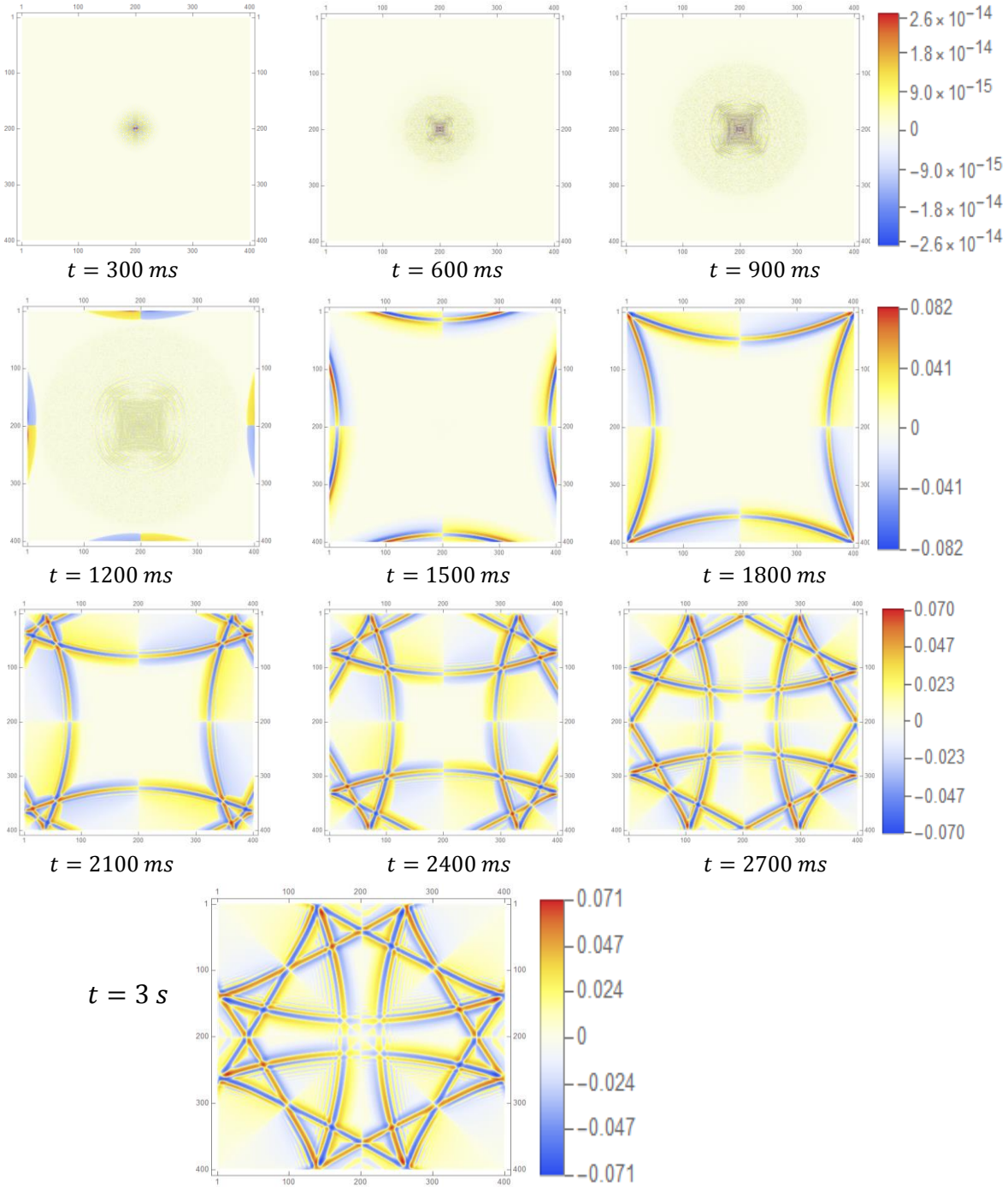
كما يوضّح الشكل (6) انتشار موجة القص التي نحصل عليها من العلاقة  $\nabla \times \mathbf{u}$ ، والتي تملك قيم قريبة من الصفر هي في الحقيقة قيم عديدة غير فيزيائية ناجمة عن أخطاء التدوير الحاسوبية نلاحظ أنّ قيمتها صغيرة جداً وتتلشى تماماً بعد ظهور موجة القص التي تنشأ فقط عن الارتداد، كما يمكن أن نلاحظ أنّ  $c_p > c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  ولذلك تصل موجات الضغط قبل موجات القص، ونلاحظ أنّ لموجة القص سعة أكبر من موجة الضغط الناجمة عن الانفجار، يطلق على  $P - Wave$  الموجات الأولية و  $S - Wave$  الموجات الثانوية أو الارتدادية، وهي الأخطر من حيث أثرها المدمر بسبب كونها موجة قص بالدرجة الأولى وبسبب سعتها التي تتجاوز سعة موجة الضغط الأولية.

المحاكاة العددية لانتشار الأمواج الزلزالية في الأوساط المتجانسة



الشكل (5): محاكاة انتشار موجة الضغط المرنة وارتدادها عبر وسط





الشكل (6): محاكاة انتشار موجة القصر وارتدادها عبر وسط متجانس

## 7- النتائج والتوصيات:

ابتدأ البحث بمقدمة حول أمواج المرونة وانتشارها في وسط متجانس وموحد خصائص المرونة وأهميتها التطبيقية في مجال علم الزلازل، إذ تعتبر هذه الأمواج الطريقة الأساسية والأكثر شيوعاً التي اعتمدها العلماء للكشف عن التركيب الداخلي للأرض وذلك من خلال إجراء تفجير زلزالي صناعي يسبب حدوث اهتزازات في طبقات الصخور، تنتقل بدورها على شكل أمواج زلزالية، تختلف في سرعتها وأطوالها وأشكالها حسب الوسط الذي تنتقل به.

تلا ذلك ذكر لبعض المفاهيم الأساسية في علم المرونة الديناميكية كعلاقة الانفعال بالإزاحة، وعلاقة الانفعال بالإجهاد، والمعادلات التفاضلية الجزئية اللازمة لدراسة أمواج المرونة بنوعها موجة ضغط وموجة قص.

كما تم تقديم صياغة لمعادلات نافير-لامي الديناميكية التي تشكل النموذج الرياضي لانتشار الأمواج (صياغة اجهاد- سرعة)، واستخدام هذه الصياغة لبناء التقريب العددي بطريقة الفروق المنتهية، كتقريب متقطع لمعادلات موجة المرونة، ليتم اعتماد هذه المعادلات واستخدامها لمحاكاة انتشار أمواج الضغط والقص في الأوساط المتجانسة والموحدة خصائص المرونة وبالتالي إيجاد الحلول العددية لمسائل القيمة الحدية الابتدائية المتعلقة بها، كانتشار موجة زلزالية في وسط متجانس من البعد الثاني.

كما تم في هذا البحث بنجاح استخدام مفهوم الشبكة المتداخلة، وتطبيقه على حدود من نوع ديرخلية، وتنفيذ الصيغ العددية عبر برامج تنفيذية معدة بلغة البرمجة Mathematica®.

يوصي بـ

- 1- دراسة مسألة القيم الابتدائية الحدية من نوع نيومان تخضع لقوى شد مطبقة على أطرافها.
- 2- دراسة الحلول العددية للأوساط غير المتجانسة.
- 3- أوساط غير منتظمة الشكل.
- 4- وسط غير موحد خصائص المرونة.

### المراجع

- [1] M. S. AKANDA, et al. *A finite-difference scheme for mixed boundary value problems of arbitrary-shaped elastic bodies*, Advances in Engineering Software,3(31) 2000.
- [2] L. ANDERSEN, *Linear Elastodynamic Analysis* Alborg University, 2006.
- [3] H. IGEL, *Computational Seismology: A Practical Introduction*, Oxford university press, 2017.
- [4] G.W. RECKTENWALD, *Finite-Difference Approximations to the Heat Equation*, Mech. Eng. 2004.
- [5] C. VIRTÀ, *Numerics of Elastic and Acoustic Wave Motion*, Uppsala University, 2016.
- [6] J. VIRIEUX, *P-SV wave Propagation in heterogeneous media: Velocity-Stress finite difference method*, Geophysics (51), 1986.
- [7] M. WEBER, G. RUMPKER, D. GAJEWSKI, *Theory of Elastic Waves*, Potsdam, Frankfurt, Hamburg, 2007.
- [8] H. J. ROBLER, *Simulation of diffraction effects of sound waves using the ADER-DG method*, Technical University of Munich, 2019.
- [9] J. J. VLASSAK, *ES 240 Solid Mechanics*, School of Engineering and Applied Sciences Harvard university, 2011.
- [10] M. H. SADD, *Elasticity Theory, Applications, and Numerics*, Academic Press, 2020.

- [11] *A Treatise on The Mathematical Theory of Elasticity*, CAMBRIDGE: at the University Press, 1906.
- [12] A. HOLMBERG, M. N.LIND, C. BOHME, *Numerical Analysis of the Two Dimensional Wave Equation*, Uppsala University, 2020.
- [13] P. M. DIXIT, *Review of Stress, Linear Strain and Elastic Stress-Strain Relations*, 2008.
- [14] F. HALL, Y. WANG, *Elastic wave modelling by an integrated finite difference method*, Imperial College, 2008.
- [15] M. ALDANA, *Staggered finite-difference schemes to model acoustic wave propagation in a three-dimensional fluid-solid configuration*, Simon Bolivar University, 2014.