

الحدوديات المتعامدة في فضاءات سوبوليف

طالب الدراسات العليا: علي وطفة

قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة البعث

الدكتور المشرف: محمد عامر

الملخص:

في هذا البحث سنقوم بتعميم وتطبيق بعض الخوارزميات لبناء الحدوديات في فضاء سوبوليف باستخدام العلاقات العودية وهاتين الخوارزميتين هما خوارزمية ستيلجس وخوارزمية تشبيشبف المعدلة وسنقارن بينهما من حيث سرعة التنفيذ وسوف نستخدم طريقة غرام شميدث لجعل هذه الحدوديات متعامدة ومنظمة وإيجاد اصفار هذه الحدوديات وسنقوم أيضا بتطبيق هذه الحدوديات في تربيعيات غاوص وكتابة الاكواد اللازمة للحسابات الرقمية باستخدام برنامج MATHEMATICA .

كلمات مفتاحية:

الجداء الداخلي ، الحدوديات المتعامدة ، فضاء سوبوليف .

Orthogonal Polynomials in Sobolev Spaces

Summary :

In this paper, we will generalize some algorithms for building polynomials in Sobolev space using recurrence relations, Steljes, and the modified Chebshev, and we will implement the orthogonization method of the Gram-Schmidt method to make these polynomials and search for the zeros or roots of these polynomials and implement Gauss quadrature to approximate integrals and find solutions and write codes for calculations digital, using MATHEMATICA software.

Key words : orthogonal polynomial, inner product ,Sobolev spaces

مقدمة:

تعتبر نظرية التقريب والتحليل العددي من المجالات وثيقة الصلة في الرياضيات أو توأم الرياضيات على حد تعبير العالم أورزالك (Orzalk) [1] في الحقيقة تقع نظرية التقريب على مفترق الطرق بين الرياضيات البحتة والتطبيقية. وهي تشمل مجموعة واسعة من المجالات التي تمتد من المشكلات المجردة في التحليل الحقيقي والتابعي إلى التطبيقات المباشرة في الهندسة والصناعة. لذلك ، تستخدم نظرية التقريب مجموعة كبيرة ومتنوعة من الطرائق ، والتي تنشأ في التحليل ، و التحليل العددي ، وحساب التفاضل والتكامل ، والخوارزميات ، ومجالات أخرى من الرياضيات.

والحدوديات المتعامدة بمثابة قلب نظرية التقريب لعدة أسباب أهمها القدرة العالية على نشر التوابع باستخدام هذه الحدوديات بالإضافة انها تقوم بتسهيل الحسابات العددية في التكامل باستخدام تريبيجات غاوص .

1- تعاريف ومفاهيم أساسية :

تعريف (1) [1] [7] : نقول عن التابع $w(x)$ انه تابع وزن اذا حقق :

$$w - 1 \text{ تابع مستمر على المجال } [a, b]$$

$$w(x) > 0, \forall x \in [a, b] - 2$$

$$\forall x \in [a, b], n \in \mathbb{N}, \int_a^b w \cdot |x|^n dx < \infty - 3$$

تعريف (2) [1] [7] : فضاء ليبيغ الموزون $(L^p(w, [a, b]))$: هو صف كل التوابع

القيوسة على المجال $[a, b]$ التي تحقق :

$$\|f\|_{L^p(w, [a, b])} := \left(\int_a^b |f(x)|^p \cdot w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

من أجل $p = 2$ نحصل على حالة خاصة الفضاء : $L^2(w, [a, b])$

تعريف (3) [1][7] : (الجداء الداخلي في الفضاء $L^2(w, [a, b])$ بفرض التابعين

$f(x), g(x) \in C[a, b]$ عندئذ سنعرف الجداء الموزون بالشكل :

$$\langle f, g \rangle_w := \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot d\mu$$

حيث $d\mu = w(x)dx$

تعريف (4) [5][1] : (فضاء سوبوليف $(W^{k,p}([a, b], \mu))$: هو فضاء التتابع

التي تنتمي هي ومشتقاتها لفضاء ليبيغ $L^2(w, [a, b])$ وتحقق :

$$\|f\|_{W^{k,p}([a,b],\mu)}^p = \sum_{j=0}^k \int |f^{(j)}|^p d\mu_j < \infty$$

حيث $1 \leq p < \infty$ و $w = (w_0, w_1, \dots, w_k)$ و $d\mu_i = w_i dx$

ملاحظة (1) : الجداء الداخلي في فضاء سوبوليف من أجل $p = 2$ له الشكل :

$$\langle f, g \rangle_{w_{(\mu_0 \dots \mu_k)}, [a, b]}^{k,2} :=$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) d\mu_0 + \int_a^b f'(x) \cdot g'(x) \cdot d\mu_1 + \dots + \int_a^b f^{(k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) \cdot d\mu_k$$

حيث : $i = 0, \dots, k$ $d\mu_i = w_i(x)dx$

من أجل الحالة الخاصة $k = 1$ سنرمز للجداء بالشكل :

$$\langle f, g \rangle_{w_{(\mu_0, \mu_1)}, [a, b]}^{1,2} = \langle f, g \rangle_s$$

2- الحدوديات المتعامدة الكلاسيكية في الفضاء $L^2(w, [a, b])$ [7]:

إن من أهم الطرق لبناء الحدوديات هي العلاقات العودية وذلك لعدة أسباب أهمها سهولة كتابة البرامج والمرونة في التعامل مع الكثير من الفضاءات وتعتبر الطريقة المفضلة لدى مبرمجي الرياضيات المحوسبة والباحثين في التحليل العددي

العلاقة العودية في بناء الحدوديات المتعامدة في الفضاء $L^2(w, [a, b])$

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_{-1} = 0 \\ p_{n+1} = (x - a_n)p_n(x) - b_n p_{n-1}(x) \end{cases}$$

حيث :

$$a_n = \frac{\langle x \cdot p_n, p_n \rangle_w}{\langle p_n, p_n \rangle_w}$$

$$b_n = \frac{\langle p_n, p_n \rangle_w}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle_w}$$

طريقة غرام شميث لبناء الحدوديات المتعامدة [7]: من أجل أية أسرة من الحدوديات

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ يمكن بناء الحدوديات المتعامدة $\{u_1, \dots, u_n\}$ كما يأتي :

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle u_1, v_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, v_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$$

وبشكل عام :

$$u_k = v_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle u_j, v_k \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j$$

والجملة النظامية تكون :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}, \dots, e_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$$

3- الحدوديات المتعامدة في الفضاء $W^{1,2}(w, [a, b])$

بالاعتماد على المرجع [4] و [6] سنقوم بتعميم بعض المبرهنات

طريقة ستيلجس:

مبرهنة (1): العلاقة العودية لبناء حدوديات في فضاءات سوبوليف تعطى بالشكل :

$$p_{k+1}(t) = t \cdot p_k(t) - \sum_{j=0}^k \beta_j^k \cdot p_{k-j}(t) \dots \dots \dots (1)$$

حيث إن:

$$p_0(t) = 1$$

$$\beta_j^k = \frac{\langle t \cdot p_k, p_{k-j} \rangle_s}{\langle p_{k-j}, p_{k-j} \rangle_s} \quad j = 0, \dots, k, k = 0, \dots, n-1$$

حيث :

$$\langle \dots \rangle_{W^{1,2}_{(\mu_0, \mu_1), [a, b]}} = \langle \dots \rangle_s$$

الاثبات :

من أجل أي كثيرة حدود واحدة p_{k+1} (أمثال أعلى حد فيها هو 1) من الدرجة $k+1$ يمكن كتابتها بشكل تركيب خطي من الشكل :

$$p_{k+1} = t.p_k + \underbrace{(-\beta_0^k)p_k + \dots + (-\beta_0^0)p_0}_{\text{تركيب خطي}}$$

$$\text{ولنضع } q_k = p_{k+1} - tp_k$$

عندئذ يمكن التعبير عن q_k بشكل تركيب خطي بالشكل :

$$q_k = p_{k+1} - tp_k = - \sum_{j=0}^k \beta_j^k p_{k-j}(t)$$

حيث β_j^k ثوابت يطلب تعيينها

لنضرب طرفي العلاقة السابقة بـ p_{k-j}

$$\langle p_{k+1}, p_{k-j} \rangle - \langle tp_k, p_{k-j} \rangle = -\beta_j^k \langle p_{k-j}, p_{k-j} \rangle$$

حيث $j = 0, 1, \dots, k$ ومنه :

$$\beta_j^k = \frac{\langle tp_k, p_{k-j} \rangle_s}{\langle p_{k-j}, p_{k-j} \rangle_s}$$

طريقة تشبيثيف المعدلة :

تسهيلا للكتابة سنضع :

$$\sigma_{k,l} = \langle \pi_k, p_l \rangle_s$$

حيث p_l كثيرة حدود كلاسيكية و π_k كثيرة الحدود في فضاء سوبوليف

مبرهنة (2) : المعاملات في بناء كثيرات حدود لها الشكل :

$$-1 \text{ من أجل } k = j = 0$$

$$\beta_0^0 := \frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,0}} + a_0$$

$$-2 \text{ من أجل } k = 1, 2, \dots, n-1 \text{ و } j = k-1, k-2, \dots, 1$$

$$\beta_0^k := \frac{\sigma_{k,k+1}}{\sigma_{k,k}} + a_k - \frac{\sigma_{k-1,k}}{\sigma_{k-1,k-1}}$$

$$\beta_{k-j}^k := \frac{\sigma_{j,k+1}}{\sigma_{j,j}} + a_k \frac{\sigma_{j,k}}{\sigma_{j,j}} + b_k \frac{\sigma_{j,k-1}}{\sigma_{j,j}} - \frac{\sigma_{j-1,k}}{\sigma_{j-1,j-1}} - \sum_{l=j}^{k-1} \beta_{l-j}^k \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}}$$

$$\beta_k^k := \frac{\sigma_{0,k+1}}{\sigma_{0,0}} + a_k \frac{\sigma_{0,k}}{\sigma_{0,0}} + b_k \frac{\sigma_{0,k-1}}{\sigma_{0,0}} - \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l^k \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}}$$

الاثبات :

$$\langle \pi_j, \pi_j \rangle = \langle \pi_j, p_j \rangle = \sigma_{j,j} \text{ لدينا}$$

$$\text{ولدينا أيضاً: } p_k = \pi_k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\sigma_{j,k}}{\sigma_{j,j}} \pi_j \text{ من أجل } k = 0, 1, \dots$$

عندئذ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{j,k+1} &= \langle \pi_j, p_{k+1} \rangle = \langle \pi_j, tp_k - a_k p_k - b_k p_{k-1} \rangle \\
&= \langle \pi_j, tp_k \rangle - a_k \langle \pi_j, p_k \rangle - b_k \langle \pi_j, p_{k-1} \rangle \\
&= \langle \pi_j, t \left(\pi_k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\sigma_{j,k}}{\sigma_{j,j}} \pi_j \right) \rangle - a_k \langle \pi_j, p_k \rangle - b_k \\
&\quad \langle \pi_j, p_{k-1} \rangle \\
&= \langle \pi_j, t(\pi_k) \rangle + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}} \langle \pi_j, t\pi_l \rangle - a_k \sigma_{j,k} - b_k \sigma_{j,k-1}
\end{aligned}$$

لكن :

$$\begin{aligned}
\beta_{k-j}^k &= \frac{\langle \pi_k, t\pi_k \rangle}{\langle \pi_j, \pi_j \rangle} \Rightarrow \langle \pi_k, t\pi_k \rangle = \beta_{k-j}^k \sigma_{j,j} \\
&= \beta_{k-j}^k \sigma_{j,j} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}} \langle \pi_j, t\pi_l \rangle - a_k \sigma_{j,k} - b_k \sigma_{j,k-1}
\end{aligned}$$

بوضع $\sigma_{0,-1} = 0$ و $j = k = 0$

$$\sigma_{0,1} = \beta_0^0 \sigma_{0,0} - a_0 \sigma_{0,0}$$

ومنه :

$$\beta_0^0 = \frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,0}} + a_0$$

من أجل $j = 0$

$$\langle \pi_0, t.\pi_l \rangle = \beta_l^l \sigma_{0,0}$$

عندها :

$$\beta_k^k := \frac{\sigma_{0,k+1}}{\sigma_{0,0}} + a_k \frac{\sigma_{0,k}}{\sigma_{0,0}} + b_k \frac{\sigma_{0,k-1}}{\sigma_{0,0}} - \sum_{l=0}^{k-1} \beta_l^l \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}}$$

من أجل $l < j - 1$ يكون : $\langle \pi_j, t\pi_l \rangle = 0$

ويكون أيضاً : $\langle \pi_j, t\pi_{j-1} \rangle = \langle \pi_j, \pi_j \rangle = \sigma_{j,j}$

$$\begin{aligned} \sigma_{j,k+1} &= \beta_{k-j}^k \sigma_{j,j} + \frac{\sigma_{j-1,k}}{\sigma_{j-1,j-1}} \sigma_{j,j} + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}} \langle \pi_j, t\pi_l \rangle \\ &> -a_k \sigma_{j,k} - b_k \sigma_{j,k-1} \end{aligned}$$

بعزل β_{k-j}^k

$$\beta_{k-j}^k := \frac{\sigma_{j,k+1}}{\sigma_{j,j}} + a_k \frac{\sigma_{j,k}}{\sigma_{j,j}} + b_k \frac{\sigma_{j,k-1}}{\sigma_{j,j}} - \frac{\sigma_{j-1,k}}{\sigma_{j-1,j-1}} - \sum_{l=j}^{k-1} \beta_{l-j}^k \frac{\sigma_{l,k}}{\sigma_{l,l}}$$

انطلاقاً من الخوارزميتين السابقتين سنقوم ببناء حدوديات سوبوليف في الحالات الآتية أو الجداءات الآتية علماً أن هذه التطبيقات العددية قمنا بكتابة برامج لحسابها باستخدام برنامج MATHEMATICA من أجل $n=5$ اما من أجل $n>5$ تحتاج لحواسيب عملاقة بقدرات عالية جداً :

الحالة الأولى : (وزن ليجنדר)

$$\langle f, g \rangle_{w_{((w_0, w_1), [a, b])}^{2,1}} := \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \cdot 1 dx + \int_{-1}^1 f'(x) \cdot g'(x) \cdot 1 dx$$

الحالة الثانية : (وزن تشبييف)

$$\langle f, g \rangle_{w_{((w_0, w_1), [a, b])}^{2,1}} := \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx + \int_{-1}^1 f'(x) \cdot g'(x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

الحالة الثالثة : (وزن لاجير)

$$\langle f, g \rangle_{w_{((w_0, w_1), [a, b])}^{2,1}} := \int_0^\infty f(x) \cdot g(x) e^{-x} dx + \int_0^\infty f'(x) \cdot g'(x) \cdot e^{-x} dx$$

الحالة الرابعة : (وزن هرميت)

$$\langle f, g \rangle_{w_{((w_0, w_1), [a, b])}^{2,1}} := \int_{-\infty}^\infty f(x) \cdot g(x) e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^\infty f'(x) \cdot g'(x) \cdot e^{-x^2} dx$$

تطبيقات :

الحالة الأولى : لئأخذ $w = \{w_1(x) = 1, w_2(x) = 1\}$ والمجال $[a, b] = [-1, 1]$

عندها باستخدام الكود (1) ومن أجل $n=5$ تكون الحدوديات هي :

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = -0.33333333333333 + t$$

$$P_2(t) = -0.461538461536 + 0.05128205128t + t^2$$

$$P_3(t) = 0.1487369587145 - 0.865905467017t - 0.018559768t^2 + t^3$$

$$P_4(t) = 0.290108334474 - 0.040358744923t \\ - 1.18903517452t^2 + 0.016340616t^3 + t^4$$

$$P_5(t) = -0.011353885158 + 0.4150105t - 0.0009992t^2 \\ - 1.4141345t^3 + 0.0083963t^4 + t^5$$

وباستخدام طريقة غرام شميدث للتعامل نجد الحدوديات المتعامدة المنظمة هي :

$$P'_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

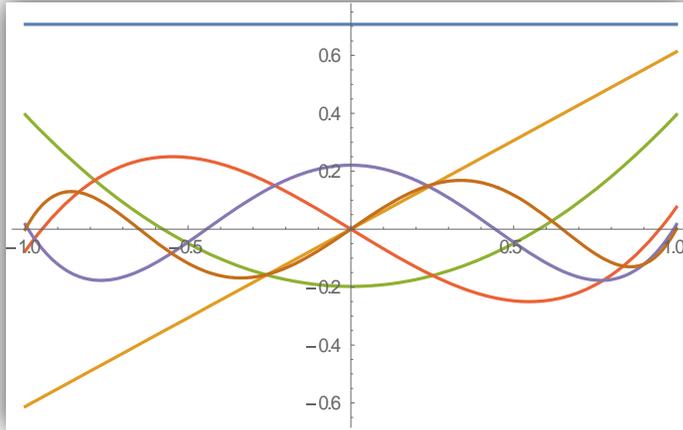
$$P'_1(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} t$$

$$P'_2(t) = -\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{8} + \frac{3}{8} \sqrt{\frac{5}{2}} t^2$$

$$P'_3(t) = -\frac{9}{2} \sqrt{\frac{7}{302}} t + 5 \sqrt{\frac{7}{302}} t^3$$

$$P'_4(t) = \frac{81}{8\sqrt{2102}} - \frac{495t^2}{8\sqrt{2102}} + \frac{105t^4}{2\sqrt{2102}}$$

$$P_5(t) = \frac{4005}{8} \sqrt{\frac{11}{4629962}} t - \frac{6755}{4} \sqrt{\frac{11}{4629962}} t^3 \\ + \frac{63}{8} \sqrt{\frac{1661}{30662}} t^5$$



الشكل (1)

وباستخدام الكود (1) نجد أن اصفار هذه الحدوديات هي :

كثيرة الحدود	الاصفار
p'_0	Non
p'_1	0
p'_2	-0.5773, 0.5773
p'_3	0, -0.9487, 0.9487
p'_4	-0.4431, 0.4431, -0.9911, 0.9911
p'_5	0, -0.6493, 0.6493, -0.9993, 0.9993

ملاحظة :

نلاحظ أن اصفار الحدوديات حقيقية ومتناظرة وتموضعة ضمن المجال $[-1,1]$

ملاحظة:

باستخدام تعليمة AbslutTiming في ماثماتيكا قمنا بالمقارنة بين زمن تنفيذ الخوارزمية الأولى والخوارزمية الثانية ووجدنا أن الخوارزمية الأولى اسرع من الخوارزمية الثانية

n	زمن التنفيذ بالثانية من أجل الخوارزمية الأولى (بالثانية)	زمن التنفيذ بالثانية من أجل الخوارزمية الثانية (بالثانية)
2	0.4 sec	1 sec
3	0.6 sec	3 sec
4	0.7 sec	5 sec
5	0.9 sec	9 sec

الحالة الثانية :

لنأخذ $[a, b] = [-1, 1]$ والمجال $w = \{w_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, w_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\}$

عندها باستخدام الكود (2) ومن أجل $n=5$ تكون الحدوديات هي :

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = -0.5 + t$$

$$P_2(t) = -0.461 + 0.0513t + t^2$$

$$P_3(t) = 0.345 - 1.13t - 0.0288t^2 + t^3$$

$$P_4(t) = 0.29 - 0.0403t - 1.18t^2 + 0.0163t^3 + t^4$$

$$P_5(t) = -0.0113 + 0.415t - 0.001t^2 - 1.41t^3 + 0.000465t^4 + t^5$$

وباستخدام طريقة غرام شميدت للتعامد نجد الحدوديات المتعامدة و المنظمة هي :

$$P'_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

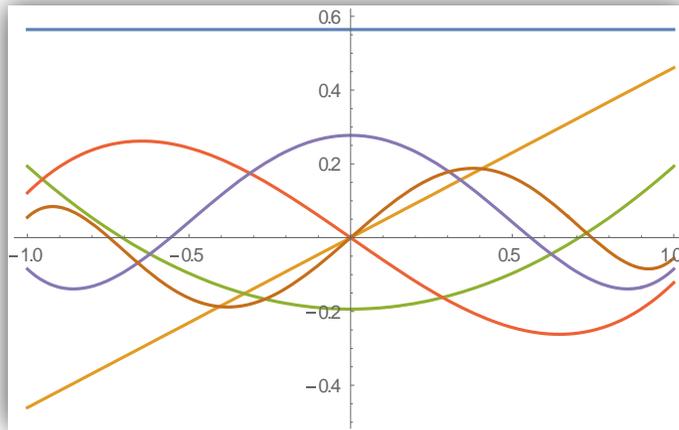
$$P_1'(t) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} t$$

$$P_2'(t) = -\sqrt{\frac{2}{17\pi}} + 2\sqrt{\frac{2}{17\pi}} t^2$$

$$P_3'(t) = -5\sqrt{\frac{2}{43\pi}} t + 4\sqrt{\frac{2}{43\pi}} t^3$$

$$P_4'(t) = 7\sqrt{\frac{14}{2839\pi}} - 200\sqrt{\frac{2}{19873\pi}} t^2 + 8\sqrt{\frac{34}{1169\pi}} t^4$$

$$P_5'(t) = 1265\sqrt{\frac{2}{1725891\pi}} t - 1140\sqrt{\frac{6}{575297\pi}} t^3 + 16\sqrt{\frac{258}{13379\pi}} t^5$$



الشكل (2)

وباستخدام الكود (2) نجد أن اصفار هذه الحدوديات هي :

كثيرة الحدود	الاصفار
p'_0	non
p'_1	0
p'_2	-0.7071 , 0.7071
p'_3	0
p'_4	-0.5573 , 0.5573
p'_5	0 , -0.7466 , 0.7466

ملاحظة : نلاحظ أن أصفار الحدوديات حقيقية ومتناظرة وتموضعة ضمن

المجال $[-1,1]$

الحالة الثالثة :

لنأخذ $w = \{w_1(t) = e^{-t}, w_2(x) = e^{-t}\}$ والمجال $[0, +\infty[$

عندها باستخدام الكود (3) ومن أجل $n=5$ تكون الحدوديات هي:

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = -2.0 + t$$

$$P_2(t) = 1.33 - 2.66t + t^2$$

$$P_3(t) = -2.5 + 11.0t - 7.38t^2 + t^3$$

$$P_4(t) = 8.26 - 48.3t + 46.8t^2 - 13.3t^3 + t^4$$

$$P_4(t) = -33.4 + 230.t - 311.t^2 + 139.t^3 - 21.5t^4 + t^5$$

وباستخدام طريقة غرام شميدت للتعامل نجد الحدوديات المتعامدة و المنظمة هي :

$$P'_0(t) = 1$$

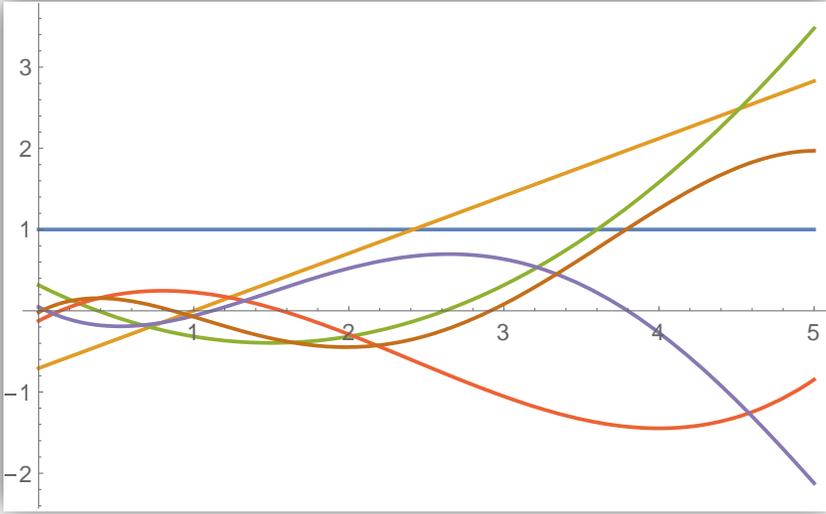
$$P'_1(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$P'_2(t) = \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{3t}{\sqrt{10}} + \frac{t^2}{\sqrt{10}}$$

$$P'_3(t) = -\frac{1}{\sqrt{65}} + \frac{8t}{\sqrt{65}} - \frac{6t^2}{\sqrt{65}} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{13}}t^3$$

$$P'_4(t) = \frac{1}{\sqrt{442}} - \frac{21t}{\sqrt{442}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{17}{26}}t^2 - \frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{221}}t^3 + \frac{1}{24}\sqrt{\frac{13}{34}}t^4$$

$$P'_5(t) = -\frac{1}{\sqrt{3026}} + \frac{55t}{\sqrt{3026}} - \frac{11}{2}\sqrt{\frac{17}{178}}t^2 + \frac{62}{3}\sqrt{\frac{2}{1513}}t^3 - \frac{149t^4}{24\sqrt{3026}} + \frac{1}{60}\sqrt{\frac{17}{178}}t^5$$



الشكل (3)

وباستخدام الكود (3) نجد أن اصفار هذه الحدوديات هي :

كثيرة الحدود	الاصفار
p'_0	non
p'_1	0
p'_2	-0.7071 , 0.7071
p'_3	0, -1.118, 1.118
p'_4	-0.5573, 0.5573, -1.077, 1.077
p'_5	0, -0.7466, 0.7466, -1.048, 1.048

ملاحظة : نلاحظ أن أصفار الحدوديات حقيقية ومتناظرة

الحالة الرابعة :

لنأخذ $w = \{w_1(x) = e^{-t^2}, w_2(x) = e^{-t^2}\}$ والمجال $[a, b] =]-\infty, +\infty[$

عندها باستخدام الكود (4) ومن أجل $n=5$ تكون الحدوديات هي :

$$P_0(t) = 1$$

$$P_1(t) = -0.5 + t$$

$$P_2(t) = -0.7857 + 0.07143t + t^2$$

$$P_3(t) = 0.3396 - 1.394t - 0.02315t^2 + t^3$$

$$P_4(t) = 1.303 - 0.05649t - 2.952t^2 + 0.004552t^3 + t^4$$

$$P_4(t) = -0.4031 + 3.574t + 0.01244t^2 - 4.969t^3 + 0.001345t^4 + t^5$$

وباستخدام طريقة غرام شميدث للتعامل نجد الحدوديات المتعامدة و المنظمة هي :

$$P'_0(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}}$$

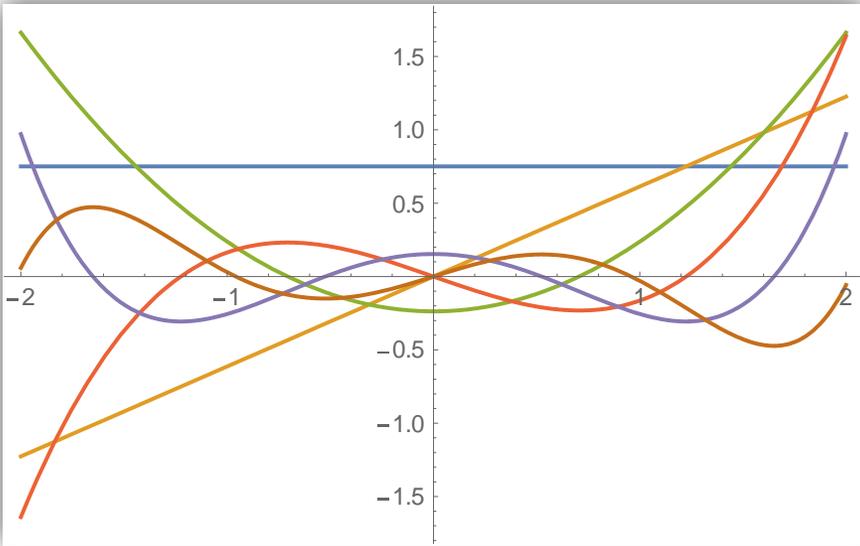
$$P'_1(t) = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}t}{\pi^{1/4}}$$

$$P'_2(t) = \frac{1}{\sqrt{10}\pi^{1/4}} + \frac{\sqrt{\frac{2}{5}}t^2}{\pi^{1/4}}$$

$$P_3'(t) = -\frac{\sqrt{\frac{3}{7}}t}{\pi^{1/4}} + \frac{2t^3}{\sqrt{21}\pi^{1/4}}$$

$$P_4'(t) = \frac{1}{2\sqrt{6}\pi^{1/4}} - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}t^2}{\pi^{1/4}} + \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}t^4}{3\pi^{1/4}}$$

$$P_5'(t) = \frac{\sqrt{15}t}{2\sqrt{11}\pi^{1/4}} - \frac{2\sqrt{\frac{5}{33}}t^3}{\pi^{1/4}} + \frac{2t^5}{\sqrt{165}\pi^{1/4}}$$



الشكل (4)

وباستخدام الكود (4) نجد أن اصفار هذه الحدوديات هي :

كثيرة الحدود	الاصفار
p'_0	non
p'_1	1.0
p'_2	0.382 , 2.61
p'_3	$5.49 + 10^{-4}i$, $0.1393 + 0.0i$, $1.56 + 10^{-4}i$
p'_4	$0.0507 + 10^{-5}i$, $1.119 + 10^{-5}i$, $3.8 + 10^{-5}i$, $8.57 + 10^{-5}i$
p'_5	0.0187, 0.866, 2.91 , 6.31 , 11.8

ملاحظة : نلاحظ أن الاصفار غير متناظرة وهناك أصفار عقدية

في هذه الفقرة سنستخدم كثيرة حدود لوجندر التي قمنا ببنائها في إيجاد القيمة التقريبية للتكاملات باستخدام طريقة غاوص التربيعية

تربيعات غاوص [8] : تستخدم هذه الطريقة لإيجاد قيمة تقريبية للتكاملات بدقة عالية

ويعطى الشكل العالم لعلاقة غاوص التربيعية :

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x)dx \cong \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

تسمى x_i عقد العلاقة التربيعية وهي اصفار لكثيرات حدود متعامدة (قد تكون لوجندر أو تشبشيف أو غيرها) و c_i الثوابت الموافقة لهذه النقاط و(التي علينا ايجادها حتى تكون المساواة السابقة مضبوطة) ، تتحول العلاقة السابقة الى مساواة صحيحة من أجل كل كثيرة حدود درجة لا تتجاوز $2n - 1$

أي ان الشرط اللازم والكافي لتكون المساواة السابقة صحيحة هو أن يكون :

$$f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n-1}$$

الآن سنقوم بإيجاد القيمة التقريبية للتكامل:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + e^{2x}} dx$$

وسنستخدم كثيرة حدود لوجندر التي قمنا ببنائها في فضاء سوبوليف السابق من الدرجة $n = 5$ أي:

$$P_5(t) = -0.011353885158 + 0.4150105t - 0.0009992t^2 - 1.4141345t^3 + 0.0083963t^4 + t^5$$

وأصفارها هي:

$$x_1 = 0, x_2 = -0.6493, x_3 = 0.6493, x_4 = -0.9993, x_5 = 0.9993$$

ومنه:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^1 1 dx = \sum_{i=1}^5 c_i \cdot 1$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 2 \dots (1)$$

$$f(x) = x \Rightarrow \int_{-1}^1 x dx = \sum_{i=1}^5 c_i \cdot x_i$$

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 + x_4 c_4 + x_5 c_5 = 0 \dots (2)$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow \int_{-1}^1 x^2 dx = \sum_{i=1}^5 c_i \cdot (x_i)^2$$

$$x_1^2 c_1 + x_2^2 c_2 + x_3^2 c_3 + x_4^2 c_4 + x_5^2 c_5 = \frac{2}{3} \dots (3)$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow \int_{-1}^1 x^3 dx = \sum_{i=1}^5 c_i \cdot (x_i)^3$$

$$x_1^3 c_1 + x_2^3 c_2 + x_3^3 c_3 + x_4^3 c_4 + x_5^3 c_5 = 0 \dots (4)$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow \int_{-1}^1 x^4 dx = \sum_{i=1}^5 c_i \cdot (x_i)^4$$

$$x_1^4 c_1 + x_2^4 c_2 + x_3^4 c_3 + x_4^4 c_4 + x_5^4 c_5 = \frac{2}{5} \dots (5)$$

بحل جملة المعادلات السابقة نجد :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + e^{2x}} dx \cong \sum_{i=1}^5 c_i f(x_i) = 1.002$$

والقيمة الحقيقية له هي 1

توصيات ومقترحات :

من النتائج السابقة نوصي بكتابة علاقات عودية لبناء حدوديات سوبوليف في الفضاء $W^{k,2}(w, [a, b])$ حيث $k > 1$ وتعميم على اوزان كوزن جاكوبي ودراسة اصفار هذه الحدوديات

المراجع :

- [1] Zagorodnyuk, S. M. (2021). **On some Sobolev spaces with matrix weights and classical type Sobolev orthogonal polynomials.** *Journal of Difference Equations and Applications*, 27(2), 261–283.
- [2] Rodriguez, J. M., & Sigarreta, J. M. (2008). **Sobolev spaces with respect to measures in curves and zeros of Sobolev orthogonal polynomials.** *Acta applicandae mathematicae*, 104(3), 325–353.
- [3] Kendall Atkinson • Weimin Han , (2012) **Theoretical Numerical Analysis A Functional Analysis Framework** , Springer
- [4] Walter Gautschi , (2005), **Orthogonal Polynomials (in Matlab)** , Journal of Computational Mathematics
- [5] Figueroa, L. E. (2017). **Orthogonal polynomial projection error measured in Sobolev norms in the unit ball.** *Journal of Approximation Theory*, 220, 31–43..
- [6] Marcellán, F., & Xu, Y. (2015). **On Sobolev orthogonal polynomials.** *Expositiones Mathematicae*, 33(3), 308–352.
- [7] Leoni, G. (2017). **A first course in Sobolev spaces.** American Mathematical Soc.
- [8] James F. Epperson (2017). **An introduction to numerical methods and analysis** American Mathematical Soc.