النشر بسلاسل فورييه – تشيبيشيف في بعض فضاءات التوابع مع تطبيقات

د. رهف الدكاك (1)

ملخص البحث

في هذا البحث نريد توسيع عملية النشر بسلسلة فورييه وفق توابع تشيبتشيف من النوع الأول لتوابع الفضاءات L_p من أجل جميع قيم p . ولكن للوصول إلى هدفنا المنشود فإننا نحتاج لفضاء خطي جزئي من الفضاء L_2 يتمتع ببعض الصفات البسيطة سنرمز له بـ $\mathfrak{D}$ ونسميه فضاء الاختبار ، ومن ثم نوجد الفضاء الثنوي له $\mathfrak{D}'$ (أي فضاء الدّاليات الخطيّة المحدودة) والذي بدوره يتألف من سلاسل فورييه التي تحقق خواص محدّدة ، وهذا الفضاء يحوي كل الفضاءات L_p كفضاءات جزئية منه.

في الحقيقة يمكن اختيار الفضاء $\mathfrak{D}$ بعدة طرائق حسب الهدف المنشود ، وسنختاره هنا بحيث تكون عوامل فورييه لعناصره متناقصة بسرعة.

سوف نستفيد من النتائج التي حصلنا عليها لحل بعض المسائل في الفضاءات المشكلة.

الكلمات المفتاحية :

سلاسل فورييه ، التوابع الخاصة ، كثيرات حدود تشيبيشيف ، النشر المتعامد. المؤثرات التفاضلية ، النظرية الطيفية

-

(1) د. رهف الدكاك – قسم العلوم الأساسية – كلية الهندسة ـ الجامعة العربية الدولية .

Expansions in Fourier – Chebyshev Series in some Function Spaces with Applications

Dr. Rahaf Al- Dakkak (1)

Abstract

In this paper we generalize the expansions in Fourier series with respect to Chebyshev polynomials of the first kind in some function spaces including the spaces L_p . To obtain the desired we need a linear subspace in L_2 having some simple properties, it is denoted by $\mathfrak{D}$ and called the test space, then we construct its dual space, denote it by $\mathfrak{D}'$and then proof that its elements are Fourier series satisfying some conditions, which we use to develop the expansions in the spaces L_p. Then we use the results to solve some problems in several function spaces.

Key Words,

Fourier Series, Special Functions, Chebyshev Polynomials,

Orthogonal Expansions, Differential Operators, Spectral Theory.

-

(1) Dr. Rahaf Al- Dakkak – Department of Basic Science,
Engineering Faculty – Arab International University (AIU).

1- مقدمة:

بداية نذكر بتعريف الفضاءات L_p والنشر بسلسلة فورييه في الفضاء L_2، [10] ,[8]
.

من أجل $1 \leq p < \infty$ يرمز بـ $L_p = L_p(a,b)$ لفضاء باناخ المؤلف من التوابع من الشكل: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ القيوسة والكمولة على المجال $[a,b]$ بالأس p مع النظيم

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1.1)$$

(حيث التكامل مأخوذ بمفهوم لوبيغ):

كما نرمز بـ $C = C[a,b]$ لفضاء التوابع المستمرة $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ المزودة بالنظيم:

$$\|f\|_\infty = sup_{x\in[a,b]}|f(x)| \qquad (1.2)$$

ومن المعلوم (في الحالة الخاصة $p = 2$) أنّ L_2 فضاء هيلبرت مع الجداء الداخلي:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x).\, g(x)dx \qquad (1.3)$$

إذا كانت $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ جملة متعامدة ومنظمة وتامة في الفضاء L_2 فعندئذ يمكن نشر كل تابع من هذا الفضاء بسلسلة فورييه من الشكل:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f, u_n\rangle u_n(x) \qquad (1.4)$$

متقاربة من $f(x)$ نفسه في الفضاء L_2.

نسمي الأعداد $\langle f, u_n\rangle$ عوامل فورييه للتابع f بالنسبة للجملة $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

ربما النشر (1.4) لن يكون صحيحاً في الفضاءات L_p عندما $p \neq 2$ (قد يصح لأجل بعض قيم p وليس جميعها) ولكن في هذا البحث سنحاول إيجاد نشر مشابه لـ (1.4) من أجل جميع قيم p . وبما أنّ الجملة تامة فتصح مساواة بارسيفال:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|\langle f, u_n\rangle|^2 \quad ; \quad f \in L_2 \qquad (1.5)$$

سنحتاج أيضاً لبعض الفرضيات الإضافية حول الجملة $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ، وهذه بدورها محققة من أجل معظم التوابع الخاصة الكلاسيكية بما فيها كثيرات حدود تشيبتشيف التي سنتعامل معها:

(1) نعتبر أنّ التوابع $u_n(x)$ تنتمي إلى الفضاءات C و L_p حيث $1 \le p < \infty$ ، ونعرّف عوامل فورييه للتابع $f(x)$ في هذا الفضاء بالشكل المألوف:

$$a_n(f) = \int_a^b f(x) u_n(x)\, dx \qquad (1.6)$$

فيكون للتابع $f(x)$ سلسلة فورييه شكلية (تسمى أيضاً: النشر الشكلي):

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) u_n(x) \qquad (1.7)$$

هذه السلسلة قد تتقارب من f نفسه وقد لاتتقارب .(التقارب مؤكد في حالة $p = 2$) كما ذكرنا قبل قليل).

(2) نعتبر أنّ الجملة $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ تحقق الشروط الثلاثة الآتية":

أولاً: كلية (Total)، هذا يعني أنّه إذا كان $a_n(f) = 0$ من أجل $n = 0,1,2,\ldots$ فينتج أنّ $f = 0$.

ثانياً: أساسية (Fundamental)، أي أن مجموعة كل التراكيب الخطية للتوابع $u_n(x)$ تشكل مجموعة كثيفة في الفضاء المذكور.

ثالثاً: من أجل أي عدد طبيعي k تكون السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} \|u_n\|_p^2$ متقاربة.

2 – فضاء الاختبار $\mathfrak{D}$

نعرّف الآن فضاء الاختبار $\mathfrak{D}$ الذي هو فضاء جزئي من الفضاء L_2 ، وسوف نثبت لاحقاً أنّه جزئي من كل الفضاءات L_p حيث $1 \le p < \infty$ أو C. نشير هنا أنه يمكن تشكيل الفضاء بعدة طرائق، انظر مثلاً : [2] , [3] , [9] ، وقد شكلناه هنا اعتمادا على عوامل فورييه لعناصره التي يجب أن تكون متناقصة بسرعة.

(2−1) تعريف: نرمز بـ $\mathfrak{D}$ لمجموعة جميع التوابع $\varphi \in L_2$ والتي تحقق:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi, u_n \rangle|^2 < \infty \quad ; \ \forall k = 0,1,2,\ldots$$

ونسمي $\mathfrak{D}$ فضاء الاختبار.

(2−2) ملاحظة: (أ) المجموعة $\mathfrak{D}$ ليست خالية فهي تحوي (على الأقل) التوابع$u_n(x)$. ينتج ذلك من كون الجملة $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ متعامدة ومنظمة ، و من أجل كل m مثبت يكون لدينا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle u_m, u_n \rangle|^2 = m^{2k} \quad ; (\ m = 0,1,2,\ldots).$$

أكثر من ذلك فإنّ $\mathfrak{D}$ يحوي جميع التراكيب الخطيّة للتوابع $u_n(x)$.

(ب) إذا عرّفنا الأعداد $\|\varphi|_k$ بالشكل:

$$\|\varphi|_k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi, u_n \rangle|^2 \quad ; \quad k = 0,1,2, \dots \qquad (2.1)$$

نحصل على أسرة من أنصاف النظائم $\left\{\|\varphi|_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ على $\mathfrak{D}$ وتحقق:

$$\|\varphi|_0 \le \|\varphi|_1 \le \|\varphi|_2 \le \cdots \ ; \ \varphi \in \mathfrak{D} \qquad (2.2)$$

أي أنّ $\mathfrak{D}$ فضاء متعدد أنصاف النظائم (multi – subnormed space).

(2−3) تعريف: نقول عن متتالية $\{\varphi_n\}$ من $\mathfrak{D}$ إنها متقاربة من التابع φ إذا كان:

$$\|\varphi_N - \varphi|_k \longrightarrow 0 \ ; \ N \to \infty \quad , \ \forall k = 0,1,2, \dots..$$

والآن نوجد أهم خواص الفضاء $\mathfrak{D}$.

(2−4) مبرهنة: $\mathfrak{D}$ فضاء تام مع أسرة أنصاف النظائم (2.1).

الإثبات: لتكن $\{\varphi_n\}$ متتالية كوشي في $\mathfrak{D}$. هذا يعني :

$$\|f_M - f_N|_k < \varepsilon \ ; \ N > M > N_0(\varepsilon) \quad , \ k = 0,1,2, \dots \quad (\varepsilon > 0).$$

بما أنّ التوابع φ_n تنتمي للفضاء L_2 فيكون لدينا بحسب مساواة بارسيفال (1.5) :

$$\|\varphi_N - \varphi_M\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \varphi_N - \varphi_M, u_n \rangle|^2$$
$$\le \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi_N - \varphi_M, u_n \rangle|^2 < \varepsilon^2 \ ; \ N > M > N_0(\varepsilon) .$$

وبالتالي المتتالية $\{\varphi_n\}$ متقاربة في الفضاء L_2 ، ولنضع $\lim_{N\to\infty} \varphi_N = \varphi_0$.

الآن ليكن K عدداً طبيعياً مثبتاً ، ولنكتب:

$$\sum_{n=1}^{K} n^{2k} |\langle \varphi_0 - \varphi_N, u_n \rangle|^2 =$$
$$= \sum_{n=1}^{K} n^{2k} |\langle (\varphi_0 - \varphi_M) + (\varphi_M - \varphi_N), u_n \rangle|^2$$
$$\le 2\left(\sum_{n=1}^{K} n^{2k} |\langle (\varphi_0 - \varphi_M), u_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{K} n^{2k} |\langle (\varphi_M - \varphi_N), u_n \rangle|^2\right) .$$

بحسب الفرضيات فإنّ الحد الثاني في الطرف الأيمن أصغر من ε^2 ويمكن جعل الحد الأول أصغر من ε^2 باختيار M كبير بشكل كاف وبشكل مستقل عن K . لذلك يكون:

$$\sum_{n=1}^{k} n^{2k} |\langle (\varphi_0 - \varphi_M), u_n \rangle|^2 \le 4\varepsilon^2 \quad ; \quad N > N_0(\varepsilon) .$$

وبما أنّ الطرف الأيمن مستقل عن K فيمكن جعل $K \longrightarrow \infty$ لنجد $(\varphi_0 - \varphi_M) \in \mathfrak{D}$ ، وبالتالي : $\varphi_0 = (\varphi_0 - \varphi_M) + \varphi_M \in \mathfrak{D}$. ومنه نحصل على المطلوب.

(5−2) مبرهنة: (1) يمكن نشر كل تابع $\varphi \in \mathfrak{D}$ بسلسلة فورييه من الشكل :

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, u_n \rangle u_n \qquad (2.3)$$

وهذه السلسلة متقاربة في $\mathfrak{D}$ من φ نفسه.

(2) كل سلسلة من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ ، حيث $a_n \in \mathbb{R}$ ، تكون متقاربة في $\mathfrak{D}$ إذا وفقط وإذا تحقق الشرط الآتي:

لأجل كل عدد صحيح غير سالب k تكون السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |a_n|^2$ متقاربة. فإذا تحقق هذا الشرط ورمزنا بـ φ لمجموعها، فعندئذ يكون: $a_n = \langle \varphi, u_n \rangle$.

الإثبات:

(1) ليكن $\varphi \in \mathfrak{D}$ ، عندئذ يكون $\varphi \in L_2$ ، وبالتالي له السلسلة:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, u_n \rangle u_n \qquad (\text{التقارب في } L_2).$$

لنضع الآن:

$$\varphi_N = \sum_{n=0}^{N} \langle \varphi, u_n \rangle u_n \quad ; \quad N = 1,2, \ldots$$

فنجد أنّ $\varphi_N \in \mathfrak{D}$ من أجل كل N ، كما أن:

$$\varphi - \varphi_N = \sum_{j=N+1}^{\infty} \langle \varphi, u_j \rangle u_j$$

ويكون لدينا:

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_N\|_k^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} \left|\langle \varphi - \varphi_N, u_n \rangle\right|^2 \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi, u_n \rangle|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \,. \end{aligned}$$

أي أنّ $\{\varphi_N\}$ متقاربة في $\mathfrak{D}$ من التابع φ وبالتالي (2.3) صحيحة.

(2) لنفرض أنّ السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ متقاربة في $\mathfrak{D}$ ولنرمز لمجموعها بـ φ ، فيكون:

$$\langle \varphi, u_n \rangle = \langle \sum_{j=0}^{\infty} a_j u_j \,, u_n \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left|\langle u_j, u_n \rangle\right|^2 = a_n \,.$$

من ناحية ثانية لدينا:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} \left|\langle \sum_{j=0}^{\infty} a_j u_j \,, u_n \rangle\right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |a_n|^2 \,.$$

ومنه نحصل على المطلوب.

(6−2) مبرهنة: الطمر المستمر $\mathfrak{D} \hookrightarrow L_p$ (أو C) محقق من أجل $1 \le p < \infty$.

الإثبات: بحسب ماسبق، من الواضح أنّ المبرهنة صحيحة في حالة $p = 2$.

ليكن $\varphi \in \mathfrak{D}$ ،ولنضع:

$$\varphi_N = \sum_{n=0}^{N} \langle \varphi, u_n \rangle u_n \quad ; \quad N = 1,2,3, \dots$$

فنجد أنّ $\varphi_N \in L_p$ من أجل $1 \le p < \infty$، ولدينا من أجل $N > M > N_0(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_N - \varphi_M\|_p &= \|\sum_{n=M+1}^{N} \langle \varphi, u_n \rangle u_n \|_p \\ &\le \sum_{n=M+1}^{N} |\langle \varphi, u_n \rangle| . \|u_n\|_p = \\ &= \sum_{n=M+1}^{N} n^k |\langle \varphi, u_n \rangle| . n^{-k} . \|u_n\|_p \\ &\le (\sum_{n=M+1}^{N} n^{2k} |\langle \varphi, u_n \rangle|^2)^{\frac{1}{2}} . (\sum_{n=M+1}^{N} n^{-2k} . \|u_n\|_p^2)^{\frac{1}{2}} . \\ &\le \|\varphi|_k . \varepsilon . \end{aligned}$$

لذلك فإنّ $\{\varphi_N\}$ متتالية كوشي في L_p ، فهي متقاربة ولنفرض أنّ:

$$g = \lim_{N\to\infty} \varphi_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \langle \varphi, u_n \rangle u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, u_n \rangle u_n .$$

من ناحية ثانية: لدينا من أجل $m = 0,1,2, \dots$:

$$\langle g, u_m \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \varphi, u_n \rangle \langle u_n, u_m \rangle = \langle \varphi, u_m \rangle .$$

من ذلك ينتج أنّ: $g = \varphi$ وبالتالي $\mathfrak{D} \subset L_p$.

لدينا الآن بحسب (2.3) من أجل $\varphi \in \mathfrak{D}$ (وبحسب متراجحة شفارتز):

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_p &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\langle \varphi, u_n \rangle| . n^{-k} . \|u_n\|_p \\ &\le (\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi, u_n \rangle|^2)^{\frac{1}{2}} . (\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} . \|u_n\|_p^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|\varphi|_k . C . \end{aligned} \qquad (2.4)$$

ومنه ينتج الطمر المستمر $\mathfrak{D} \hookrightarrow L_p$. بشكل مشابه نثبت ان $\mathfrak{D} \hookrightarrow C$.

3- فضاء التوزيعات $\mathfrak{D}'$:

كما هو مألوف، نرمز بـ $\mathfrak{D}'$ للفضاء الثنوي للفضاء $\mathfrak{D}$ (وهو فضاء الدّاليات الخطيّة المستمرة على $\mathfrak{D}$) وسوف نرمز لعناصره بأحرف كبيرة $F , G, \dots$ ونسميها توزيعات ، ولكل منها الشكل:

$$F : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \varphi \mapsto F(\varphi).$$

نقول عن توزيعين $F\,,G \in \mathfrak{D}^{'}$ إنّهما متساويان، ونكتب $F = G$ ، إذا كان:

$$F(\varphi) = G(\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}.$$

وبشكل خاص: إذا كان $F(\varphi) = 0$ من أجل كل $\varphi \in \mathfrak{D}$ فنكتب $F = 0$ ونسميه التوزيع الصفري.

نقول عن متتالية توزيعات $\{F_N\}$ إنّها متقاربة من التوزيع F إذا كان:

$$F_N(\varphi) \xrightarrow[N\to\infty]{} F(\varphi) \quad ; \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}\ .$$

من أجل التوزيع $F \in \mathfrak{D}$ نسمي الأعداد $F(u_n)$ عوامل فورييه للتوزيع F ونكتب:

$$a_n(F) = F(u_n) \quad ; \quad n = 0,1,2,\dots \qquad (3.1)$$

لدينا الآن الاختبار الآتي:

(3−1) مبرهنة: إذا كان $F\colon \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ دالياً خطيّاً، فيكون الشرطان الآتيان متكافئان:

(1) $F \in \mathfrak{D}^{'}$.

(2) يوجد عدد طبيعي k وعدد ثابت موجب $\boldsymbol{c}$ بحيث إنّ:

$$|F(\varphi)| \le c.\, \|\varphi|_k \quad ; \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D} \qquad (3.2)$$

الإثبات:

(2) $\Leftarrow$ (1) لدينا F دالي خطي فرضاً ولنثبت أنّه مستمر.

لتكن $\{\varphi_N\}$ متتالية من عناصر $\mathfrak{D}$ ومتقاربة من φ *عندئذ:*

$$|F(\varphi_N) - F(\varphi)| = |F(\varphi_N - \varphi)| \le c.\, \|\varphi_N - \varphi|_k \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

(1) $\Leftarrow$ (2) نفرض جدلاً عدم وجود العددين c و k بحيث تتحقق المتراجحة (3.2).

عندئذ توجد في $\mathfrak{D}$ متتالية $\{\varphi_N\}$ بحيث يكون $|F(\varphi_N)| = 1$ ، كما أنّ:

$$1 = |F(\varphi_N)| > N.\, \|\varphi_N|_N \quad ; \quad N = 1,2,\dots.$$

ولكن من أجل $k < N$ يكون لدينا حسب (2.2) :

$$\|\varphi_N|_k \le \|\varphi_N|_N < \frac{1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

ومنه ينتج أنّ $\varphi_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ في $\mathfrak{D}$ ، وهذا يخالف الفرض. وبذلك يتم المطلوب.

(3−2) ملاحظة: تفيد المبرهنة السابقة في إثبات أنّ $\mathfrak{D}^{'}$ يحوي جميع الفضاءات L_p ويتم ذلك كما يلي:

من أجل كل $f \in L_p$ (مثبت) نعرّف دالياً خطياً $F_f : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ بالشكل:

$$F_f(\varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D}\,. \tag{3.3}$$

بحسب متراجحة هولدر للتكاملات و (2.4) يكون لدينا من أجل أي $\varphi \in \mathfrak{D}$:

$$\left|F_f(\varphi)\right| \le \|f\|_p . \|\varphi\|_q \le c. \|f\|_p . \|\varphi|_k \quad ; \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \tag{3.4}$$

وبحسب المبرهنة (3−1) يكون $F_f(\varphi) \in \mathfrak{D}^{'}$.

الآن: ليكن $f, g \in L_p$ وليكن $F_f, F_g \in \mathfrak{D}^{'}$ التوزيعين الموافقين لهما.

إذا كان $F_f = F_g$ فيكون:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\varphi(x)\,dx = 0 \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D}.$$

وبما أنّ $\mathfrak{D}$ كثيفة في L_p ينتج أنّ $f(x) - g(x) = 0$ وبالتالي $f = g$ في L_p.

والآن نشكل التطبيق :

$$\Phi : L_p \longrightarrow \mathfrak{D}^{'} \quad ; \quad f \longmapsto \Phi(f) = F_f$$

فنجد أنّه متباين، وبالتالي تصح المطابقة: $L_p \ni f \leftrightarrow F_f \in \mathfrak{D}^{'}$.

بحسب (3.1) تكون عوامل فورييه للتوزيع F_f هي:

$$a_n(F_f) = F_f(u_n) = \int_a^b f(x)u_n(x)\,dx = a_n(f) \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D}.$$

وهي نفسها عوامل فورييه للتابع f المذكورة في (1.6).

بناءً على المطابقة السابقة يمكن اعتبار أنّ كل تابع $f \in L_p$ يمثل توزيعاً F_f من $\mathfrak{D}^{'}$، ويمكن أن نرمز بـ f لهذا التوزيع. لذلك يمكن كتابة (3.3) بالشكل:

$$f(\varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D} \;,\; f \in L_p. \tag{3.5}$$

وهنا لدينا الحالات الآتية:

- من أجل $\varphi = u_n$ يكون:

$$f(u_n) = \int_a^b f(x)u_n(x)\,dx = a_n(f)\,. \tag{3.6}$$

- من أجل $f = u_n$ يكون:

$$u_n(\varphi) = \int_a^b u_n(x)\varphi(x)\,dx = \langle \varphi, u_n \rangle \tag{3.7}$$

- ومن أجل $f = u_n$ و $\varphi = u_m$ يكون:

$$u_n(u_m) = \int_a^b u_n(x)u_m(x)\,dx = \langle u_n, u_m \rangle = \delta_{n,m} \tag{3.8}$$

- يمكن أيضاً كتابة (3.4) بالشكل:

$$\left|F_f(\varphi)\right| \leq c.\,\|f\|_p.\,\|\varphi|_k \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D}. \qquad (3.9)$$

وبذلك نحصل على الطمر المستمر $L_p \hookrightarrow \mathfrak{D}'$.

لدينا الآن المبرهنة الهامة الآتية:

(3−3) مبرهنة: (1) كل توزيع $F \in \mathfrak{D}'$ يمكن نشره بسلسلة من الشكل:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(F)u_n \qquad (3.10)$$

(2) السلسلة $\sum_{n=01}^{\infty} a_n u_n$ ، حيث $a_n \in \mathbb{R}$ ، تكون متقاربة في $\mathfrak{D}'$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط الآتي:

يوجد عدد طبيعي k بحيث تكون السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}|a_k|^2$ متقاربة. فإذا تحقق ذلك ورمزنا بـ F لمجموع السلسلة فيكون: $a_n = a_n(F)$.

الإثبات:

(1) ليكن $F \in \mathfrak{D}$. عندئذ: من أجل كل $\varphi \in \mathfrak{D}$ يكون لدينا بحسب (2.7) و (3.7) :

$$F(\varphi) = F\left(\sum_{n=0}^{\infty}\langle\varphi, u_n\rangle u_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle\varphi, u_n\rangle F(u_n) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\varphi)a_n(F) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(F)u_n\right)(\varphi)\,.$$

ومنه نحصل على (3.10).

(1) لنأخذ متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$ وهي:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n\, u_n \quad ; \quad N = 1,2,\ldots$$

عندئذ من أجل أي $\varphi \in \mathfrak{D}$ يكون:

$$\left|\left(\sum_{n=0}^{N} a_n u_n\right)(\varphi)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n u_n(\varphi)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n\langle\varphi, u_n\rangle\right|$$
$$\leq \left(\sum_{n=0}^{N} n^{-2k}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{N} n^{2k}.\,|\langle\varphi, u_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

فإذا كانت السلسلة العددية $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2k}|a_n|^2$ متقاربة ومجموعها c نجد أنّ:

$$\left|\left(\sum_{n=0}^{N} a_n u_n\right)(\varphi)\right| \leq c\|\varphi|_k \quad ; \; \varphi \in \mathfrak{D}\,.$$

بجعل $N \to \infty$ نحصل على المطلوب بحسب المبرهنة (3.1).

(3−4) نتيجة: ليكن $f \in L_p$ وليكن $F_f \in \mathfrak{D}'$ التوزيع الموافق ، عندئذ يكون:

$$F_f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(F_f)u_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)u_n = f\,.$$

حيث يكون التقارب في $\mathfrak{D}'$. بذلك نحصل على نشر توزيعي (معمم) لكل تابع $f \in L_p$.

4- النشر بتوابع تشيبيشيف من النوع الأول:

تُعرّف كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الأول $T_n(x)$ بالعلاقات التالية (للمزيد عن توابع تشيبيشيف من النوع الأول والثاني والثالث والرابع يمكن العودة إلى [7] , [6] , [4]):

$$T_0(x) = 1 \ , \ T_n(x) = \cos(n\, arccosx) \ \ ; \ \ n = 1,2,3, \ldots \qquad (4.1)$$

أو بصيغة رودريج (حيث $n = 1, 2, \ldots$):

$$T_0(x) = 1 \ , \ T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right].$$

هذه التوابع تشكل جملة متعامدة على المجال $[-1,1]$ مع الوزن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

للتأكد من ذلك وحساب النظيم نفرض $x = \cos\theta$ (أي $\theta = arc\ cosx$) فتأخذ الجملة (4.1) الشكل:

$$T_0(x) = T_0(\cos\theta) = 1 \ , \ T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos(n\,\theta). \qquad (4.2)$$

حيث إنّ $0 \le \theta \le \pi$. لذلك يكون لدينا:

$$\langle T_n, T_m\rangle = \int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)T_m(x)dx = \int_0^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta\, d\theta =$$

$$= \begin{cases} 0 & ; \quad n \ne m. \\ \pi & ; \quad n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & ; \quad n = m \ne 0 \end{cases}$$

وبذلك يمكن الحصول على جملة متعامدة منظمة على المجال $[0,\pi]$ هي:

$$\begin{cases} \tau_0(x) = \tau_0(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ \tau_n(x) = \tau_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \cos(n\theta) \ \ ; \ \ n = 1,2,.. \end{cases} \qquad (4.3)$$

هذه الجملة تنتمي إلى الفضاءات $C[0,\pi]$ و $L_p[0,\pi]$ ونظائمها هي:

$$\|\tau_0\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \;\; , \;\; \|\tau_n\|_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \;\;\; , \;\;\; \|\tau_n\|_2 = 1 \;\;\; ; \;\;\; n = 0,1,2, \dots .$$

لحساب النظيم في الفضاءات L_p نستفيد من توابع غاما وبيتا المعروفين وهما :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t}\, dt \quad ; \quad a > 0.$$

$$B(a,b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2a-1} (\sin t)^{2b-1}\, dt \;\; ; \; a > 0 \,, b > 0$$

(للمزيد انظر [7] , [1]) ، ومن أجل $1 \le p < \infty$ يكون:

$$\|\tau_0\|_p^p = \int_0^\pi \left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^p d\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^p \pi \Rightarrow \|\tau_0\|_p = \pi^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} .$$

$$\|\tau_n\|_p^p = \int_0^\pi \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^p |\cos(n\theta)|^p\, d\theta \quad ; \quad n = 1,2, \dots$$

$$= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^p 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(n\theta))^{2\left(\frac{p+1}{2}\right)-1} (\sin(n\theta))^{2\left(\frac{1}{2}\right)-1} \frac{d(n\theta)}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^p B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

لذلك يكون:

$$\|\tau_n\|_p = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} . \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{p}} := n^{-\frac{1}{p}} B_p .$$

نضيف أيضاً بأنّ كثيرات حدود تشيبتشيف $T_n(x)$ هي توابع ذاتية للمؤثر التفاضلي:

$$A = -(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} + 1 \qquad (4.4)'$$

(يسمى مؤثر تشيبتشيف التفاضلي):

وعند إجراء التحويل $x = \cos\theta$ يتحول هذا المؤثر إلى الشكل ، [7]:

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + 1 \qquad (4.4)''$$

والقيم الذاتية الموافقة لهذا المؤثر هي :

$$\lambda_n = n^2 + 1 \quad ; \quad n = 0,1,2, \dots$$

بما أنّ A مؤثر موجب فله جذر تربيعي، سنرمز له بـ $T = A^{\frac{1}{2}}$ ، توابعه الذاتية هي $T_n(x)$ نفسها والقيم الذاتية الموافقة هي $\mu_n = \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{n^2+1}$.

بحسب [8] تكون مجموعة تعريف المؤثر T هي:

$$D(T) = \{f \in L_2 : \; \sum_{n=0}^\infty \mu_n^2 |\langle f, \tau_n\rangle|^2 < \infty\}.$$

كما أنّ:

$$Tf = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \langle f, \tau_n \rangle \tau_n \quad ; \; f \in D(T) \, ,$$

حيث إنّ $\langle f, \tau_n \rangle$ هي عوامل فورييه للتابع f ولها الشكل:

$$\langle f, \tau_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \, dx \, .$$

$$\langle f, \tau_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \cos(n\theta) \, d\theta \quad ; \quad n = 1,2, \dots$$

نعرّف القوى الصحيحة للمؤثر T بالشكل:

$$T^0 = I \; (\text{المؤثرالمطابق}) \; , \; T^1 = T \quad , \; T^m = T(T^{m-1}) \quad ; \; m = 2,3, \dots$$

فنجد أنّ:

$$D(T^m) = \{ f \in L_2 : \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{2m} |\langle f, \tau_n \rangle|^2 < \infty \} \; ; \; k = 0,1,2, \dots$$

كما أنّ:

$$T^m f = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^m \langle f, \tau_n \rangle \tau_n \quad ; \; f \in D(T^m) \; .$$

بملاحظة أنّ:

$$n^2 \le \lambda_n = n^2 + 1 \le 2n^2 \quad ; \quad n = 1, 2, \dots. \quad .$$

فإنّ $\lambda_n \sim n^2$ من أجل $n = 1, 2, \dots$.

من ناحية ثانية لدينا بحسب تعريف (2−1):

$$\varphi \in \mathfrak{D} \; \Leftrightarrow \; \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle \varphi, \tau_n \rangle|^2 < \infty \quad ; \; k = 0,1,2, \dots$$

من ناحية ثانية لدينا من أجل $m = 0,1,2, \dots$:

$$\begin{aligned} f \in D(T^m) \; &\Leftrightarrow \; \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^{2m} |\langle f, \tau_n \rangle|^2 < \infty \quad ; \quad m = 0,1,2, \dots \\ &\Leftrightarrow \; |\langle f, \tau_0 \rangle| + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{2m} |\langle f, \tau_n \rangle|^2 < \infty \\ &\Leftrightarrow \; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{2m} |\langle f, \tau_n \rangle|^2 < \infty. \\ &\Leftrightarrow \; \sum_{n=1}^{\infty} n^{2k} |\langle f, \tau_n \rangle|^2 < \infty \, . \\ &\Leftrightarrow \; f \in \mathfrak{D} \, . \end{aligned}$$

من ذلك ينتج أنّ : $\mathfrak{D} = \bigcap_{m=0}^{\infty} D(T^m)$.

يمكننا الآن تعريف المؤثر T^m على الفضاء $\mathfrak{D}$ بالشكل:

$$T^m\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^m \langle \varphi, \tau_n \rangle \, \tau_n \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D} \ , \quad m = 0,1,2, \dots .$$

فنجد اعتماداً على المبرهنة $(5-2)$ أنّ $T^m\varphi \in \mathfrak{D}$ من أجل كل $\varphi \in \mathfrak{D}$ ، كما أنّ:

$$\|T^m\varphi|_k \quad \sim \quad \|\varphi|_{k+m} \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D}.$$

ويمكن التمديد إلى $\mathfrak{D}'$ من خلال وضع:

$$(T^m F)(\varphi) = F(T^m\varphi) \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D} \, , \ \left(F \in \mathfrak{D}'\right).$$

فيكون لدينا حسب المبرهنة $(3-3)$: $T^m F \in \mathfrak{D}'$ ، كما أنّ :

$$T^m F = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^m a_n(F) \, \tau_n \quad ; \quad F \in \mathfrak{D}'.$$

وبما أنّ كل تابع $f \in L_p$ يمثل توزيعاً من $\mathfrak{D}'$ فيمكن تعريف المؤثر T^m على الفضاء L_p بالشكل:

$$T^m f = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^m \, a_n(f) \, \tau_n \quad ; \quad f \in L_p \hookrightarrow \mathfrak{D}'.$$

بشكل خاص يمكن تعريف المؤثر $(\mathrm{T} - \lambda I)$ من أجل كل عدد λ ، وذلك في كل من الفضاءات $\mathfrak{D}$ و $\mathfrak{D}'$ و L_p ، لنجد:

$$(\mathrm{T} - \lambda I)f = \sum_{n=0}^{\infty} \, (\lambda_n - \lambda) \, a_n(f) \, \tau_n \, . \qquad (4.5)$$

وهذا بدوره يمكننا من حل معادلات من الشكل $(\mathrm{T} - \lambda I)f = g$ ، حيث g تابع مفروض من الفضاء $\mathfrak{D}$ أو $\mathfrak{D}'$ أو L_p وذلك بإيجاد المؤثر الحلال $(\mathrm{T} - \lambda I)^{-1}$.

5- تطبيقات:

يمكن استخدام نتائج المقطع السابق لحل معادلات بالمؤثر T ، نستعرض بعضها الآن.

التطبيق الأول: نحل المعادلة $(\mathrm{T} - \lambda I)f = g$ ، حيث من العلاقة (4.5) نجد من أجل عدد λ بحيث $\lambda \neq \mu_n$:

$$f = (\mathrm{T} - \lambda I)^{-1} g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(g)}{\mu_n - \lambda} \tau_n \quad ; \quad \lambda \neq \mu_n. \qquad (5.1)$$

وفي الحقيقة يمكن حل مسائل أكثر تعقيداً من قبيل $p(T)f = g$ حيث $p(T)$ كثيرة حدود مؤثراتية نعرّفها بالشكل الآتي:

من أجل كثيرة حدود جبرية :

$$p(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

نعرّف كثيرة الحدود المؤثراتية $P(T)$ بالشكل:

$$P(A) = a_m T^m + a_{m-1} T^{m-1} + \cdots + a_1 T + a_0 I\ , \ (\text{المؤثرالمطابق } I\ ).$$

فيكون النشر التالي في الفضاءات $\mathfrak{D}$ أو $\mathfrak{D}'$ أو L_p حسبما يكون f من هذه الفضاءات:

$$P(A)f = \sum_{n=0}^{\infty} P(\mu_n) a_n(f) \tau_n.$$

و إذا أردنا حل المعادلة $P(A)f = g$ حيث g تابع معطى (و f مجهول) فيكون:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\lambda_n) a_n(f) \tau_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(g) \tau_n. \qquad (5.2)$$

وهنا نميز الحالات الآتية:

(1) إذا كان $P(\lambda_n) \neq 0$ من أجل .. $n = 0,1,2,$ فيكون للمسألة حل وحيد هو :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(g)}{P(\lambda_n)} \tau_n\ . \qquad (5.3)$$

(2) إذا كان $P(\lambda_n) = 0$ من أجل بعض قيم n ، مثلاً: $n = n_1, n_2, .., n_{j_0}$ يكون للمسألة حل إذا وفقط إذا كان $a_n(g) = 0$ من أجل $n = n_1, n_2, .., n_{j_0}$ ،

فإن تحقق ذلك نحصل على الحل الخاص:

$$f_s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(g)}{P(\lambda_n)} \tau_n \ \ ; \ \ n \neq n_1, n_2, .., n_{j_0}.$$

وهذا الحل ليس وحيداً ، حيث يمكن أن نضيف أي حل متمم من الشكل:

$$f_c = \sum_{i=1}^{j_0} b_i \tau_i \ \ ; \ \ b_i \in \mathbb{R}.$$

ويكون الحل العام للمسألة هو: $f = f_s + f_c.$.

التطبيق الثاني: نحل معادلة شرودينغر ، وهي معادلة شهيرة جداً في الفيزياء والميكانيك الكوانتي ، ولها الشكل:

$$\begin{cases} i\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u \\ u(x,0) = f(x)\ . \end{cases} \qquad (5.4)$$

حيث f تابع مفروض و $u(x,t)$ تابع مطلوب و Δ مؤثر لابلاس $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i 2}$ ،

وحل هذه المعادلة هو : $u(x,t) = e^{it\Delta} f(x)$.

ولكن ومنذ تسعينات القرن العشرين بدأت تظهر دراسات و أعمال حول هذه المعادلة مع استبدال مؤثر لابلاس Δ بمؤثر تفاضلي آخر، وهنا نأخذ مؤثر تشيبيشيف T المدروس أعلاه للحصول على حل للمعادلة التالية:

$$\begin{cases} i\,\dfrac{\partial u}{\partial t} = Tu \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \qquad (5.5)$$

تجدر الاشارة أن دراسة هذه المسألة في حالة فضاء هيلبرت L_2 تكون أسهل نسبياً (يتوضح ذلك من كون المؤثر واحدياً ، كما سنبين بعد قليل). أما في حالة فضاء باناخ L_p فالمسألة أصعب بكثيرعندما $p \neq 2$. ولكن لإيجاد الحلول المناسبة يتوجب علينا دراسة المؤثر $e^{-i\,t\,T}$ ، حيث $t \in \mathbb{R}$ ، وسوف نعتمد كثيراً على النظرية الطيفية .

(5−1) تعريف: نعرف المؤثر $e^{-i\,t\,T}$ في الفضاءات L_2 و $\mathfrak{D}$ و $\mathfrak{D}'$ و L_p كالآتي:

$$e^{-it\,T} f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\,t\,\mu_n} \langle f, \tau_n \rangle \tau_n \quad ; \quad f \in L_2. \qquad (5.6)$$

$$e^{-it\,T}\, \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\,t\,\mu_n} \langle\, \varphi, \tau_n \rangle \tau_n \quad ; \quad \varphi \in \mathfrak{D}. \qquad (5.7)$$

$$e^{-it\,T} F = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\,t\,\mu_n}\, a_n(F) \tau_n \quad ; \quad \mathrm{F} \in \mathfrak{D}'. \qquad (5.8)$$

$$e^{-it\,T} f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\,t\,\mu_n}\, a_n(f) \tau_n \quad ; \quad f \in L_p \hookrightarrow \mathfrak{D}'. \qquad (5.9)$$

(5−2) ملاحظة: بما أن: $e^{-it} = e^{-i(t+2\pi)}$ من أجل $t \in \mathbb{R}$ فينتج أن المؤثر $e^{-it\,T}$ دوري وله الدور 2π ، ويمكن أن نكتب أيضاً: $e^{-itT} = \cos t\,T + i \sin t\,T$.

والآن لندرس الخواص الأولية للمؤثر.

(5−3) مبرهنة: المؤثر $e^{-it\,T}$ واحدي في الفضاء L_2.

الإثبات : من أجل أي $f \in L_2$ لدينا بحسب مساواة بارسيفال (1.5):

$$\left\| e^{-itH} f \right\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| e^{-i\,t\,\mu_n} \langle f, \tau_n \rangle \right|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, \tau_n \rangle|^2 = \|f\|_2^2 .$$

لذلك يكون المؤثر $e^{-it\,T}$ إيزومتري في الفضاء L_2 ، كما أن $D(e^{-itH}) = L_2$.

إضافة لذلك يكون المؤثر العكسي موجوداً وله الشكل :

$$(e^{-it\,T})^{-1} = e^{it\,T} : R(e^{-it\,T}) \longrightarrow D(e^{it\,T}) = L_2.$$

ولكن من التعريف ينتج فوراً :

$$e^{it\,T}e^{-it\,T} = e^{-it\,T}e^{it\,T} = I \quad ; \quad (\text{مؤثر المطابقة } I)$$

لذلك يكون : $R(e^{-it\,T}) = L_2$. و بذلك يتم المطلوب .

(4−5) نتيجة: بما أن المؤثر $e^{-itH} : L_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ واحدي فإنه من أجل كل تابع مفروض $g \in L_2$ يوجد للمعادلة $e^{-it\,T}f = g$ حل وحيد $f \in L_2$ وهو:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\,t\,\mu_n} \langle g, \tau_n \rangle \tau_n. \qquad (5.10)$$

(5−5) نتيجة: بما أن $L_2 \hookrightarrow \mathfrak{D}$ فنجد بشكل مشابه لما تقدم أنه يوجد في $\mathfrak{D}$ حل وحيد للمعادلة $e^{-it\,T}\varphi = \psi$ وله الشكل:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\,t\,\mu_n} \langle \psi, \tau_n \rangle \tau_n \,.$$

بهذا الصدد، واعتماداً على المبرهنتين (2−5) و (3−3) يمكننا بحسابات عادية إثبات أن:

$$e^{-it\,T}\varphi \in \mathfrak{D} \quad ; \quad \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}.$$

واضافة لذلك يكون: $\left\|e^{-it\,T}\varphi\right|_k = \|\varphi|_k$ ، وكذلك:

$$e^{-it\,T}F \in \mathfrak{D}' \quad ; \quad \forall\, F \in \mathfrak{D}',$$

وهذا يدوره يمكننا من حل معادلات من الشكل: $e^{-it\,T}F = G$ ، حيث نجد الحل:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\,t\,\mu_n} a_n(G)\tau_n.$$

وبحسب الطمر $L_p \hookrightarrow \mathfrak{D}'$ يمكننا الحصول على حلول توزيعية لمعادلات من الشكل $e^{-it\,T}f = g$، حيث $g \in L_p$ تابع معطى، لنجد الحل:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\,t\,\mu_n} \langle g, \tau_n \rangle \tau_n \,.$$

(6−5) ملاحظة: بالعودة للمعادلة (5.5) نجد أن لها الحل (الشكلي):

$$u(x,t) = e^{-it\,T}f(x). \qquad (5.11)$$

ولنبين فيما يلي أن الحل في فضاء هيلبرت L_2 له نفس هذا الشكل ومن ثم نبحث عن الحل في الفضاءات L_p من أجل قيم لـ p غير $p = 2$. وهنا نحتاج لإيجاد مشتق

تابع $t \longmapsto h(t)$ يأخذ قيمه في فضاء باناخ X . وفي الحقيقة يعرف مشتق هكذا تابع بشكل مشابه لتعريف المشتق الكلاسيكي. وهنا نأخذ بمثابة فضاء باناخ فضاء المؤثرات الخطية المحدودة $\mathcal{L}\,(\,L_2\,,L_2\,)$ ، والتابع $h(t) = e^{-itH}$ ، حيث المؤثر e^{-itH} ينتمي لهذا الفضاء بحسب المبرهنة (5–3).

(7–5) مبرهنة مساعدة: في الفضاء $\mathcal{L}\,(\,L_2\,,L_2)$ يكون $\frac{\partial}{\partial t}(e^{-it\,T}) = -iTe^{-it\,T}$.

الإثبات : بحسب المفهوم المألوف للمشتق يكون:

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-itT}) = \lim_{\gamma\to 0}\frac{e^{-i(t+\gamma)\,T} - e^{-itHT}}{\gamma}\ .$$

لدينا الآن من أجل أي $f \in D(e^{-itH}) = L_2$:

$$D := \left\|\frac{1}{\gamma}\left[e^{-i(t+\gamma)\,T}f - e^{-it\,T}f\right] + i\,Te^{-it\,T}f\right\|_2^2 =$$

$$= \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\gamma}\left[e^{-i(t+\gamma)\,\mu_n} - e^{-it\,\mu_n}\right]\langle f,\tau_n\rangle\tau_n + i\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n e^{-it\,\mu_n}\langle f,\tau_n\rangle\tau_n\right\|^2$$

$$= \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\gamma}\left[e^{-i(t+\gamma)\,\mu_n} - e^{-it\,\mu_n}\right] + i\,\mu_n e^{-it\,\mu_n}\right\}\langle f,\tau_n\rangle\tau_n\right\|^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{\gamma}\left[e^{-i(t+\gamma)\,\mu_n} - e^{-it\,\mu_n}\right] + i\,\mu_n e^{-it\,\mu_n}\right|^2 |\langle f,\tau_n\rangle|^2\ .$$

وبالاستفادة من مبرهنة التقارب الراجح (مأخوذة على المجموع) التي يمكن تطبيقها هنا لأن: $\left|\left[e^{-i(t+\gamma)\mu_n} - e^{-it\mu_n}\right] + i\mu_n e^{-it\mu_n}\right|$ مقدار محدود كتابع لـ γ (ينتج ذلك من مبرهنة التزايدات المحدودة) لذلك نجد ما يلي :

$$D \le sup_n\left|\frac{1}{\gamma}\left[e^{-i(t+\gamma)\mu_n} - e^{-it\mu_n}\right] + i\mu_n e^{-it\mu_n}\right|^2 \|f\|_2^2$$

$$\underset{\gamma\to 0}{\longrightarrow} sup_n\left|(e^{-it\mu_n})' + i\mu_n e^{-it\mu_n}\right|^2 \|f\|_2^2 = 0\ .$$

هنا اعتبرنا أن التابع العددي $\varphi(t) = e^{-it\mu_n}$ مستمر وقابل للاشتقاق بالنسبة لـ t وأن ما داخل القيمة المطلقة مقدار محدود دوما. بذلك يتم الإثبات.

(8−5) مبرهنة: من أجل كل $f \in L_2$ يوجد للمعادلة (5.5) حل وحيد وله الشكل (5.11). ومن أجل كل $t \in \mathbb{R}$ يكون: $\|u\|_2 = \|f\|_2$.

الإثبات:

لنضع $u(x,t) = e^{-itH}f(x)$ فنجد بحسب المبرهنة السابقة :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-it\,T}f\right) = -i\,Te^{-it\,T}f.$$

بضرب الطرفين بـ i نجد:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = Te^{-it\,T}f = Tu.$$

وهذا يعني أن u حل للمعادلة . أما وحدانية هذا الحل فتنتج من تمام الجملة $\{\tau_n\}$.

في بداية إثبات المبرهنة (5−3) وجدنا أن: $\left\|e^{-itH}f\right\|_2^2 = \|f\|_2^2$. ومنه نحصل على المطلوب.

(9−5) ملاحظة: بشكل مشابه لما تقدم يمكننا حل مسائل رياضية وفيزيائية وخاصة حل مسائل قيم حدية في الفضاءات المذكورة أعلاه، ولكن حتى لايطول البحث أكثر ربما تكون في أبحاث قادمة.

المراجع

[1] **L. C. Andrews** (1998)**:** Special Functions of Mathematical Physics.
Oxford University Press.

[2] **Ibrahim, I.** (2002): On Eigenfunction Sxpansions of the Hermite Differential Operator on $\mathbb{R}^n$.
Int. Trans. Spec. Funct Vol(13), pp 555-574.

[3] **W. Lamp ; D. F. McGhee** (2004)**:** Eigenfunction Expansions for Generalized Functions of Several Variables.
Int. Trans. Special Func. **Vol. 15**, pp. 239–249.

[4] **M. C. Mason ; D. C. Handscomb (**2003)**:** Chebyshev Polynomials.
Chapman & Hall/CRC press LLc.

[5] **A.M. Mathai *;* H. Haubold** (2008)**:** Special Functions for Applied Scientists.
Springer Science+Business Media, LLC

[6] **M.H. Mudde** (2017)**:** Chebyshev approximation,
Diss. University of Groningen,

[7] **N. M. Temme (**1996)**:** Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics.
John Wiley & Sons, New York.

[8] **Triebel, H**. (1992): Higher Analysis.
Johann Ambrosius Barth, Leipzig, Berlin.

[9] **A. H. Zemanian (**1968)**:** Generalized Integral Transformatins.
John Wiley & Sons, Inc.

[10] **E. Kreyszig (**1978)**:**Introductory Functional Analysis with Applications.
John Wiley & Sons, Inc.