تركيب الحلول النظامية لعملية Ignaczak الديناميكية لأجل الحالة المستوية، الأولى لانفعالات الجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب

منتجب الحسن† رامح رجب ديب [1]

ملخص البحث:

يتعلق البحث بالنموذج الرياضي للحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم الصلب دقيق الاستقطاب، والمتجانس، والمتماثل المناحي، والمناقش رياضياً من خلال الباحثين Eringen [8] و Nowacki [7]، والذي يرمز له اختصاراً بـ 2D (E−N:5).

في البحث، من أجل الجسم المعتبر، أولاً:

سنعرض: أ) الوصف التقليدي[3] ، ب) وصف Lame [5]، ج) وصف Ignaczak [1] ، د) طريقة متجه Schaefer [5.pp.217] حل مسألة Lame للجسم المعتبر.

ثانياً: سنعمم طريقة متجه Schaefer لتشمل: I) الوصف التقليد للجسم المعتبر، II) وصف Ignaczak للجسم المعتبر.

أخيراً سننهي البحث باقتراح عدد من المسائل للمناقشة.

† أستاذ في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

‡ طالب دكتوراه في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة البعث.

الكلمات المفتاحية: - طريقة التراكيب - العمليتان الديناميكيتان، النظاميتين، الهوكية والمتممة - معادلات الحركة بالإجهادات من نمط Ignaczak- الجسم المرن دقيق الاستقطاب 2D (E−N:5) - الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة.

Combining regular solutions of the Ignaczak dynamical process relating to the first plane state of elastic strain of the micropolar body

† Mountajab Al-Hasan & Rameh Rajab Deeb ‡

Abstract:

The paper relates to the mathematical model of the first plane state of small elastic strains of micropolar homogeneous and isotropic solid, mathematically proposed by Eringen [8] and Nowacki [7], and shortly called 2D (E-N:5).

In paper, for the 2D (E-N:5) considerable body, first we introduce: a) The Traditional Description, b) The Lame Description, c) The Ignaczak Description [1], d) The Schaefer vector method [5.pp.217] in solving the Lame problem for the considerable body.

Then, we generalize the Schaefer vector method to: I) The Traditional Description of the 2D (E-N:5) considerable body, II) The Ignaczak Description of the 2D (E-N:5) considerable body. Finally we end paper by suggesting some problems for discussing.

† Professor At Department of Mathematics–Faculty of Science – Al–Baath University, Homs-Syria.

‡ Ph.D . At Department of Mathematics–Faculty of Science – Al–Baath University, Homs-Syria.

Key words: The superposition Method -The Hooke and Complementary Dynamical processes of Ignaczak Type – The Micropolar Elastic Solid 2D (E-N:5) subjected - The first Plane State of Elastic Strain .

1. مقدمة:

في [5] استُخدمت طريقة متجه Schaefer، في حل مسائل القيم الحدية لمعادلات Lame ضمن الحالة المستوية الأولى لانفعالات الجسم (E−N:5)ذلك انطلاقاً من متجهSchaefer: $\zeta \equiv \left(0,0,\frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha}\right)$، $(\alpha,\beta=1,2)$، علماً أن: $\in_{\alpha\beta}$ هو شبه تنسور Levi−Civita النسبي بالوزن $\frac{1}{2}$، على الفضاء الاقليدي ثنائي البعد R^2. بعدها تم بنفس الطريقة، حل مسائل القيم الحدية لمعادلات Lame للحالة ثنائية البعد، المتناظرة محورياً للانفعالات المرنة للجسم من النموذج (E−N:5)، (انظر مثلاً: [5,6])، كما أشار نفس الباحثين إلى إمكانية حل نفس هذه المسائل، أي مسائل القيم الحدية لمعادلات Lame للحالة ثنائية البعد وكذلك الحالة ثلاثية البعد للانفعالات المرنة للجسم من النموذج (E−N:6)، بوجود حقل درجات حرارة، وبوجود حقل لدونة. وفي [6] أيضاً، قام الباحث Dyszlewicz باستخدام طريقة متجه Schaefer في حل مسائل القيم الحدية والابتدائية لمعادلات Lame للحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم من نوع(E−N:6)، بما يتوافق مع الحالة الترموديناميكية غير متساوية الحرارة لهذا الجسم. هذا بالنسبة للتغطية المرجعية للطريقة.

في عام 1963 وضع الباحث البولندي Ignaczak وصفاً جديداً لجسم Hooke الصلب المرن من خلال معادلة تنسورية واحدة بالإجهادات، مزودة بشروط حدية وبشروط ابتدائية مصاغة بطريقة معينة. بعدها قام نفس الباحث عام 1971 بتعميم ذلك إلى جسم صلب مرن أكثر تعقيداً[9]. بعدها، في الأعوام: 1991 و 2001 و 2004 و 2014 قام الباحث Dyszlewicz بتعميم ذلك إلى الجسم الصلب المرن من نوع (E−N) (اختصار لـ: Eringen−Nowacki)، الخاضع لحمول ديناميكية، لأجل الحالة الفراغية والحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة [1,5].

2. هدف وأهمية البحث:

1. يهدف البحث إلى تعميم طريقة متحه Schaefer لتشمل: I) الوصف التقليد للجسم المعتبر، II) وصف Ignaczak للجسم المعتبر.

2. تكمن أهمية البحث بأنه يزودنا بطريقة تحليلية جديدة في حل معادلات Ignaczak التنسورية التي تصف الحالة الديناميكية المستوية للانفعالات المرنة للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب والمتجانس والمتماثل المناحي، والمعيَّن بـ 5 ثوابت مادية، ومن نوع Eringen–Nowacki ، والذي نرمز له اختصاراً بالرمز: (E–N:5) 2D (الصفائح: الحديدية، النحاسية، الألمنيوم، الفولاذ، ... الخ)، وبالتالي يمكن أن تملك نتائج هذا البحث أهمية كبيرة في مقاومة المواد وفي مخبر المواد و في التصفيح والتسليح، ... الخ.

3. طرق البحث:

سنستخدم نتائج البحثين [5,6]، المتمثلة بطريقة متجه Schaefer في حل مسألة Lame للجسم (E–N:5)2D، الخاضع لحرارة، ويشغل في لحظة البدء منطقة Ω بسيطة الترابط ومحدودة في المتنوعة الاقليدية R^2، وسوف نستخدم هذه النتائج من أجل تعميم طريقة متجه Schaefer إلى مسألة الوصف التقليدي (العام) للجسم (E–N:5) 2D،الذي يشغل في لحظة البدء المنطقة Ω بسيطة الترابط في المتنوعة الاقليدية R^2. بعدها باستخدام تعميم الاسلوب السابق،سنقوم باستنتاج طريقة متجه Schaefer من أجل معادلات Ignaczak بالإجهادات والتي تصف الجسم المعتبر (E–N:5)2D.

بالتالي من أجل متطلبات البحث، نعرض فيمايلي ما يهمنا من نتائج البحثين [5,6].

3–1مسألتا الوصف التقليدي ووصف Lame للحالة الترموديناميكية للجسم المرن (E–N:5)2D، المتجانس والمتماثل المناحي،ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، حيث يشغل الجسم في لحظة البدء المنطقة بسيطة الترابط Ω، المحدودة في المتنوعة الاقليدية ثنائية البعد R^2 [5]:

توطئة: سنفترض أن كافة الأدلة اللاتينية $i\ ,\ j\ ,\ k\ ,\ ....$ تأخذ القيم $1,2,3$، وأن كافة الأدلة الإغريقية $\alpha\ ,\beta\ ,\gamma\ ,\ ....$ تأخذ القيم $1,2$. وسنعتمد رموز Einstein في المتنوعة الإقليدية ثلاثية البعد R^3 وفي المتنوعة الإقليدية ثنائية البعد R^2، ولتكن $O\,x_1\,x_2\,x_3$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة، ومباشرة، وعطالية، وقاعدتها هي $(\,\mathbf{e}_1\ ,\ \mathbf{e}_2\ ,\ \mathbf{e}_3\,)$. من أجل الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم المدروس، تكون كافة الحقول التنسورية التي تحكم الحالة الديناميكية للجسم المعتبر، تكون مستقلة عن الاحداثي الديكارتي الثالث x_3، حيث توصف العملية الديناميكية للجسم المعتبر

المتجانس والمتماثل المناحي من خلال الحقول التنسورية: $(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\kappa})$، حيث أن: $\mathbf{u}$ و $\boldsymbol{\varphi}$ حقلان متجهيان مستقلان، هما على الترتيب ، حقل الإزاحات وحقل التوجهات. إضافةً إلى ماتقدم ذكره فإن: $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\kappa}$، حقول تنسورية من المرتبة الثانية، هي على الترتيب: حقل إجهادات القوة، و حقل إجهادات العزم ، و حقل الانفعالات، و حقل الانفعالات دقيقة الاستقطاب. وإذا رمزنا بـ $]0,\infty[\ =:\mathrm{T}^+$، و بـ $]0,\infty[\ =:\mathrm{T}$، فيمكن أن تمثل الحقول السابقة في $\Omega\times\mathrm{T}^+$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي $\mathbf{e}_i$، على الشكل التالي:

$$\mathbf{u}\equiv(u_1,u_2,0)\ ,\quad \boldsymbol{\varphi}\equiv(0,\ 0\ ,\varphi_3) \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\gamma}\equiv\begin{bmatrix}\gamma_{11}&\gamma_{12}&0\\ \gamma_{21}&\gamma_{22}&0\\ 0&0&0\end{bmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{\kappa}\equiv\begin{bmatrix}0&0&\kappa_{13}\\ 0&0&\kappa_{23}\\ 0&0&0\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\equiv\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&0\\ \sigma_{21}&\sigma_{22}&0\\ 0&0&\sigma_{33}\end{bmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{\mu}\equiv\begin{bmatrix}0&0&\mu_{13}\\ 0&0&\mu_{23}\\ \mu_{31}&\mu_{32}&0\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

حيث:

$$\sigma_{33}=\nu\,\sigma_{\alpha\alpha}\ ,\quad \mu_{3\alpha}=\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,\mu_{\alpha 3} \tag{3.4}$$

كما أن: $\nu=\dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}$ تمثل نسبة Poisson، و $\mu,\lambda,\gamma,\varepsilon\in R_+$ الثوابت مادية للجسم المدروس، أخيراً ننوه إلى أن جميع المركبات الموجودة في العلاقات السابقة تتبع للموضع: $\mathbf{x}\equiv(x_1,x_2)\in\Omega$ وللزمن t.

أولاً) الوصف التقليدي: يتألف الوصف التقليدي للحالة الديناميكية للجسم (E−N:5) 2D المتجانس والمتماثل المناحي ، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، يتألف من المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [5]:

معادلات الحركة، المحققة في $\Omega\times\mathrm{T}^+$:

$$\sigma_{\beta\alpha,\beta}+X_\alpha=\rho\,\ddot{u}_\alpha\ ,\quad \in_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}+\mu_{\beta 3,\beta}+Y_3=J\,\ddot{\varphi}_3 \tag{3.5}$$

علماً أن: J , ρ ، على الترتيب تمثلان الكثافة الحجمية والعطالة الدورانية للجسم المعتبر و $\mathbf{X} \equiv (X_1 , X_2 , 0)$ يمثل حقل القوة الحجمية و $\mathbf{Y} \equiv (0 , 0 , Y_3)$ حقل العزم الحجمي. نرمز بواسطة الفاصلة الدليلية للمشتق الجزئي بالنسبة للموضع: $f_{,\beta} = \dfrac{\partial f}{\partial x_\beta}$ ، كما نرمز بالنقطة للمشتق الجزئي بالنسبة للزمن: $\dot{f} \equiv \partial f / \partial t$. أخيراً الرموز $\in_{\alpha\beta}$ تمثل المركبات الديكارتية لتنسور Levi–Civita، النسبي، من المرتبة الثانية، مع الوزن: $w = \dfrac{1}{2}$.

معادلات انسجام الانفعالات، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\kappa_{23,1} - \kappa_{13,2} = 0 \ , \ \kappa_{13} - \gamma_{21,1} + \gamma_{11,2} = 0 \ , \qquad (3.6)$$
$$\kappa_{23} + \gamma_{12,2} - \gamma_{22,1} = 0$$

العلاقات الهندسية، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = u_{\beta,\alpha} + \in_{\beta\alpha} \varphi_3 \quad , \quad \kappa_{\alpha 3} = \varphi_{3,\alpha} \qquad (3.7)$$

العلاقات التأسيسية، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\sigma_{\alpha\beta} = (\mu + \alpha)\gamma_{\alpha\beta} + (\mu - \alpha)\gamma_{\beta\alpha} + \lambda e_1 \delta_{\alpha\beta} \ , \qquad (3.8)$$
$$\mu_{\alpha 3} = (\gamma + \varepsilon)\kappa_{\alpha 3}$$

حيث $\alpha \in R_+$ الثابت المادي الخامس للجسم و $e_1 = \gamma_{\varepsilon\varepsilon}$ أما $\delta_{\alpha\beta}$ فهو رمز دلتا كرونيكا،

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\sigma_{\beta\alpha} n_\beta = p_\alpha \ , \ \mu_{\beta 3} n_\beta = m_3 \qquad (3.9)$$

حيث التوابع $[\ (p_\alpha , m_3) : \partial\Omega \times \mathrm{T} \to R\ ]$ مفروضة ، و $\partial\Omega$ تمثل الحدود الملساء للمنطقة Ω $(\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$، أما: $\mathbf{n} \equiv (n_1 , n_2 , 0)$ فهي المركبات الديكارتية لمتجه واحدة ناظم $\partial\Omega$ والموجه نحو خارج Ω.

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_\alpha = f_\alpha \ , \ \varphi_3 = f_3 \ , \ \dot{u}_\alpha = g_\alpha \ , \ \dot{\varphi}_3 = g_3 \qquad (3.10)$$

حيث التوابع $[\ (f_\alpha , f_3 , g_\alpha , g_3) : \Omega \to R\ ]$ مفروضة.

ثانياً) وصف Lame: يتألف وصف *Lame* للحالة الديناميكية للجسم 2D (E−N:5) المتجانس والمتماثل المناحي، في الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، يتألف من المعادلات والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [1,5]:

معادلات Lame للحركة، المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\Box_2 u_\alpha + (\lambda + \mu - \alpha) u_{\beta,\beta\alpha} + 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \varphi_{3,\gamma} + X_\alpha = 0 \qquad (3.11)$$

$$\Box_4 \varphi_3 + 2\alpha \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} + Y_3 = 0\ , \qquad (3.12)$$

حيث: $\Box_2 = (\mu+\alpha)\Delta_1 - \rho\ \partial_t^2$ و $\Box_4 = (\gamma+\varepsilon)\ \Delta_1 - 4\alpha - J\,\partial_t^2$

و Δ_1 هو مؤثر لابلاس الاشتقاقي السلمي ثنائي البعد: $\left(\Delta_1 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}}\right)$ ، أما $\partial_t f = \dot{f} = \partial f / \partial t$،

العلاقات الهندسية، المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = u_{\beta,\alpha} + \in_{\beta\alpha} \varphi_3\ , \quad \kappa_{\alpha 3} = \varphi_{3,\alpha} \qquad (3.13)$$

العلاقات التي تعطي الإجهادات بدلالة الإزاحات والدورانات، والمحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} = (\mu+\alpha)\, u_{\beta,\alpha} + (\mu-\alpha) u_{\alpha,\beta} - 2\alpha \in_{\alpha\beta} \varphi_3 + \\ + \lambda u_{\varepsilon,\varepsilon}\, \delta_{\alpha\beta}\ , \end{aligned} \qquad (3.14)$$

$$\mu_{\alpha 3} = (\gamma+\varepsilon)\ \varphi_{3,\alpha} \qquad (3.15)$$

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} &[(\mu+\alpha)\, u_{\alpha,\beta} + (\mu-\alpha) u_{\beta,\alpha} - 2\alpha \in_{\beta\alpha} \varphi_3 + \\ &+ u_{\varepsilon,\varepsilon} \delta_{\alpha\beta}]\, n_\beta = p_\alpha\ , \\ &(\gamma+\varepsilon)\ \varphi_{3,\beta}\, n_\beta = m_3\ , \end{aligned} \qquad (3.16)$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_\alpha = f_\alpha\ ,\ \varphi_3 = f_3\ , \dot{u}_\alpha = g_\alpha\ ,\ \dot{\varphi}_3 = g_3 \qquad (3.17)$$

3-2 طريقة متجه Schaefer *في حل مسألة Lame* للجسم 2D(E−N:5) [5,6]:

نحصل على هذه الطريقة، باتباع الآتي:

بتعويض المركبة: $\zeta_3 = \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} - \varphi_3$ لمتجه Schaefer: $\boldsymbol{\zeta} \equiv (0\,,0\,,\zeta_3)$

في المعادلتين (3.11) و(3.12)، من ثم بالاستفادة من العلاقة:

$$\in_{\alpha\gamma}\in_{\varepsilon\delta} = \delta_{\alpha\varepsilon}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\varepsilon} \tag{3.18}$$

نحصل على المعادلتين التاليتين المحققتين في $\Omega \times T^{+}$:

$$\overset{*}{\Box}_2 u_\alpha + (\lambda+\mu) u_{\beta,\beta\alpha} + X_\alpha = 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \zeta_{3,\gamma} \tag{3.19}$$

$$\overset{*}{\Box}_4 \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} + 2Y_3 = 2\,\Box_4 \zeta_3 \tag{3.20}$$

حيث $\overset{*}{\Box}_2$ و $\overset{*}{\Box}_4$ ، على الترتيب هما $\Box_2$ و $\Box_4$ بعد تعويض $\alpha = 0$.

لنفترض الآن أن:

$$\begin{aligned} &u_\alpha = u_\alpha^0 + u'_\alpha \;\;, \varphi_3 = \varphi_3^0 + \varphi'_3\,, \\ &\zeta_3 = \zeta_3^0 + \zeta'_3 \;, Y_3 = Y_3^0 + Y'_3\;, \end{aligned} \tag{3.21}$$

حيث المقاطع: $u_\alpha^0\,,\,\varphi_3^0$ تتعلق بجسم هوك ضمن المرونة التقليدية الديناميكية. عندئذٍ بوضع : $\zeta_i^0 = 0$ ، نصل إلى مسألة القيم الحدية– الابتدائية للجسم في إطار المرونة الخطية التقليدية الديناميكية ، حيث نحصل من المعادلة (3.19) على معادلات Lame التقليدية التالية المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\overset{*}{\Box}_2 u_\alpha^0 + (\lambda+\mu) u_{\beta,\beta\alpha}^0 + X_\alpha = 0 \tag{3.22}$$

إلى ذلك نضيف الشروط الحدية والابتدائية، التقليدية التالية، التي نحصل عليها من الشروط الحدية والابتدائية (3.16) و(3.17):

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\sigma_{\beta\alpha}^0 n_\beta = p_\alpha \tag{3.23}$$

حيث $\sigma_{\beta\alpha}^0$ هي المركبات الديكارتية لحقل الإجهادات التقليدي $\boldsymbol{\sigma}^0$.

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u_\alpha^0 = f_\alpha \,,\ \dot{u}_\alpha^0 = g_\alpha \tag{3.24}$$

الآن من المعادلة (3.20) ، لأجل ($\zeta_3^0 = 0$ و $Y_3^0 = 0$) ، تنفصل أو تخرج المعادلة التالية، المحققة في: $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$2\overset{*}{\square}_2\,\varphi_3^0 + \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} = 0 \tag{3.25}$$

الناتجة عن المعادلة (3.22)، والعلاقة التقليدية:

$$2\varphi_3^0 = \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha}^0 \tag{3.26}$$

من نظام المعادلات (3.19) و(3.22) ، و(3.20) و (3.25) نحصل على جملة المعادلات التالية المحققة في $\mathrm{T}^+ \times \Omega$ لأجل $\zeta_3\,,\,u'_\alpha$:

$$\overset{*}{\square}_2\,u'_\alpha + (\lambda+\mu)\,u'_{\beta,\beta\alpha} + \hat{X}_\alpha = 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \zeta_{3,\gamma}\,, \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} &\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha} + 2\bar{Y}_3 - 2\,\square_4\zeta_3 = \\ &= 2(\gamma+\varepsilon)\,(c_4^{-2} - \hat{c}_2^{-2})\,\ddot{\varphi}_3^0\ , \end{aligned} \tag{3.28}$$

حيث:

$$\begin{aligned} &c_4^2 = \frac{\gamma+\varepsilon}{J}\ ,\ \hat{c}_2^2 = \frac{\mu}{\rho}\ ,\ \hat{X}_\alpha = 0\,, \\ &\bar{Y}_3 = Y_3 - \frac{\gamma+\varepsilon}{2\mu} \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} \end{aligned} \tag{3.29}$$

إلى جملة المعادلات (3.27)−(3.28) نضيف الشروط الحدية والابتدائية التالية:

الشروط الحدية المحققة على $\mathrm{T} \times \partial\Omega$:

$$\sigma'_{\beta\alpha} n_\beta = 0\ \ ,\ \ \mu'_{\alpha 3} n_\alpha = m_3 - m_3^0 \tag{3.30}$$

الشروط الابتدائية، المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u'_\alpha = 0\,,\ \ \varphi'_3 = f_3 - f_3^0\ ,\ \dot{u}'_\alpha = 0\,,\ \ \dot{\varphi}'_3 = g_3 - g_3^0 \tag{3.31}$$

حيث المقادير: m_3^0 و $f_3^{\,0}$ و g_3^0 تنتج عن حل مسألة القيم الحدية والابتدائية التقليدية (3.22)-(3.24) وعن العلاقات التقليدية:

$$\begin{aligned} &\varphi_3^0 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u^{\,0}_{\beta,\alpha} \;, \quad \kappa^{\,0}_{\alpha 3} = \varphi^0_{3,\alpha} \,, \\ &\mu^0_{\alpha 3} = (\gamma + \varepsilon)\,\kappa^{\,0}_{\alpha 3} \;, \;\; m_3^0 = \mu^0_{\alpha 3} n_\alpha \end{aligned} \qquad (3.32)$$

حيث:

$$f_3^{\,0}(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \varphi_3^0(\mathbf{x}, t) \;, \;\; g_3^0(\mathbf{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{\partial \varphi_3^0}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \;;\; \mathbf{x} \in \Omega \qquad (3.33)$$

إن المعادلات (3.22) و(3.28)−(3.27) مرتبطة ليس فقط عبر الشروط الحدية والابتدائية (3.35)−(3.34)، وإنما أيضاً من خلال ظهور الدوران التقليدي: $\varphi_3^0 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u^{\,0}_{\beta,\alpha}$ أمام المؤثر: $2(\gamma+\varepsilon)\,(c_4^{-2} - \hat{c}_2^{-2})\,\partial_t^2$، في المعادلة (3.28).

<u>*آلية حل المسألة:*</u> تتلخص آلية حل المسألة (3.10)−(3.1) بالخطوات الثلاث التالية:

أولاً: بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية،التقليدية، نحصل على الإزاحات التقليدية $u_\alpha^{\,0}$. باستخدام العلاقات $(3.32)_{1,2}$ نحصل على الدوران التقليدي φ_3^0 وعلى انفعال العزم التقليدية $\kappa^{\,0}_{\alpha 3}$. باستخدام العلاقة $(3.32)_3$ نحصل على انفعالات العزم التقليدية $\mu^0_{\alpha 3}$. أما باستخدام $(3.32)_4$و(3.33) فنحصل،على الترتيب، على كل من m_3^0 و $f_3^{\,0}$ و g_3^0. أما باستخدام العلاقات الهندسية $(3.7)_1$ ، مكتوبةً بالنسبة للإزاحات التقليدية u_α^0 والانفعالات التقليدية $\varepsilon^{\,0}_{\alpha\beta}$، نحصل على الانفعالات التقليدية $\varepsilon^{\,0}_{\alpha\beta}$. وباستخدام العلاقة $(3.8)_1$ ، مكتوبةً بالنسبة للانفعالات التقليدية $\varepsilon^{\,0}_{\alpha\beta}$ والإجهادات التقليدية $\sigma^0_{\alpha\beta}$، نحصل على الإجهادات التقليدية $\sigma^0_{\alpha\beta}$.

ثانياً: وبحل مسألة القيم الحدية الابتدائية المتممة (3.31)−(3.27)، نحصل على الحل المتمم: $u'_\alpha \,,\, \varphi'_3$. باستخدام العلاقات الهندسية (3.7) مكتوبةً بالنسبة للإزاحات المتممة u'_α والدوران المتمم φ'_3 والانفعالات المتممة $\gamma'_{\alpha\beta}$ و $\kappa'_{\alpha 3}$ ، فإننا نحصل على الانفعالات المتممة المذكورة. وباستخدام العلاقات التأسيسية (3.8) ، مكتوبةً بالنسبة

للانفعالات المتممة $\gamma'_{\alpha\beta}$ و $\kappa'_{\alpha 3}$ ، و الإجهادات المتممة $\sigma'_{\alpha\beta}$ و $\mu'_{\alpha 3}$ ، فإننا نحصل على الإجهادات المتممة $\sigma'_{\alpha\beta}$ و $\mu'_{\alpha 3}$.

ثالثاً: بعد الحصول على جميع الحقول الفيزيائية التقليدية والمتممة ، نعوض في:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u^0_\alpha + u'_\alpha \,, \quad \varphi_3 = \varphi^0_3 + \varphi'_3 \,, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \varepsilon^0_{\alpha\beta} + \gamma'_{\alpha\beta} \,, \quad \kappa_{\alpha 3} = \kappa^0_{\alpha 3} + \kappa'_{\alpha 3} \,, \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \sigma^0_{\alpha\beta} + \sigma'_{\alpha\beta} \,, \quad \mu_{\alpha 3} = \mu^0_{\alpha 3} + \mu'_{\alpha 3} \end{aligned} \tag{3.34}$$

ونستخدم العلاقة (3.4)، فنحصل على الحل $(\mathbf{u}\,,\ \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\sigma}\,,\ \boldsymbol{\mu}\,,\ \boldsymbol{\gamma}\,,\ \boldsymbol{\kappa})$ لمسألة القيم الحدية والابتدائية (3.10)−(3.1).

فيمايلي سنستنتج النظام المعادلاتي الاشتقاقي الجزئي لأجل المقاطع: $u'_\alpha\,,\ \varphi'_3$ ، والذي لايحتوي الدوران التقليدي φ^0_3. ولهذا الغرض نطبق المؤثر $\overset{*}{\square}_2$ على طرفي المعادلة (3.20)، فنحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\overset{*}{\square}_2 (\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha} + 2Y_3 - 2\,\square_4 \zeta_3) = 0 \tag{3.35}$$

الآن عن المعادلة (3.34) ، لأجل ($\zeta^0_3 = 0$ و $Y^0_3 = 0$) ، تنفصل أو تخرج المعادلة التالية، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$\overset{*}{\square}_4 (2\overset{*}{\square}_2 \varphi^0_3 + \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha}) = 0 \tag{3.36}$$

والمحققة على التطابق في $\Omega \times \mathrm{T}^+$، وينتج ذلك من تحقق المعادلة (3.25) في $\Omega \times \mathrm{T}^+$.

الآن، ينتج من المعادلات (3.19) و (3.35) ، أن جملة المعادلات التالية محققة في $\Omega \times \mathrm{T}^+$، لأجل $u'_\alpha\,,\ \zeta_3$:

$$\overset{*}{\square}_2 u'_\alpha + (\lambda + \mu) u'_{\beta,\beta\alpha} + \hat{X}_\alpha = 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \zeta_{3,\gamma} \,, \tag{3.37}$$

$$\overset{*}{\square}_2 (\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha} - 2\,\square_4 \zeta_3) + 2\hat{Y}_3 = 0 \,, \tag{3.38}$$

حيث:

$$\hat{Y}_3 = \overset{*}{\Box}_2 Y_3 - \frac{1}{2}\overset{*}{\Box}_4 \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} \qquad (3.39)$$

ولنلاحظ هنا اختفاء الدوران التقليدي φ_3^0 من جملة المعادلات السابقة. أخيراً باستخدام العلاقة:

$$\zeta_3 = \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha} - \varphi'_3 \qquad (3.40)$$

تأخذ جملة المعادلات $(3.38)-(3.37)$ الشكل التالي في $\Omega \times T^+$، لأجل $u'_\alpha\,,\ \varphi'_3$:

$$\Box_2 u'_\alpha + (\lambda+\mu-\alpha)\,u'_{\beta,\beta\alpha} + 2\alpha \in_{\alpha\gamma} \varphi'_{3,\gamma} + \hat{X}_\alpha = 0 \qquad (3.41)$$

$$\overset{*}{\Box}_2 \left(\Box_4 \varphi'_3 + 2\alpha \in_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha}\right) + \hat{Y}_3 = 0 \qquad (3.42)$$

إلى جملة المعادلات السابقة نضيف الشروط الحدية والابتدائية $(3.31)-(3.30)$.

كما يلزمنا أيضاً فيمايلي عرض نتائج البحث [1] المتضمن وصف Ignaczak بالإجهادات والحرارة للجسم 2D(E−N:5).

رابعاً) وصف Ignaczak بالإجهادات للجسم 2D (E−N:5) : يتألف وصف Ignaczak للحالة الديناميكية للجسم 2D (E−N:5) المتجانس والمتماثل المناحي، ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة، يتألف من المعادلات والعلاقات التنسورية الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية [1]:

معادلات الحركة بالإجهادات ، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\rho^{-1} R_{\alpha,\beta} + J^{-1} \in_{\alpha\beta} R_3 - \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}_{[\alpha\beta]} + \frac{\lambda}{2\mu}\ddot{e}_1 \delta_{\alpha\beta} = 0, \qquad (3.43)$$

$$c_4^2 R_{3,\alpha} - \ddot{\mu}_{\alpha 3} = 0\ , \qquad (3.44)$$

حيث:

$$R_\alpha = \hat{R}_\alpha + X_\alpha\ , R_3 = \hat{R}_3 + Y_3\ , \hat{R}_\alpha = \sigma_{\beta\alpha,\beta}\ ,$$

$$\hat{R}_3 = \in_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \mu_{\beta 3,\beta}\ , \ddot{e}_1 = \frac{\ddot{\sigma}_{\varepsilon\varepsilon}}{2(\mu+\lambda)}\ , c_4 = \sqrt{\frac{\gamma+\varepsilon}{J}}\ ,$$

أخيراً $\sigma_{(\alpha\beta)}$ و $\sigma_{[\alpha\beta]}$ ،على الترتيب، هي الجزء التناظري والجزء التناظري العكسي لـ $\sigma_{\alpha\beta}$ ؛ $\sigma_{[\alpha\beta]}=\frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta}-\sigma_{\beta\alpha})$, $\sigma_{(\alpha\beta)}=\frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\beta}+\sigma_{\beta\alpha})$ ؛

الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega\times\mathrm{T}$:

$$\sigma_{\beta\alpha}n_\beta=p_\alpha\ ,\ \mu_{\beta 3}n_\beta=m_3 \tag{3.45}$$

الشروط الابتدائية المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^{(0)}\ ,\ \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}^{(0)}\ ,\\&\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}\ ,\ \dot{\boldsymbol{\mu}}=\dot{\boldsymbol{\mu}}^{(0)}\end{aligned} \tag{3.46}$$

حيث:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)}\equiv\begin{bmatrix}\sigma_{11}^{(0)}&\sigma_{12}^{(0)}&0\\\sigma_{21}^{(0)}&\sigma_{22}^{(0)}&0\\0&0&\sigma_{33}^{(0)}\end{bmatrix}\ ,\ \boldsymbol{\mu}^{(0)}\equiv\begin{bmatrix}0&0&\mu_{13}^{(0)}\\0&0&\mu_{23}^{(0)}\\\mu_{31}^{(0)}&\mu_{32}^{(0)}&0\end{bmatrix}, \tag{3.47}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}\equiv\begin{bmatrix}\dot\sigma_{11}^{(0)}&\dot\sigma_{12}^{(0)}&0\\\dot\sigma_{21}^{(0)}&\dot\sigma_{22}^{(0)}&0\\0&0&\dot\sigma_{33}^{(0)}\end{bmatrix}\ ,\ \dot{\boldsymbol{\mu}}^{(0)}\equiv\begin{bmatrix}0&0&\dot\mu_{13}^{(0)}\\0&0&\dot\mu_{23}^{(0)}\\\dot\mu_{31}^{(0)}&\dot\mu_{32}^{(0)}&0\end{bmatrix}, \tag{3.48}$$

علماً أن:

$$\sigma_{33}^{(0)}=\nu\,\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}\ ,\ \mu_{3\alpha}^{(0)}=\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,\mu_{\alpha 3}^{(0)}\ , \tag{3.49}$$

$$\dot\sigma_{33}^{(0)}=\nu\,\dot\sigma_{\alpha\alpha}^{(0)}\ ,\dot\mu_{3\alpha}^{(0)}=\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\,\dot\mu_{\alpha 3}^{(0)} \tag{3.50}$$

وأن:

$$\begin{aligned}&\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}=(\mu+\alpha)\,\gamma_{\alpha\beta}^{(0)}+(\mu-\alpha)\,\gamma_{\beta\alpha}^{(0)}+\lambda\,e_1^{(0)}\,\delta_{\alpha\beta}\ ,\\&\mu_{\alpha 3}^{(0)}=(\gamma+\varepsilon)\,f_{3,\alpha}\ ,\ \gamma_{\alpha\beta}^{(0)}=f_{\beta,\alpha}-\in_{\alpha\beta}f_3\ ,\ e_1^{(0)}=f_{\varepsilon,\varepsilon}\ ,\end{aligned} \tag{3.51}$$

وأن:

$$\begin{aligned}&\dot\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}=(\mu+\alpha)\,\dot\gamma_{\alpha\beta}^{(0)}+(\mu-\alpha)\,\dot\gamma_{\beta\alpha}^{(0)}+\lambda\,\dot e_1^{(0)}\,\delta_{\alpha\beta}\ ,\\&\dot\mu_{\alpha 3}^{(0)}=(\gamma+\varepsilon)\,g_{3,\alpha}\ ,\ \dot\gamma_{\alpha\beta}^{(0)}=g_{\beta,\alpha}-\in_{\alpha\beta}g_3\ ,\ \dot e_1^{(0)}=g_{\varepsilon,\varepsilon}\ ,\end{aligned} \tag{3.52}$$

العلاقات التأسيسية العكسية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2\alpha}\sigma_{[\alpha\beta]} - \frac{\lambda}{2\mu} e_1 \delta_{\alpha\beta} \ ,$$
$$\kappa_{\alpha 3} = \frac{1}{\gamma+\varepsilon}\mu_{\alpha 3} \ , \quad e_1 = \frac{\sigma_{\varepsilon\varepsilon}}{2(\mu+\lambda)} \ , \tag{3.53}$$

العلاقات التي الإزاحات والدورانات بدلالة الإجهادات ، والمحققة في $\bar{\Omega} \times T$:

$$u_\alpha = g_\alpha t + f_\alpha + \rho^{-1}(t * R_\alpha) \ , \tag{3.54}$$

$$\varphi_3 = g_3 t + f_3 + J^{-1}(t * R_3) \ , \tag{3.55}$$

حيث النجمة $*$ تعني الطي [10]: $t * f(\mathbf{x};t) = \int_0^t (t-\tau) f(\mathbf{x};\tau)\, d\tau$

آلية حل مسألة Ignaczak: بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية (3.52)− (3.43) والأخذ بعين الاعتبار العلاقات (3.4) نحصل على الإجهادات: $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu})$. وإذا عوضنا الحل: $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu})$ في العلاقات التأسيسية العكسية (3.53) نحصل على الانفعالات: $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$. أما إذا عوضنا الحل: $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu})$ في العلاقات (3.54) و(3.55) فنحصل على الإزاحات والدورانات: $(\mathbf{u} \ , \ \boldsymbol{\varphi})$.

4. النتائج والمناقشة:

في كلٍ من الوصف التقليدي (3.10)−(3.1)، و وصف Ignaczak (3.55)−(3.43) للجسم المعتبر 2D(E−N:5) ، سنفرض فيه أن:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}' \ , \ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^0 + \boldsymbol{\varphi}' \ ,$$
$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}' \ , \ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^0 + \boldsymbol{\mu}' \ , \ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\gamma}' \ , \tag{4.1}$$
$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^0 + \boldsymbol{\kappa}' \ , \ \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^0 + \mathbf{Y}' \ ,$$

حيث الحقول $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$ و $\mathbf{Y}^0$ ، تتعلّق بالمرونة الخطية، الكلاسيكية والديناميكية (موديل Hooke المتساوي درجات الحرارة) ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة لهذا الجسم، أما الحقول $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$ و $\mathbf{Y}'$ فهي الحقول المتممة، أو الزائدة عن حقول الجسم Hooke متساوي درجات الحرارة.

4-1 تعميم طريقة متجه Schaefer إلى حل مسألة الوصف التقليدي (العام) للجسم 2D(E-N:6):

4-1-1 مسألة القيم الحدية والابتدائية المتعلقة بالحقول $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$:

نحصل عليها باتباع ما يلي.

من المعادلتين $(3.5)_1$، نحصل على:

معادلات الحركة، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma^0_{\beta\alpha,\beta} + X_\alpha = \rho\, \ddot{u}^0_\alpha , \qquad (4.2)$$

من معادلات توافق الانفعالات (3.6)، نحصل على المعادلات التالية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} &\kappa^0_{23,1} - \kappa^0_{13,2} = 0 \ , \quad \kappa^0_{13} - \varepsilon^0_{21,1} + \varepsilon^0_{11,2} = 0 , \\ &\kappa^0_{23} + \varepsilon^0_{12,2} - \varepsilon^0_{22,1} = 0 , \end{aligned} \qquad (4.3)_1$$

التي إذا حذفنا منها انفعالات العزم ، الكلاسيكية ، فإننا نحصل فقط على معادلة واحدة؛ هي:

معادلة توافق الانفعالات التقليدية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\varepsilon^0_{11,22} + \varepsilon^0_{22,111} - 2\,\varepsilon^0_{12,12} = 0 , \qquad (4.3)_2$$

ومن العلاقات الهندسية (3.7)، نحصل على العلاقات الهندسية الكلاسيكية التالية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\varepsilon^0_{\alpha\beta} = u^0_{\beta,\alpha} + \in_{\beta\alpha} \varphi^0_3 \ , \quad \kappa^0_{\alpha 3} = \varphi^0_{3,\alpha} \qquad (4.4)_1$$

التي اعتمادا على تعريف الدوران الكلاسيكي $(\varphi^0_3 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} u^0_{\beta,\alpha})$ ،وبمساعدة العلاقة: $\in_{\alpha\gamma} \in_{\varepsilon\delta} = \delta_{\alpha\varepsilon}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\varepsilon}$ ، فإن العلاقة الأولى منها (أي من $(4.4)_1$) تعطينا:

العلاقات الهندسية الكلاسيكية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\varepsilon^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(u^0_{\alpha,\beta} + u^0_{\beta,\alpha}) , \qquad (4.4)_2$$

وهنا يتضح تناظر حقل الانفعالات التنسوري، الكلاسيكي $(\varepsilon^0_{\alpha\beta} = \varepsilon^0_{\beta\alpha})$ ،

من العلاقات التأسيسية(3.8)، نحصل على العلاقات التأسيسية الكلاسيكية التالية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\sigma^0_{\alpha\beta} = (\mu+\alpha)\,\varepsilon^0_{\alpha\beta} + (\mu-\alpha)\,\varepsilon^0_{\beta\alpha} + \lambda\, e^0_1\,\delta_{\alpha\beta}\ , \qquad \mu^0_{\alpha 3} = (\gamma+\varepsilon)\,\kappa^0_{\alpha 3} \tag{4.5$_1$}$$

حيث: $e^0_1 = \varepsilon^0_{\alpha\alpha}$ ،

وكون أن تنسور الانفعالات الكلاسيكية $\varepsilon^0_{\alpha\beta}$ متناظر ، فإن العلاقة الأولى من العلاقات السابقة تعطينا:

العلاقات التأسيسية الكلاسيكية التالية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\sigma^0_{\alpha\beta} = 2\mu\,\varepsilon^0_{\alpha\beta} + \lambda\, e^0_1\,\delta_{\alpha\beta}\ , \tag{4.5$_2$}$$

حيث: $e^0_1 = \varepsilon^0_{\alpha\alpha}$ ،

من الشروط الحدية (3.9)، نحصل على:

الشروط الحدية الكلاسيكية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\sigma^{\,0}_{\beta\,\alpha} n_\beta = p_\alpha \tag{4.6}$$

ومن الشروط الابتدائية (3.10) ، نحصل على:

الشروط الابتدائية الكلاسيكية المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u^0_\alpha = f_\alpha\ ,\ \theta^0 = \ell\ ,\ \dot{u}^0_\alpha = g_\alpha \tag{4.7}$$

تمثل المسألة (4.7)−(4.2) بالمسألة الكلاسيكية للجسم 2D(E−N:5).

4-1-2 مسألة القيم الحدية والابتدائية للحقول المتممة $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$ *(الزائدة)*:

نحصل عليها باتباع ما يلي.

بدايةً تلزمنا المعادلة المساعدة التالية:

$$\overset{*}{\square}_2\, \mu^0_{\alpha 3,\alpha} + \frac{1}{2}\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} = J\,\overset{*}{\square}_2\, \ddot{\varphi}^0_3 \tag{4.8}$$

المحققة في $\Omega \times T^+$. بسهولة يمكن ملاحظة أن هذه المعادلة تنتج عن المعادلة (3.25) وعن العلاقة الهندسية الثانية في $(4.4)_1$ وعن العلاقة التأسيسية الثانية في $(4.5)_1$.

للحصول، الآن، على المعادلات للحقول المتممة $(\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi}',\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\kappa}')$ (الزائدة) نتبع الآتي . تطبيق المؤثر $\overset{*}{\square}_2$ على طرفي المعادلة $(3.5)_2$ فنحصل بذلك على المعادلة التالية (في: $\Omega \times T^+$):

$$\overset{*}{\square}_2(\in_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}+\mu_{\beta 3,\beta})+\hat{Y}_3+\frac{1}{2}\overset{*}{\square}_4\in_{\alpha\beta}X_{\beta,\alpha}=J\overset{*}{\square}_2\ddot{\varphi}_3 \quad (4.9)$$

ينتج الآن عن (4.9) و(4.8) وعن المعادلة $(3.5)_1$ ، أن مجموعة الحقول المتممة $(\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi}',\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\kappa}')$ يحقق نظام المعادلات، المتمم (الزائد)، التالي في $\Omega\times T^+$:

$$\begin{aligned}&\sigma'_{\beta\alpha,\beta}+\hat{X}_\alpha=\rho\,\ddot{u}'_\alpha\ ,\\&\overset{*}{\square}_2(\in_{\alpha\beta}\sigma'_{\alpha\beta}+\mu'_{\beta 3,\beta})+\hat{Y}_3=J\overset{*}{\square}_2\ddot{\varphi}'_3\ ,\end{aligned}\quad (4.10)$$

من معادلات توافق الانفعالات (3.6)، نحصل على:

معادلات توافق الانفعالات، المتممة، التالية، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned}&\kappa'_{23,1}-\kappa'_{13,2}=0\ ,\ \ \kappa'_{13}-\gamma'_{21,1}+\gamma'_{11,2}=0\ ,\\&\kappa'_{23}+\gamma'_{12,2}-\gamma'_{22,1}=0\end{aligned}\quad (4.11)$$

ومن العلاقات الهندسية (3.7)، نحصل على:

العلاقات الهندسية، المتممة، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\gamma'_{\alpha\beta}=u'_{\beta,\alpha}+\in_{\beta\alpha}\varphi'_3\ \ ,\ \ \ \kappa'_{\alpha 3}=\varphi'_{3,\alpha} \quad (4.12)$$

ومن العلاقات التأسيسية (3.8)، نحصل على:

العلاقات التأسيسية، المتممة، المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned}&\sigma'_{\alpha\beta}=(\mu+\alpha)\gamma'_{\alpha\beta}+(\mu-\alpha)\ \gamma'_{\beta\alpha}+\lambda e'_1\delta_{\alpha\beta}\ ,\\&\mu'_{\alpha 3}=(\gamma+\varepsilon)\kappa'_{\alpha 3}\end{aligned}\quad (4.13)$$

حيث: $e'_1=\gamma'_{\varepsilon\varepsilon}$ ،

إلى معادلات الحقل والعلاقات $(4.13)-(4.10)$ نضيف الشروط الحدية والابتدائية، التالية:

الشروط الحدية، المتممة (على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$) :

$$\sigma'_{\beta\,\alpha} n_\beta = 0 \;\;,\;\; \mu'_{\alpha 3} n_\alpha = m_3 - m_3^0 \qquad (4.14)$$

الشروط الابتدائية، المتممة، المحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$u'_\alpha = 0\,,\;\; \varphi'_3 = f_3 - f_3^{\,0}\;,\; \dot{u}'_\alpha = 0\,,\;\; \dot{\varphi}'_3 = g_3 - g_3^0 \qquad (4.15)$$

حيث المقادير: m_3^0 و $f_3^{\,0}$ و g_3^0 هي نفسها المقادير الواردة في نهاية الفقرة الثالثة، ضمن طرق وأدوات البحث.

تمثل المسألة $(4.15)-(4.10)$ بالمسألة المتممة (الزائدة) للجسم $2\mathrm{D}(\mathrm{E{-}N{:}5})$.

آلية حل مسألة الوصف التقليدي الجسم $2\mathrm{D}(\mathrm{E{-}N{:}5})$ بطريقة متجه Schafer المعممة:

بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية الكلاسيكية $(4.7)-(4.2)$، نحصل على الحقول الكلاسيكية $(u_\alpha^0, \varphi_3^0\,, \varepsilon^{\,0}_{\alpha\,\beta}\,, \sigma^{\,0}_{\alpha\,\beta})$. بعدها وبمساعدة العلاقات الهندسية التي تربط بين φ_3^0 و $\kappa^{\,0}_{\alpha 3}$ نحصل على $\kappa^{\,0}_{\alpha 3}$. بعدها باستخدام العلاقات التأسيسية التي تربط بين $\kappa^{\,0}_{\alpha 3}$ و $\mu^0_{\alpha 3}$ نحصل $\mu^0_{\alpha 3}$.

وبحل مسألة القيم الحدية والابتدائية، المتممة (الزائدة) $(4.15)-(4.10)$ نحصل على الحقول المتممة $(u'_\alpha\,, \varphi'_3, \sigma'_{\alpha\,\beta}\,, \mu'_{\alpha 3}\,, \gamma'_{\alpha\,\beta}\,, \kappa'_{\alpha 3})$. أخيراً باستخدام العلاقات (3.4) و (4.1)، نحصل على الحل $(\mathbf{u}\,, \boldsymbol{\varphi}\,, \boldsymbol{\sigma}, \,\boldsymbol{\mu}\,, \boldsymbol{\gamma}\,, \boldsymbol{\kappa})$ لمسألة القيم الحدية والابتدائية الأصلية $(3.10)-(3.1)$.

4-2 تعميم طريقة متجه Schaefer إلى وصف Ignaczak للجسم (E−N:5) 2D:

4-2-1 مسألة Ignaczak للقيم الحدية والابتدائية للحقول $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$:

نحصل على هذه المسألة باتباع ما يلي. بدايةً، لنسمي:

$$\zeta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\rho^{-1}(R_{\;\alpha,\,\beta} + R_{\;\beta,\,\alpha}) - \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}_{(\alpha\,\beta)} + \frac{\lambda}{2\,\mu}\ddot{e}_1 \delta_{\alpha\beta} \qquad (4.16)$$

بحقل Schafer التنسوري، والذي هو حقل تنسوري من المرتبة الثانية، ومتناظر.

لنلاحظ، الآن، أن معادلة Ignaczak التنسورية (3.43) تكتب في $\Omega \times T^{+}$، بالشكل[2]:

$$\zeta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}_{[\alpha\beta]} + \frac{1}{2}\rho^{-1}(R_{\alpha,\beta} - R_{\beta,\alpha}) + J^{-1} \in_{\alpha\beta} R_3 = 0 \quad (4.17)$$

فإذا كتبنا:

$$\zeta_{\alpha\beta} = \zeta^{0}_{\alpha\beta} + \zeta'_{\alpha\beta} \quad (4.18)$$

حيث $\zeta^{0}_{\alpha\beta}$ هو الجزء الكلاسيكي و $\zeta'_{\alpha\beta}$ الجزء المتمم لحقل Schafer التنسوري $\zeta_{\alpha\beta}$.

نحصل، الآن، على معادلات Ignaczak الكلاسيكية بالتوابع المجهولة الكلاسيكية: $\sigma^{0}_{\alpha\beta}$ ، بوضع $\zeta^{0}_{\alpha\beta} = 0$ في المعادلة (4.16)، فنحصل على:

معادلة Ignaczak الكلاسيكية، الحركة، والمحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\hat{c}_2^2(R^{0}_{\alpha,\beta} + R^{0}_{\beta,\alpha}) - \ddot{\sigma}^{0}_{\alpha\beta} + \lambda\, \ddot{e}^{0}_1 \delta_{\alpha\beta} = 0 \;, \quad (4.19)$$

حيث:

$$R^{0}_{\alpha} = \hat{R}^{0}_{\alpha} + X_{\alpha} \;,\; \hat{R}^{0}_{\alpha} = \sigma^{0}_{\beta\alpha,\beta} \;,\; \ddot{e}^{0}_1 = \frac{\ddot{\sigma}^{0}_{\varepsilon\varepsilon}}{2(\mu+\lambda)} \;,$$

من الشروط الحدية (3.45) ، نحصل على الشروط الحدية التالية، لأجل المعادلة التنسورية (4.19):

الشروط الحدية، الكلاسيكية، المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\sigma^{0}_{\beta\alpha} n_{\beta} = p_{\alpha} \quad (4.20)$$

ومن الشروط الابتدائية (3.52)−(3.46) ، نحصل على الشروط ، الابتدائية، الكلاسيكية، التالية لأجل حقل الإجهادات الكلاسيكية $\boldsymbol{\sigma}^0$ المحقق للمعادلة التنسورية(4.19):

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathrm{sym}\, \boldsymbol{\sigma}^{(0)} \;,\;\; \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 = \mathrm{sym}\, \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)} , \quad (4.21)$$

[2] إن المعادلة التنسورية (3.43)، تملك الشكل: $L_{\alpha\beta} = 0$ ، ومن أجل الحصول على المعادلات الكلاسيكية، كتبناها بالشكل: $L_{(\alpha\beta)} + L_{[\alpha\beta]} = 0$ (حيث هنا: $\zeta_{\alpha\beta} = L_{(\alpha\beta)}$)، وذلك بهدف تخصيص الجزء: $L_{(\alpha\beta)} = 0$ ليصف الحقول الكلاسيكية. هذا بدوره ينتج عن حقيقية أن معادلات الإجهادات ، الكلاسيكية، لا يتغير طرفها الأيسر باستبدال كل α بـ β وكل β بـ α .

حيث الرمز sym يدل على الجزء التناظري؛ $\operatorname{sym}\mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=A_{(ij)}\,\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$ ؛

بالتالي تأخذ الشروط الإبتدائية السابقة الشكل الديكارتي التالي في $\Omega\times\{0\}$:

$$\begin{aligned}&\sigma^{0}_{\alpha\beta}=\sigma^{(0)}_{(\alpha\beta)}\ ,\ \sigma^{0}_{33}=\sigma^{(0)}_{33}\ ,\\&\dot\sigma^{0}_{\alpha\beta}=\dot\sigma^{(0)}_{(\alpha\beta)}\ ,\ \dot\sigma^{0}_{33}=\dot\sigma^{(0)}_{33}\ ,\end{aligned}\tag{4.22}$$

حيث هنا:

$$\begin{aligned}&\sigma^{(0)}_{(\alpha\beta)}=2\mu\,\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta}+\lambda\,e^{(0)}_{1}\,\delta_{\alpha\beta}\ ,\ \sigma^{(0)}_{33}=\nu\,\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha}\ ,\\&\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(f_{\alpha,\beta}+f_{\beta,\alpha})\ ,\ e^{(0)}_{1}=f_{\varepsilon,\varepsilon}\ ,\end{aligned}\tag{4.23}$$

و:

$$\begin{aligned}&\dot\sigma^{(0)}_{(\alpha\beta)}=2\mu\,\dot\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta}+\lambda\,\dot e^{(0)}_{1}\,\delta_{\alpha\beta}\ ,\ \dot\sigma^{(0)}_{33}=\nu\,\dot\sigma^{(0)}_{\alpha\alpha}\ ,\\&\dot\varepsilon^{(0)}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(g_{\alpha,\beta}+g_{\beta,\alpha})\ ,\ \dot e^{(0)}_{1}=g_{\varepsilon,\varepsilon}\ ,\end{aligned}\tag{4.24}$$

من العلاقات $(3.53)_1$ ، نحصل على:

العلاقات التأسيسية الكلاسيكية محلولةً بالنسبة للانفعالات الكلاسيكية $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ ، *المحققة في* $\Omega\times T$:

$$2\mu\,\varepsilon^{0}_{\alpha\beta}=\sigma^{0}_{\alpha\beta}-\lambda\,e^{0}_{1}\,\delta_{\alpha\beta}\ ,\tag{4.25}$$

حيث: $e^{0}_{1}=\dfrac{\sigma^{0}_{\varepsilon\varepsilon}}{2(\mu+\lambda)}$ ،

كما نحصل من العلاقات $(3.53)_2$، على العلاقات التأسيسية محلولةً بالنسبة لانفعالات العزم، الكلاسيكية (في $\Omega\times T$):

$$\kappa^{0}_{\alpha3}=\frac{1}{\gamma+\varepsilon}\,\mu^{0}_{\alpha3}\ ,\tag{4.26}$$

من العلاقات (3.54) ومن تعريف الدوران الكلاسيكي φ^0_3 ($\varphi^0_3=\frac{1}{2}\in_{\alpha\beta}u^0_{\beta,\alpha}$)، نجد:

العلاقات التالية التي تعطينا الإزاحة الكلاسيكية $\mathbf{u}^0$ *والدوران الكلاسيكية* $\boldsymbol{\varphi}^0$ *في* $\bar\Omega\times T$، *وفقاً لوصف Ignaczak:*

$$u^{0}_{\alpha}=g_{\alpha}\,t+f_{\alpha}+\rho^{-1}(t*R^{0}_{\alpha})\ ,\tag{4.27}$$

$$\varphi_3^0 = \frac{1}{2} \in_{\alpha\beta} [g_\beta\, t + f_\beta + \rho^{-1}(t * R_\beta^0)]_{,\alpha} \qquad (4.28)$$

نعيِّن انفعالات العزم، الكلاسيكية κ_{ji}^0 من العلاقة التالية (في : $\bar{\Omega}\times \mathrm{T}$):

$$\kappa_{\alpha 3}^0 = \frac{1}{2} \in_{\gamma\varepsilon} [g_\varepsilon\, t + f_\varepsilon + \rho^{-1}(t * R_\varepsilon^0)]_{,\alpha\gamma} \qquad (4.29)$$

إن معادلة الحركة بالإجهادات (4.19) تملك الشكل التكاملي–التفاضلي التالي (في $\Omega \times \mathrm{T}$) :([2,3])

$$\begin{aligned} \hat{c}_2^2(t * R_{\alpha,\beta}^0 + t * R_{\beta,\alpha}^0) - \sigma_{\alpha\beta}^0 + \lambda e_1^0 \delta_{\alpha\beta} = \\ = -\mu [\, (g_{\alpha,\beta} + g_{\beta,\alpha})\, t + (f_{\alpha,\beta} + f_{\beta,\alpha})\,] \,, \end{aligned} \qquad (4.30)$$

حيث: $e_1^0 = \dfrac{\sigma_{\varepsilon\varepsilon}^0}{2(\mu+\lambda)}$.

بسهولة يمكن التأكد من أن المعادلة السابقة (4.30) تكافئ مسألة القيم الابتدائية (4.19) و (4.21).

بهدف إيجاد معادلات الحقول الزائدة $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$ تلزمنا المبرهنة المساعدة التالية:

مبرهنة مساعدة:

ينتج من المعادلات الكلاسيكية، التكاملية–التفاضلية (4.30) وعن العلاقات (4.29) و (4.26) و (3.18) أن الحقول الكلاسيكية $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$ ، تحقق المعادلات التالية:

1. المعادلة التالية في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\overset{*}{\square}_2 \in_{\alpha\beta} [g_\beta\, t + f_\beta + \rho^{-1}(t * R_\beta^0)]_{,\alpha} + \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} = 0 \,, \qquad (4.31)$$

2. المعادلة التالية في $\Omega \times \mathrm{T}^+$:

$$J^{-1} \overset{*}{\square}_2 \hat{R}_3^0 + \frac{1}{2} J^{-1} \overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha} = \frac{1}{2} \overset{*}{\square}_2 \in_{\alpha\beta} \rho^{-1} R_{\beta,\alpha}^0 \qquad (4.32)$$

حيث: $\hat{R}_3^0 = \mu_{\beta 3,\beta}^0$ ،

3. المعادلة التالية في $\Omega \times T^{+}$:

$$\frac{1}{2}\overset{*}{\square}_2 \rho^{-1}(R^0_{\alpha,\beta} - R^0_{\beta,\alpha}) - \overset{*}{\square}_2 \in_{\beta\alpha} J^{-1}\hat{R}^0_3 = \frac{1}{2} J^{-1} \in_{\beta\alpha} \overset{*}{\square}_4 \in_{\gamma\varepsilon} X_{\varepsilon,\gamma} \tag{4.33}$$

4. المعادلة التالية في $\Omega \times T^{+}$:

$$\overset{*}{\square}_2 (c_4^2 R^0_{3,\alpha} - \ddot{\mu}^0_{\alpha 3}) + \frac{1}{2} c_4^2 \overset{*}{\square}_4 \in_{\gamma\varepsilon} X_{\varepsilon,\gamma\alpha} = 0 \tag{4.34}$$

البرهان:

1. باستبدال كل α بـ β وكل β بـ γ في المعادلة (4.30)، من ثم باشتقاق طرفي المعادلة الناتجة، جزئياً بالنسبة لـ x_γ، نحصل بعد الاختصار والتبسيط مباشرةً على المعادلة (4.31)،

2. في المعادلة (4.31)، باستبدال كل α بـ γ وكل β بـ ε، من ثم باشتقاق المعادلة الناتجة جزئياً بالنسبة لـ x_γ، وبالاستفادة من(4.29)، نحصل مباشرةً على:

$$2\overset{*}{\square}_2 \kappa_{\alpha 3} + \in_{\gamma\varepsilon} X_{\varepsilon,\gamma\alpha} = 0\,, \tag{4.35}$$

الآن، بتعويض العلاقة (4.26)، نحصل على المعادلة:

$$\overset{*}{\square}_2 \mu^0_{\alpha 3} + \frac{1}{2}(\gamma+\varepsilon) \in_{\gamma\varepsilon} X_{\varepsilon,\gamma} = 0\,, \tag{4.36}$$

وباشتقاق الطرفين جزئياً بالنسبة لـ x_α، من ثم بالاستفادة مرةً أخرى من المعادلة (4.31)، نحصل على المعادلة المطلوبة (4.32)،

3. في (4.32) نستبدل كل α بـ γ وكل β بـ ε، من ثم نضرب طرفي العلاقة الناتجة بـ $\in_{\beta\alpha}$، ومن ثم نستفيد من العلاقة (3.18)، فنحصل مباشرة على العلاقة المطلوبة (4.33)،

4. في (4.32) أيضاً، نستبدل كل α بـ γ وكل β بـ ε، من ثم نشتق المعادلة الناتجة بالنسبة لـ x_α، فنجد:

$$J^{-1}\overset{*}{\square}_2 \hat{R}^0_{3,\alpha} + \frac{1}{2} J^{-1}\overset{*}{\square}_4 \in_{\gamma\varepsilon} X_{\varepsilon,\gamma\alpha} = \frac{1}{2}\overset{*}{\square}_2 \in_{\gamma\varepsilon} \rho^{-1} R^0_{\varepsilon,\gamma\alpha} \quad (4.37)$$

الآن، باستخدام العلاقتين (4.29) و(4.26)، نحصل من المعادلة (4.37)،على المعادلة المطلوبة (4.34).

2-2-4 مسألة Ignaczak للقيم الحدية والابتدائية للحقول المتممة (الزائدة): $(\mathbf{u}', \varphi', \sigma', \mu', \gamma', \kappa')$:

من أجل الحصول على معادلات Ignaczakللحركة بلغة الإجهادات المتممة $\sigma'_{\alpha\beta}, \mu'_{\alpha 3}$،

نطبق المؤثر $\overset{*}{\square}_2$ على طرفي المعادلة (3.43) (بعد كتابتها بالشكل (4.17))، وعلى طرفي المعادلة (3.44)، فنحصل على المعادلتين التاليتين (المحققتين في $\Omega \times T^+$):

$$\overset{*}{\square}_2 \{ \zeta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}_{[\alpha\beta]} + \frac{1}{2}\rho^{-1}(R_{\alpha,\beta} - R_{\beta,\alpha}) + + J^{-1} \in_{\alpha\beta} R_3\} = 0 \,, \quad (4.38)$$

$$\overset{*}{\square}_2 (c_4^2 R_{3,\alpha} - \ddot{\mu}_{\alpha 3}) = 0 \,, \quad (4.39)$$

ولنلاحظ الآن، أنه: أولاً: المعادلة (4.38) بمساعدة المعادلتين (4.19) و(4.33) ، ثانياً: المعادلة (4.39) بمساعدة المعادلة (4.34)، تعطينا جميعا:

معادلات Ignaczak للحركة بلغة الإجهادات المتممة، والمحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\overset{*}{\square}_2 \rho^{-1} R'_{\alpha,\beta} + J^{-1} \in_{\alpha\beta} \mathcal{R}'_3 - \overset{*}{\square}_2 \{ \frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}'_{(\beta\alpha)} + \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}'_{[\beta\alpha]} - \frac{\lambda}{2\mu}\ddot{e}'_1 \delta_{\alpha\beta} \} = 0 \,, \quad (4.40)$$

$$c_4^2 \mathcal{R}'_{3,\alpha} - \overset{*}{\square}_2 \ddot{\mu}'_{\alpha 3} = 0 \,, \quad (4.41)$$

حيث : $R'_\alpha = \hat{R}'_\alpha + \hat{X}_\alpha \,,\ \hat{R}'_\alpha = \sigma'_{\beta\alpha,\beta} \,,\ \hat{X}_\alpha \equiv 0 \,,$

و $\mathcal{R}'_3 = \hat{\mathcal{R}}'_3 + \hat{Y}_3 \,,\ \hat{\mathcal{R}}'_3 = \overset{*}{\square}_2 \hat{R}'_3 \,,\ \hat{R}'_3 = \in_{\alpha\beta} \sigma'_{\alpha\beta} + \mu'_{\beta 3,\beta}$

و $\hat{Y}_3 = \overset{*}{\square}_2 Y_3 - \frac{1}{2}\overset{*}{\square}_4 \in_{\alpha\beta} X_{\beta,\alpha}\ ,\quad \hat{Q}=0$

أما: $\ddot{e}'_1 = \dfrac{\ddot{\sigma}'_{\varepsilon\varepsilon}}{2(\mu+\lambda)}$ ،

من الشروط الحدية (3.45) ، نحصل على:

الشروط الحدية، المتممة، والمحققة على $\partial\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\sigma'_{\beta\alpha} n_\beta = 0\ ,\ \mu'_{\alpha 3} n_\alpha = m_3 - m_3^0 \tag{4.42}$$

حيث أن : $m_3^0 = \mu_{\alpha 3}^0 n_\alpha$ ، والتي فيها تنتج $\mu_{\alpha 3}^0$ عن العلاقة (4.29) وعن العلاقة التأسيسية الكلاسيكية (4.26)،

ومن الشروط الابتدائية (3.52)−(3.46)، نحصل على:

الشروط الابتدائية، المتممة، التالية لأجل الحقول المتممة $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \theta')$ في $(\Omega\times\{0\})$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' &= \text{skew}\ \boldsymbol{\sigma}^{(0)}\ ,\quad \boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}^{(0)} - \boldsymbol{\mu}^{0\,(0)}\ ,\\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}' &= \text{skew}\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}\ ,\quad \dot{\boldsymbol{\mu}}' = \dot{\boldsymbol{\mu}}^{(0)} - \dot{\boldsymbol{\mu}}^{0\,(0)}\ , \end{aligned} \tag{4.43}$$

حيث الرمز skew يدل على الجزء التناظري العكسي؛ $\text{skew}\ \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = A_{[i\,j\,]}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ؛

بالتالي تأخذ الشروط الإبتدائية السابقة الشكل الديكارتي التالي في $\Omega\times\{0\}$:

$$\begin{aligned} &\sigma'_{\alpha\beta} = \sigma^{(0)}_{[\alpha\beta]}\ ,\ \sigma'_{33} = 0\ ,\\ &\mu'_{\alpha 3} = \mu^{(0)}_{\alpha 3} - \mu^{0\,(0)}_{\alpha 3}\ ,\ \mu'_{3\alpha} = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}[\mu^{(0)}_{\alpha 3} - \mu^{0\,(0)}_{\alpha 3}]\ ,\\ &\dot{\sigma}'_{\alpha\beta} = \dot{\sigma}^{(0)}_{[\alpha\beta]}\ ,\ \dot{\sigma}'_{33} = 0\ ,\ \dot{\mu}'_{\alpha 3} = \dot{\mu}^{(0)}_{\alpha 3} - \dot{\mu}^{0\,(0)}_{\alpha 3}\ ,\\ &\dot{\mu}'_{3\alpha} = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}[\dot{\mu}^{(0)}_{\alpha 3} - \dot{\mu}^{0\,(0)}_{\alpha 3}]\ , \end{aligned} \tag{4.44}$$

علماً أن:

$$\begin{aligned} \sigma^{(0)}_{[\alpha\beta]} &= -2\alpha\,[\,\omega^{(0)}_{\alpha\beta} + \in_{\alpha\beta} f_3\,]\ ,\\ \omega^{(0)}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(f_{\alpha,\beta} - f_{\beta,\alpha})\ , \end{aligned} \tag{4.45}$$

و تنتج $\mu^{0\,(0)}_{\alpha 3}$ ، عن وضع $t=0$ ، في عبارة الانفعالات الكلاسيكية $\mu^0_{\alpha 3}$ ، الناتجة عن دمج العلاقتين (4.29) و(4.26) ، حيث ينتج لدينا:

$$\mu^{0\,(0)}_{\alpha 3} = \frac{1}{2}\,(\gamma+\varepsilon)\,\in_{\gamma\varepsilon} f_{\varepsilon,\gamma\alpha} \tag{4.46}$$

كما أن:

$$\begin{aligned} &\dot{\sigma}^{(0)}_{[\alpha\beta]} = -2\alpha\,[\,\dot{\omega}^{(0)}_{\alpha\beta} + \in_{\alpha\beta} g_3\,]\ , \\ &\dot{\omega}^{(0)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha,\beta} - g_{\beta,\alpha})\ , \end{aligned} \tag{4.47}$$

وتنتج $\dot{\mu}^{0\,(0)}_{\alpha 3}$ ، عن وضع $t=0$ في عبارة المشتقات الجزئية الزمنية للانفعالات الكلاسيكية: $\dot{\mu}^{0}_{\alpha 3}$ ، والناتجة بدورها عن دمج المشتقات الجزئية الزمنية للعلاقتين (4.29) و(4.26)، فينتج:

$$\dot{\mu}^{0\,(0)}_{\alpha 3} = \frac{1}{2}\,(\gamma+\varepsilon)\,\in_{\gamma\varepsilon} g_{\varepsilon,\gamma\alpha} \tag{4.48}$$

الآن من العلاقات التأسيسية (3.53)، نحصل على:

العلاقات التأسيسية العكسية، المتممة، المحققة في $\Omega \times \mathrm{T}$:

$$\begin{aligned} &\gamma'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu}\sigma'_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{2\alpha}\sigma'_{[\alpha\beta]} - \frac{\lambda}{2\mu}e'_1\,\delta_{\alpha\beta}\ , \\ &\kappa'_{\alpha 3} = \frac{1}{\gamma+\varepsilon}\,\mu'_{\alpha 3}\ ,\quad e'_1 = \frac{\sigma'_{\varepsilon\varepsilon}}{2(\mu+\lambda)}\ , \end{aligned} \tag{4.49}$$

أخيراً ، من العلاقات (3.54) و(3.55) و(4.28) نحصل على:

العلاقات التي تعطي الإزاحات والدورانات، المتممة بدلالة الإجهادات المتممة، والمحققة في $\bar{\Omega} \times \mathrm{T}$:

$$u'_\alpha = \rho^{-1}(\,t * R'_\alpha\,)\ , \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned} \varphi'_3 = &(g_3 - \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta} g_{\beta,\alpha}) + (f_3 - \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta} f_{\beta,\alpha}) + \\ &+ J^{-1}[\,t*(\hat{R}'_3 + Y_3)] + J^{-1}(\,t*\hat{R}^0_3\,)\ - \frac{1}{2}\in_{\alpha\beta}\rho^{-1}(\,t*R^0_{\beta,\alpha}) \end{aligned} \tag{4.51}$$

آلية حل مسألة وصف Ignaczak الجسم 2D(E−N:5) بطريقة متجه Schafer المعممة:

بحل مسألة الوصف الإجهادي ، الكلاسيكي(4.29)−(4.19) ، نحصل على الحقول الكلاسيكية $(\mathbf{u}^0,\boldsymbol{\varphi}^0,\boldsymbol{\sigma}^0,\boldsymbol{\mu}^0,\boldsymbol{\varepsilon}^0,\boldsymbol{\kappa}^0)$. بعدها بحل مسألة الوصف الإجهادي− الحراري، المتمم (4.51)− (4.40)، نحصل على الحقول الفيزيائية المتممة $(\mathbf{u}',\boldsymbol{\varphi}',\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\kappa}')$.

أخيراً ، بالتعويض في العلاقات (4.1)، نحصل على الحل $(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\kappa})$ ، لمسألة الوصف الإجهادي، الأصلية (3.55) − (3.43).

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولا) الاستنتاجات: في البحث، لأجل الجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب:(2D(E−N:5 متساوي درجات لحرارة، وضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات المرنة له، ناقشنا ما يلي:

1. تعميم طريقة متجه Schafer إلى مسألة الوصف التقليدي العام لهذا الجسم؛
2. تعميم طريقة متجه Schafer إلى مسألة وصف Ignaczak لهذا الجسم.

ثانياً) المقترحات (التوصيات): يمكن أن نوصي بمناقشة المسائل الآتية:

مسألة1: إعادة الدراسة السابقة فيما لو كان الجسم يخضع لحقل حراري وحمول تيرموميكانيكية،

مسألة2: إذا كان الجسم (2D (E−N:5 غير محدود، يطلب إثبات أن عملية Schaefer−Ignaczak الثرموديناميكية، المتممة، هي عملية متساوية الحرارة (Isothermal)، أي أن: $\theta' \equiv 0$ ،

مسألة3: تعميم طريقة متجه Schafer إلى المرونة الخطية دقيقة الاستقطاب، وثنائية الأبعاد، ضمن الترموديناميك المعمم بزمن استرخاء واحد [4]:

(Generalized thermodynamics of one relax time)،

مسألة4: تعميم طريقة متجه Schafer إلى المرونة الخطية دقيقة الاستقطاب، وثنائية الأبعاد، ضمن الترموديناميك المعمم بزمني استرخاء [4]:

(Generalized thermodynamics of two relax times)

References المراجع

[1] Al-Hasan M., Dyszlewicz J. (2014) Coupled Dynamic Micropolar Problems of Thermoelasticity: Stress–Temperature Equations of Motion of Ignaczak Type. In: Hetnarski R.B. (eds) Encyclopedia of Thermal Stresses. Springer, Dordrecht, p.740–753.

[2]- Hetnarski, R.B., Ignaczak, J., Eslami, M.R., Noda, N., Sumi, N., and Tanigawa, Y.,2013 - Theory of Elasticity and Thermal Stresses**,** Springer Science+Business Media Dordrecht.

[3] – Hetnarski, R.B., and Ignaczak, J., 2011 - The Mathematical Theory of Elasticity , Second Edition , CRC Press,Taylor & Francis Group,6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300,Boca Raton, FL 33487-2742**.**

[4]- Ignaczak, J., Starzewski, M.O., 2010 - Thermoelasticity with Finite Wave Speeds**,** Oxford University Press Inc., New York.

[5]- Dyszlewicz , J, **2004** - Micropolar Theory of Elasticity , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .

[6]–Dyszlewicz , J ,**1996** - *Selected problems of linear asymmetrical thermoelasticity*, Journal of Thermal Stresesses,19, 185-206.

[7] –Nowacki, W , **1986** - Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.

[8] – Eringen , A . C , **1966** - *Linear theory of micropolar elasticity*, J.Math. Mech., 15 , 909 – 930.

[9] - Ignaczak , J , 1971 - Tensorial equations of motion for elastic materials with microstructure , in : Trends of Elasticity and Thermoelasticity, Witold Nowacki Ann.Volume , Wolters-Noordhoff Groningen , 90 – 111;

[10] – Debnath, L& Bhatta , D , **2007** – Integral Transforms and their Applications, (Second Edition), CRC Press, Boca Raton, Florida.