معادلات غرين الدقيقة الصرفة لجسم صلب مرن دقيق الاستقطاب وغير محدود

نبيل علي[†]

ملخص البحث

يناقش البحث الجسم الصلب دقيق الاستقطاب ذي ستة ثوابت مادية، والمدروس رياضياً من خلال كلٍ من الباحثين Eringen و Nowacki، والذي يُرمز له اختصاراً بـ (E-N:6) [13-14].

يشكِّل هذا المقال الحلقة الأخيرة التي تختم مجموعة المقالات [1-3]، وتم فيه مايلي، لأجل الجسم الصلب الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)، غير المحدود (يملأ R^3)، والذي إجهاداته وحرارته، الخارجية، جميعها معدومة: I) تم إيجاد سلوك غرين-إغناتشاك، الديناميكي الدقيق الصرف الشاذ والموافق للعزوم الحجمية، فقط، المركزة في نقطة ما ξ من R^3، والمتغيرة توافقياً مع الزمن، حيث السلوك التقليدي الصرف هو السلوك الصفري. II) تم استنتاج صيغ Green-Ignaczak الدقيقة الصرفة في الجسم، المعتبر، بما يتوافق مع العزم الحجمي النظامي والمتغير توافقياً مع الزمن. في النهاية تم اختتام البحث بعدد من المسائل للمناقشة.

[†] أستاذ مساعد في قسم الراضيات – كلية العلوم – جامعة طرطوس.

الكلمات المفتاحية: صيغ Green-Ignaczak الدقيقة الصرفة - الجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب (E-N:6).

The pure Green equations for unbounded micropolar elastic solid

Nabil Ali †

Abstract

This paper deals with the mathematical model of the micropolar elastic solid of 6 material constants and 6-degrees of freedom, discussed by Eringen and Nowacki [13-14], and shortly demoted by (E-N:6).

This is the end of continuation of the papers [1-3] and contains the following. For the thermodynamical micropolar thermoelastic unbounded (E-N:6) body (occupying R^3), which has vanishing external stresses and external temperature, we do the following: I) Finding the singular pure dynamical micropolar Green-Ignaczak behavior of the above mentioned body, corresponding to the only body moments concentrated at a point $\xi \in R^3$, and varying harmonically in time, where the pure classical thermodynamical behavior is the zero one, II) Deriving the dynamical, pure microscopic Green-Ignaczak formulae for the above mentioned body, corresponding to regular body moments, which vary harmonically in time. Finally, we end the paper by suggesting several problems for discussing.

† Associate Professor at Department of Mathematics – Faculty of Science – Tartous University.

Key words: The pure microscopic Green-Ignaczak formulae - The (E-N:6) micropolar elastic solid.

1. مقدمة:

في [7] تم مناقشة تركيب السلوكيات الترموديناميكية في وصف Ignaczak بالإجهادات والحرارة [4,8,12] من أجل الجسم الصلب دقيق الاستقطاب من نوع Eringen-Nowacki [13,14] والذي يملك 6 درجات حرية و 6 ثوابت مادية [والمسمى اختصارا: (E-N:6)]، ذلك لأجل الحالة ثلاثية الأبعاد للانفعالات المرنة، اللامتناهية في الصغر، وبوجود حمول ترموميكانيكية. وفي [6]، فقد تم إثبات إيزوتيرمية[1] سلوك Ignaczak الترموديناميكي المتمم في (E-N:6)، الخاضع لحقل حراري، ويملأ R^3، والذي كلاً من إجهاداته الخارجية وحرارته الخارجية، معدوم. وفي[5]، تم استنتاج صيغ Fourrier التكاملية، التي تعطي سلوكي Ignaczak الترموديناميكيين، النظاميتين، الهوكي والمتمم، في الجسم (E-N:6)، الخاضع لحرارة، ويشغل كل R^3، والذي كلاً من إجهاداته وحرارته، الخارجية، معدومة. وفي[3] تم إيجاد السلوكين الترموديناميكيين، الشاذين؛ التقليدي والدقيق المتمم للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب، وغير المحدود، وغير المجهد ولا المسخَّن خارجياً، في حالة خضوعه فقط لقوة حجمية، مركَّزة في نقطة ما، ومتغيرة توافقياً بالنسبة للزمن. وفي [2] تم اثبات صحة الآتي: لأجل الجسم الترموديناميكي الصلب المرن دقيق الاستقطاب (E-N:6)، غير المحدود (يشغل R^3)، والذي كلاً من إجهاداته وحرارته، الخارجية، جميعها معدومة، فإن: I) السلوك الترموديناميكي للجسم، الموافق للمصادر الحرارية، فقط ، هو سلوك تقليدي صرف، II) السلوك الترموديناميكي للجسم، الموافق للعزم الحجمي فقط ، هو سلوك دقيق صرف. أخيراً في[1]، من أجل الجسم الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)، وغير المحدود، والذي إجهاداته وحرارته، الخارجية، جميعها معدومة، تم إيجاد السلوك الترموديناميكي الهوكي الصرف، الشاذ، للجسم، والموافق، فقط للمصادر الحرارية، المركَّزة في نقطة ما ∈ من R^3، والمتغيرة توافقياً بالنسبة للزمن، (حيث السلوك الدقيق الصرف يتطابق مع السلوك الصفري [2,9]) .

[1] العملية الترموديناميكية الإيزوتيرمية هي العملية متساوية درجات الحرارة.

2. هدف البحث:

في البحث، من أجل الجسم الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E-N:6)، وغير المحدود، والذي إجهاداته وحرارته، الخارجية، جميعها معدومة، سنوجد: I) سلوك Green-Ignaczak الديناميكي، الدقيق الصرف، الشاذ للجسم، والموافق للعزوم الحجمية، فقط، والمركزة في نقطة ما ξ من R^3، والمتغيرة توافقياً مع الزمن، حيث السلوك التقليدي الصرف هو السلوك الصفري. II) صيغ Green-Ignaczak الدقيقة الصرفة، في الجسم المعتبر، بما يتوافق مع العزم الحجمي النظامي، والمتغيرة توافقياً مع الزمن.

3. طرق البحث:

سنوجد ما تقدم ذكره في هدف البحث باستخدام: أولاً) نتائج الأبحاث [1-3]، ثانياً) طريقة التحويلات التكاملية([11])؛ المتمثلة بتطبيق تحويل Fourier التكاملي المضاعف من المرتبة الرابعة على المعادلات المستقلة لأجل الإجهادات الدقيقة الصرفة، في الجسم المعتبر، والمتوافقة مع حالة وجود فقط العزم الحجمي، حيث تكون هذه المعادلات المستقلة أبسط من المعادلات المستقلة لأجل حقول الاجهادات الدقيقة غير الصرفة والمستنتجة في [6]، ثالثاً) مبرهنة الطي لـ Fourier، المتعلقة بتحويل Fourier التكاملي المضاعف من المرتبة الرابعة.

إن نتائج البحث تعتمد جزئياً على دمج نتائج الأبحاث [1-3]، ولذلك سنعرض فيمابلي بشكلٍ مختصر مايهمنا منها. في البحث سنركز اهتمامنا على النموذج الرياضي للجسم الصلب المرن دقيق الاستقطاب (E-N:6)[13,14] ، الذي في بحثنا يشغل كامل الفضاء الإقليدي $\Omega = R^3$، وحقلا إجهاداته، وحقل حرارته، الخارجية، جميعها معدومة؛ أي أننا سنركز اهتمامنا على بالجسم الصلب المرن، دقيق الاستقطاب، والمتجانس والمتماثل المناحي: $\Omega\,(\mu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \rho, J, \kappa, \eta_0, \nu_T)$، علماً أن الرموز ضمن القوسين تمثل الثوابت الميكانيكية–الحرارية للجسم، وهي حقيقية. كما سنفرض أيضاً أن جميع المقاطع التنسورية، الفيزيائية الممثلة للسلوك الميكانيكي الحراري للجسم الصلب المرن، دقيق الاستقطاب، ملساء بالقدر الكافي، وتتبع للموضع والزمن. في هذه الحالة، تُوصف العملية الترموديناميكية للجسم الصلب المرن، بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية: $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \theta, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa})$، حيث: $\mathbf{u}$ و $\boldsymbol{\varphi}$ مقطعان متجهيان مستقلان،

على الترتيب يمثلان، مقطع الإزاحات ومقطع التوجهات، و $\theta := T - T_0$ مقطع سلمي؛ يمثل تغير حقل الحرارة؛ حيث T مقطع الحرارة المطلقة في الجسم و T_0 هي حرارة الحالة الطبيعية له. إلى ماتقدم ذكره نضيف بأن: $\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\sigma}$ هي مقاطع تنسورية من المرتبة الثانية، على الترتيب هي: مقطع إجهادات القوة، ومقطع إجهادات العزم، ومقطع الانفعالات، ومقطع الانفعالات الانثنائية-الدورانية. فإذا رمزنا بـ $T^+ := \,]\,0\,,\infty\,[$ وبـ $T := [\,0\,,\infty\,[$، فيمكن أن تُمثَّل هذه المقاطع التنسورية، في $\Omega \times T^+$، وفي النظام الإحداثي الديكارتي العطالي $Ox_1x_2x_3$، الذي قاعدته $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ بالشكل:

$$\mathbf{u} = u_i\ \mathbf{e}_i \quad , \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi_i\ \mathbf{e}_i \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{i\,j}\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\,, \quad \boldsymbol{\mu} = \mu_{i\,j}\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\,, \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_{i\,j}\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad , \quad \boldsymbol{\kappa} = \kappa_{i\,j}\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \tag{3.3}$$

واستخدمنا هنا الطريقة التنسورية في الجمع (رموز Einstein)، حيث تأخذ الأدلة اللاتينية... $i\ ,\ j\ ,\ k,$ القيم $1\,,2\,,3$، أما المصفوفات الأربع في الأطراف اليمنى للعلاقات (3.2) و(3.3) فهي غير متناظرة.

في وصف Ignaczak للجسم (E-N:6)، تم افتراض أن العملية الترموديناميكية، المرن، دقيقة الاستقطاب، للجسم تأخذ في $\Omega \times T^+$، الشكل التالي [7]:

$$\begin{gathered} \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}'\,,\ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}^0 + \boldsymbol{\varphi}'\ ,\ \theta = \theta^0 + \theta'\,, \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}'\ ,\ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^0 + \boldsymbol{\mu}'\ ,\ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\gamma}'\ ,\ \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^0 + \boldsymbol{\kappa}' \end{gathered} \tag{3.4}$$

حيث المقاطع التنسورية $(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \theta^0, \boldsymbol{\sigma}^0\ ,\ \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0)$ تتعلق بجسم Hooke الصلب المرن: $\Omega(\mu\,,\lambda\,,\rho\,,\eta_0\,,\nu_T)$، أما $(\mathbf{u}'\,,\ \boldsymbol{\varphi}'\ ,\ \theta'\,,\ \boldsymbol{\sigma}'\ ,\ \boldsymbol{\mu}'\ ,\ \boldsymbol{\gamma}'\ ,\ \boldsymbol{\kappa}')$ فَتُمَثِّلْ المقاطع التنسورية الدقيقة، المتممة. إن المقاطع التنسورية، المُمَثِلة لجسم Hooke والمقاطع التنسورية، الدقيقة، المتممة، الموافقة، تُكتب في $\Omega \times T^+$، وفي $Ox_1x_2x_3$ بالشكل:

$$\mathbf{u}^0 = u_i^0\ \mathbf{e}_i \quad , \quad \boldsymbol{\varphi}^0 = \varphi_i^0\ \mathbf{e}_i \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \sigma_{i\,j}^0\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\,, \quad \boldsymbol{\mu}^0 = \mu_{i\,j}^0\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\,, \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \varepsilon_{i\,j}^0\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\,, \quad \boldsymbol{\kappa}^0 = \kappa_{i\,j}^0\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\,, \tag{3.7}$$

حيث أن: $\boldsymbol{\varphi}^0 = \frac{1}{2}\,\mathbf{curl}\ \mathbf{u}^0$ ، وعلماً أن المصفوفتين $\left\{ \sigma^0_{i\,j} \right\}_{3\times3}$ و $\left\{ \varepsilon^0_{i\,j} \right\}_{3\times3}$ متناظرتان، بينما المصفوفتان $\left\{ \mu^0_{i\,j} \right\}_{3\times3}$ و $\left\{ \kappa^0_{i\,j} \right\}_{3\times3}$ غير متناظرتان؛

$$\mathbf{u}' = u'_i\ \mathbf{e}_i \quad , \quad \boldsymbol{\varphi}' = \varphi'_i\ \mathbf{e}_i \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \sigma'_{i\,j}\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\ , \quad \boldsymbol{\mu}' = \mu'_{i\,j}\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\ , \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{\gamma}' = \gamma'_{i\,j}\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\ , \quad \boldsymbol{\kappa}' = \kappa'_{i\,j}\ \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\ , \tag{3.10}$$

علماً أن المقطعين المتجهيان: $\mathbf{u}'$ و $\boldsymbol{\varphi}'$ مستقلان في $\Omega \times T^+$، أما المصفوفات الموجودة في العلاقتين (3.9) و (3.10) فهي غير متناظرة.

انطلاقاً من نموذج Ignaczak لـ (E-N:6) [8]، ومن أجل (E-N:6) الذي يشغل R^3، وإجهاداته وحرارته، الخارجية معدومة جميعها، تم في [7]، تركيب عملية Ignaczak لـ (E-N:6) على شكل مجموع عمليتي Ignaczak؛ العملية الأولى هي عملية Ignaczak لجسم Hooke، وتدعى بسلوك Ignaczak الهوكي (أو التقليدي) للجسم، أما العملية الثانية فهي عملية Ignaczak الدقيقة (المتممة)، الموافقة، وتدعى بسلوك Ignaczak الدقيق (المتمم)، الموافق، للجسم. فيما يلي نعرض كلاً من سلوك Ignaczak الأول (الهوكي)، وسلوك Ignaczak الثاني (الدقيق) لـ (E-N:6)، غير المحدود، والخاضع لحقل حراري، ويملأ R^3، والذي كلاً من إجهاداته وحرارته، الخارجية، معدومة جميعها (انظر أيضاً [6])، ذلك لأجل حالة وجود: مقطعي القوة الحجمية، والعزم الحجمي، ومقطع المصادر الحرارية. كما تم في [6] إثبات أن: $e' \equiv 0,\ \theta' \equiv 0$ (حيث e' التمدد الحجمي المتمم)، حيث يأخذ كلاً من السلوكين السابقين الشكل التالي [5] :

– *سلوك* Ignaczak *الهوكي*:

- معادلات الحقل ،المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\hat{c}_2^2 (R^0_{i,\,j} + R^0_{j,\,i}) - \ddot{\sigma}^0_{i\,j} + (\lambda\, \ddot{e}^0 - \nu_T\, \ddot{\theta}^0)\, \delta_{i\,j} = 0 \tag{3.11}$$

$$D\theta^0 - \eta_0\, \dot{e}^0 = -\frac{Q}{\kappa} \tag{3.12}$$

حيث: $\hat{c}_2^2 = \dfrac{\mu}{\rho} \quad , \quad R^0_i = \hat{R}^0_i + X_i \ \ , \ \ \hat{R}^0_i = \sigma^0_{j\,i,\,j}$

و : $\dot{e}^0 = \dfrac{1}{2\mu + 3\lambda} (\dot{\sigma}^0_{k\,k} + 3\nu_T\, \dot{\theta}^0)\ ,\ \ \ddot{e}^0 = \dfrac{1}{2\mu + 3\lambda} (\ddot{\sigma}^0_{k\,k} + 3\nu_T\, \ddot{\theta}^0)$.

كما أن: ρ هي الكتلة الحجمية للجسم دقيق الاستقطاب، و (X_1, X_2, X_3) متجه القوة الحجمية، المعامل الحراري–الميكانيكي: $\eta_0 = \dfrac{v_T T_0}{\lambda_0}$ ، حيث $v_T = (3\lambda + 2\mu)\, a_t$ ، أيضاً: $\lambda, \mu \in R_+$ هما ثابتان ماديان للجسم و a_t هو معامل التمدد الخطي الحراري له، و λ_0 معامل التوصيل الحراري له، كما أن: $\kappa = \dfrac{\lambda_0}{c_\varepsilon}, \; Q = \dfrac{\kappa W}{\lambda_0}$، حيث: c_ε تمثل الحرارة النوعية للجسم من أجل تشوه ثابت له، و W كمية الحرارة المُشكَّلة في وحدة الحجم ووحدة الزمن، إلى ماتقدم ذكره نضيف بأن: Q تمثل المصادر الحرارية في الجسم دقيق الاستقطاب. الفاصلة الدليلية تدل على المشتق الجزئي بالنسبة لمتحولات الموضع، والنقطة تدل على المشتق الجزئي بالنسبة للزمن: $\dot{f} \equiv \partial f / \partial t \equiv \partial_t f$. نعتمد الطريقة التنسورية في الجمع (رموز Einstein)، حيث الأدلة اللاتينية $i, j, k, \ldots$ تأخذ القيم 3 , 2 , 1 ، كما أن: D يرمز للمؤثر الاشتقاقي، التحريكي الحراري: $D = \nabla^2 - \dfrac{1}{\kappa}\partial_t$ ، حيث ∇^2 هو مؤثر Laplace الاشتقاقي، السلمي؛ $\nabla^2 f = f_{,ii}$ ،

- الشروط الحدية، الهوكية:

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} \sigma^0_{ji} = 0 \quad , \quad \lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} \theta^0 = 0 \tag{3.13}$$

مع العلم أن: $\|\boldsymbol{x}\| := (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}$ ،

- الشروط الابتدائية الهوكية، المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$\sigma^0_{ij} = \sigma^{0(0)}_{ij} \quad , \quad \theta^0 = l \quad , \quad \dot{\sigma}^0_{ij} = \dot{\sigma}^{0(0)}_{ij} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{0(0)}_{ij} &= 2\mu\, \varepsilon^{0(0)}_{ij} + (\lambda\, e^{0(0)} - v_T\, l)\, \delta_{ij} \\ \varepsilon^{0(0)}_{ij} &= \frac{1}{2}(f^0_{i,j} + f^0_{j,i}) \quad , \quad e^{0(0)} = f^0_{k,k} \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^{0(0)}_{ij} &= 2\mu\, \dot{\varepsilon}^{0(0)}_{ij} + [\,(\lambda + v_T\, \kappa\, \eta_0)\, \dot{e}^{0(0)} - v_T(\kappa\, l_{,kk} + Q^{(0)})]\, \delta_{ij} \\ \dot{\varepsilon}^{0(0)}_{ij} &= \frac{1}{2}(g^0_{i,j} + g^0_{j,i}) \quad , \quad \dot{e}^{0(0)} = g^0_{k,k} \end{aligned} \tag{3.16}$$

حيث $Q^{(0)}$، تمثل القيمة الابتدائية للمصادر الحرارية، والتوابع $[(f_i^0, l, g_i^0):\Omega \to R]$ معلومة ، فيها f_i^0 و g_i^0 [2] ، على الترتيب، هي الجزء الهوكي لـ f_i و g_i، والتي بدورها معلومة في Ω ، وتمثل، على الترتيب، القيم الابتدائية لمركبات مقطع الإزاحة، المتجهي الكلي، والقيم الابتدائية لسرع هذه المركبات في Ω، أما l فتمثل القيمة الابتدائية لمقطع للحرارة، السلمي، الكلي في Ω.

- العلاقات التأسيسية الهوكية، محلولةً بالنسبة للانفعالات الهوكية في $\Omega \times T$:

$$2\mu\varepsilon_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0 - (\lambda e^0 - \nu_T \theta^0)\,\delta_{ij} \qquad (3.17)$$

علماً أن:

$$e^0 = \frac{1}{2\mu + 3\lambda}\,(\sigma_{kk}^0 + 3\nu_T \theta^0)$$

- العلاقات التي تعطي الإزاحات الهوكية والدورانات الهوكية والمحققة في $\Omega \times T$:

$$u_i^0 = g_i^0\, t + f_i^0 + \rho^{-1}(t \,\widehat{*}\, R_i^0) \qquad (3.18)$$

$$\varphi_i^0 = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\,[\,g_k^0\, t + f_k^0 + \rho^{-1}(t \,\widehat{*}\, R_k^0)\,]_{,j} \qquad (3.19)$$

حيث رمز النجمة $\widehat{*}$ يدل على الطي([11]):

$$t \,\widehat{*}\, f(\boldsymbol{x};t) = \int_0^t (t-\tau)\, f(\boldsymbol{x};\tau)\, d\tau$$

- العلاقات التي تعيِّن بقية المقاطع الفيزيائية، الهوكية والمحققة في $\Omega \times T$:

$$\kappa_{ji}^0 = \frac{1}{2}\epsilon_{ilk}\,[\,g_k^0\, t + f_k^0 + \rho^{-1}(t \,\widehat{*}\, R_k^0)\,]_{,lj} \qquad (3.20)$$

$$\mu_{ji}^0 = \frac{1}{2}\{(\gamma+\varepsilon)\,\epsilon_{ilk}\,[\,g_k^0\, t + f_k^0 + \rho^{-1}(t \,\widehat{*}\, R_k^0)\,]_{,lj} + (\gamma-\varepsilon)\,\epsilon_{jlk}\,[\,g_k^0\, t + f_k^0 + \rho^{-1}(t \,\widehat{*}\, R_k^0)\,]_{,li}\} \qquad (3.21)$$

حيث $\gamma, \varepsilon \in R_+$ ثابتان ماديان آخران للجسم المُعتبر.

---

[2] $f_i^0 = \lim_{\alpha \to 0} f_i$ و $g_i^0 = \lim_{\alpha \to 0} g_i$ (انظر [9]).

– *سلوك* Ignaczak *الدقيق، المتمم:*

- معادلات الحقل، المتممة ، بلغة الإجهادات ،المتممة، المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\overset{*}{\square}_2 \rho^{-1} R'_{i,j} - J^{-1} \epsilon_{kji} \mathfrak{M}'_k - \overset{*}{\square}_2 \{ \frac{1}{2\mu} \ddot{\sigma}'_{(ji)} + \frac{1}{2\alpha} \ddot{\sigma}'_{[ji]} \} = 0 \tag{3.22}$$

$$J^{-1} \mathfrak{M}'_{i,j} - \overset{*}{\square}_2 \{ \frac{1}{2\gamma} \ddot{\mu}'_{(ji)} + \frac{1}{2\varepsilon} \ddot{\mu}'_{[ji]} - \frac{\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)} \ddot{\mu}'_{kk} \delta_{ij} \} = 0 \tag{3.23}$$

مع العلم أن: $R'_i = \hat{R}'_i + \hat{X}_i \quad , \quad \hat{R}'_i = \sigma'_{ji,j}$

و $\mathfrak{M}'_i = \hat{\mathfrak{M}}'_i + \hat{Y}_i \;\; , \;\; \hat{\mathfrak{M}}'_i = \overset{*}{\square}_2 \hat{M}'_i \;\; , \;\; \hat{M}'_i = \epsilon_{ijk} \sigma'_{jk} + \mu'_{ji,j}$

الدليلان: $(\,...\,)$ ،$[\,...\,]$ ، على الترتيب، يدلان على الجزء التناظري، والجزء التناظري العكسي للمصفوفة ؛ $\sigma'_{(ji)} := \frac{1}{2}(\sigma'_{ji} + \sigma'_{ij})$ و $\sigma'_{[ji]} := \frac{1}{2}(\sigma'_{ji} - \sigma'_{ij})$ ،

كما أن J تمثل العطالة الدورانية للجسم المرن دقيق الاستقطاب، والرموز ϵ_{ijk} تمثل المركبات الديكارتية في الجملة المعتبرة، لتنسور :Levi-Civitá، النسبي، بالوزن: $w = \frac{1}{2}$ ،

كما أن: $\hat{Y}_i = \overset{*}{\square}_2 Y_i - \frac{1}{2} \overset{*}{\square}_4 \epsilon_{ijk} X_{k,j}$ ،وحيث (Y_1, Y_2, Y_3) يمثل مقطع العزم الحجمي، المتجهي، و $\hat{Q}=0 \; \hat{X}_i = 0$ ، كما أن المؤثرات الاشتقاقية، التحريكية: $\square_2 = (\mu+\alpha)\nabla^2 - \rho\partial_t^2$ و $\square_4 = (\gamma+\varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha - J\partial_t^2$ ، إضافةً إلى أن:

$\alpha, \beta \in R_+$ هما الثابتان الماديان الخامس والسادس للجسم ، أما: $\overset{*}{\square}_2$ و $\overset{*}{\square}_4$ ،على الترتيب، فينتجان عن $\square_2$ و $\square_4$ ، بوضع: $\alpha = 0$.

- الشروط الحدية المتممة:

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} \sigma'_{j\,i} = 0 \quad , \quad \lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} \mu'_{j\,i} = 0 \tag{3.24}$$

- الشروط الابتدائية المتممة، بلغة الإجهادات، المتممة في $\Omega\times\{0\}$:

$$\begin{aligned} \sigma'_{j\,i} &= \sigma'^{(0)}_{j\,i} \quad , \quad \mu'_{j\,i} = \mu'^{(0)}_{j\,i} \\ \dot{\sigma}'_{j\,i} &= \dot{\sigma}'^{(0)}_{j\,i} \quad , \quad \dot{\mu}'_{j\,i} = \dot{\mu}'^{(0)}_{j\,i} \end{aligned} \tag{3.25}$$

وهنا:

$$\begin{aligned} \sigma'^{(0)}_{j\,i} &= 2\mu\,\varepsilon'^{(0)}_{i\,j} + 2\alpha\,[\,\omega'^{(0)}_{i\,j} - \epsilon_{k\,j\,i}\,k'_k\,]\,, \\ \mu'^{(0)}_{j\,i} &= (\gamma+\varepsilon)\;k'_{i\,,\,j} + (\gamma-\varepsilon)\,k'_{j\,,i} + \beta\,k'_{k\,,k}\delta_{i\,j} \end{aligned} \tag{3.26}$$

و:

$$\begin{aligned} \varepsilon'^{(0)}_{i\,j} &= \frac{1}{2}(f'_{i\,,\,j} + f'_{j\,,\,i})\,,\; \omega'^{(0)}_{i\,j} = \frac{1}{2}(f'_{i\,,\,j} - f'_{j\,,\,i})\,, \\ f'_i &= f_i - f^0_i\,,\; k'_k = k_k - k^0_k\,,\; k^0_i = \frac{1}{2}\,\epsilon_{i\,j\,k}\,f^0_{k,\,j} \end{aligned} \tag{3.27}$$

إضافةً إلى أن:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}'^{(0)}_{j\,i} &= 2\mu\,\dot{\varepsilon}'^{(0)}_{i\,j} + 2\alpha\,[\,\dot{\omega}'^{(0)}_{i\,j} - \epsilon_{k\,j\,i}\,\chi'_k\,]\,, \\ \dot{\mu}'^{(0)}_{j\,i} &= (\gamma+\varepsilon)\,\chi'_{i\,,\,j} + (\gamma-\varepsilon)\;\chi'_{j\,,\,i} + \beta\,\chi'_{k\,,k}\delta_{i\,j}\;, \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}'^{(0)}_{i\,j} &= \frac{1}{2}(g'_{i\,,\,j} + g'_{j\,,\,i})\;,\; \dot{\omega}'^{(0)}_{i\,j} = \frac{1}{2}(g'_{i\,,\,j} - g'_{j\,,\,i})\;, \\ g'_i &= g_i - g^0_i\,,\; \chi'_k = \chi_k - \chi^0_k\,,\; \chi^0_i = \frac{1}{2}\,\epsilon_{i\,j\,k}\,g^0_{k\,,\,j} \end{aligned} \tag{3.29}$$

في الشروط الابتدائية المتممة، السابقة يجب أن يتحقق: $f_{k\,,\,k} = f^0_{k\,,\,k}$ و $g_{k\,,\,k} = g^0_{k\,,\,k}$؛ أي تحقق $e^{(0)} = e^{0\,(0)}$ و $\dot{e}^{(0)} = \dot{e}^{0\,(0)}$.[3]

[3] ينتج ذلك عن المتطابقة: $e' \equiv 0$. أي أن التوسع الحجمي الكلي، الابتدائي، يساوي التوسع الحجمي التقليدي، الابتدائي، والسرعة الابتدائية للتوسع الحجمي الكلي، تساوي السرعة الابتدائية للتوسع الحجمي التقليدي.

- العلاقات التأسيسية المتممة محلولةً بالنسبة للانفعالات المتممة في $\Omega \times T$:

$$\gamma'_{ji} = \frac{1}{2\mu}\sigma'_{(ji)} + \frac{1}{2\alpha}\sigma'_{[ji]} \ ,$$
$$\kappa'_{ji} = \frac{1}{2\gamma}\mu'_{(ji)} + \frac{1}{2\varepsilon}\mu'_{[ji]} - \frac{\beta}{2\gamma(2\gamma+3\beta)}\ \mu'_{kk}\,\delta_{ij} \tag{3.30}$$

- العلاقات التي تعطي الإزاحات والدورانات المتممة ، بلغة الإجهادات المتممة في $\Omega \times T$:

$$u'_i = g'_i\, t + f_i' + \rho^{-1}(t \,\hat{*}\, R'_i) \tag{3.31}$$

$$\varphi'_i = \chi'_i\, t + k'_i + J^{-1}[\, t \,\hat{*}\, (\hat{M}'_i + Y_i)\,] + J^{-1}(t \,\hat{*}\, M_i^0)$$
$$-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\ \rho^{-1}(t \,\hat{*}\, R^0_{k,j}) \tag{3.32}$$

علما أن: $M_i^0 = \mu^0_{ji,j}$.

أيضاً في [5] ، تم الوصول إلى النتائج التالية، المتعلقة بالمعادلات المنفصلة لحقول Ignaczak، الهوكية، والمتممة، في الجسم المدروس (E-N:6)، الخاضع لحرارة، ويشغل كامل R^3:

أولاً: المعادلات المنفصلة من أجل الإجهادات الهوكية σ^0_{ij} ، والحرارة الهوكية θ^0، والمحققة في $\Omega \times T^+$:

$$D_2 \overset{*}{\Box}_2 \sigma^0_{ij} = -\mu\, D_2(\, X_{i,j} + X_{j,i}) +$$
$$+2\mu\,(\, D_1 X_{k,kij} - \frac{\nu_T}{\kappa}\overset{*}{\Box}_2 Q_{,ij}) \tag{3.33}$$
$$-\delta_{ij}\overset{*}{\Box}_2[\,(\, D_1 - \mu\, D\,)\, X_{k,k} + \frac{\nu_T}{\kappa}(\ \lambda\nabla^2 - \Box_1\,)\, Q\,]$$

$$D_2\,\theta^0 = -(\,\eta_0\,\partial_t\, X_{i,i} + \frac{1}{\kappa}\Box_1 Q\ ) \tag{3.34}$$

علماً أن: $\square_1 = (\lambda + 2\mu)\nabla^2 - \rho\,\partial_t^2$ ، و D_2 يمثل المؤثر المركزي، وهو يعطى بالصيغة: $D_2 = D\,\square_1 - \eta_0\, v_T\, \partial_t \nabla^2$ ، أما المؤثر الاشتقاقي، التحريكي الحراري: $D_1 = (\lambda + \mu)\, D - \eta_0\, v_T\, \partial_t$.

ثانياً: المعادلات المنفصلة لأجل الإجهادات المتممة: σ'_{ji} و μ'_{ji} ، *والمحققة في* $\Omega \times T^+$:

$$\overset{*}{\square}_2 \square_3\, L\, \sigma'_{ji} = 2\alpha\,\{\, \square_3 [\, (\mu+\alpha) \in_{isn} \hat{Y}_{n,sj} + \tag{3.35}$$
$$+ (\mu-\alpha) \in_{jsn} \hat{Y}_{n,si}\,] +$$
$$+ \in_{ijk} (\, L_1 \hat{Y}_{s,sk} - \square_2 \square_3 \hat{Y}_k\,)\,\}$$

$$\overset{*}{\square}_2\, \square_3\, L\, \mu'_{ji} =$$
$$- \square_2 \square_3 [\, (\gamma+\varepsilon)\, \hat{Y}_{i,j} + (\gamma-\varepsilon)\, \hat{Y}_{j,i}\,] + \tag{3.36}$$
$$+ 2\gamma\, L_1 \hat{Y}_{s,sij} - \beta\, \delta_{ij}\, L\, \hat{Y}_{s,s}$$

حيث: $\square_3 = (\beta + 2\gamma)\nabla^2 - 4\alpha - J\,\partial_t^2$ ، $L = \square_2 \square_4 + 4\alpha^2 \nabla^2$ ، و $L_1 = (\beta + \gamma - \varepsilon)\, \square_2 - 4\alpha^2$. وهنا ننوه إلى أن مرتبة المعادلة (3.35) أقل بـ 4 منها فيما لو كان الجسم محدوداً [7].

في [2]، من أجل الحالة الخاصة لـ (E-N:6)، غير المحدود، والخاضع لمؤثرات حرارية، ويملأ كامل R^3 ، والذي إجهاداته وحرارته، الخارجية، جميعها معدومة، والمتمثلة بحالة انعدام مقطع القوة الحجمية، وعندما يكون كلاً من مقطع الإزاحة الهوكي، الابتدائي، وكذلك القيمة الابتدائية لمقطع سرعته، كمونياً، فقد تم اثبات أن: $(\boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\kappa}^0) = (\mathbf{0})$ ؛ أي أن سلوك Ignaczak الترموديناميكي الهوكي، هو سلوك ترموديناميكي هوكي، صرف، وبنفس الوقت سلوك Ignaczak الدقيق المتمم، هو سلوك ديناميكي، دقيق صرف، ويأخذ كلاً من هذين السلوكين الصرفين الشكل التالي[2]:

- *سلوك* Ignaczak *الهوكي الصرف :*

- معادلات الحقل، الهوكية، الصرفة، المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\hat{c}_2^2(\hat{R}^0_{i,j} + \hat{R}^0_{j,i}) - \ddot{\sigma}^0_{ij} + (\lambda \dot{e}^0 - \nu_T \ddot{\theta}^0)\delta_{ij} = 0 \qquad (3.37)$$

$$D\theta^0 - \eta_0 \dot{e}^0 = -\frac{Q}{\kappa} \qquad (3.38)$$

- الشروط الحدية، الهوكية، الصرفة:

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} \sigma^0_{ji} = 0 \quad , \quad \lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} \theta^0 = 0 \qquad (3.39)$$

حيث: $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$; $\|\boldsymbol{x}\| := (x_i x_i)^{\frac{1}{2}}$ ،

- الشروط الابتدائية الهوكية، الصرفة، المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$\sigma^0_{ij} = \sigma^{0(0)}_{ij} \quad , \quad \theta^0 = l \quad , \quad \dot{\sigma}^0_{ij} = \dot{\sigma}^{0(0)}_{ij} , \qquad (3.40)$$

$$\begin{aligned} &\sigma^{0(0)}_{ij} = 2\mu\, \varepsilon^{0(0)}_{ij} + (\lambda e^{0(0)} - \nu_T\, l)\, \delta_{ij} , \\ &\varepsilon^{0(0)}_{ij} = \frac{1}{2}(f^0_{i,j} + f^0_{j,i}) \ , \ e^{0(0)} = f^0_{k,k} \end{aligned} \qquad (3.41)$$

$$\begin{aligned} &\dot{\sigma}^{0(0)}_{ij} = 2\mu\, \dot{\varepsilon}^{0(0)}_{ij} + [(\lambda + \nu_T \kappa \eta_0)\dot{e}^{0(0)} - \nu_T(\kappa\, l_{,kk} + Q^{(0)})]\delta_{ij} , \\ &\dot{\varepsilon}^{0(0)}_{ij} = \frac{1}{2}(g^0_{i,j} + g^0_{j,i}) \ , \ \dot{e}^{0(0)} = g^0_{k,k} \end{aligned} \qquad (3.42)$$

- العلاقات التأسيسية الهوكية ، الصرفة، محلولةً بالنسبة للانفعالات الهوكية الصرفة في $\Omega \times T$:

$$2\mu\varepsilon^0_{ij} = \sigma^0_{ij} - (\lambda e^0 - \nu_T \theta^0)\,\delta_{ij} \qquad (3.43)$$

- العلاقات التي تعطي الإزاحات الهوكية، الصرفة المحققة في $\Omega \times T$:

$$u^0_i = g^0_i\, t + f^0_i + \rho^{-1}(t \,\hat{*}\, \hat{R}^0_i) \qquad (3.44)$$

- *سلوك* Ignaczak *الديناميكي، الدقيق الصرف:*

- معادلات الحقل، الدقيقة، الصرفة والمحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\rho^{-1}\hat{R}'_{i,j} - J^{-1} \epsilon_{kji} M'_k - \{\frac{1}{2\mu}\ddot{\sigma}'_{(ji)} + \frac{1}{2\alpha}\ddot{\sigma}'_{[ji]}\} = 0 \ , \qquad (3.45)$$

$$J^{-1} M'_{i,j} - \{ \frac{1}{2\gamma} \ddot{\mu}'_{(j\,i)} + \frac{1}{2\varepsilon} \ddot{\mu}'_{[j\,i]} - \frac{\beta}{2\gamma\,(2\gamma+3\beta)}\, \ddot{\mu}'_{k\,k}\, \delta_{i\,j} \} = 0 \quad (3.46)$$

وهنا: $M'_i = \hat{M}'_i + Y_i$ ،

- الشروط الحدية ، الدقيقة، الصرفة، بلغة الإجهادات، الدقيقة الصرفة:

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} \sigma'_{j\,i} = 0 \quad , \quad \lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} \mu'_{j\,i} = 0 \quad (3.47)$$

- الشروط الابتدائية، الدقيقة ، الصرفة والمحققة في $\Omega\times\{0\}$:

$$\begin{aligned} \sigma'_{j\,i} &= \sigma'^{(0)}_{j\,i} \quad , \quad \mu'_{j\,i} = \mu'^{(0)}_{j\,i} \\ \dot{\sigma}'_{j\,i} &= \dot{\sigma}'^{(0)}_{j\,i} \quad , \quad \dot{\mu}'_{j\,i} = \dot{\mu}'^{(0)}_{j\,i} \end{aligned} \quad (3.48)$$

حيث:

$$\begin{aligned} \sigma'^{(0)}_{j\,i} &= 2\mu\, \varepsilon'^{(0)}_{i\,j} + 2\alpha\,[\omega'^{(0)}_{i\,j} - \epsilon_{k\,j\,i}\, k'_k], \\ \mu'^{(0)}_{j\,i} &= (\gamma+\varepsilon)\, k'_{i,j} + (\gamma-\varepsilon)\, k'_{j,i} + \beta\, k'_{k,k}\delta_{i\,j} \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon'^{(0)}_{i\,j} = \frac{1}{2}(f'_{i,j} + f'_{j,i}) , \; \omega'^{(0)}_{i\,j} = \frac{1}{2}(f'_{i,j} - f'_{j,i}) , \\ &f_i' = f_i - f_i^{\,0} , \; k'_k = k_k , \end{aligned} \quad (3.50)$$

حيث أن:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}'^{(0)}_{j\,i} &= 2\mu\, \dot{\varepsilon}'^{(0)}_{i\,j} + 2\alpha\,[\dot{\omega}'^{(0)}_{i\,j} - \epsilon_{k\,j\,i}\, \chi'_k], \\ \dot{\mu}'^{(0)}_{j\,i} &= (\gamma+\varepsilon)\, \chi'_{i,j} + (\gamma-\varepsilon)\, \chi'_{j,i} + \beta\, \chi'_{k,k}\delta_{i\,j} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}'^{(0)}_{i\,j} = \frac{1}{2}(g'_{i,j} + g'_{j,i}) \; , \; \dot{\omega}'^{(0)}_{i\,j} = \frac{1}{2}(g'_{i,j} - g'_{j,i}) \; , \\ &g'_i = g_i - g_i^{\,0} , \; \chi'_k = \chi_k , \end{aligned} \quad (3.52)$$

- العلاقات التأسيسية الدقيقة، الصرفة، محلولـةً بالنسبة للانفعالات الدقيقة، الصرفة والمحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} \gamma'_{j\,i} &= \frac{1}{2\mu}\sigma'_{(j\,i)} + \frac{1}{2\alpha}\sigma'_{[j\,i]} \; , \\ \kappa'_{j\,i} &= \frac{1}{2\gamma}\mu'_{(j\,i)} + \frac{1}{2\varepsilon}\mu'_{[j\,i]} - \frac{\beta}{2\gamma\,(2\gamma+3\beta)}\, \mu'_{k\,k}\, \delta_{i\,j} \end{aligned} \quad (3.53)$$

- العلاقات التي تعطي الإزاحات والدورانات، الدقيقة الصرفة، بلغة الإجهادات الدقيقة الصرفة والمحققة في $\Omega \times T$:

$$u_i' = g_i' \, t + f_i' + \rho^{-1}(t \,\widehat{*}\, \hat{R}_i'), \tag{3.54}$$

$$\varphi_i' = \chi_i' \, t + k_i' + J^{-1}(t \,\widehat{*}\, M_i') \tag{3.55}$$

أيضاً في [2] ، تم الوصول إلى النتائج التالية، المتعلقة بالمعادلات المنفصلة لحقول Ignaczak، الهوكية ، الصرفة ولحقول Ignaczak، الدقيقة الصرفة، في الجسم المعتبر (E-N:6)، الخاضع لمؤثرات حرارية، ولا يخضع لتأثير قوة حجمية، ويملأ R^3:

المعادلات المنفصلة من أجل الإجهادات الهوكية الصرفة σ_{ij}^0 ، والحرارة الهوكية الصرفة θ^0، والمحققة في $\Omega \times T^+$:

$$D_2 \sigma_{ij}^0 = -\frac{\nu_T}{\kappa}\left[2\mu Q_{,ij} + \delta_{ij}(\lambda \nabla^2 - \square_1) Q\right], \tag{3.56}$$

$$D_2 \theta^0 = -\frac{1}{\kappa}\square_1 Q \tag{3.57}$$

المعادلات المنفصلة من أجل الإجهادات الدقيقة، الصرفة σ_{ji}' و μ_{ji}' ، والمحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\begin{aligned} \square_3 L\, \sigma_{ji}' = 2\alpha\{ & \square_3 [(\mu+\alpha) \in_{isn} Y_{n,sj} + \\ & + (\mu-\alpha) \in_{jsn} Y_{n,si}] + \\ & + \in_{ijk} (L_1 Y_{s,sk} - \square_2 \square_3 Y_k) \}, \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} \square_3 L\, \mu_{ji}' = - \Big\{ & \square_2 \square_3 [(\gamma+\varepsilon) Y_{i,j} + (\gamma-\varepsilon) Y_{j,i}] \\ & - 2\gamma\, L_1 Y_{s,sij} + \beta\, \delta_{ij} L\, Y_{s,s} \Big\} \end{aligned} \tag{3.59}$$

وتم في [2] تمييز الحالتين التاليتين:

الحالة الأولى: $Q \neq 0$ ، $Y_i = 0$ و $(f_i' = 0, g_i' = 0, k_i' = 0, \chi_i' = 0)$:

في هذه الحالة العملية الترموديناميكية، الدقيقة الصرفة، هي العملية الصفرية؛

$$(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \theta', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}') \equiv (\mathbf{0}) \tag{3.60}$$

ويؤول السلوك الترموينااميكي بالكامل إلى السلوك الهوكي الصرف: $(\mathbf{u}^0, \theta^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0)$ ، $((\boldsymbol{\varphi}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\kappa}^0) \equiv (\mathbf{0}))$، المحقق للمسألة الهوكية، الصرفة، الموافقة، والتي تُهمل فيها البنية الجزيئية للجسم المعتبر، أما المعادلات، الهوكية، الصرفة، المنفصلة ، فتبقى على حالها، في الوقت الذي يجب فيه استبدال كل f_i^0 بـ f_i وكل و g_i^0 بـ g_i في المسألة الهوكية الصرفة.

الحالة الثانية: $(f_i^0 = 0 , g_i^0 = 0, l = 0)$ و $Y_i \neq 0, Q = 0$: في هذه الحالة، العملية الترموديناميكية، الهوكية الصرفة، هي العملية الصفرية؛

$$(\mathbf{u}^0, \boldsymbol{\varphi}^0, \theta^0, \boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\mu}^0, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\kappa}^0) \equiv (\mathbf{0}) \qquad (3.61)$$

ويؤول السلوك الترموينااميكي بالكامل إلى السلوك الدقيق الصرف: $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \theta', \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$، المحقق للمسألة الدقيقة، الصرفة، الموافقة، والتي تُظهر البنية الدقيقة للجسم المعتبر، أما المعادلات، الدقيقة، الصرفة، المنفصلة، فتبقى على حالها، في الوقت الذي يجب فيه استبدال f_i' بـ f_i و g_i' بـ g_i في المسألة الدقيقة الصرفة.

تعتمد نتائج بحثنا أيضاً على تحويل Fourier التكاملي،الرباعي،المباشر $\boldsymbol{F}_4$، والعكسي $\boldsymbol{F}_4^{-1}$ ([10,11])، ولهذا نعرض فيمايلي مايلزمنا من ذلك.

أ. تحويلا Fourier التكامليان، المضاعفان، من المرتبة الرابعة، المباشر والعكسي:

لنكن $f(\mathbf{x}, t)$ (حيث: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$) دالة حقيقية معرفة ومستمرة في R^4 [4]، ولنفرض، أنها قابلة للمكاملة، بالقيمة المطلقة على R^4. عندئذٍ تحويل Fourier التكاملي، المضاعف من المرتبة الرابعة للتابع $f(\mathbf{x}, t)$، والذي نرمز له بالرمز $\boldsymbol{F}_4[f(\mathbf{x}, t)]$ (أو بالرمز $\bar{f}(\xi, \tau)$)، يكون موجوداً [5]، وبحسب تعريفه، يعطى بـ:

[4] اعتبرنا أن الدالة الحقيقية $f(\mathbf{x}, t)$ معرفة من أجل الجزء السالب للزمن، على نحوٍ تصبح فيه الدالة معرفة ومستمرة في R^4.

[5] الشروط المذكورة أعلاه، التي تحققها الدالة $f(\mathbf{x}, t)$، هي شروط كافية من أجل وجود كل من $\boldsymbol{F}_4[f(\mathbf{x}, t)]$ و $\boldsymbol{F}_4^{-1}[\bar{f}(\xi, \tau)]$ ([10,11]).

$$\boldsymbol{F}_4[f(\mathbf{x},t)] = \bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau) := \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x},t)\, e^{i(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}+\tau t)}\, d\mathbf{x}\, dt \tag{3.62}$$

علماً بأن: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ و $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ و $\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi} = x_k\,\xi_k$

و $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$ و $i = \sqrt{-1}$،

كما تكون عندئذ الدالة $\bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)$، أيضاً معرفة ومستمرة في R^4، وقابلة للمكاملة، بالقيمة المطلقة، على R^4، بالتالي فإن تحويلFourier، التكاملي العكسي، من المرتبة الرابعة، لـ $\bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)$، والذي نرمز له بالرمز $\boldsymbol{F}_4^{-1}[\bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)]$ (أو بالرمز $f(\mathbf{x},t)$[6])، يكون موجوداً، وهو بحسب التعريف يعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{F}_4^{-1}[\bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)] = f(\mathbf{x},t) := \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)\, e^{-i(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}+\tau t)}\, d\boldsymbol{\xi}\, d\tau \tag{3.63}$$

حيث: $d\boldsymbol{\xi} = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$.

ب. مبرهنة الطي لـ Fourier :

لنفـــرض أن: $F(\boldsymbol{\xi},\tau) = \boldsymbol{F}_4[f(\boldsymbol{x},t)]$ و $G(\boldsymbol{\xi},\tau) = \boldsymbol{F}_4[g(\boldsymbol{x},t)]$ يمثلان تحويلي Fourier التكامليين المضاعفين من المرتبة الرابعة للدالتين الحقيقيتين $f(\boldsymbol{x},t)$ و $g(\boldsymbol{x},t)$، على الترتيب، عندئذٍ:

__أولاً:__ $\boldsymbol{F}_4[(f*g)(\boldsymbol{x},t)] = F(\boldsymbol{\xi},\tau)\, G(\boldsymbol{\xi},\tau)$

__ثانياً:__ $\boldsymbol{F}_4^{-1}[F(\boldsymbol{\xi},\tau)\, G(\boldsymbol{\xi},\tau)] = (f*g)(\boldsymbol{x},t)$

حيث الرمز $(f*g)(\boldsymbol{x},t)$ يدل على طي Fourier للتابعين $f(\boldsymbol{x},t)$ و $g(\boldsymbol{x},t)$ على R^4، ويعطى بحسب تعريفه، بالعلاقة:

---

[6] ينتج ذلك عن أن: $\boldsymbol{F}_4^{-1}$ هو التحويل العكسي لـ $\boldsymbol{F}_4$.

$$(f * g)(\mathbf{x}, t) :=$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s)\, g(\mathbf{y}, s)\, d\mathbf{y}\, ds$$

حيث: $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_2)$ و $d\mathbf{y} = dy_1 dy_2 dy_2$.

4. النتائج والمناقشة:

فـي البحـث سـنهتم بالحالـة الثانيـة حيـث سـنفترض هنـا أن كافـة المقـاطع التنسـورية، الفيزيائية، الدقيقة، الصرفة في (E-N:6) الذي يشغل R^3، من الناحية الرياضية، معرَّفة ومعدومـة من أجل جميـع القيم السـالبة لـ t. كما سنفترض أن هذه المقاطع التنسورية المـذكورة، والداخلـة فـي المعـادلات، الدقيقـة، الصـرفة، المسـتقلة (3.58) و(3.59)،تحقـق تلك الشروط التي تسمح بتطبيق تحويل Fourier التكاملي، الرباعي، المباشر F_4، وتلك الشروط التي تسمح لنا أيضاً بتطبيق خواص هذا التحويل. وإذا كانت هذا المقاطع التنسورية، المذكورة عبارة عن توزيعات [10]، فيبقى الكلام السابق صحيحاً؛ أي يمكن تطبيق تحويل Fourier التكـاملي، الربـاعي، المباشـر F_4 علـى المعـادلات، الدقيقـة، الصـرفة، المسـتقلة (3.58) و(3.59)، ويمكن أيضاً تطبيق خواص هذا التحويل، حيث نحصل على النتائج التالية:

تحويلات Fourier للحقول الدقيقة الصرفة:

$$\bar{\sigma}'_{ji} = \frac{2\alpha(-i\xi_s)[(\mu+\alpha)\epsilon_{isn}(-i\xi_j)+(\mu-\alpha)\epsilon_{jsn}(-i\xi_i)]\bar{Y}_n}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)\Delta_4(\xi;\tau)}$$

$$+\frac{2\alpha\epsilon_{ijk}\{(\frac{\nu_0^2}{\tau_0^2}-1)[\xi^2-\sigma_2^2(\tau)]+\eta_0^2\}(-i\xi_k)(-i\xi_s)\bar{Y}_s}{(\beta+2\gamma)[\xi^2+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)]\Delta_4(\xi;\tau)} \tag{4.1}$$

$$+\frac{2\alpha\epsilon_{ijk}[\xi^2-\sigma_2^2(\tau)]\bar{Y}_k}{(\gamma+\varepsilon)\Delta_4(\xi;\tau)} ,$$

$$\bar{\mu}'_{j\,i} = \frac{[\xi^{2} - \sigma_2^2(\tau)]\,[\,(\gamma+\varepsilon)\,(-i\,\xi_j)\bar{Y}_i + (\gamma-\varepsilon)\,(-i\,\xi_i)\bar{Y}_j\,]}{(\gamma+\varepsilon)\,\Delta_4(\xi;\tau)}$$

$$+\frac{2\gamma\,\{(\frac{\nu_0^2}{\tau_0^2}-1)\,[\xi^{2}-\sigma_2^2(\tau)]+\eta_0^2\}(-i\xi_i)\,(-i\,\xi_j)\,(-i\,\xi_s)\,\bar{Y}_s}{(\beta+2\gamma)\,[\xi^{2}+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)\,]\,\Delta_4(\xi;\tau)} \qquad (4.2)$$

$$+\frac{\beta\ \delta_{i\,j}\,(-i\,\xi_s)\,\bar{Y}_s}{(\beta+2\gamma)\,[\xi^{2}+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)\,]}$$

حيث: $\xi = (\xi_i\,\xi_i)^{\frac{1}{2}}$، كما أن:

$$\Delta_4(\xi;\tau) = \xi^4 - [\,\sigma_2^2(\tau) + \sigma_4^2(\tau) + \eta_0^2 - \nu_0^2\,]\,\xi^2 + \\ + \sigma_2^2(\tau)\,[\,\sigma_4^2(\tau) - \nu_0^2\,]$$

و $\sigma_2(\tau) = \dfrac{\tau}{c_2}$ و $\sigma_3(\tau) = \dfrac{\tau}{c_3}$ و $\sigma_4(\tau) = \dfrac{\tau}{c_4}$ و $c_2 = \sqrt{\dfrac{\mu+\alpha}{\rho}}$

و $c_3 = \sqrt{\dfrac{\beta+2\gamma}{J}}$ و $c_4 = \sqrt{\dfrac{\gamma+\varepsilon}{J}}$ و $\tau_0^2 = \dfrac{4\alpha}{\beta+2\gamma}$

و $\nu_0^2 = 2p = \dfrac{4\alpha}{\gamma+\varepsilon}$ و $\eta_0^2 = p\,s$ و $s = \dfrac{2\alpha}{\mu+\alpha}$.

باستخدام تهجين طريقة التراكيب لمعادلات الحركة بالإجهادات والحرارة من نوع Ignaczak مع طريقة التكامل القائمة على تحويل Fourier التكاملي المضاعف من المرتبة الرابعة F_4، سنوجد سلوك Green-Ignaczak الديناميكي الدقيق الصرف، الشاذ للجسم الصلب دقيق الاستقطاب (E–N:6)، الخاضع لحرارة، ويشغل كامل R^3، والذي إجهاداته الخارجية، وحقل درجاته، الخارجي، جميعها معدومة في اللانهاية، وذلك من أجل حالة العزم الحجمي:

$$Y_i = M_0\,e^{-i\,\omega t}\,\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta})\,\delta_{i\,h} \qquad (4.3)$$

حيث: $\omega > 0$ ثابت معطى ويرمز للتردد، و $\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta})$ هو توزيع Dirac على R^3، [10]، والذي يعطى بحسب تعريفه بالعلاقة: $\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}) := \delta(x_1-\zeta_1)\,\delta(x_2-\zeta_2)\,\delta(x_3-\zeta_3)$، حيث $\delta(x_i-\zeta_i)$ هو توزيع Dirac على R و $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ و $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$

كما أن: M_0 هو ثابت موجب. ولنوجد الآن العملية الديناميكية الشاذة، الدقيقة، الصرفة، الموافقة للقوة الحجمية (4.3).

4. أ: سلوك Green-Ignaczak الديناميكي الدقيق، الصرف، الشاذ، الموافق للعزم الحجمي (4.3):

بتعويض(4.3) في (4.2)-(4.1)، وبالأخذ بعين الاعتبار أن[10, 11]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\,\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta})\,d\mathbf{x} = e^{i\,\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\xi}}\,,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,(\tau-\omega)\,t}\,dt = 2\pi\,\delta(\tau-\omega) \tag{4.4}$$

نحصل على:

تحويل Fourier لإجهادات القوة، الدقيقة، الصرفة:

$$\bar{\sigma}'^{(h)}_{ji} = \frac{M_0}{2\pi}\left[\frac{2\alpha(-i\xi_s)[(\mu+\alpha)\epsilon_{ish}(-i\xi_j)+(\mu-\alpha)\epsilon_{jsh}(-i\xi_i)]}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)\,\Delta_4(\xi;\tau)}\right.$$
$$+\frac{2\alpha\,\epsilon_{ijk}\,\{(\frac{v_0^2}{\tau_0^2}-1)[\xi^2-\sigma_2^2(\tau)]+\eta_0^2\}(-i\xi_k)(-i\xi_h)}{(\beta+2\gamma)[\xi^2+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)]\,\Delta_4(\xi;\tau)} \tag{4.5}$$
$$\left.+\frac{2\alpha\,\epsilon_{ijh}[\xi^2-\sigma_2^2(\tau)]}{(\gamma+\varepsilon)\,\Delta_4(\xi;\tau)}\right]\delta(\tau-\omega)\,e^{i\,\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\xi}}\,,$$

$$\bar{\mu}'^{(h)}_{ji} = \frac{M_0}{2\pi}\left[\frac{[\xi^2-\sigma_2^2(\tau)][(\gamma+\varepsilon)(-i\xi_j)\delta_{ih}+(\gamma-\varepsilon)(-i\xi_i)\delta_{jh}]}{(\gamma+\varepsilon)\,\Delta_4(\xi;\tau)}\right.$$
$$+\frac{2\gamma\,\{(\frac{v_0^2}{\tau_0^2}-1)[\xi^2-\sigma_2^2(\tau)]+\eta_0^2\}(-i\xi_i)(-i\xi_j)(-i\xi_h)}{(\beta+2\gamma)[\xi^2+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)]\,\Delta_4(\xi;\tau)} \tag{4.6}$$
$$\left.+\frac{\beta\,\delta_{ij}(-i\xi_h)}{(\beta+2\gamma)[\xi^2+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)]}\right]\delta(\tau-\omega)\,e^{i\,\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\xi}}$$

وبما أن:

$$\frac{1}{\Delta_4(\xi;\tau)}=\frac{1}{\lambda_1^2(\tau)-\lambda_2^2(\tau)}\left[\frac{1}{\xi^2-\lambda_1^2(\tau)}-\frac{1}{\xi^2-\lambda_2^2(\tau)}\right], \tag{4.7}$$

$$\frac{\xi^2-\sigma_2^2(\tau)}{\Delta_4(\xi;\tau)}=\frac{A_2(\tau)}{\xi^2-\lambda_1^2(\tau)}+\frac{A_1(\tau)}{\xi^2-\lambda_2^2(\tau)}\ , \tag{4.8}$$

$$\frac{(\frac{\nu_0^2}{\tau_0^2}-1)\,[\xi^2-\sigma_2^2(\tau)]+\eta_0^2}{[\xi^2+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)]\,\Delta_4(\xi;\tau)}=\frac{\beta+2\gamma}{\gamma+\varepsilon}\left[\frac{C_1(\tau)}{\xi^2-\lambda_1^2(\tau)}+\frac{C_2(\tau)}{\xi^2-\lambda_2^2(\tau)}+\frac{C_3(\tau)}{\xi^2-\lambda_3^2(\tau)}\right] \tag{4.9}$$

حيث: $\lambda_1^2(\tau)$ و $\lambda_2^2(\tau)$ هي جذور كثير الحدود:

$$\Delta_4(\lambda;\tau)=\lambda^4-[\sigma_2^2(\tau)+\sigma_4^2(\tau)+\eta_0^2-\nu_0^2]\,\lambda^2+$$
$$+\sigma_2^2(\tau)\,[\sigma_4^2(\tau)-\nu_0^2]$$

و: $\lambda_3^2(\tau)=\sigma_3^2(\tau)-\tau_0^2$

كما أن:

$$A_1(\tau)=\frac{\sigma_2^2(\tau)-\lambda_2^2(\tau)}{\lambda_1^2(\tau)-\lambda_2^2(\tau)}\ ,\quad A_2(\tau)=\frac{\sigma_2^2(\tau)-\lambda_1^2(\tau)}{\lambda_2^2(\tau)-\lambda_1^2(\tau)}$$

$$C_1(\tau)=\frac{A_2(\tau)}{\lambda_1^2(\tau)}\ ,\quad C_2(\tau)=\frac{A_1(\tau)}{\lambda_2^2(\tau)}\ ,\quad C_3(\tau)=-\frac{\sigma_2^2(\tau)}{\lambda_1^2(\tau)\,\lambda_2^2(\tau)}$$

فبتعويض العلاقات (4.9)-(4.7) في التحولات (4.6)- (4.5)، ومن ثم بتطبيق تحويل Fourier التكاملي، الرباعي العكسي $\boldsymbol{F}_4^{-1}$، على العلاقات الناتجة، وباستخدام خاصة تصفية توزيع Dirac، التي تتمثل بالعلاقة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt\ =\ f(t_0) \tag{4.10}$$

والعلاقات $[10,11]$:

$$\boldsymbol{F}_4^{-1}[(-i\,\xi_j)\,\bar{f}(\boldsymbol{\xi},\tau)]=\partial_j f(\boldsymbol{x},t) \tag{4.10}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta})\cdot\xi}}{\xi^2-a^2}\,d\boldsymbol{\xi}=2\pi^2\frac{e^{i\,aR}}{R} \tag{4.11}$$

مع العلم أن: $\partial_j := \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ ، و $R := |\mathbf{x} - \boldsymbol{\zeta}|$ ، وحيث a عدد حقيقي أو عقدي، نحصل بالنتيجة على:

- الإجهادات الدقيقة، الصرفة، الشاذة، التالية:

$$\sigma'^{(h)}_{ji} = \frac{M_0\, p\; e^{-i\,\omega t}}{4\,\pi}\Big\{\epsilon_{i\,j\,k}\;\partial^2_{k\,h}\pounds_1 + \epsilon_{i\,j\,h}\,\Gamma_1 + \tag{4.12}$$

$$+\frac{1}{(\mu+\alpha)\,(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}[\,(\mu+\alpha)\epsilon_{i\,s\,h}\;\partial_j + (\mu-\alpha)\,\epsilon_{j\,s\,h}\;\partial_i\,]\partial_s F_1\Big\},$$

$$\mu'^{(h)}_{ji} = \frac{M_0\,e^{-i\,\omega t}}{4\pi}\left\{\partial_h\left[\frac{2\gamma}{\gamma+\varepsilon}\,\partial^2_{i\,j}\,\pounds_1 + \frac{\beta\;\delta_{i\,j}}{\beta+2\gamma}\frac{e^{\,i\,\lambda_3 R}}{R}\right] + \tag{4.13}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\gamma+\varepsilon}[\;(\gamma+\varepsilon)\,\delta_{i\,h}\partial_j + \;(\gamma-\varepsilon)\;\;\delta_{j\,h}\partial_i\,]\;\Gamma_1\right\},$$

حيث:

$$\pounds_1 = C_1\frac{e^{\,i\,\lambda_1 R}}{R} + C_2\frac{e^{\,i\,\lambda_2 R}}{R} + C_3\frac{e^{\,i\,\lambda_3 R}}{R}\;,$$

$$\Gamma_1 = A_2\frac{e^{\,i\,\lambda_1 R}}{R} + A_1\frac{e^{\,i\,\lambda_2 R}}{R}\quad,\quad F_1 = \frac{e^{\,i\,\lambda_1 R} - e^{\,i\,\lambda_2 R}}{R},$$

كمـــــــــــا أن: $\sigma_2 = \sigma_2(\omega)$ و $\sigma_3 = \sigma_3(\omega)$ و $\sigma_4 = \sigma_4(\omega)$ و $\lambda_1 = \lambda_1(\omega)$ و $\lambda_2 = \lambda_2(\omega)$ و $\lambda_3 = \lambda_3(\omega)$ و $A_1 = A_1(\omega)$ و $A_2 = A_2(\omega)$ و $C_1 = C_1(\omega)$ و $C_2 = C_2(\omega)$ و $C_3 = C_3(\omega)$.

أمـا انفعـالات القـوة، المتممـة، الشـاذة، الصـرفة $\gamma'^{(h)}_{ji}$، وانفعـالات العـزم، المتممـة، الشاذة، الصرفة $\kappa'^{(h)}_{ji}$، فنحصل عليها، بحسب طريقة التراكيب في وصف Ignaczak، بتعـويض(4.12) و(4.13)، فـي العلاقـات(3.53)، وفقـاً لمـايلي. مـن (4.12) و(4.13)، لدينا:

$$\sigma'^{(h)}_{(j\,i\,)} = \frac{\mu\,M_0\,p\;e^{-i\,\omega t}}{4\,\pi\;(\mu+\alpha)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\;(\epsilon_{i\,s\,h}\;\partial_j + \epsilon_{j\,s\,h}\;\partial_i\,)\;\partial_s F_1\;, \tag{4.14}$$

$$\sigma'^{(h)}_{[ji]} = \frac{M_0\, p\, e^{-i\omega t}}{4\pi} \left\{ \epsilon_{ijk}\, \partial^2_{kh} \pounds_1 + \epsilon_{ijh} \Gamma_1 + \right. \tag{4.15}$$

$$\left. + \frac{\alpha}{(\mu+\alpha)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} (\epsilon_{ish}\, \partial_j - \epsilon_{jsh}\, \partial_i)\, \partial_s F_1 \right\},$$

$$\mu'^{(h)}_{(ji)} = \frac{M_0\, e^{-i\omega t}}{4\pi} \left\{ \partial_h \left[\frac{2\gamma}{\gamma+\varepsilon} \partial^2_{ij} \pounds_1 + \frac{\beta\ \delta_{ij}}{\beta+2\gamma} \frac{e^{i\lambda_3 R}}{R} \right] + \right. \tag{4.16}$$

$$\left. + \frac{\gamma}{\gamma+\varepsilon} (\delta_{ih}\partial_j + \delta_{jh}\partial_i)\, \Gamma_1 \right\},$$

$$\mu'^{(h)}_{[ji]} = \frac{M_0\, e^{-i\omega t}}{4\pi} \frac{\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} (\delta_{ih}\partial_j - \delta_{jh}\partial_i)\, \Gamma_1, \tag{4.17}$$

$$\mu'^{(h)}_{kk} = \frac{M_0\, e^{-i\omega t}}{4\pi} \partial_h \left[\frac{2\gamma}{\gamma+\varepsilon} (\nabla^2 \pounds_1 + \Gamma_1) + \frac{3\beta}{\beta+2\gamma} \frac{e^{i\lambda_3 R}}{R} \right] \tag{4.18}$$

وبما أن $[9,10]$:

$$\nabla^2\left(\frac{e^{iaR}}{R}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) - a^2 \frac{e^{iaR}}{R} \tag{4.19}$$

$$A_1 + A_2 = 1 \quad , \quad C_1 + C_2 + C_3 = 0 \quad , \tag{4.20}$$

$$-\frac{2\gamma}{\gamma+\varepsilon} \lambda_3^2 C_3 + \frac{3\beta}{\beta+2\gamma} = \frac{3\beta+2\gamma}{\beta+2\gamma} \tag{4.21}$$

فينتج عن ذلك وعن العلاقة (4.18) أن:

$$\mu'^{(h)}_{kk} = \frac{M_0\, e^{-i\omega t}}{4\pi} \frac{(3\beta+2\gamma)}{(\beta+2\gamma)} \partial_h \left(\frac{e^{i\lambda_3 R}}{R} \right) \tag{4.22}$$

الآن، بتعويض (4.14) و (4.15) في العلاقة الأولى من (3.53) و (4.16) و(4.17) و(4.22) في العلاقة الثانية من (3.53)، نحصل على انفعالات القوة، المتممة، الشاذة، الصرفة $\gamma'^{(h)}_{ji}$، وانفعالات العزم، المتممة، الشاذة، الصرفة $\kappa'^{(h)}_{ji}$، التالية:

$$\gamma'^{(h)}_{ji} = \frac{M_0 e^{-i\omega t}}{4\pi J c_4^2} \left(\epsilon_{ijk}\, \partial^2_{kh} \pounds_1 + \epsilon_{ijh}\, \Gamma_1 + \right. \\ \left. + \frac{s}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}\, \epsilon_{ish}\, \partial^2_{js} F_1 \right), \tag{4.23}$$

$$\kappa'^{(h)}_{ji} = \frac{M_0 e^{-i\omega t}}{4\pi J c_4^2}\, \partial_j \left(\partial^2_{ih} \pounds_1 + \delta_{ih}\, \Gamma_1 \right), \tag{4.24}$$

أخيراً، الإزاحات والدوارانات، المتممة، الشاذة، الصرفة، الموافقة، تنتج بحسب طريقة التراكيب في وصف Ignaczak، عن تحليل الشروط الابتدائية(3.29)-(3.25)، بمساعدة الحلول، المتممة الصرفة، الشاذة (4.12) و(4.13)، وعن العلاقات (3.31) و(3.32)، بمساعدة العلاقات (4.12) و(4.13) ، باتباع مايلي. بتحليل الشروط الابتدائية$_1$(3.26) و $_1$(3.28) ، بمساعدة الحل، المتمم، الصرف، الشاذ (4.12) ومشتقه الزمني (من أجل لحظة البدء $t = 0$)، نصل إلى أن:

$$g'^{(h)}_j = -i\omega f'^{(h)}_j \tag{4.25}$$

حيث:

$$f'^{(h)}_j = \frac{M_0\, p}{4\pi (\mu + \alpha)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}\, \epsilon_{jsh}\, \partial_s F_1 \tag{4.26}$$

أما بتحليل الشروط الابتدائية $_2$(3.26) و $_2$(3.28) ، بمساعدة الحل، المتمم، الصرف، الشاذ (4.13) ومشتقه الزمني (من أجل لحظة البدء $t = 0$)، نصل إلى أن:

$$\chi'^{(h)}_j = -i\omega k'^{(h)}_j \tag{4.27}$$

حيث:

$$k'^{(h)}_j = \frac{M_0}{4\pi J c_4^2} \left(\partial^2_{jh} \pounds_1 + \delta_{jh}\, \Gamma_1 \right), \tag{4.28}$$

الآن، ينتج عن العلاقة (4.12) ، أن:

$$\hat{R}'^{(h)}_i = \sigma'^{(h)}_{ji,j} = \frac{M_0\, p\, e^{-i\omega t}}{4\pi}\, \epsilon_{ijh}\, \partial_j \left(\Gamma_1 + \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \nabla^2 F_1 \right) \tag{4.29}$$

وبما أن:

$$\Gamma_1+\frac{1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\nabla^2 F_1=-\frac{\sigma_2^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}F_1 \tag{4.30}$$

فتأخذ العلاقة (4.29) الشكل التالي:

$$\hat{R}_i'^{(h)}=-\frac{M_0\,p\;\sigma_2^2 e^{-i\,\omega\,t}}{4\,\pi\,(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\in_{i\;j\;h}\partial_j F_1 \tag{4.31}$$

كما ينتج عن (4.12) و(4.13)، وعن العلاقات (4.19) و(4.20)، والعلاقات:

$$-\frac{2\gamma}{\gamma+\varepsilon}\lambda_3^2 C_3+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}=1 \tag{4.32}$$

$$\frac{1}{4\pi}\nabla^2(\frac{1}{R})=-\;\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}), \tag{4.33}$$

$$\in_{i\,j\,k}\in_{i\,s\,n}=\delta_{js}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{ks}\;,\;\in_{i\,j\,k}\in_{i\,j\,n}=2\delta_{kn}\;, \tag{4.34}$$

أن:

$$J^{-1}M_i'^{(h)}=J^{-1}[\hat{M}_i'^{(h)}+Y_i^{(h)}]=$$
$$J^{-1}[\in_{i\;j\;k}\sigma_{j\,k}'^{(h)}+\;\mu_{j\,i\,,\,j}'^{(h)}+Y_i^{(h)}]=$$
$$=\frac{M_0 e^{-i\,\omega t}}{4\,\pi\,J}\left\{\partial_{i\,h}^2[-\Gamma_1-2p\pounds_1+\frac{p\,s}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}F_1+\frac{e^{\,i\,\lambda_3 R}}{R}]+\right. \tag{4.35}$$
$$\left.+\,\delta_{i\,h}[\nabla^2\Gamma_1-\nabla^2(\frac{1}{R})-2p\,\Gamma_1-\frac{p\,s}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\nabla^2 F_1]\right\},$$

هذا من جهة. ومن جهة أخرى باستخدام العلاقات (4.19) و$_1$(4.20)، يمكن بسهولة اثبات أن:

$$-\Gamma_1+\frac{p\,s}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}F_1+\frac{e^{\,i\,\lambda_3 R}}{R}=-(\sigma_4^2-2p)\pounds_1\,, \tag{4.36}$$

$$\nabla^2\Gamma_1-\nabla^2(\frac{1}{R})-\frac{p\,s}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\nabla^2 F_1=-(\sigma_4^2-2p)\,\Gamma_1 \tag{4.37}$$

الآن، بتعويض (4.36) و(4.37) في (4.35)، نحصل على العلاقة التالية:

$$J^{-1} M_i'^{(h)} = -\frac{M_0 \sigma_4^2 e^{-i\omega t}}{4\pi J}\left(\partial_{ih}^2 £_1 + \delta_{ih}\Gamma_1\right), \tag{4.38}$$

أخيراً، بتعويض (4.25) و(4.26) و (4.31) في العلاقة (3.54)، من ثم بالاستفادة من علاقة الطي:

$$t \,\hat{*}\, e^{-i\omega t} = \omega^{-2}(1 - i\omega t - e^{-i\omega t}) \tag{4.39}$$

نحصل بعد الاختصار على الإزاحات المتممة، الصرفة، الشاذة، الموافقة، التالية:

$$\begin{aligned} u_i'^{(h)} &= g_i'^{(h)}\, t + f_i'^{(h)} + \rho^{-1}[t \,\hat{*}\, \hat{R}_i'^{(h)}] = \\ &= \frac{M_0\, p\, e^{-i\omega t}}{4\pi(\mu+\alpha)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \epsilon_{ish}\, \partial_s F_1, \end{aligned} \tag{4.40}$$

أيضاً، بتعويض (4.27) و(4.28) و(4.38) في العلاقة (3.55)،من ثم بالاستفادة من علاقة الطي (4.39)، نحصل بعد الاختصار على الدورانات المتممة، الصرفة، الشاذة، الموافقة:

$$\begin{aligned} \varphi_i'^{(h)} &= \chi_i'^{(h)}\, t + k_i'^{(h)} + J^{-1}[t \,\hat{*}\, M_i'^{(h)}] = \\ &= \frac{M_0 e^{-i\omega t}}{4\pi J c_4^2}\left(\partial_{ih}^2 £_1 + \delta_{ih}\Gamma_1\right), \end{aligned} \tag{4.41}$$

تمثل: $[\mathbf{u}'^{(h)}, \boldsymbol{\varphi}'^{(h)}, \boldsymbol{\sigma}'^{(h)}, \boldsymbol{\mu}'^{(h)}, \boldsymbol{\gamma}'^{(h)}, \boldsymbol{\kappa}'^{(h)}]$ ، المعطاة بالعلاقات: (4.40) و(4.41) و(4.12) و(4.13) و(4.23) و(4.24) ، تمثل عملية Green-Ignaczak، الديناميكية، الدقيقة الصرفة، الشاذة، الموافقة للعزم الحجمي المركز في النقطة ζ، المتغير توافقياً مع الزمن، والمعطى بالعلاقة:(4.3).

4. ب: صيغ Green-Ignaczak ، الدقيقة، الصرفة، الموافقة لعزم حجمي نظامي متغير توافقياً مع الزمن:

فيمايلي سنناقش صيغ Green-Ignaczak ، الدقيقة الصرفة، الموافقة للعزم الحجمي النظامي، التالي، المتغير توافقياً مع الزمن بتردد $\omega > 0$:

$$Y_i(\mathbf{x}, t) = e^{-i\omega t}\, Y_i(\mathbf{x}) \tag{4.42}$$

ولهذا الغرض، في الفقرة السابقة، سنختار : $M_0 = 1$ ، ومن ثم سنرمز بـ $\bar{\sigma}_{ji}'^{(h)}(\xi, \tau; \zeta)$ وبـ $\sigma_{ji}'^{(h)}(\mathbf{x}, t; \zeta)$ للطرف الأيسر للعلاقة (4.5) والعلاقة (4.12)، على الترتيب، وبـ $\bar{\mu}_{ji}'^{(h)}(\xi, \tau; \zeta)$ وبـ $\mu_{ji}'^{(h)}(\mathbf{x}, t; \zeta)$ للطرف الأيسر للعلاقة (4.6) والعلاقة (4.13)،

على الترتيب. بتطبيق تحويل Fourier الرباعي $\boldsymbol{F}_4$ عل طرفي العلاقة (4.42)، من ثم بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة الثانية في (4.4)، نجد:

$$\bar{Y}_i(\xi,\tau) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \bar{Y}_i(\xi)\,\delta(\tau-\omega) \qquad (4.43)$$

حيث هنا:

$$\bar{Y}_i(\xi) = \boldsymbol{F}_3[Y_i(\mathbf{x})] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\,i\,\mathbf{x}\cdot\xi}\, Y_i(\mathbf{x})\, d\,\mathbf{x} \qquad (4.43)$$

والتي حسب خاصة تصفية Delta Dirac تكتب بالشكل:

$$\bar{Y}_i(\xi) = \boldsymbol{F}_3[Y_i(\mathbf{x})] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\,i\,\mathbf{x}\cdot\xi}\, Y_i(\mathbf{x})\, d\,\mathbf{x} \qquad (4.43)$$

$$\bar{Y}_i(\xi) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{F}_4[Y_i(\mathbf{x})\,\delta(t)] = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, \overline{[Y_i(\mathbf{x})\,\delta(t)]} \qquad (4.44)$$

بالتعويض في التحويلتين (4.1) و(4.2)، نجد:

تحويل Fourier لإجهادات القوة، الدقيقة، الصرفة:

$$\bar{\sigma}'_{j\,i} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2\alpha(-i\,\xi_s)[(\mu+\alpha)\epsilon_{i\,s\,n}(-i\,\xi_j)+(\mu-\alpha)\epsilon_{j\,s\,n}(-i\xi_i)]\bar{Y}_n(\xi)}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)\,\Delta_4(\xi;\tau)} \right.$$
$$+\frac{2\,\alpha\,\epsilon_{i\,j\,k}\,\{(\frac{v_0^2}{\tau_0^2}-1)\,[\xi^2-\sigma_2^2(\tau)]+\eta_0^2\}(-i\xi_k)\,(-i\,\xi_s)\,\bar{Y}_s(\xi)}{(\beta+2\gamma)\,[\xi^2+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)]\,\Delta_4(\xi;\tau)} \qquad (4.45)$$
$$\left. +\frac{2\,\alpha\,\epsilon_{i\,j\,k}\,[\xi^2-\sigma_2^2(\tau)]\,\bar{Y}_k(\xi)}{(\gamma+\varepsilon)\,\Delta_4(\xi;\tau)} \right] \delta(\tau-\omega)\ ,$$

$$\bar{\mu}'_{j\,i} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{[\xi^{2} - \sigma_2^2(\tau)][(\gamma+\varepsilon)(-i\,\xi_j)\bar{Y}_i(\boldsymbol{\xi}) + (\gamma-\varepsilon)(-i\,\xi_i)\bar{Y}_j(\boldsymbol{\xi})]}{(\gamma+\varepsilon)\,\Delta_4(\xi\,;\tau)} \right.$$

$$+ \frac{2\gamma\ \{(\frac{v_0^2}{\tau_0^2}-1)\,[\xi^{2}-\sigma_2^2(\tau)]+\eta_0^2\}(-i\xi_i)\,(-i\,\xi_j)\,(-i\,\xi_s)\,\bar{Y}_s(\boldsymbol{\xi})}{(\beta+2\gamma)\,[\,\xi^{2}+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)\,]\,\Delta_4(\xi\,;\tau)} \tag{4.46}$$

$$\left. + \frac{\beta\ \delta_{i\,j}\,(-i\,\xi_s)\,\bar{Y}_s(\boldsymbol{\xi})}{(\beta+2\gamma)\,[\,\xi^{2}+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)\,]} \right\} \delta(\tau-\omega)$$

واللتان تكتبان بالشكل التالي:

$$\bar{\sigma}'_{j\,i} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2\alpha(-i\,\xi_s)[(\mu+\alpha)\epsilon_{i\,s\,h}\,(-i\,\xi_j)+(\mu-\alpha)\epsilon_{j\,s\,h}\,(-i\xi_i)]}{(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon)\,\Delta_4(\xi\,;\tau)} \right.$$

$$+ \frac{2\alpha\,\epsilon_{i\,j\,k}\ \{(\frac{v_0^2}{\tau_0^2}-1)\,[\xi^{2}-\sigma_2^2(\tau)]+\eta_0^2\}(-i\xi_k)\,(-i\,\xi_h)}{(\beta+2\gamma)\,[\,\xi^{2}+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)\,]\,\Delta_4(\xi\,;\tau)} \tag{4.47}$$

$$\left. + \frac{2\alpha\,\epsilon_{i\,j\,h}\ [\xi^{2}-\sigma_2^2(\tau)]}{(\gamma+\varepsilon)\,\Delta_4(\xi\,;\tau)} \right] \bar{Y}_h(\boldsymbol{\xi})\ \delta(\tau-\omega)\ ,$$

$$\bar{\mu}'_{j\,i} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{[\xi^{2} - \sigma_2^2(\tau)][(\gamma+\varepsilon)(-i\,\xi_j)\,\delta_{i\,h} + (\gamma-\varepsilon)(-i\,\xi_i)\,\delta_{j\,h}\,]}{(\gamma+\varepsilon)\,\Delta_4(\xi\,;\tau)} \right.$$

$$+ \frac{2\gamma\ \{(\frac{v_0^2}{\tau_0^2}-1)\,[\xi^{2}-\sigma_2^2(\tau)]+\eta_0^2\}(-i\xi_i)\,(-i\,\xi_j)\,(-i\,\xi_h)}{(\beta+2\gamma)\,[\,\xi^{2}+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)\,]\,\Delta_4(\xi\,;\tau)} \tag{4.48}$$

$$\left. + \frac{\beta\ \delta_{i\,j}\,(-i\,\xi_h)}{(\beta+2\gamma)\,[\,\xi^{2}+\tau_0^2-\sigma_3^2(\tau)\,]} \right\} \bar{Y}_h(\boldsymbol{\xi})\ \delta(\tau-\omega)$$

لنلاحظ الآن، أنه ينتج عن العلاقات (4.43) و(4.44)، أن (4.47) و(4.48) تكتبان بالشكل:

$$\bar{\sigma}'_{j\,i}\,(\xi,\tau)=(2\pi)^2\bar{\sigma}'^{(h)}_{j\,i}(\xi,\tau;\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ \overline{[Y_h(\mathbf{x})\delta(t)]}\ , \tag{4.49}$$

$$\bar{\mu}'_{j\,i}\,(\xi,\tau)=(2\pi)^2\,\bar{\mu}'^{(h)}_{j\,i}(\xi,\tau;\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ \overline{[Y_h(\mathbf{x})\delta(t)]}\ , \tag{4.50}$$

حيث هنا: $M_0=1$.

بتطبيق مبرهنة الطي لـ Fourier على طرفي كلٍ من (4.49) و(4.50)، نحصل على:

$$\begin{aligned}\sigma'_{j\,i}\,(\mathbf{x},t)&=(2\pi)^2\boldsymbol{F}_4^{-1}\{\bar{\sigma}'^{(h)}_{j\,i}(\xi,\tau;\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ \overline{[Y_h(\mathbf{x})\delta(t)]}\}=\\&=(2\pi)^2\,\{\,\sigma'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x}\,,t\,;\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ *\ [Y_h(\mathbf{x})\delta(t)\,]\,\}\,,\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mu}'_{j\,i}\,(\mathbf{x},t)&=(2\pi)^2\boldsymbol{F}_4^{-1}\{\,\bar{\mu}'^{(h)}_{j\,i}(\xi,\tau;\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ \overline{[Y_h(\mathbf{x})\delta(t)]}\}=\\&=(2\pi)^2\,\{\,\mu'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x}\,,t\,;\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ *\ [Y_h(\mathbf{x})\delta(t)\,]\,\}\,,\end{aligned} \tag{4.52}$$

حيث:

$$\begin{aligned}&\sigma'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x}\,,t\,;\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ *\ [Y_h(\mathbf{x})\delta(t)\,]=\\&=\frac{1}{4\,\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma'^{(h)}_{j\,i}(\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,,\,t-s\ \ ;\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ Y_h(\mathbf{y})\ \delta(s\,)\ d\,\mathbf{y}\,d\,s\,,\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}&\mu'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x}\,,t\,;\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ *\ [Y_h(\mathbf{x})\delta(t)\,]=\\&=\frac{1}{4\,\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu'^{(h)}_{j\,i}(\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,,\,t-s\ \ ;\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ Y_h(\mathbf{y})\ \delta(s\,)\ d\,\mathbf{y}\,d\,s\,,\end{aligned} \tag{4.54}$$

وبتطبيق خاصة التصفية (4.10)، تأخذ العلاقتان (4.53) و (4.54) الشكل التالي:

$$\begin{aligned}&\sigma'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x}\,,t\,;\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ *\ [Y_h(\mathbf{x})\delta(t)\,]=\\&=\frac{1}{4\,\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma'^{(h)}_{j\,i}(\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,,\,t\ ;\,\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ Y_h(\mathbf{y})\ d\,\mathbf{y}\,,\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}&\mu'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x}\,,t\,;\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ *\ [Y_h(\mathbf{x})\delta(t)\,]=\\&=\frac{1}{4\,\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu'^{(h)}_{j\,i}(\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,,\,t\ ;\,\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{0})\ Y_h(\mathbf{y})\ d\,\mathbf{y}\,,\end{aligned} \tag{4.56}$$

وبذلك تصبح صيغ Green-Ignaczak ، الدقيقة الصرفة، لأجل الإجهادات الدقيقة الصرفة، والموافقة للعزم الحجمي (4.42)، بالشكل التالي:

$$\sigma'_{j\,i}\,(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma'^{(h)}_{j\,i}(\,\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta}\,,\,t\ ;\mathbf{0}\,)\ Y_h(\boldsymbol{\zeta})\ d\,\boldsymbol{\zeta}\,, \tag{4.57}$$

$$\mu'_{j\,i}(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta},\,t\,;\mathbf{0})\,Y_h(\boldsymbol{\zeta})\,d\boldsymbol{\zeta}\,, \tag{4.58}$$

لكن بحسب خواص توابع Green: $\sigma'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x},t\,;\boldsymbol{\zeta})$ و $\mu'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x},t\,;\boldsymbol{\zeta})$، فإن:

$$\sigma'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta},\,t\,;\mathbf{0})=\sigma'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x},t\,;\boldsymbol{\zeta})\ ,\quad \mu'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\zeta},\,t\,;\mathbf{0})=\mu'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x},t\,;\boldsymbol{\zeta}) \tag{4.59}$$

وتصبح بذلك صيغ Green-Ignaczak، الدقيقة الصرفة، لأجل الإجهادات الدقيقة الصرفة، والمتوافقة مع العزم الحجمي (4.42)، بالشكل:

$$\sigma'_{j\,i}(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x},t\,;\boldsymbol{\zeta})\,Y_h(\boldsymbol{\zeta})\,d\boldsymbol{\zeta}\,, \tag{4.60}$$

$$\mu'_{j\,i}(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu'^{(h)}_{j\,i}(\mathbf{x},t\,;\boldsymbol{\zeta})\,Y_h(\boldsymbol{\zeta})\,d\boldsymbol{\zeta}\,, \tag{4.61}$$

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولا) الاستنتاجات:

من أجل الجسم الترموديناميكي الصلب دقيق الاستقطاب (E−N:6)، غير المحدود، والذي كلاً من إجهاداته وحرارته، الخارجية، معدومة، أوجدنا: I) سلوك Green−Ignaczak ،الدقيق الصرف، الشاذ، الموافق للعزم الحجمي المركز والمتغير توافقياً مع الزمن: (4.3) ، II) صيغ Green−Ignaczak ، الدقيقة الصرفة، لأجل الإجهادات الدقيقة الصرفة، والمتوافقة مع العزم الحجمي النظامي (4.42).

ثانياً) المقترحات:

يمكن أن نختم هذا البحث باقتراح أربع مسائل للمناقشة، هي التالية:

المسألة الأولى: استنتاج الجزء المتبقي من صيغ Green-Ignaczak التي تعطي باقي حقول Ignaczak ، الدقيقة الصرفة: $(\mathbf{u}', \boldsymbol{\varphi}', \boldsymbol{\gamma}', \boldsymbol{\kappa}')$، والمتوافقة مع العزم الحجمي (4.42).

المسألة الثانية: استنتاج صيغ Green التي تعطي العمليتان الترموديناميكيتان، النظاميتان، الهوكية والدقيقة، المتممة، لأجل أي حالة من أحد الشكلين الآتيين:

$$X_i = e^{-i\omega t} X_i(\mathbf{x}) \;,\; Y_i = 0 \;,\; Q = 0 \qquad (5.1)$$

$$X_i = 0 \;,\; Y_i = 0 \;,\; Q = e^{-i\omega t} Q(\mathbf{x}) \qquad (5.2)$$

حيث: (X_1, X_2, X_3) متجه القوة الحجمية المؤثرة في الجسم، و $\omega > 0$ ثابت، و Q المصادر الحرارية في الجسم المعتبر.

المسألة الثالثة: دراسة وجود الحل المعمم لمسألتي Ignaczak الهوكية والدقيقة ، المتممة للجسم الصلب دقيق الاستقطاب، والمحدود.

المسألة الرابعة: دراسة وحدانية الحل لكلٍ من مسألتي Ignaczak الهوكية والدقيقة ، المتممة للجسم الصلب دقيق الاستقطاب، والمحدود.

المراجع

[1] – Nabil Ali, **2021** – Role of pure Hooke differential equations in finding pure Hooke singular solutions, related to the concentrated heat sources in unbounded micropolar elastic solid , Journal of Al-Baath University,Vol.43, Nr.11, p. 31-50.

[2] – Nabil Ali and Mountajab Al-Hasan, **2019** – The behavior of unbounded solid with microstructure using the pure Hooke and micropolar differential equations in the cases of body moments and heat sources , Journal of Al-Baath University,Vol.41, Nr.19, p. 73-94.

[3] – Al-Hasan , M. & Ali , N. , **2019** – Singular behavior superpo-sition for unbounded elastic body with microstructure governed by differential equations of stresses and temperature unknowns , Journal of Al-Baath University,Vol.41, Nr.10, p. 119-138.

[4] – Al-Hasan , M., Dyszlewicz , J. **(2014)** Coupled Dynamic Micropolar Problems of Thermoelasticity: Stress–Temperature Equations of Motion of Ignaczak Type. In: Hetnarski R.B. (eds) Encyclopedia of Thermal Stresses. Springer, Dordrecht.

[5] – Al -Hasan , M. , **2016** – Studying the behavior of unbounded micropolar elastic body without external stresses, Journal of Al-Baath University, Vol.38, Nr.1, p.35-64.

[6] –Mohammad , K & Al –Hasan , M, **2013** – Studying the isotherm of the complementary Ignaczak solutions for the (E–N:6) micropolar body occupying $\Re^3$, Journal of Al–Baath University,Vol.35, Nr.1, p.205–236.

[7] – Al –Hasan , M. , **2007** – Superposition method for stress–temperature equations of motion , Journal of Al–Baath University,
Vol.29, Nr.5, p.53–78.

[8]– Al–Hasan,M. , Dyszlewicz,J , **2001** – Stress–temperature equations of motion of Ignaczak type for a three – dimensional problem of micropolar thermoelasticity , Journal of Thermal Stresesses ,24, p. 709 –722.

[9]– Dyszlewicz , J., **2004** – Micropolar Theory of Elasticity , in : Series Lectures. Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.15, 356 p, Springer .

[10] – Gerrit van Dijk , **2013** – Distribution Theory , De Gtuyter Graduate Lectures, Deutsche Nationalbibliothek , Berlin.

[11] – Debnath, L& Bhatta , D , **2007** – Integral Transforms and their Applications, (Second Edition), CRC Press, Boca Raton, Florida.

[12] – Ignaczak , J , **1971** – Tensorial equations of motion for elastic materials with microstructure , in : Trends of

Elasticity and Thermoelasticity, Witold Nowacki Ann.Volume , Wolters−Noordhoff Groningen , 90 – 111;

[13] –Nowacki, W , **1986** − Theory of Asymmetric Elasticity , Warsaw , PWN.

[14] – Eringen , A . C , **1966** − Linear theory of micropolar elasticity, J.Math. Mech., 15 , 909 – 930.